Ονοματεπώνυμο: Γεώργιος Τσίρης
Αριθμός Μητρώου: 1115201700173

Παρεμβολή

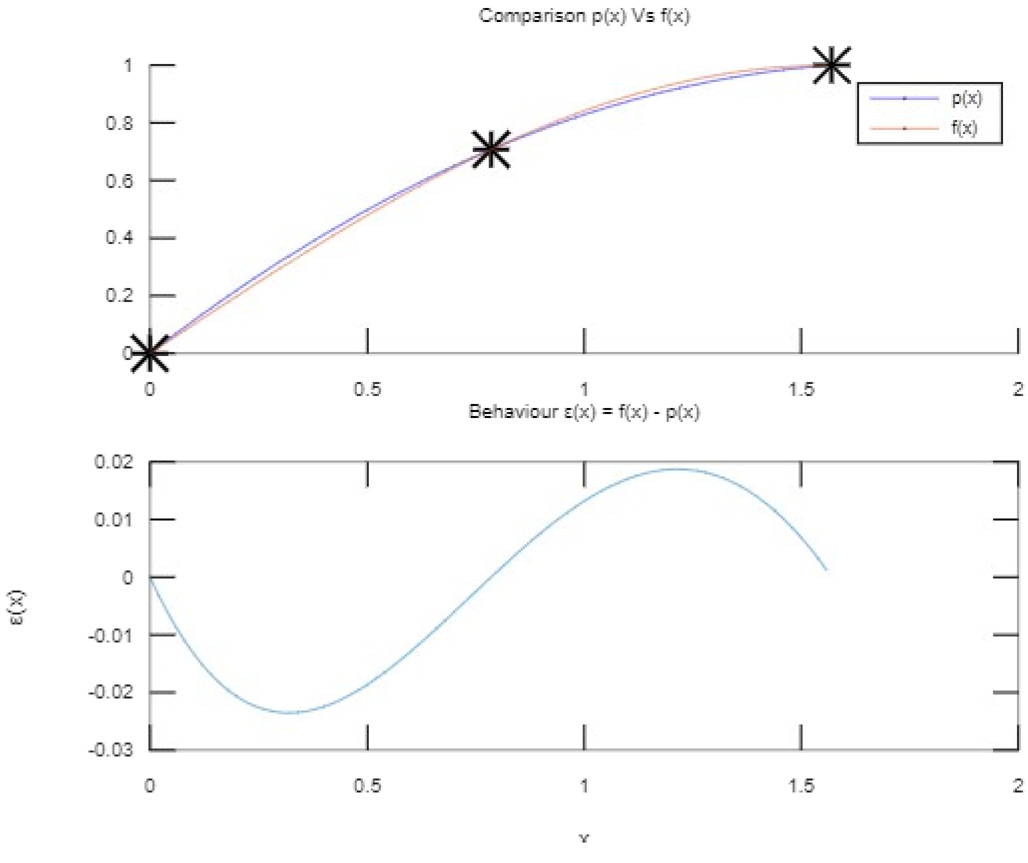
1. Συνάρτηση: f(x) = sinx

A) Από την εκτέλεση του κώδικα **sp_Lagrange.m** προκύπτει ότι το πολυώνυμο παρεμβολής **p_2(x)** του Lagrange το οποίο διέρχεται από τα σημεία **(0, sin0)**, **(π/4, sinπ/4)** και **(π/2, sinπ/2)** είναι το:

$$- \frac{569 \cdot x^2}{158 \cdot \pi} + \frac{8 \cdot x^2}{\pi^2} - \frac{2 \cdot x}{\pi} + \frac{569 \cdot x}{316}$$

Αναμενόμενα, το πολυώνυμο είναι βαθμού **n=2** αφού τα σημεία παρεμβολής είναι **3**.

B)



Από την εκτέλεση του κώδικα του **main_lagrangePOLY.m** προκύπτει η **γραφική παράσταση** του **p_2(x)** στο ίδιο σύστημα αξόνων με την **f(x)**, όταν **x∈[0,π/2]** ώστε να έχουμε μια ξεκάθαρη εικόνα του πολυωνύμου παρεμβολής σε σύγκριση με την **f**. Παρατηρούμε ότι πράγματι ταυτίζονται στα σημεία παρεμβολής όπως αναμέναμε και παρουσιάζεται ένα μικρό σφάλμα μεταξύ τους στα ενδιάμεσα διαστήματα. Για να δούμε την συμπεριφορά αυτού του σφάλματος κάνουμε την γραφική παράσταση της **ε(x) = f(x) – p_2(x)**. Το σφάλμα παρουσιάζει μια ημιτονοειδή μορφή στο διάστημα **[0,π/2]** (όμως αυξάνοντας το διάστημα βλέπουμε ότι το σφάλμα πάει ασυμπτωτικά στο άπειρο).

Γ) Από την εκτέλεση του κώδικα του **lagrange.m** προκύπτουν οι προσεγγιστικές τιμές των sin(π/3) και sin(π/6) και το αριθμητικό σφάλμα σε κάθε προσέγγιση. Έτσι, παίρνουμε ότι $\mathbf{p_2(\pi/3)=0.8508}$ και $\mathbf{p_2(\pi/6)=0.5340}$. Οι αντίστοιχες τιμές της f είναι **f(π/3)=0.8660** και **f(π/6)=0.5000** και έχουμε τα εξής σφάλματα: **ε(π/3)=0.015264** και **ε(π/6)=0.034010**.

Δ) Το φράγμα του σφάλματος του πολυωνύμου παρεμβολής $\mathbf{p_2}$ που προσεγγίζει το sin(π/3) υπολογίζεται θεωρητικά από τον τύπο:

$$R_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)\ f^{(n+1)}(\xi) \ / \ (n+1)!$$

και αφού τα σημεία παρεμβολής είναι **n+1=3** άρα **n=2** και το παραπάνω γράφεται:

$$R_3(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ f^{(3)}(\xi) \ / \ 3!$$

και διαπιστώνοντας ότι η $\mathbf{f^{(3)}(x)}$=(sinx)'''=(cosx)''=(−sinx)'=**−cosx**, που η μέγιστη κατά απόλυτο τιμή της από τα $x_0=0$, $x_1=\pi/4$, $x_2=\pi/2$ είναι η $\mathbf{f^{(3)}(0)=-\cos 0=-1}$. Δηλαδή **ξ=0** και επομένως:

$$R_3(\pi/3)= (\pi/3- x_0)(\pi/3 - x_1)(\pi/3 - x_2)\ f^{(3)}(\pi/2) \ / \ 6$$

Από την εκτέλεση του κώδικα του **lagrange.m** που υπολογίζει, με βάση τον παραπάνω τύπο, το θεωρητικό άνω φράγμα του απόλυτου σφάλματος προκύπτει ίσο με:

$$R_3(\pi/3)= 0.023925.$$

Παρατηρούμε ότι το αριθμητικό σφάλμα **ε(π/3)=0.015264** που βρέθηκε στο ερώτημα **(Γ)** είναι μικρότερο κατά απόλυτο τιμή από το θεωρητικό άνω φράγμα $\mathbf{R_3(\pi/3)= 0.023925}$, γεγονός που επιβεβαιώνει την θεωρία.

Ε) Σχολιασμός για τα συμπεράσματα έχει ενσωματωθεί σε καθένα από τα παραπάνω ερωτήματα, ώστε να είναι ξεκάθαρο που αναφέρεται.

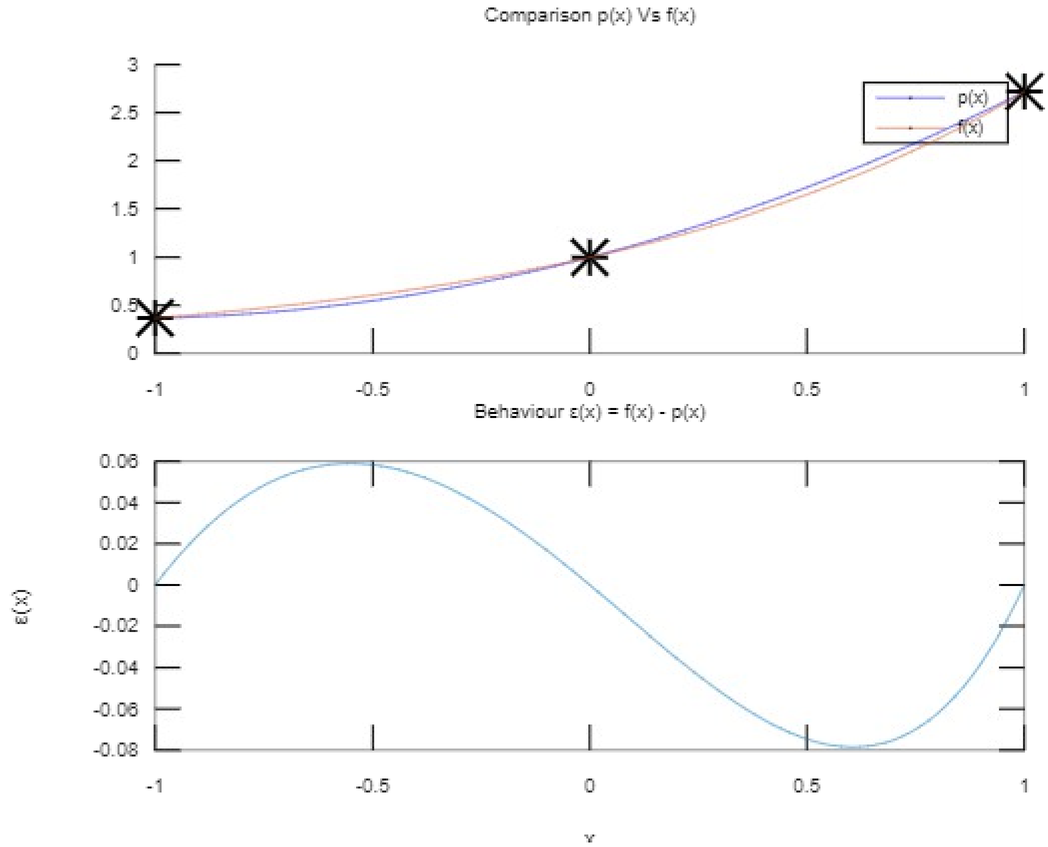
2. Συνάρτηση: $f(x) = e^x$

Α) Από την εκτέλεση του κώδικα **sp_newton.m** προκύπτει ότι το πολυώνυμο παρεμβολής $\mathbf{p_2(x)}$ του Lagrange το οποίο διέρχεται από τα σημεία $\mathbf{(-1, e^{-1})}$, $\mathbf{(0, e^{0})}$ και $\mathbf{(1, e^{1})}$ είναι το:

$$\frac{208 \cdot x^2}{383} + \frac{208 \cdot x}{383} + \frac{133 \cdot \pi \cdot x}{661} + \frac{542629 \cdot \pi}{1704719}$$

Αναμενόμενα, το πολυώνυμο είναι βαθμού **n=2** αφού τα σημεία παρεμβολής είναι **3**.

Β)



Από την εκτέλεση του κώδικα του **call_newtonPOLY.m** (εναλλακτικά για τον ίδιο σκοπό μπορεί να χρησιμοποιηθεί και η **newton_poly.m**) προκύπτει η **γραφική παράσταση** του $\mathbf{p_2(x)}$ στο ίδιο σύστημα αξόνων με την **f(x)**, όταν $\mathbf{x \in [-1,1]}$ ώστε να έχουμε μια ξεκάθαρη εικόνα του πολυωνύμου παρεμβολής σε σύγκριση με την **f**. Παρατηρούμε ότι πράγματι ταυτίζονται στα σημεία παρεμβολής όπως αναμέναμε και παρουσιάζεται ένα μικρό σφάλμα μεταξύ τους στα ενδιάμεσα διαστήματα. Για να δούμε την συμπεριφορά αυτού του σφάλματος κάνουμε την γραφική παράσταση της $\mathbf{\varepsilon(x) = f(x) - p_2(x)}$. Το σφάλμα παρουσιάζει μια ημιτονοειδή μορφή στο διάστημα **[-1,1]** (όμως αυξάνοντας το διάστημα προς τα πάνω βλέπουμε ότι το σφάλμα πάει ασυμπτωτικά στο άπειρο).

Γ) Από την εκτέλεση του κώδικα του **newton_poly.m** προκύπτουν οι προσεγγιστικές τιμές των $e^{1/2}$ και $e^{1/3}$ και το αριθμητικό σφάλμα σε κάθε προσέγγιση. Έτσι, παίρνουμε ότι $\mathbf{p_2(1/2)=1.7234}$ και $\mathbf{p_2(1/3)=1.4521}$. Οι αντίστοιχες τιμές της f είναι **f(1/2)=1.6487** και **f(1/3)=1.3956** και έχουμε τα εξής σφάλματα: $\mathbf{\varepsilon(1/2)=-0.074649}$ και $\mathbf{\varepsilon(1/3)=-0.056464}$.

Δ) Το φράγμα του σφάλματος του πολυωνύμου παρεμβολής $\mathbf{p_2}$ που προσεγγίζει το sin(π/3) υπολογίζεται θεωρητικά από τον τύπο:

$$R_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)\, f^{(n+1)}(\xi) / (n+1)!$$

και αφού τα σημεία παρεμβολής είναι **n+1=3** άρα **n=2** και το παραπάνω γράφεται:

$$R_3(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\, f^{(3)}(\xi) / 3!$$

και διαπιστώνοντας ότι η $\mathbf{f^{(3)}(x)}=(e^x)'''=(e^x)''=(e^x)'=\mathbf{e^x}$, που η μέγιστη κατά απόλυτο τιμή της από τα $x_0=-1$, $x_1=0$, $x_2=1$ είναι η $\mathbf{f^{(3)}(1)=e^1=e}$. Δηλαδή **ξ=1** και επομένως:

$$R_3(1/2)= (1/2 - x_0)(1/2 - x_1)(1/2 - x_2)\, f^{(3)}(1) / 6$$

Από την εκτέλεση του κώδικα του **newton_poly.m** που υπολογίζει, με βάση τον παραπάνω τύπο, το θεωρητικό άνω φράγμα του απόλυτου σφάλματος προκύπτει ίσο με:

$$R_3(1/2)= 0.1699.$$

Παρατηρούμε ότι το αριθμητικό σφάλμα **ε(1/2)=−0.074649** που βρέθηκε στο ερώτημα **(Γ)** είναι κατά απόλυτο τιμή μικρότερο από το θεωρητικό άνω φράγμα $\mathbf{R_3(1/2)= 0.1699}$, γεγονός που επιβεβαιώνει την θεωρία.

Ε) Σχολιασμός για τα συμπεράσματα έχει ενσωματωθεί σε καθένα από τα παραπάνω ερωτήματα, ώστε να είναι ξεκάθαρο που αναφέρεται.