

Επαναληπτικές Μέθοδοι

3.1) Τύπος (2) υπό μορφή συνιστωσών για τον δοσμένο πίνακα **A**:

$$(2): \quad x^{(k+1)} = (1 - \omega)x^{(k)} + \omega(Lx^{(k)} + Ux^{(k+1)} + D^{-1}d)$$

το οποίο υπό μορφή συνιστωσών γράφεται ως εξής:

$$x_i^{(k+1)} = (1 - \omega)x_i^{(k)} + \omega\left[\sum_{j=1:i-1} (-a_{ij}/a_{ii})x_j^{(k)} + \sum_{j=i+1:n} (-a_{ij}/a_{ii})x_j^{(k+1)} + d_i/a_{ii}\right],$$
$$i = 1, 2, \dots, n$$

και λαμβάνοντας υπόψη την ειδική δομή του πίνακα **A** (τριδιαγώνιος) προκύπτει ότι:

$$x_i^{(k+1)} = (1 - \omega)x_i^{(k)} + \omega\left[(-a_{i,i-1}/a_{ii})x_{i-1}^{(k)} + (-a_{i,i+1}/a_{ii})x_{i+1}^{(k+1)} + d_i/a_{ii}\right],$$
$$i = 1, 2, \dots, n$$

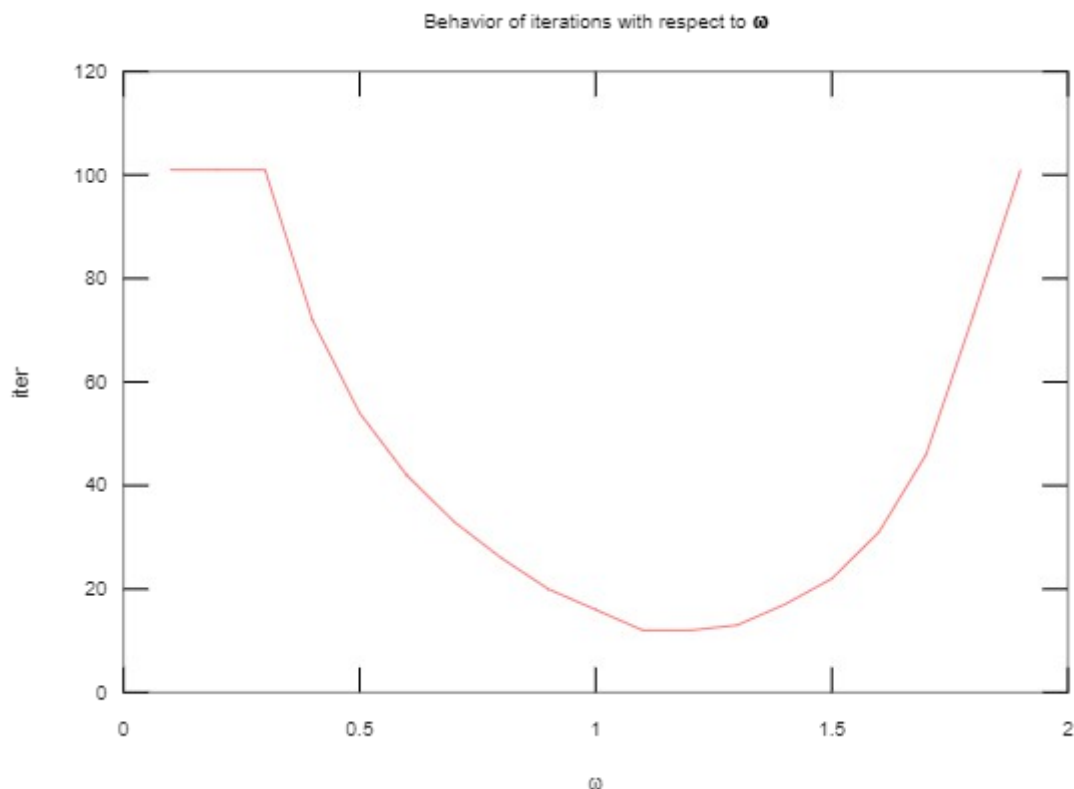
3.2) (Κώδικας)

Υλοποίηση – Πειραματική μελέτη

1) (Κώδικας)

2) Στιγμιότυπο δεδομένων εισόδου: $a=1$, $b=2$, $n=10$

α)



Από την παραπάνω γραφική παράσταση παρατηρούμε ότι αρχικά δεν επιτυγχάνεται σύγκλιση εντός του ορίου των 100 επαναλήψεων, αλλά στην συνέχεια το απαιτούμενο πλήθος επαναλήψεων μειώνεται σταδιακά, καθώς αυξάνουμε το ω , μέχρις ότου να φτάσει μια ελάχιστη τιμή (12 επαναλήψεις στο συγκεκριμένο παράδειγμα). Από εκεί και έπειτα περαιτέρω αύξηση του ω έχει ως αποτέλεσμα αύξηση στο πλήθος των απαιτούμενων επαναλήψεων.

β) Από την εκτέλεση του **SOR_iter_exp.m** προκύπτει το εξής αρχείο αποτελεσμάτων:

ω	iter
0.400000	72.000000
0.500000	54.000000
0.600000	42.000000
0.700000	33.000000
0.800000	26.000000
0.900000	20.000000
1.000000	16.000000
1.100000	12.000000
1.200000	12.000000
1.300000	13.000000
1.400000	17.000000
1.500000	22.000000
1.600000	31.000000
1.700000	46.000000
1.800000	73.000000

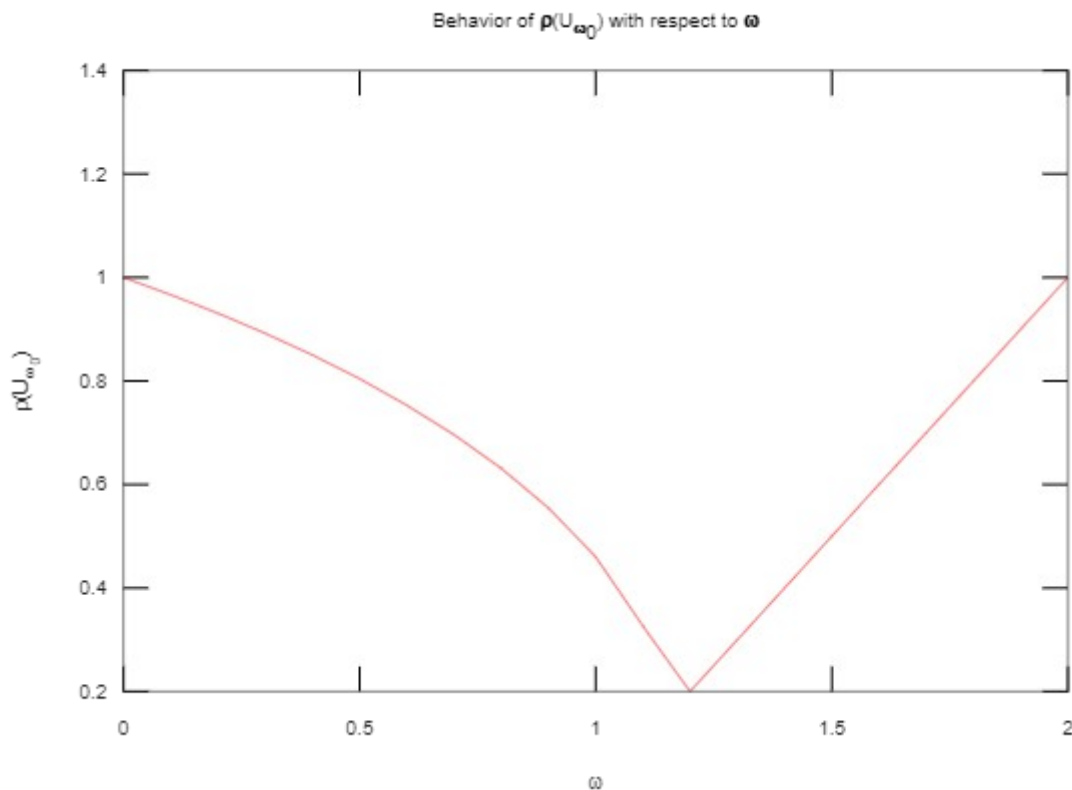
Είναι εμφανές ότι για $\omega = 1.1$ και $\omega = 1.2$ έχουμε το ελάχιστο πλήθος επαναλήψεων (**iter = 12**) που απαιτούνται για σύγκλιση της μεθόδου.

Από την εκτέλεση του **SOR_sr_exp.m** προκύπτει το εξής αρχείο αποτελεσμάτων:

ω	$\rho(U_\omega)$
0.000000	1.000000
0.100000	0.966707
0.200000	0.930922
0.300000	0.892262
0.400000	0.850241
0.500000	0.804217
0.600000	0.753320
0.700000	0.696299
0.800000	0.631232
0.900000	0.554830
1.000000	0.460313
1.100000	0.326336
1.200000	0.200000
1.300000	0.300000
1.400000	0.400000
1.500000	0.500000
1.600000	0.600000
1.700000	0.700000
1.800000	0.800000
1.900000	0.900000
2.000000	1.000000

Παρατηρούμε ότι για $\omega = 1.2$ έχουμε την ελάχιστη τιμή της φασματικής ακτίνας ($\rho(U_\omega) = 0.2$). Η τιμή αυτή είναι η βέλτιστη γιατί όσο μικρότερη είναι η φασματική ακτίνα του επαναληπτικού πίνακα τόσο ταχύτερα θα συγκλίνει ασυμπτωτικά η επαναληπτική μέθοδος.

Σημείωση: Η επαναληπτική μέθοδος που μελετάμε είναι η προς τα πίσω SOR, συνεπώς η φασματική ακτίνα που μας ενδιαφέρει είναι η $\rho(U_\omega)$, με $U_\omega = (I - \omega U)^{-1}[(1-\omega)I + \omega L]$.



Παρατηρούμε λοιπόν από το σχήμα ότι όσο η ω αυξάνει από το 0 στο 1, η $\rho(U_{\omega})$ ελαττώνεται γρηγορότερα μέχρις ότου η ω είναι κοντά στο ω_b . Στο σημείο αυτό η ελάττωση είναι απότομη. Καθώς η ω συνεχίζει να αυξάνει, η $\rho(U_{\omega})$ αυξάνει γραμμικά στην τιμή 1 για $\omega = 2$. Είναι προτιμότερο λοιπόν να υπερεκτιμούμε παρά να υποεκτιμούμε τη βέλτιστη τιμή της παραμέτρου ω .

γ) (Κώδικας) Από την εκτέλεση του **SOR_iter.m** προκύπτει ότι η θεωρητικά βέλτιστη τιμή του ω είναι η $\omega_b = 2 / (1 + \sqrt{1 - \rho(B)^2}) = 1.1530$, με $\rho(B) = 0.6785$. Επομένως, είναι αναμενόμενο το γεγονός ότι η πειραματική τιμή $\omega = 1.2$ επικρατεί της $\omega = 1.1$, αφού όπως είπαμε προηγουμένως, είναι προτιμότερο να την υπερεκτιμούμε από το να την υποεκτιμούμε. Για $\omega_b = 1.1530$ επιτυγχάνεται σύγκλιση σε **11** επαναλήψεις, ενώ για την πειραματικά βέλτιστη τιμή $\omega = 1.2$ απαιτούνται **12** επαναλήψεις. Μια τέτοια μικρή απόκλιση (1 επανάληψη) είναι αποδεκτή και οφείλεται στο **βήμα** 0.1 που έχουμε μεταξύ διαδοχικών πειραματικών τιμών του ω . Με αρκετά μικρό βήμα θα μπορούσαμε να προσεγγίσουμε καλύτερα την τιμή του ω_b και κατ'επέκταση το πλήθος των απαιτούμενων επαναλήψεων (για να συμβαδίζει με το θεωρητικά βέλτιστο πλήθος). Αντίστοιχα, η θεωρητικά βέλτιστη τιμή της φασματικής ακτίνας δίνεται από τον τύπο $\rho(U_{\omega}) = \rho[(I - \omega U)^{-1}[(1-\omega)I + \omega L]] = 0.1530$, ενώ η πειραματικά βέλτιστη τιμή της προέκυψε **0.2**. Παρατηρούμε ότι το απόλυτα σφάλμα κατά τον πειραματικό υπολογισμό τόσο της φασματικής ακτίνας ($|0.2 - 0.1530|$) όσο και του ω_b ($|1.2 - 1.1530|$) είναι **0.047** (είναι αναμενόμενο να ταυτίζονται λόγω του ακόλουθου τύπου της φασματικής ακτίνας: $\rho(U_{\omega}) = \omega_b - 1$).

δ) Αύξηση της τιμής των παραμέτρων α ή β ή n έχει ως αποτέλεσμα αύξηση της φασματικής ακτίνας $\rho(U_{\omega})$. Κατά συνέπεια επιβραδύνεται η σύγκλιση της μεθόδου και άρα είναι λογικό το πλήθος των απαιτούμενων επαναλήψεων επίσης να αυξάνεται. Η αύξηση του α στις περισσότερες περιπτώσεις φαίνεται να έχει ισοδύναμο αποτέλεσμα με αντίστοιχη αύξηση του β (αναμενόμενο λόγω συμμετρίας του πίνακα). Από την άλλη,

μεγάλη αύξηση του n μπορεί εύκολα να οδηγήσει σε απαιτούμενων πλήθος που υπερβαίνει το όριο των 100 και να καθυστερήσει αισθητά την εκτέλεση του κώδικα. Τα παραπάνω επιβεβαιώνονται και από τους πίνακες του ερωτήματος (3).

ε) (Κώδικας) Η προς τα πίσω **Gauss-Seidel** χρησιμοποιεί τον πίνακα $R = D - C_u$ για να προσεγγίσει την μορφή του πίνακα A , ενώ η **SOR** χρησιμοποιεί για τον ίδιο σκοπό τον πίνακα $R = D - \omega C_u$. Η επιπλέον παραμετροποίηση ως προς ω που έχει η **SOR** (πρακτικά η **Gauss-Seidel** προκύπτει θέτοντας $\omega = 1$ στον τύπο της **SOR**) της δίνει την ευελιξία να “επιλέγει” την βέλτιστη τιμή ω_b που ελαχιστοποιεί την φασματική ακτίνα του επαναληπτικού της πίνακα U_ω . Με αυτόν τον τρόπο καταφέρνει να περιορίσει περαιτέρω το πλήθος των απαιτούμενων επαναλήψεων συγκριτικά με την **Gauss-Seidel**.

στ) (Κώδικας) Η μέθοδος **Jacobi** χρησιμοποιεί τον πίνακα $R = D$ (δηλαδή τον διαγώνιο πίνακα) για να προσεγγίσει την μορφή του πίνακα A , ενώ η **GS** όπως είδαμε χρησιμοποιεί τον πίνακα $R = D - C_u$ (δηλαδή τον άνω τριγωνικό πίνακα). Ξεκινώντας λοιπόν με πίνακα R που προσεγγίζει με μεγαλύτερη ακρίβεια τον A , είναι λογικό η **GS** λαμβάνοντας υπόψη “περισσότερη” πληροφορία για τον αρχικό πίνακα κατασκευάζει έναν πιο αποδοτικό επαναληπτικό πίνακα που η φασματική του ακτίνα είναι μικρότερη από του $B = L + U$ που χρησιμοποιεί η **Jacobi**. Με αυτόν τον τρόπο η **GS** καταφέρνει να περιορίσει περαιτέρω το πλήθος των απαιτούμενων επαναλήψεων συγκριτικά με την **Jacobi**. Τέλος, από το προηγούμενο ερώτημα και λόγω μεταβατικότητας προκύπτει το εξής για την απόδοση των εν λόγω μεθόδων: **SOR** > **GS** > **Jacobi**.

3) Πίνακες αποτελεσμάτων

Μέθοδος προς τα πίσω SOR

Διάσταση A	Παράμετροι		Βέλτιστη τιμή ω_b SOR	Θεωρητικό πλήθος επαναλήψεων	Βέλτιστη Πειραματική τιμή ω	Πειραματικό πλήθος επαναλήψεων
	α	β				
n = 10	1	2	1.1530	11	1.1, 1.2	12
	2	1	1.1530	14	1.2	14
	1	4	1.5604	31	1.6	36
	4	1	1.5604	41	1.6	43
n = 100	1	2	1.1713	12	1.1, 1.2	13
	2	1	1.1713	29	1.1	27
	1	4	1.9397	>100	N/A	>100
	4	1	1.8008 – 0.5989i	>100	N/A	>100
n = 1000	1	2	1.1756	12	1.1, 1.2	13
	2	1	1.1974	31	1.1	27
	1	4	1.6917 – 0.7222i	>100	N/A	>100
	4	1	1.3308 – 0.9437i	>100	N/A	>100

Μέθοδος προς τα πίσω SOR

Διάσταση A	Παράμετροι		Βέλτιστη τιμή ω_b SOR	Θεωρητική τιμή φασματικής ακτίνας επαν. Πιν. SOR	Βέλτιστη Πειραματική τιμή ω	Πειραματική τιμή φασματικής ακτίνας επαν. Πιν. SOR
	α	β				
n = 10	1	2	1.1530	0.1530	1.2	0.2
	2	1	1.1530	0.1530	1.2	0.2
	1	4	1.5604	0.5604	1.6	0.6
	4	1	1.5604	0.5604	1.6	0.6
n = 100	1	2	1.1713	0.1713	1.2	0.2192
	2	1	1.1713	0.1713	1.2	0.2754
	1	4	1.9397	0.9397	1.9	0.9799
	4	1	1.8008 – 0.5989i	0.8008 – 0.5989i	N/A	1
n = 1000	1	2	1.1756	0.1756	1.2	0.3024
	2	1	1.1974	0.1974	1.2	0.4845
	1	4	1.6917 – 0.7222i	0.6917 – 0.7222i	1.9	0.9998
	4	1	1.3308 – 0.9437i	0.3308 – 0.9437i	N/A	1

Σύγκριση ε. μ. SOR, GS, Jacobi

Διάσταση A	Παράμετροι		Βέλτιστη τιμή ω_b SOR	Θεωρητική τιμή φασματικής ακτίνας επαν. Πιν. SOR	Θεωρητική τιμή φασματικής ακτίνας επαν. Πιν. GS	Θεωρητική τιμή φασματικής ακτίνας επαν. Πιν. Jacobi
	α	β				
n = 10	1	2	1.1530	0.1530	0.4603	0.6785
	2	1	1.1530	0.1530	0.4603	0.6785
	1	4	1.5604	0.5604	0.9206	0.9595
	4	1	1.5604	0.5604	0.9206	0.9595
n = 100	1	2	1.1713	0.1713	0.4995	0.7068
	2	1	1.1713	0.1713	0.5034	0.7068
	1	4	1.9397	0.9397	0.9990	0.9995
	4	1	1.8008 – 0.5989i	0.8008 – 0.5989i	1.0066	1.0539
n = 1000	1	2	1.1756	0.1756	0.5000	0.7129
	2	1	1.1974	0.1974	0.6509	0.7421
	1	4	1.6917 – 0.7222i	0.6917 – 0.7222i	1.9825	1.0873
	4	1	1.3308 – 0.9437i	0.3308 – 0.9437i	1.3043	1.2259

Σύγκριση ε. μ. SOR, GS, Jacobi

Διάσταση A	Παράμετροι		Βέλτιστη τιμή ω_b SOR	Θεωρητικό πλήθος επαναλήψεων SOR	Θεωρητικό πλήθος επαναλήψεων GS	Θεωρητικό πλήθος επαναλήψεων Jacobi
α	β					
n = 10	1	2	1.1530	11	16	39
	2	1	1.1530	14	23	39
	1	4	1.5604	31	>100	>100
	4	1	1.5604	41	>100	>100
n = 100	1	2	1.1713	12	16	44
	2	1	1.1713	29	30	44
	1	4	1.9397	>100	>100	>100
	4	1	1.8008 – 0.5989i	>100	>100	>100
n = 1000	1	2	1.1756	12	16	44
	2	1	1.1974	31	30	44
	1	4	1.6917 – 0.7222i	>100	>100	>100
	4	1	1.3308 – 0.9437i	>100	>100	>100