Ονοματεπώνυμο: Γεώργιος Τσίρης
Αριθμός Μητρώου: 1115201700173

Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

1. Αντίστροφη μέθοδος των δυνάμεων

Εφαρμογή

Από την εκτέλεση του κώδικα **main_inverse_power_method.m** (με ενεργοποιημένο το format long g) προκύπτουν τα παρακάτω αποτελέσματα:

Υπολογισμός των (λ_1,$x^{(1)}$) Αντίστροφη μέθοδος των δυνάμεων

Μεταβλητή μετατόπισης q	**Αριθμός επαναλήψεων itcount**	**Μέγιστη κατ' απόλυτη τιμή ιδιοτιμή λ_1**	**Ιδιοδιάνυσμα $x^{(1)}$**
$\lambda_1 - 0.3$	6	15.31729700306376	1 0.07142801585774251 -0.04877967657578101 -0.01371951692274159
$\lambda_1 - 0.4$	6	15.31729700532781	1 0.071428015881892 -0.04877967623969585 -0.01371951513766637
$\lambda_1 - 0.5$	7	15.3172970021242	1 0.07142801584944913 -0.04877967670896953 -0.01371951766226668
$\lambda_1 - 0.6$	7	15.31729700077813	1 0.07142801584045622 -0.04877967688917654 -0.01371951871986515
$\lambda_1 - 0.7$	7	15.31729699689199	1 0.07142801581496371 -0.04877967740745129 -0.01371952177339548
$\lambda_1 - 0.8$	7	15.31729698712542	1 0.07142801575205786 -0.0487796787050327 -0.01371952944805254
$\lambda_1 - 0.9$	8	15.3172970056512	1 0.07142801586716373 -0.04877967626176383 -0.01371951488796269

όπου η $\boldsymbol{\lambda_1}$ είναι η μεγαλύτερη κατά απόλυτη τιμή ιδιοτιμή του πίνακα **A** και προκύπτει ίση με 15.31729700260337 από την κλήση του **max(eig(A))**.

Υπολογισμός των (λ_n,$x^{(n)}$)   Αντίστροφη μέθοδος των δυνάμεων

Μεταβλητή μετατόπισης q	**Αριθμός επαναλήψεων itcount**	**Ελάχιστη κατ' απόλυτη τιμή ιδιοτιμή λ_n**	**Ιδιοδιάνυσμα $x^{(n)}$**
λ_n + 0.3	7	3.305315876677934	-0.1049562136818083 -0.003867157539399433 0.1507243595692672 1
λ_n + 0.4	7	3.305315877907602	-0.1049562137612358 -0.003867157464641282 0.1507243602214801 1
λ_n + 0.5	7	3.305315882752625	-0.1049562141012089 -0.003867157171249083 0.1507243627906878 1
λ_n + 0.6	8	3.305315877999246	-0.1049562136765438 -0.003867157454556091 0.1507243602723448 1
λ_n + 0.7	8	3.305315881222898	-0.1049562136659856 -0.003867157246286894 0.1507243619883053 1
λ_n + 0.8	8	3.305315888999786	-0.1049562135799853 -0.003867156737754937 0.1507243661310154 1
λ_n + 0.9	8	3.305315905614616	-0.1049562132398983 -0.003867155635974257 0.1507243749893207 1

όπου η $\boldsymbol{\lambda_n}$ είναι η μικρότερη κατά απόλυτη τιμή ιδιοτιμή του πίνακα **A** και προκύπτει ίση με 3.305315876467696 από την κλήση του **min(eig(A))**.

<u>Σχόλια:</u>

1) Η αντίστροφη μέθοδος των δυνάμεων υλοποιείται καλώντας την τροποποιημένη μέθοδο των δυνάμεων για τον πίνακα $\mathbf{(A - qI)^{-1}}$. Με αυτόν τον τρόπο, προσεγγίζονται οι ιδιοτιμές $\mathbf{\lambda'_i = 1/(\lambda_i - q)}$ από τις οποίες είναι εμφανές ότι παίρνουμε τις $\boldsymbol{\lambda_i}$ του πίνακα **A** ως εξής:

$$\mathbf{\lambda'_i = 1/(\lambda_i - q)} \Rightarrow \mathbf{\lambda_i - q = 1/\lambda'_i} \Rightarrow \mathbf{\lambda_i = (1/\lambda'_i) + q} \qquad (\text{με την προϋπόθεση ότι } \lambda_i \neq 0)$$

Τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα **A** ταυτίζονται με αυτά του $\mathbf{(A - qI)^{-1}}$, καθώς όπως γνωρίζουμε από την θεωρία ο αντίστροφος πίνακας έχει τα ίδια ιδιονύσματα (και άρα τα ιδιοδιανύσματα του $\mathbf{(A - qI)^{-1}}$ ταυτίζονται με του **A – qI**) και επίσης μια διατάραξη στον πίνακα της μορφής **A – qI** (που είναι ουσιαστικά μετατόπιση της αρχής των αξόνων) δεν αλλάζει τα ιδιοδιανύσματα του (και άρα τα ιδιοδιανύσματα του **A – qI** ταυτίζονται με του **A**). Τα παραπάνω αποτυπώνονται μαθηματικά ως εξής:

$$\mathbf{(A - qI)^{-1}x^{(i)} = \lambda'_i x^{(i)}} \Rightarrow \mathbf{x^{(i)} = (A - qI)\lambda'_i x^{(i)}} \Rightarrow \mathbf{(1/\lambda'_i)x^{(i)} = (A - qI)x^{(i)}} \Rightarrow$$

$$\mathbf{(1/\lambda'_i)x^{(i)} = Ax^{(i)} - qIx^{(i)}} \Rightarrow \mathbf{(1/\lambda'_i)x^{(i)} = \lambda_i x^{(i)} - qIx^{(i)}} \Rightarrow \mathbf{\lambda_i x^{(i)} = (1/\lambda'_i)x^{(i)} + qIx^{(i)}} \quad (1)$$

Από την (1) προκύπτει ότι:

$$\mathbf{\lambda_i x^{(i)} = ((1/\lambda'_i) + q)x^{(i)}} \Rightarrow \mathbf{\lambda_i = (1/\lambda'_i) + q}$$

που αποδεικνύει όσα αναφέραμε νωρίτερα για την σχέση που συνδέει τις ιδιοτιμές του πίνακα **A** με αυτές $\mathbf{(A - qI)^{-1}}$.

Επίσης εξ ορισμού έχουμε:

$$\mathbf{(A - qI)^{-1}x^{(i)} = \lambda'_i x^{(i)}} \Rightarrow \mathbf{x^{(i)} = (A - qI)\lambda'_i x^{(i)}} \Rightarrow \mathbf{(1/\lambda'_i)x^{(i)} = (A - qI)x^{(i)}} \quad (2)$$

Και αντικαθιστώντας στην (1) από την (2) προκύπτει ότι:

$$\mathbf{\lambda_i x^{(i)} = (A - qI)x^{(i)} + qIx^{(i)}} \Rightarrow \mathbf{\lambda_i x^{(i)} = (A - qI + qI)x^{(i)}} \Rightarrow \mathbf{\lambda_i x^{(i)} = Ax^{(i)}}$$

που σημαίνει ότι το ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{x^{(i)}}$ που είχαμε ορίσει να αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\mathbf{\lambda'_i}$ του πίνακα $\mathbf{(A - qI)^{-1}}$ είναι, σύμφωνα με τον ορισμό, και ιδιοδιάνυσμα του **A** που αντιστοιχεί στην $\mathbf{\lambda_i}$ ιδιοτιμή του.

2) Από την εκτέλεση του κώδικα προκύπτει το σφάλμα της εκάστοτε προσέγγισης σε σύγκριση με τα αντίστοιχα αποτελέσματα που δίνει η συνάρτηση **eig()**, τόσο για τις ιδιοτιμές όσο και για τα ιδιοδιανύσματα. Όσον αφορά τις ιδιοτιμές, παρατηρούμε ότι για να πετύχουμε απόλυτο σφάλμα μικρότερο της ανεκτικότητας $\mathbf{1/2*10^{-6}}$ που είναι το ζητούμενο (πράγματι το απόλυτο σφάλμα στην εφαρμογή μας είναι της τάξης 10^{-8} με 10^{-10}) έχουμε ότι όσο πιο κοντά στην προσεγγιζόμενη ιδιοτιμή είναι το **q**, τόσο λιγότερες επαναλήψεις απαιτούνται. Αυτό μπορούμε εύκολα να το διαπιστώσουμε και από τους παραπάνω πίνακες, που εξετάζοντας τους από πάνω προς τα κάτω (το **q** απομακρύνεται από την τιμή του **λ**) το πλήθος των απατούμενων επαναλήψεων αυξάνεται. Με άλλα λόγια, η επιλογή του **q** καθορίζει την ταχύτητα σύγκλισης της μεθόδου (όσο πλησιέστερα είναι στην ιδιοτιμή που προσεγγίζουμε τόσο ταχύτερη συγκλίνει), επιβεβαιώνοντας την θεωρία. Επίσης, το σφάλμα για το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα παρουσιάζει μικρές διακυμάνσεις καθώς μεταβάλλουμε το **q**, κάτι που διαπιστώνουμε χρησιμοποιώντας νόρμα για να δούμε πόσο “απέχει” η προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος από το ιδιοδιάνυσμα όπως αυτό προκύπτει από την συνάρτηση **eig()**. Σε αντίθεση με το απόλυτο σφάλμα των ιδιοτιμών, το σφάλμα τον ιδιοδιανυσμάτων δεν παρουσιάζει κάποια συσχέτιση με το απαιτούμενο πλήθος των επαναλήψεων. Το φαινόμενο αυτό είναι αναμενόμενο, από την στιγμή που η τιμή της ανεκτικότητας ($\mathbf{1/2*10^{-6}}$) που έχουμε θέσει ως κριτήριο διακοπής αναφέρεται στο σφάλμα της ιδιοτιμής και όχι του ιδιοδιανύσματος. Το τελευταίο απλά προκύπτει από το ιδιοδιάνυσμα που συμβαίνει να αντιστοιχεί στην προκύπτουσα ιδιοτιμή.

3) Ο χρόνος εκτέλεσης κάθε κλίσης του αλγορίθμου καταγράφεται μέσω των εντολών **tic()** και **toc()**. Παρουσιάζει κάποια (όχι πάντα εμφανή) συσχέτιση με το απαιτούμενο πλήθος των επαναλήψεων (και κατ'επέκταση με το **q**, αφού συνδέονται όπως εξηγήθηκε παραπάνω) με την έννοια ότι μεγαλύτερος αριθμός επαναλήψεων τείνει να χρειάζεται λίγο περισσότερο χρόνο μέχρι να ολοκληρωθεί. Ωστόσο, λόγω τον πολλών παραγόντων που επηρεάζουν τον χρόνο εκτέλεσης, όπως η εκάστοτε διαθεσιμότητα των πόρων της CPU που μεταβάλλεται ανάλογα με το πόσοι πόροι δεσμεύονται από άλλες εφαρμογές, η συμπεριφορά παρουσιάζει εξαιρέσεις. Στο σύστημα μου ο χρόνος εκτέλεσης κάθε κλίσης του αλγορίθμου είναι της τάξης $\mathbf{10^{-4}}$ του δευτερολέπτου (**~0.0003sec**).