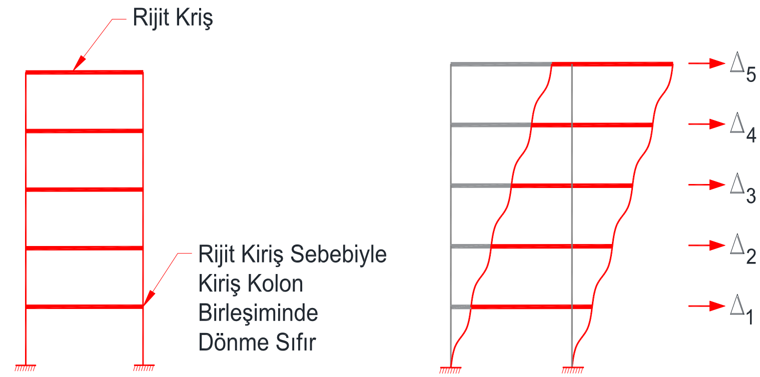
Çok Serbestlik Dereceli Sistemlerde Yer Hareketinin Modellenmesi

Doç. Dr. Cemalettin DÖNMEZ

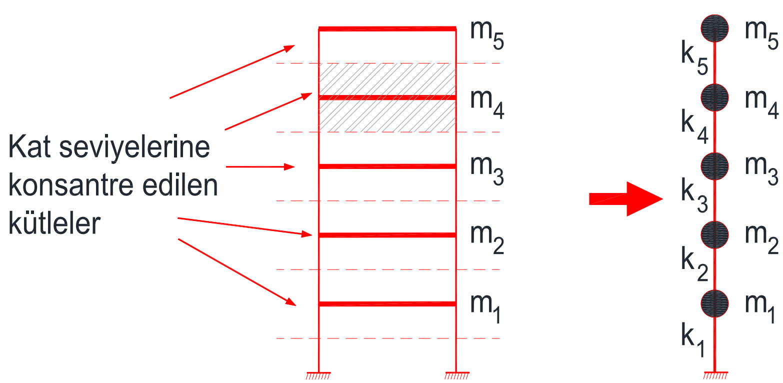
İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü

9 Eylül 2019

KAYMA ÇERÇEVESİ



KAYMA ÇERÇEVESİ

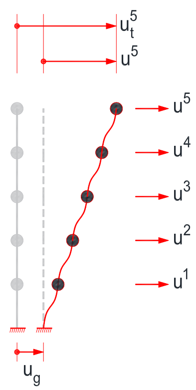


KÜTLE VE RİJİTLİK MATRİSLERİ

$$K = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 & 0 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4+k_5 & -k_5 \\ 0 & 0 & 0 & -k_5 & k_5 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_5 \end{bmatrix}$$

DİNAMİK DENGE DENKLEMİ



$\boldsymbol{u}^t(t) = \boldsymbol{u}(t) + u_g(t)\mathbf{1}$; Yer Değiştirme Vektörü

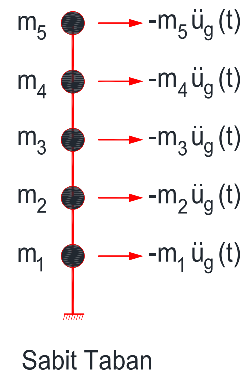
$$\mathbf{1} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$; Birim Vektör

$\boldsymbol{m}\ddot{\boldsymbol{u}}_t + \boldsymbol{c}\dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{k}\boldsymbol{u} = 0$; Dinamik Denge Denklemi

$\boldsymbol{m}(\ddot{\boldsymbol{u}}(t) + \ddot{u}_g(t)\mathbf{1}) + \boldsymbol{c}\dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{k}\boldsymbol{u} = 0$

$\boxed{\boldsymbol{m}\ddot{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{c}\dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{k}\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{m}\ddot{u}_g(t)\mathbf{1}}$

DİNAMİK DENGE DENKLEMİ



$\boldsymbol{m}\ddot{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{c}\dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{k}\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{m}\ddot{u}_g(t)\mathbf{1}$

Denklemin bu şekli yandaki gibi bir yükleme olarak düşünülebilir

DİNAMİK DENGE DENKLEMİ

$\boldsymbol{m}\ddot{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{c}\dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{k}\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{m}\ddot{u}_g(t)\mathbf{1}$

2. dereceden, homojen olmayan,sabit katsayılı, doğrusal, adi diferansiyel denklem sistemi

Denklem sistemi tipik olarak birleşik olacağından çözebilmek amacıyla basit bir yönteme ihtiyaç vardır

BİR VEKTÖRÜN BİRLEŞENLERE AYRILMASI

Bu aşamada boyutları uyan herhangi bir vektörün modal vektörlerin oluşturduğu uzayda tanımlanabileceğini hatırlatmakta fayda vardır.

$$\boldsymbol{u} = \sum_{r=1}^{N} u_r = \sum_{r=1}^{N} \Gamma_r\, \boldsymbol{m}\phi_r$$

Burada Γ_r skalar katsayılardır

$$\phi_n^t \boldsymbol{u} = \sum_{r=1}^{N} \Gamma_r = \Gamma_r\,(\phi_r^t \boldsymbol{m}\phi_r)$$

Modal vektörlerin birbirine dik olması sebebiyle

$$\Gamma_n = \frac{\phi_n^t \boldsymbol{u}}{\phi_n^t \boldsymbol{m}\phi_n}$$

n. mod katsayısı

BİR VEKTÖRÜN BİRLEŞENLERE AYRILMASI

Ör: $M = \begin{bmatrix} 30E3 & 0 & 0 \\ 0 & 30E3 & 0 \\ 0 & 0 & 30E3 \end{bmatrix}$; $K = \begin{bmatrix} 96\text{E}6 & -48\text{E}6 & 0 \\ -48\text{E}6 & 96\text{E}6 & -48\text{E}6 \\ 0 & -48\text{E}6 & 48\text{E}6 \end{bmatrix}$ N, m

$$\emptyset = \begin{bmatrix} 18.94 & -42.55 & 34.12 \\ 34.12 & -18.94 & -42.55 \\ 42.55 & 34.12 & 18.94 \end{bmatrix}$$

Tanımlanan 3 serbestlik dereceli sistemin modal vektör takımı

$\begin{bmatrix} .1 \\ -.1 \\ 0 \end{bmatrix}$ Vektörünün birleşenlerini yukaradaki sistemin modal vektörlerini bir taban olarak kullanarak tanımlayalım

BİR VEKTÖRÜN BİRLEŞENLERE AYRILMASI

Ör: $\Phi^t \boldsymbol{m} \Phi = \begin{bmatrix} 1\text{e}8 & 0 & 0 \\ 0 & 1\text{e}8 & 0 \\ 0 & 0 & 1\text{e}8 \end{bmatrix}$; $\phi_n^t \boldsymbol{m} \phi_n = 1\text{e}8$

Neden?
Genelleştirilebilir mi?

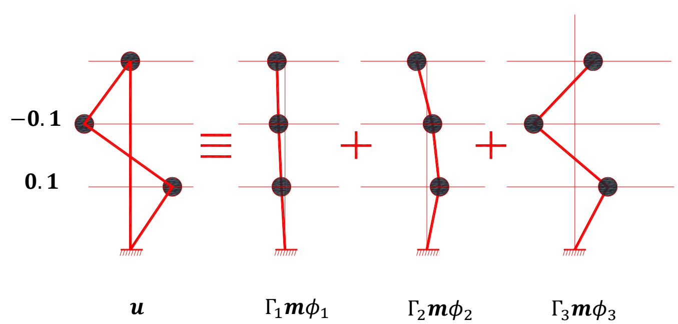
$$\begin{Bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.52 \\ -2.36 \\ 7.67 \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{u} = \Gamma_1 \boldsymbol{m}\phi_1 + \Gamma_2 \boldsymbol{m}\phi_2 + \Gamma_3 \boldsymbol{m}\phi_3 = \begin{Bmatrix} -0.0086 \\ -0.0155 \\ -0.0194 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.0301 \\ 0.0134 \\ -0.0242 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.0785 \\ -0.0979 \\ 0.0436 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0.1 \\ -0.1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

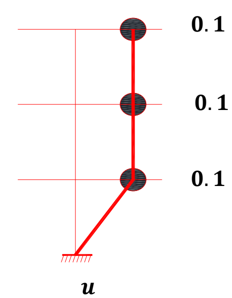
BİR VEKTÖRÜN BİRLEŞENLERE AYRILMASI

Ör:



BİR VEKTÖRÜN BİRLEŞENLERE AYRILMASI

Ör:



Bu şekildeki bir vektör hiç hangi modun etkin olacağı öngörülebilir mi?

DİNAMİK DENGE DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Bu amaçla yine denklem takımının öz vektörlerinin birbirlerine dik olmasından faydanılacaktır.

$$\boldsymbol{m}\ddot{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{c}\dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{k}\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{m}\ddot{u}_g(t)\mathbf{1}$$

$$\boldsymbol{u}(t) = \sum_{r=1}^{N} \phi_r q_r(t) = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{q}(t)$$

DENKLEMİN ÇÖZÜMÜ

$$\boldsymbol{u}(t) = \sum_{r=1}^{N} \phi_r q_r(t) = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{q}(t)$$

$$\sum_{r=1}^{N} \boldsymbol{m}\,\phi_r \ddot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^{N} \boldsymbol{c}\,\phi_r \dot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^{N} \boldsymbol{k}\,\phi_r q_r(t) = -\boldsymbol{m}\ddot{u}_g(t)\mathbf{1}$$

$$\sum_{r=1}^{N} \phi_n^{t}\boldsymbol{m}\,\phi_r \ddot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^{N} \phi_n^{t}\boldsymbol{c}\,\phi_r \dot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^{N} \phi_n^{t}\boldsymbol{k}\,\phi_r q_r(t) = -\phi_n^{t}\boldsymbol{m}\ddot{u}_g(t)\mathbf{1}$$

DENKLEMİN ÇÖZÜMÜ

$$\phi_n^{t}\boldsymbol{m}\phi_r = 0 \quad ; \quad m \neq n$$
$$\phi_n^{t}\boldsymbol{m}\phi_n = M_n \quad ; \quad m = n$$

Öz vektörlerinin birbirlerine dik olması sayesinde

$$\sum_{r=1}^{N} \phi_n^{t}\boldsymbol{m}\,\phi_r \ddot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^{N} \phi_n^{t}\boldsymbol{c}\,\phi_r \dot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^{N} \phi_n^{t}\boldsymbol{k}\,\phi_r q_r(t) = -\phi_n^{t}\boldsymbol{m}\ddot{u}_g(t)\mathbf{1}$$

$$\Downarrow$$

$$\phi_n^{t}\boldsymbol{m}\phi_n\ddot{q}_n(t) + \phi_n^{t}\boldsymbol{c}\phi_n\dot{q}_n(t) + \phi_n^{t}\boldsymbol{k}\phi_n q_n(t) = -\phi_n^{t}\boldsymbol{m}\ddot{u}_g(t)\mathbf{1}$$

$$\Downarrow$$

$$M_n\ddot{q}_n(t) + C_n\dot{q}_n(t) + K_n q_n(t) = P_n$$

$$M_n = \phi_n^{t}\boldsymbol{m}\phi_n \quad ; C_n = \phi_n^{t}\boldsymbol{c}\phi_n$$
$$K_n = \phi_n^{t}\boldsymbol{k}\phi_n \quad P_n = -\phi_n^{t}\boldsymbol{m}\ddot{u}_g(t)\mathbf{1}$$

DENKLEMİN ÇÖZÜMÜ

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}) = \sum_{n=1}^{N} \phi_n\, q_n(t)$$

N boyutlu herhangi bir vektör öz vektörler kullanarak tanımlanabilir

$$\boldsymbol{m}\mathbf{1} = \sum_{n=1}^{N} \Gamma_n \boldsymbol{m}\phi_n \quad \Rightarrow \quad \Gamma_n = \frac{\phi_n^{t}\boldsymbol{m}\mathbf{1}}{\phi_n^{t}\boldsymbol{m}\phi_n} = \frac{L_n}{M_n}$$

Mod katkı payı

$$M_n\ddot{q}_n(t) + C_n\dot{q}_n(t) + K_n q_n(t) = -\phi_n^{t}\boldsymbol{m}\ddot{u}_g(t)\mathbf{1}$$

$$\ddot{q}_n(t) + 2\zeta_n\omega_n\dot{q}_n(t) + w_n^2 q_n(t) = -\left(\frac{\phi_n^{t}\boldsymbol{m}\mathbf{1}}{\phi_n^{t}\boldsymbol{m}\phi_n}\right)\ddot{u}_g(t)$$

DENKLEMİN ÇÖZÜMÜ

$$\ddot{q}_n(t) + 2\zeta_n\omega_n\dot{q}_n(t) + w_n^2 q_n(t) = -\Gamma_n \ddot{u}_g(t)$$

Bu denklemin TSD bir sistem çözümü olduğuna dikkat çekmekte fayda var. Daha sonraki bir amaç için uygulanabilirlik yönünden bir uyarlamaya daha ihtiyaç vardır.

$$q_n(t) = \Gamma_n D_n(t)$$

$$\ddot{D}_n + 2\zeta_n\omega_n\dot{D}_n + \omega_n^2 D_n = -\ddot{u}_g(t)$$

Bu denklem fiziksel olarak hangi sistemi ifade etmektedir?

DENKLEMİN ÇÖZÜMÜ

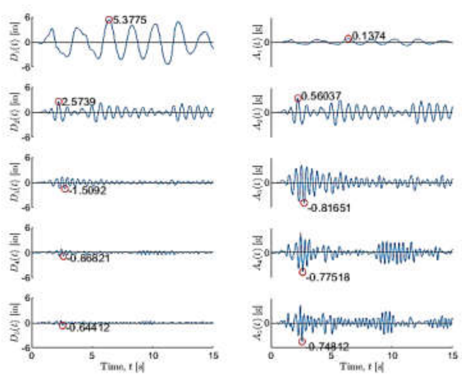
$$\boldsymbol{u}_n(t) = \Gamma_n\phi_n D_n(t)$$

n. modun sistem tepkisine olan katkısı

$$\sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{u}_n(t) = \sum_{n=1}^{N} \Gamma_n\phi_n D_n(t)$$

Çok serbestlik dereceli sistemin toplam tepkisi

DENKLEMİN ÇÖZÜMÜ



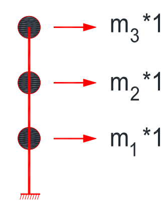
Ötelenme İvme

ETKİN DEPREM KUVVET VEKTÖRÜNÜN BİRLEŞENLERİNE AYRILMASI

$$\boldsymbol{m}\ddot{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{c}\dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{k}\boldsymbol{u} = -\boxed{\boldsymbol{m}\boldsymbol{1}}\ddot{u}_g(t)$$

Kesme çerçevesi denge denklemi

Etkin kuvvet vektörü, bu vektörün statik olduğuna dikkat ediniz



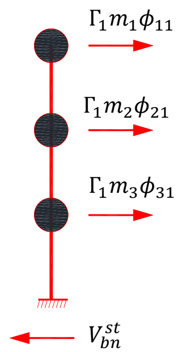
ETKİN DEPREM KUVVET VEKTÖRÜNÜN BİRLEŞENLERİNE AYRILMASI

$$\boldsymbol{m}1 = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{s}_n = \sum_{n=1}^{N} \Gamma_n \boldsymbol{m}\phi_n$$

$$\boldsymbol{s}_1 = \begin{Bmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \end{Bmatrix} = \Gamma_1 \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_1 m_1 \phi_{11} \\ \Gamma_1 m_1 \phi_{21} \\ \Gamma_1 m_1 \phi_{31} \end{bmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^{n} s_{jn} = \Gamma_n \sum_{j=1}^{n} m_j \phi_{jn}$$

Toplam taban kesme kuvveti katsayısı (birim?)



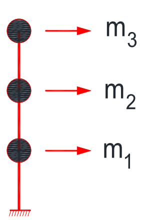
ETKİN MODAL KÜTLE

$V_{bn}(t) = V_{bn}^{st} A_n(t)$ Toplam taban kesme kuvveti

$V_{bn}(t) = M^* A_n(t)$ $\boldsymbol{M}^*$: Etkin modal kütle

N = (?). (m/s2)

MODAL KATKININ EŞDEĞER STATİK OLARAK GÖSTERİMİ



$$\boldsymbol{m}\{1\} = \sum \boldsymbol{s}_n \quad ; \quad \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{s}_n = \sum_{n=1}^{N} \Gamma_n \boldsymbol{m}\phi_n$$

Toplam Kütle: $\boldsymbol{m}\{1\} = \sum m_i$

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} s_{jn} = \Gamma_n \sum_{j=1}^{n} m_j \phi_{jn}$$

$\dfrac{s_n}{\sum m_i}$: n. modun etkin kütle oranı

MODAL KATKININ EŞDEĞER STATİK OLARAK GÖSTERİMİ

$$\boldsymbol{s_n} = \Gamma_n \sum_{j=1}^{N} m_j \phi_{jn}$$

n. modun toplam statik taban kesme kuvveti

$$\Gamma_n = \frac{\phi_n^t \boldsymbol{m}1}{\phi_n^t m \phi_n} = \frac{\sum m_j \phi_{jn}}{\sum m_j \phi_{jn}^2}$$

olduğunu hatırlarsak

$$\sum_j s_{jn} = \frac{\left(\sum m_j \phi_{jn}\right)^2}{\sum m_j \phi_{jn}^2} = s_n$$

MODAL KATKININ EŞDEĞER STATİK OLARAK GÖSTERİMİ

$$\sum_j s_{jn} = \frac{\left(\sum m_j \phi_{jn}\right)^2}{\sum m_j \phi_{jn}^2} = V_n$$

buradan

$$\Gamma_n = \frac{V_n}{\sum_j \mathrm{m}_j \phi_{jn}}$$

modal katkı payı tanımını kullanarak bu şekilde yazabiliriz

$$s_{jn} = \Gamma_n m_j \phi_{jn}$$

Modun j. kattaki statik kuvvet bileşeni (birime dikkat)

$$s_{jn} = \mathrm{V}_n \frac{m_j \phi_{jn}}{\sum_j \mathrm{m}_j \phi_{jn}}$$

V_n dağıtılmak istenen kuvvet olarak düşünülürse bu şekil kuvvet dağılımını göstermek için bir şablon oluşturuyor.

MODAL KATKININ EŞDEĞER STATİK OLARAK GÖSTERİMİ

$$f_{jn}(t) = \mathrm{V}_n \left(\frac{m_j \phi_{jn}}{\sum_j \mathrm{m}_j \phi_{jn}}\right) \ddot{u}_g(\mathrm{t})$$

İvme ile çarpım kuvvet bileşenlerini verir