Yapı Dinamiği Çalıştayı - 2019:

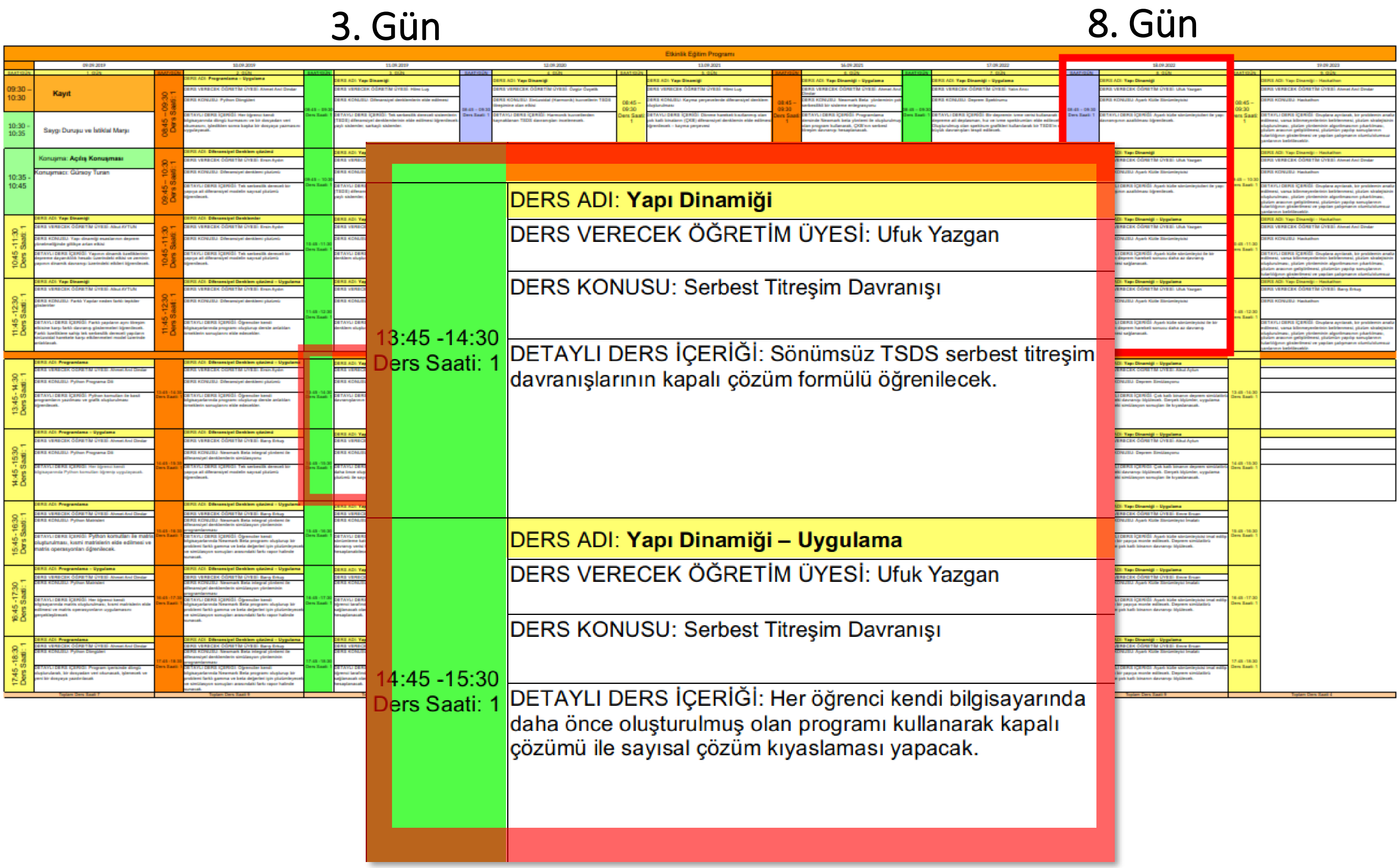
Serbest Titreşim Davranışı

Ufuk Yazgan
İstanbul Teknik Üniversitesi

11.08.2019 (3. Gün) – 13:45 15:30

Program

İYTE-YDÇ 2019



İçerik

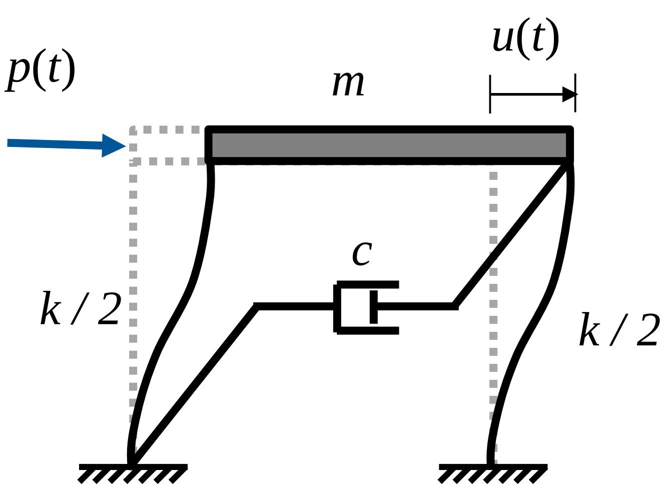
- TSDS için hareket denklemi
- Sönümsüz TSDS için dinamik hareket denklemi
- Analitik yer değiştirme çözümü
- Örnekler

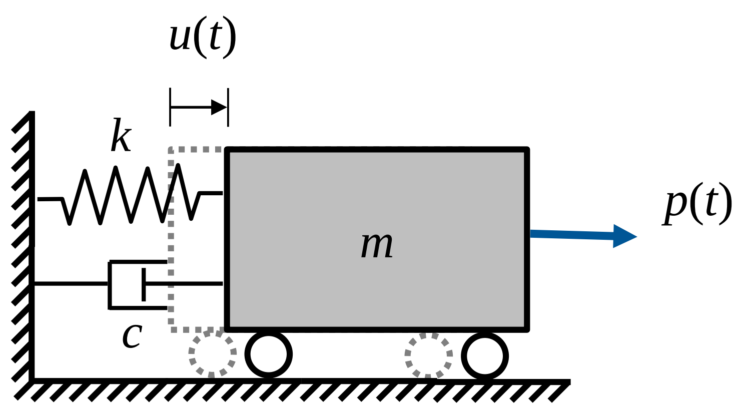
TEK SERBESTLİK DERECELİ SİSTEM

Doğrusal tek serbestlik dereceli sistem (TSDS) modeli için kuvvetler dengesi:

$$f_I(t) + f_D(t) + f_S(t) = p(t)$$

Eylemsizlik kuvveti	*Sönüm kuvveti*	*Elastik yay kuvveti*	*Dış kuvvet*





Tek serbestlik dereceli sistem modelindeki kuvvetler:

$$f_I(t) + f_D(t) + f_S(t) = p(t)$$

Atalet kuvveti

Sönüm kuvveti

Elastik yay kuvveti

Dış kuvvet

Sistem davranışından bağımsız

Atalet

$$f_I(t) = m \cdot \frac{d^2u(t)}{dt^2}$$

$$f_I(t) = m \cdot \ddot{u}(t)$$

Sönüm

$$f_D(t) = c \cdot \frac{du(t)}{dt}$$

$$f_D(t) = c \cdot \dot{u}(t)$$

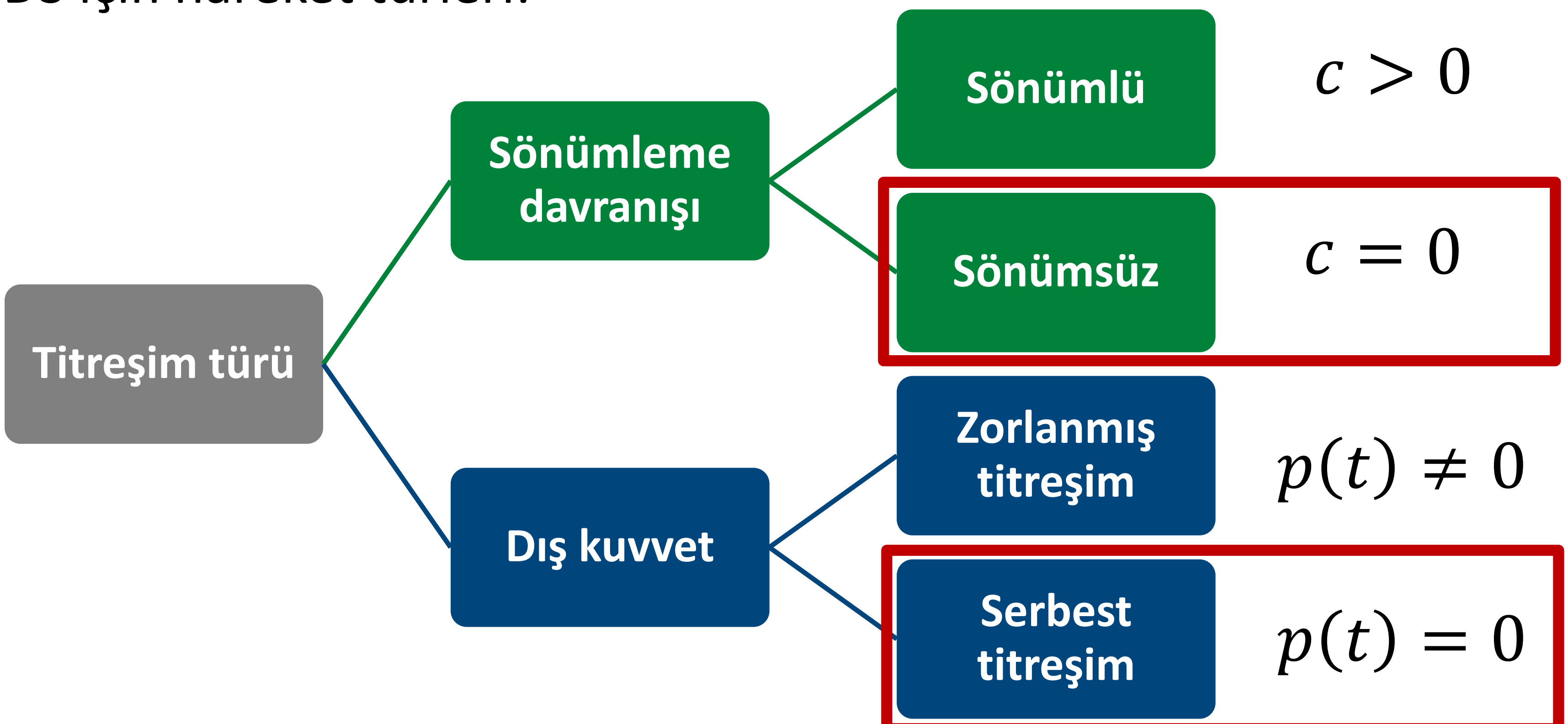
Elastik yay

$$f_S(t) = k \cdot u(t)$$

TEK SERBESTLİK DERECELİ SİSTEM: HAREKET TÜRLERİ

$$m\,\ddot{u}(t) + \underline{c\,\dot{u}(t)} + k\,u(t) = \underline{p(t)}$$

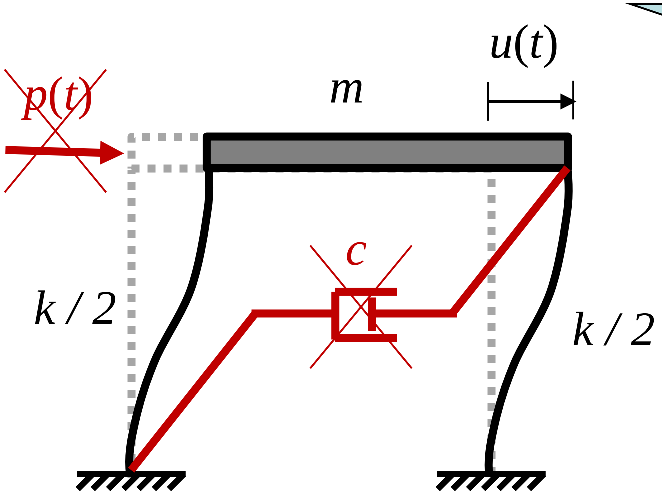
TSDS için hareket türleri:

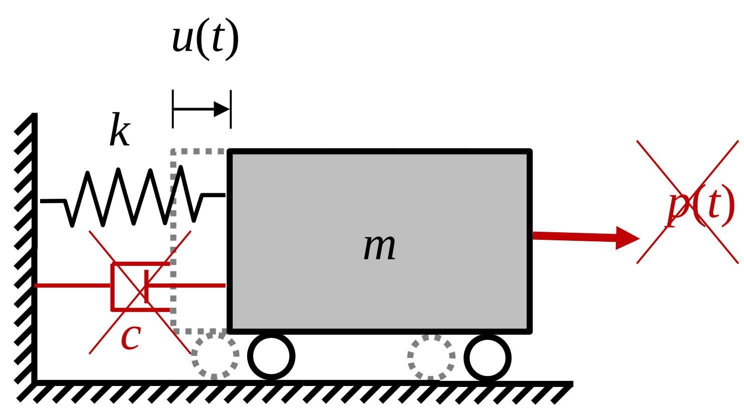


TSDS hareket denklemi:

$$\overbrace{m\,\ddot{u}(t)}^{\text{Atalet kuvveti}} + \overbrace{\cancelto{0}{c\,\dot{u}(t)}}^{\text{Sönüm kuvveti}} + \overbrace{k\,u(t)}^{\text{Elastik yay kuvveti}} = \overbrace{\cancelto{0}{p(t)}}^{\text{Dış kuvvet}}$$

Sönümsüz *Serbest titreşim*





TSDS hareket denklemi:

$$\overbrace{m\,\ddot{u}(t)}^{\text{Atalet kuvveti}} + \overbrace{\cancel{c\,\dot{u}(t)}}^{\text{Sönüm kuvveti}} + \overbrace{k\,u(t)}^{\text{Elastik yay kuvveti}} = \overbrace{\cancel{p(t)}}^{\text{Dış kuvvet}}$$

0 — *Sönümsüz*

0 — *Serbest titreşim*

Sönümsüz TSDS'nin serbest titreşim hareketi denklemi:

$$\boxed{m\,\ddot{u}(t) + k\,u(t) = 0}$$

TSDS hareket denkleminin en yalın hali

SERBEST TİTREŞEN SÖNÜMSÜZ TSDS: ANALİTİK ÇÖZÜM

Serbest titreşim hareketi denklemi:

$$m\,\ddot{u}(t) + k\,u(t) = 0$$

- ☑ *Doğrusal*
- ☑ *İkinci derece*
- ☑ *Sabit katsayılı*
- ☑ *Homojen*

} *Diferansiyel denklem*

Çözüm formu:

$$u(t) = A\,e^{st}$$

1. türev

$$\dot{u}(t) = s\,A\,e^{st}$$

2. türev

$$\ddot{u}(t) = s^2\,A\,e^{st}$$

Sönümsüz TSDS'nin serbest titreşim hareketi denklemi:

$\boxed{\ddot{u}(t) = s^2 A e^{st}}$ $\boxed{u(t) = A\, e^{st}}$

$$m\, \ddot{u}(t) + k\, u(t) = 0$$

$$m s^2 A e^{st} + k A e^{st} = 0$$

Sonuç tüm "t" anlarında sıfıra eşitse, iki terimden en azından birisi sıfıra eşit olmalı

Bu çarpanın bütün "t" anlarında sıfıra eşit olması sistemin hareketsiz olması demektir.

$$(m s^2 + k)\, A\, e^{st} = 0$$

O zaman aradığımız cevap burada gizli!

SERBEST TİTREŞEN SÖNÜMSÜZ TSDS: ANALİTİK ÇÖZÜM

Karakteristik denklem:

$$ms^2 + k = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 = -\frac{k}{m}$$

Karakteristik denklemin kökleri:

$$s_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\,\omega_n$$

Dairesel (açısal) frekans, $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$

ve $i = \sqrt{-1}$

Sanal (imajiner) sayı

Genel çözüm:

$$u(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

$$u(t) = A_1 e^{+i\omega_n t} + A_2 e^{-i\omega_n t}$$

Doğal üstel fonksiyon, e^x

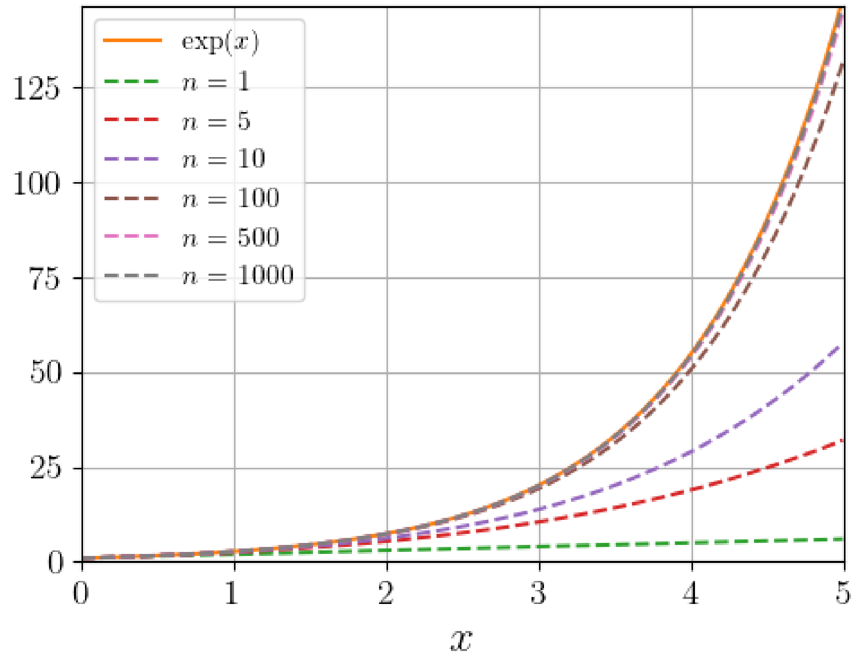
Ne zaman bir parametre kendi değeriyla orantılı şekilde artsa veya azalsa karşımıza doğal üstel fonksiyon çıkar.

Limit esaslı tanım:

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Sonsuz seri esaslı tanım:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

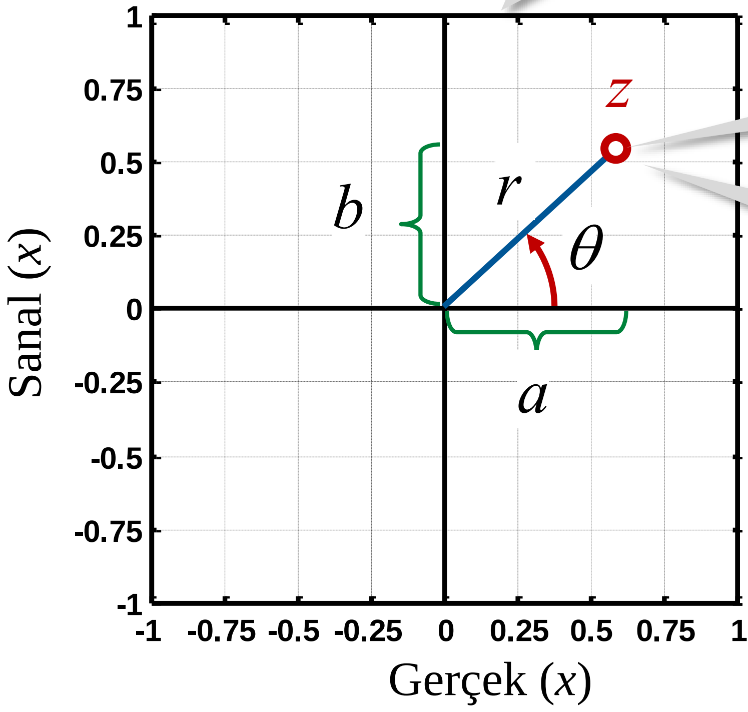


Euler sayısı, $e \approx 2.718$

Karmaşık sayılar

Kutupsal gösterim:

Karmaşık düzlem (Argand diagramı)



$z = a + i \cdot b$

$z = r \cdot (\cos\theta + i \cdot \sin\theta)$

Karmaşık düzlemde çarpma

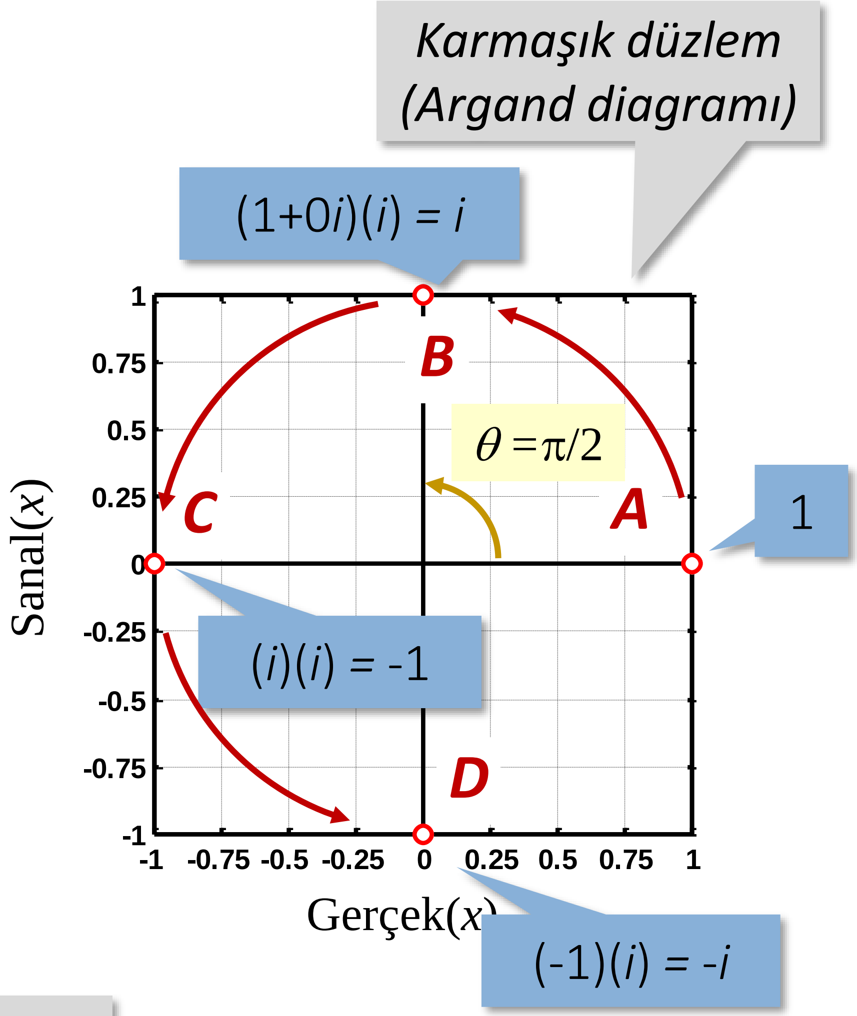
Herhangi bir sayının "i" ile çarpılması karmaşık düzlemde $\pi/2$ [rad] kadar dönme anlamına geliyor.

Temel tanım:

$$Z = r \cdot (\cos\,\theta + i \cdot \sin\,\theta)$$

Sonuç:

$$i = 1 \cdot [\cos\,(\pi/2) + i \cdot \sin\,\theta(\pi/2)]$$



Multiplication with a complex number means rotation in around the center of complex plane

e^{ix} Fonsiyonu

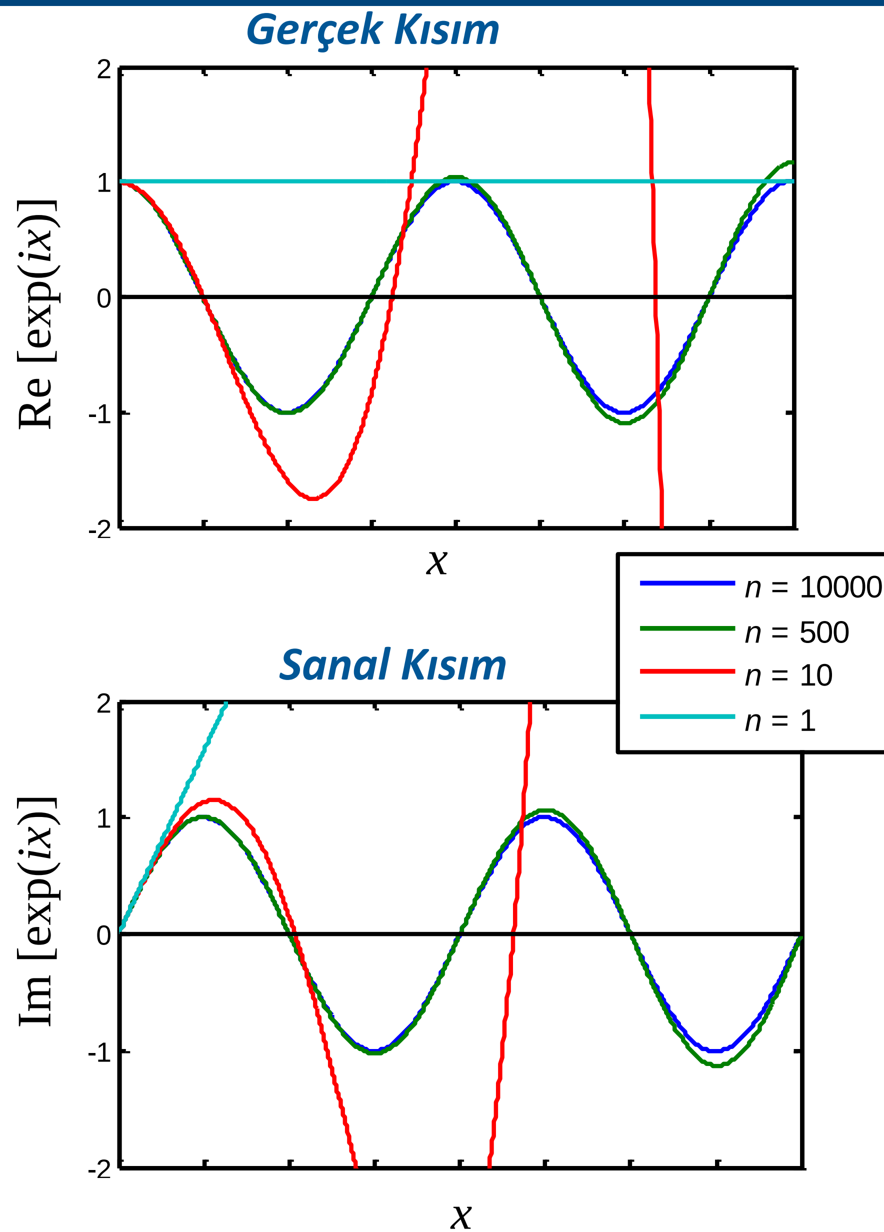
$$\exp(ix) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{ix}{n}\right)^{n}$$

Karmaşık sayıların bu çevrimsel davranış özelliği nedeniyle:

$$\mathrm{Re}[\exp(ix)] \rightarrow \cos(x)$$
$$\mathrm{Im}[\exp(ix)] \rightarrow \sin(x)$$

$$\exp(ix) = \cos x + i\sin x$$

Euler's formülü

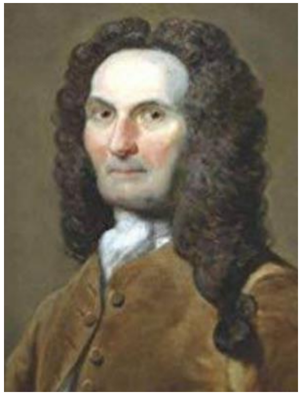


SERBEST TİTREŞEN SÖNÜMSÜZ TSDS: ANALİTİK ÇÖZÜM

Genel çözüm: $u(t) = A_1 e^{+i\omega_n t} + A_2 e^{-i\omega_n t}$

De Moivre Teoremi:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$



Abraham de Moivre
(1667 – 1754)

Euler Teoremi:

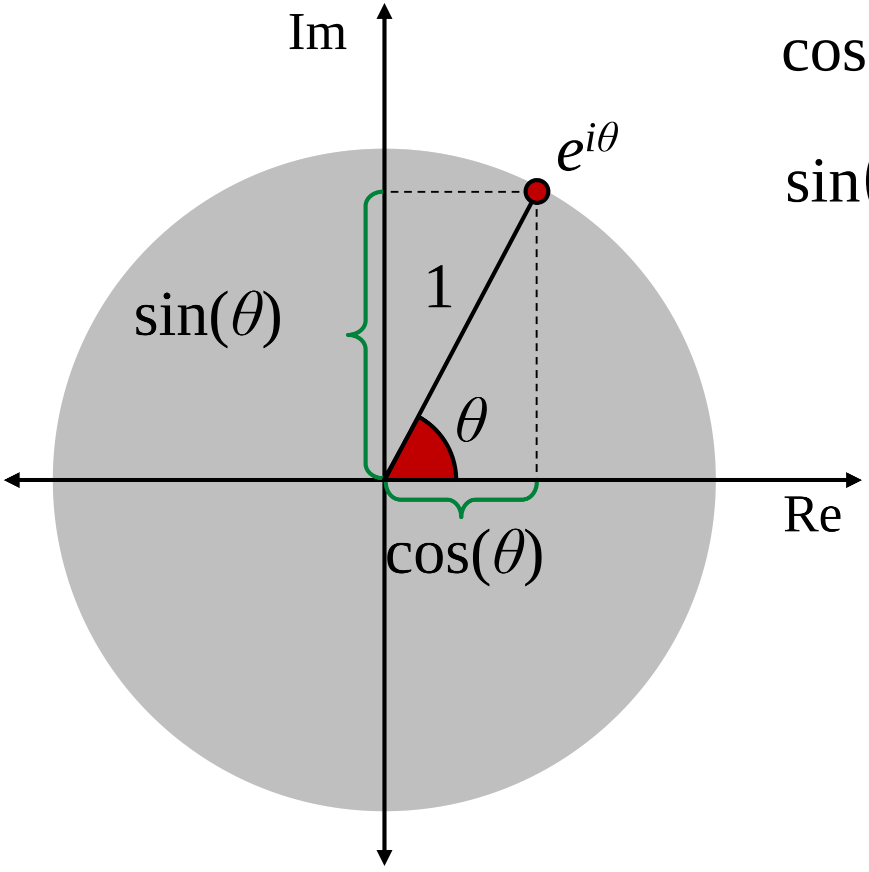
$$e^{+ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

Leonard Euler
(1707 – 1783)

EULER TEOREMİ'NİN ANLAMI

Euler Teoremi: $$e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$$



$$\cos(x) = \mathrm{Re}\left(e^{ix}\right)$$

$$\sin(x) = \mathrm{Im}\left(e^{ix}\right)$$

SERBEST TİTREŞEN SÖNÜMSÜZ TSDS: ANALİTİK ÇÖZÜM

Genel çözüm: $u(t) = A_1 e^{+i\omega_n t} + A_2 e^{-i\omega_n t}$

Karmaşık A_1 ve A_2 çarpanlarının açık ifadesi:

$$A_1 = A_{1R} + iA_{1I}$$

$$A_2 = A_{2R} + iA_{2I}$$

Gerçel kısım

İmajiner kısım

Genel çözüm: $u(t) = A_1 e^{+i\omega_n t} + A_2 e^{-i\omega_n t}$

$$u(t) = (A_{1R} + iA_{1I})(\cos\omega_n t + i\sin\omega_n t)\cdots$$
$$+(A_{2R} + iA_{2I})(\cos\omega_n t - i\sin\omega_n t)$$

$$u(t) = (A_{1R} + A_{2R})\cos\omega_n t - (A_{1I} - A_{2I})\sin\omega_n t\cdots$$
$$+i[(A_{1I} + A_{2I})\cos\omega_n t + (A_{1R} - A_{2R})\sin\omega_n t]$$

Gerçel kısım

İmajiner kısım

Yer değiştirme $u(t)$ reel olduğuna göre imajiner kısım her zaman sıfıra eşit olmalı. Sonuç olarak:

$$A_{1R} = A_{2R} \qquad A_{1I} = -A_{2I}$$

SERBEST TİTREŞEN SÖNÜMSÜZ TSDS: ANALİTİK ÇÖZÜM

Genel çözüm: $u(t) = A_1 e^{+i\omega_n t} + A_2 e^{-i\omega_n t}$

$$u(t) = (A_{1R} + A_{2R}) \cos \omega_n t - (A_{1I} - A_{2I}) \sin \omega_n t$$

$$\boxed{A_{1R} = A_{2R} = \frac{A}{2}} \qquad \boxed{-A_{1I} = A_{2I} = \frac{B}{2}}$$

$$u(t) = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t$$

A ve B katsayılarını belirlemek için sınır koşullarına ihtiyacımız var:

$$u(t) = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t$$

A ve B katsayılarını belirlemek için sınır koşullarına ihtiyacımız var:

1. Başlangıç yer değiştirmesi, $u(t=0) = u_0$

$$u(t=0) = A\underbrace{\cos(0)}_{=1} + B\underbrace{\sin(0)}_{=0} = u_0$$

$$A = u_0$$

2. Başlangıç hızı, $\dot{u}(t=0) = \dot{u}_0$

$$\dot{u}(t=0) = -\omega_n A\underbrace{\sin(0)}_{=0} + \omega_n B\underbrace{\cos(0)}_{=1} = \dot{u}_0$$

$$B = \frac{\dot{u}_0}{\omega_n}$$

SERBEST TİTREŞEN SÖNÜMSÜZ TSDS: ANALİTİK ÇÖZÜM

Yer değiştirme: $$u(t) = u_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{u}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t$$

Hareket denklemi:

$$m\,\ddot{u}(t) + k\,u(t) = 0$$

$$\ddot{u}(t) + \underbrace{\frac{k}{m}}_{=\omega_n^2} u(t) = 0$$

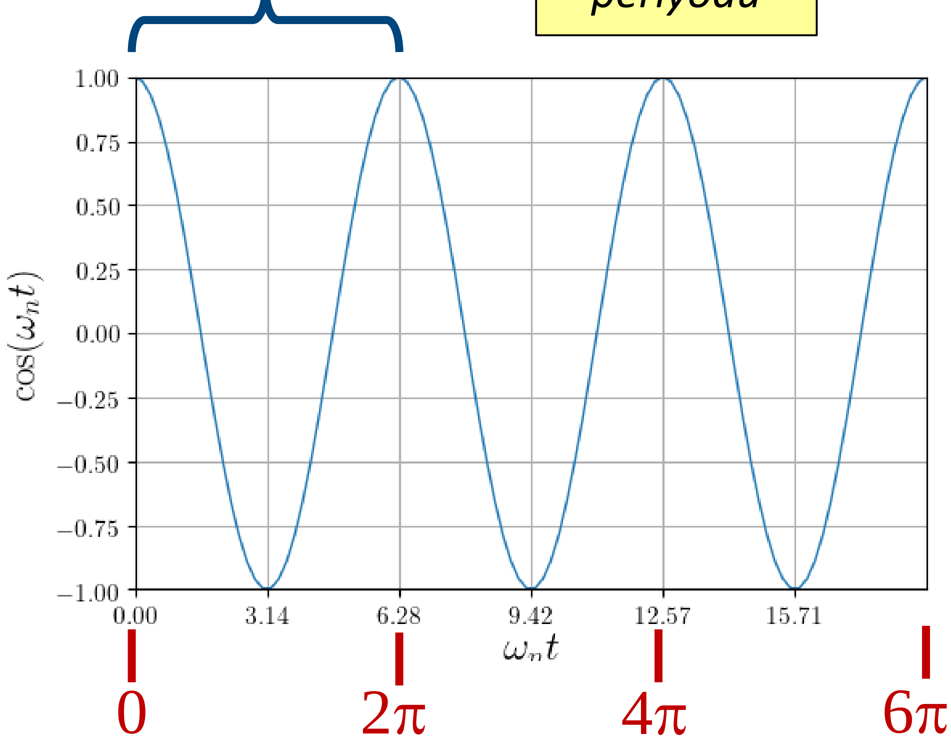
$$\ddot{u}(t) + \omega_n^2\,u(t) = 0$$

SERBEST TİTREŞEN SÖNÜMSÜZ TSDS: ANALİTİK ÇÖZÜM

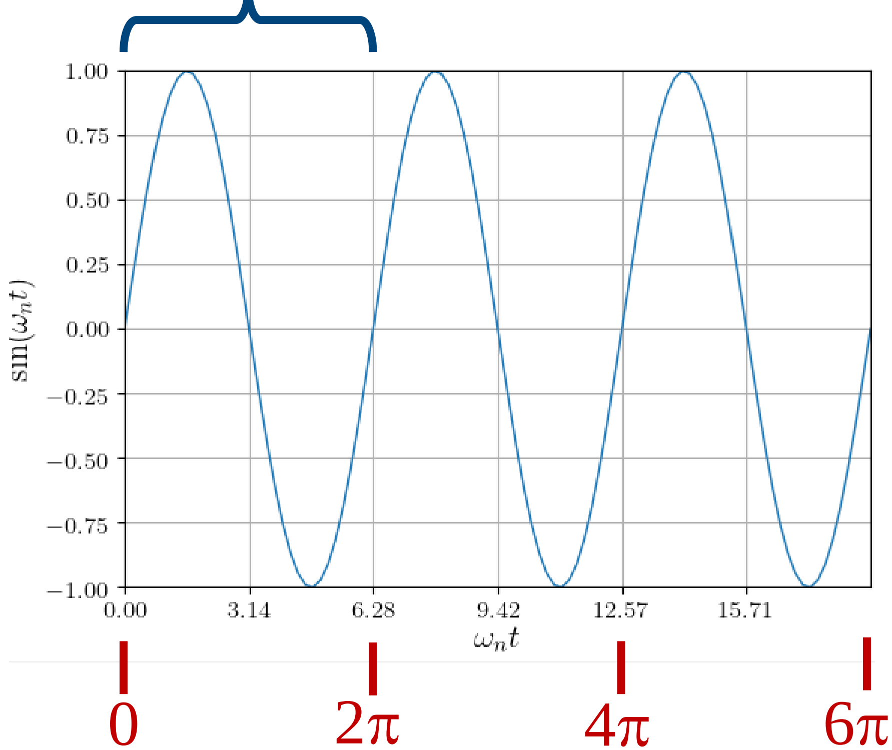
Yer değiştirme: $u(t) = u_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{u}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t$

$T_n = 2\pi/\omega_n$

Titreşim periyodu



T_n



SERBEST TİTREŞEN SÖNÜMSÜZ TSDS: ANALİTİK ÇÖZÜM

Yer değiştirme: $u(t) = u_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{u}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t$

Titreşim periyodu [s]

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Titreşim frekansı [Hz]

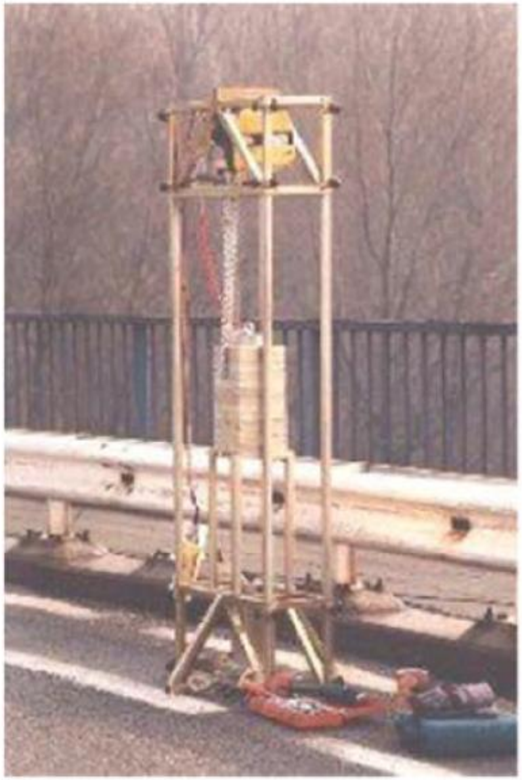
$$f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Köprü Testleri: Başlangıç yer değiştirmesi $u_0 \neq 0$

Figure 1. Free vibration tests at Vasco da Gama Bridge (left) and Millau Viaduct (right).

Cunha, A., Caetano, E., Magalhães, F., & Moutinho, C. (2012). Recent perspectives in dynamic testing and monitoring of bridges. *Structural Control and Health Monitoring*, 20(6), 853–877.

Köprü Testleri: Başlangıç impuls'u (ve hızı) $\dot{u}_0 \neq 0$



K.U. Leuven Impuls Cihazı

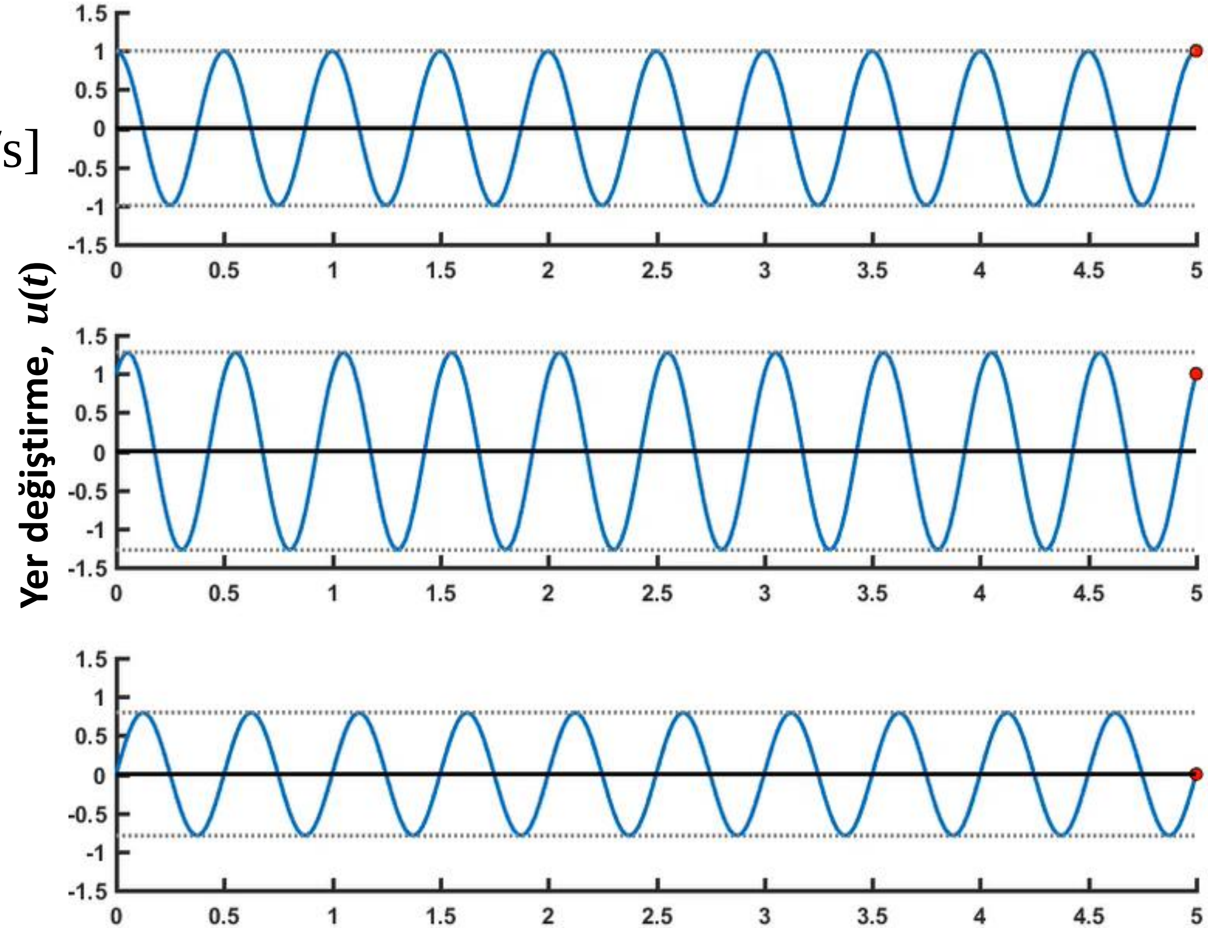
Cunha, A., Caetano, E., Magalhães, F., & Moutinho, C. (2012). Recent perspectives in dynamic testing and monitoring of bridges. *Structural Control and Health Monitoring*, 20(6), 853–877.

Yer değiştirme: $$u(t) = u_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{u}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t$$

Örnek:

$$T_n = 0.5\,[s]$$

$$\omega_n = 12.6\,[\text{rad/s}]$$



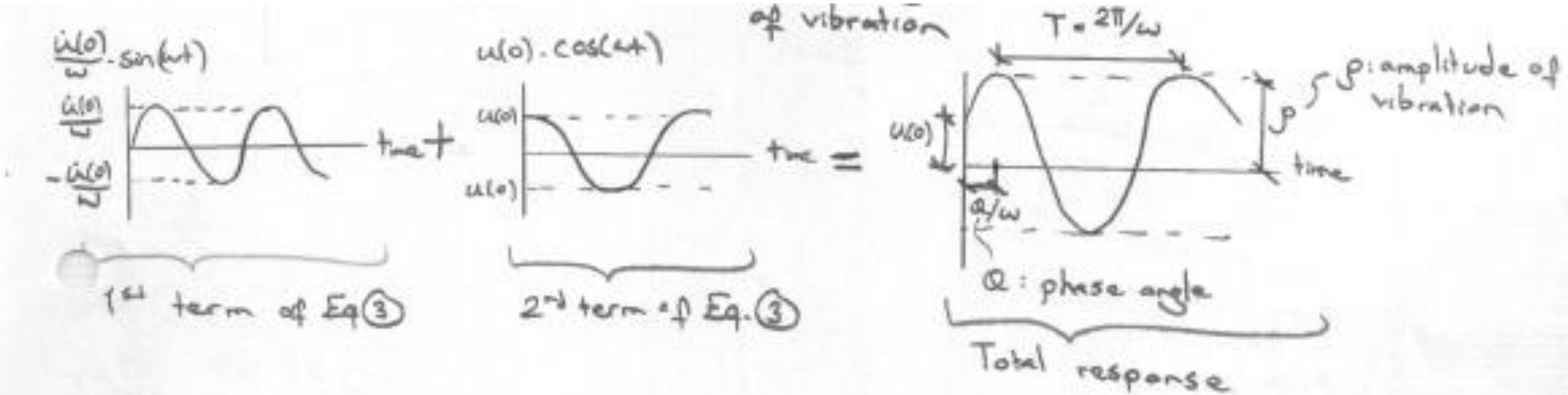
$u(0) = 1$
$\dot{u}(0) = 0$

$u(0) = 1$
$\dot{u}(0) = 10$

$u(0) = 0$
$\dot{u}(0) = 10$

TEŞEKKÜRLER

...

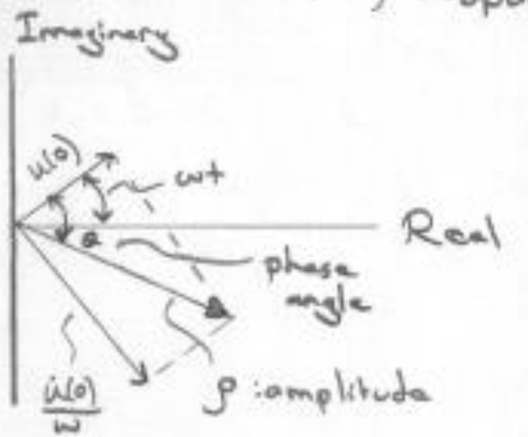

of vibration
$\frac{\dot{u}(0)}{\omega} \cdot \sin(\omega t)$
$\frac{\dot{u}(0)}{\omega}$
$-\frac{\dot{u}(0)}{\omega}$
time
+
$u(0) \cdot \cos(\omega t)$
$u(0)$
$u(0)$
time
=
$T = 2\pi/\omega$
ρ: amplitude of vibration
$u(0)$
ρ
time
θ/ω
θ : phase angle
1st term of Eq 3
2nd term of Eq. 3
Total response

Response can be written using θ and ρ, as well:

$$u(t) = \rho \cdot \cos(\omega t - \theta) \quad \text{where} \quad \rho = [u(0)]^2 + \left[\frac{\dot{u}(0)}{\omega}\right]^2 \quad \text{and}$$

$$\theta = \arctan\left[\frac{\dot{u}(0)}{\omega \cdot u(0)}\right]$$

Based on this rotation, response can be considered as a rotating vector sum:



FREE VIBRATION: UNDER CRITICAL DAMPING

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[u(0)\cos\omega_D t + \frac{\dot{u}(0) + \zeta\omega_n u(0)}{\omega_D}\sin\omega_D t\right]$$

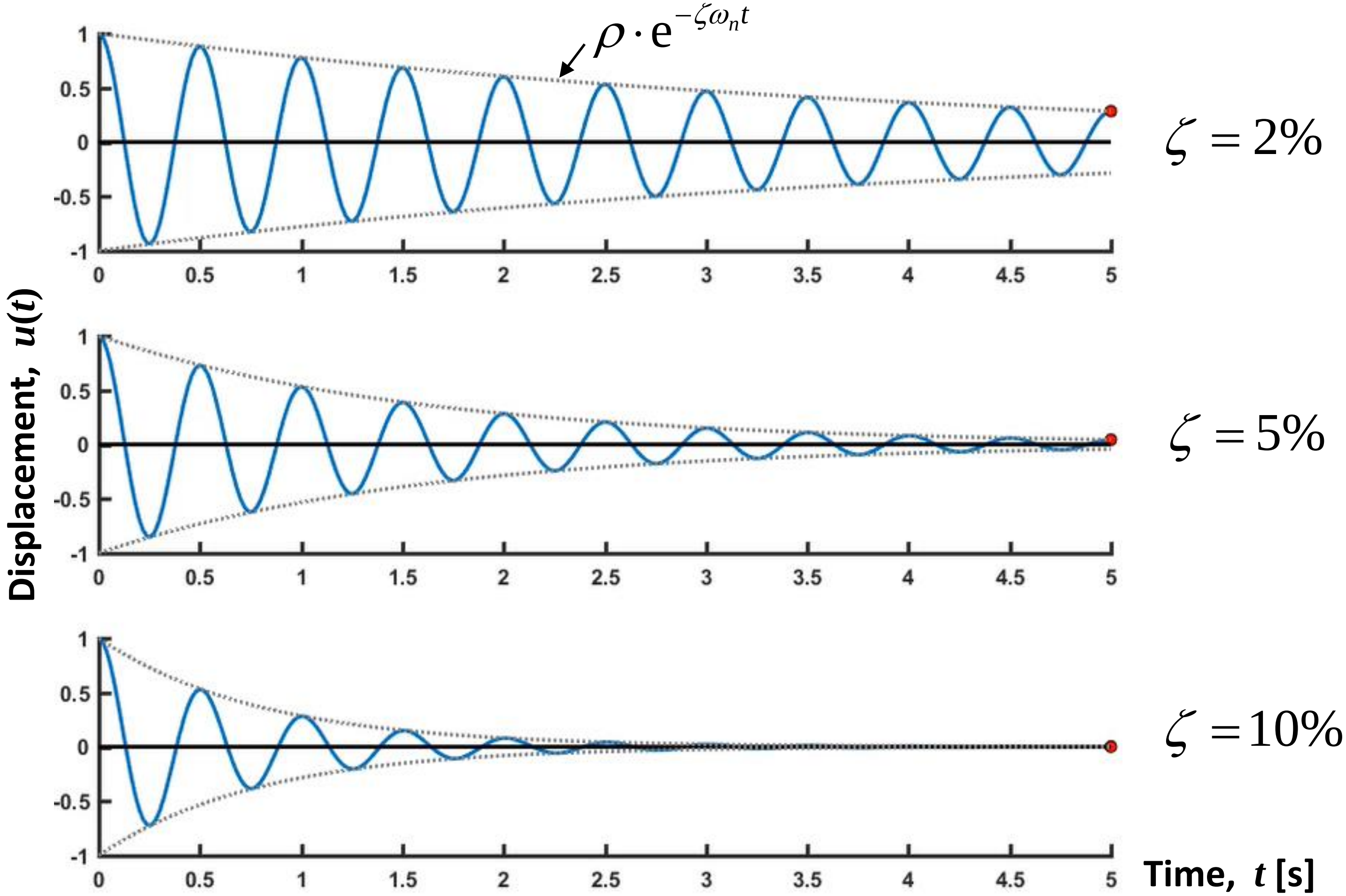
where $\omega_D = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

Example:

$T_n = 0.5\,[s]$

$u(0) = 1$

$\dot{u}(0) = 0$



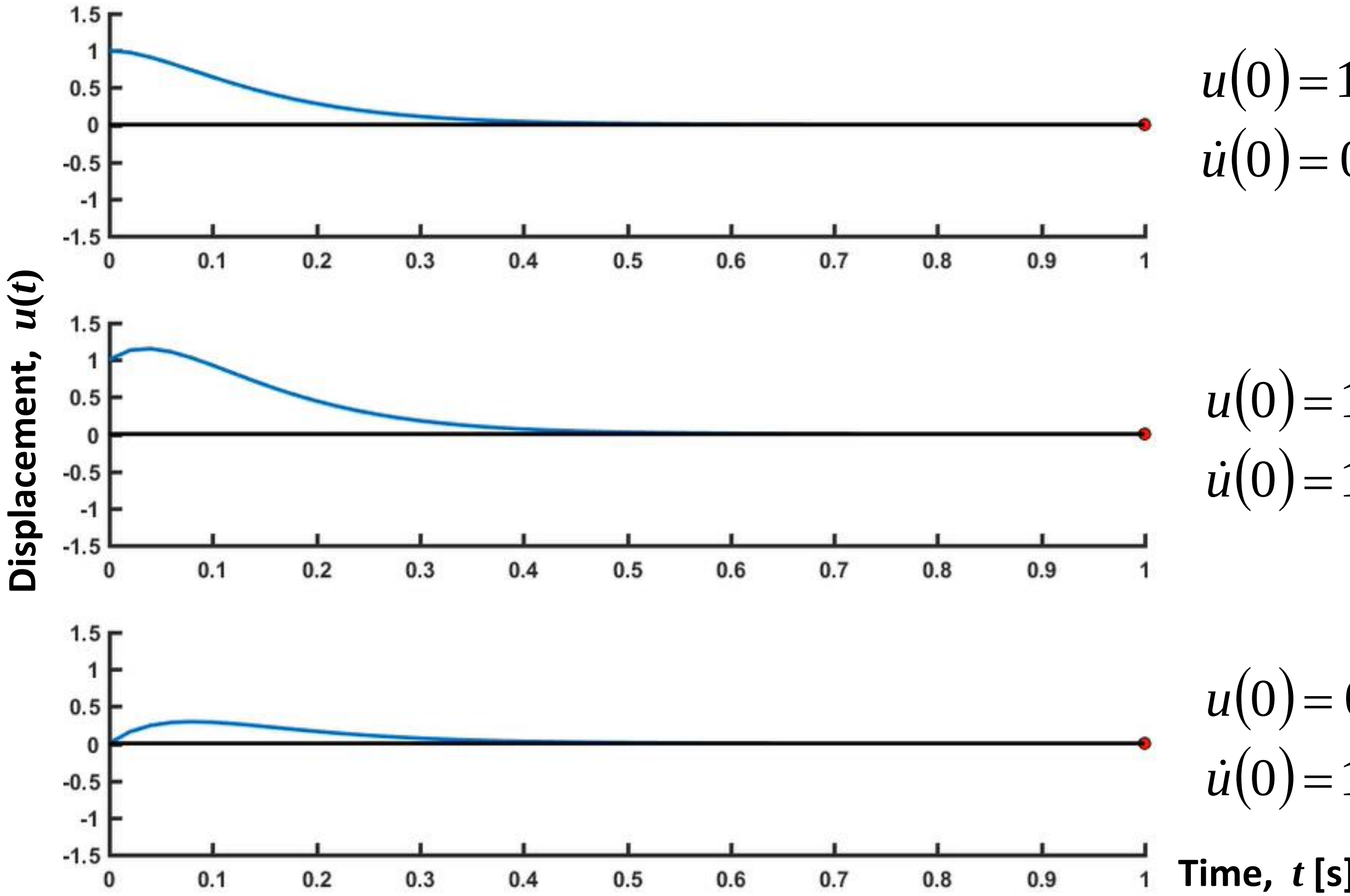
FREE VIBRATION: CRITICAL DAMPING

$$u(t) = \left[u(0)(1+\omega_n t) + \dot{u}(0)t\right]e^{-\omega_n t}$$

Example:

$T_n = 0.5\,[s]$

$\zeta = 1$



$u(0) = 1$
$\dot{u}(0) = 0$

$u(0) = 1$
$\dot{u}(0) = 10$

$u(0) = 0$
$\dot{u}(0) = 10$

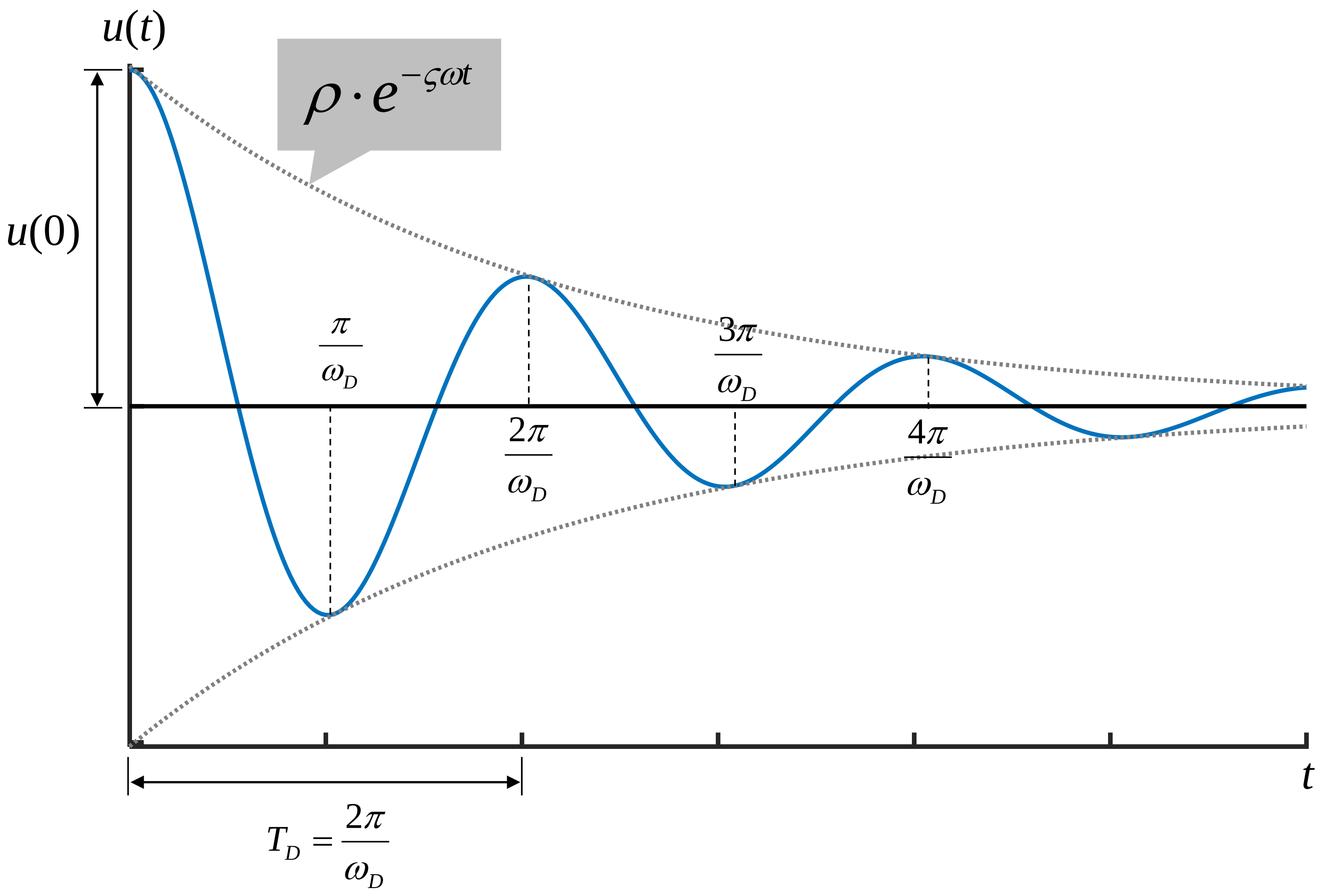
Fundamental definitions:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

DAMPED FREE VIBRATION



DAMPED FREE VIBRATION