

HAREKET DENKLEMLERİ

1.1 Temel Kavramlar ve Tanımlar

Kütle, uzunluk, zaman ve kuvvet, dinamikte kullanılan dört temel bileşendir. Bu bileşenler birbirlerinden bağımsız olmayıp, temel olarak Newton'un hareket yasaları üzerinden ilintilidirler. Hangi üçünün bağımsız olarak değerlendirildiği genellikle bu fiziksel ifadeleri sayıya dökmekte kullanılan birimlerin tanımlanması sırasındaki önceliklerle ilgili olarak değişir.

Uzunluk ve zaman, mekân ve olayların sıralamasını tanımlayan, insanların çevreleri ile etkileşimlerinde algıları sayesinde kolay içselleştirebildiği kavramlardır. Newton mekaniğinde bu iki kavram da 'değişmez' kabul edilir, yani dünyadaki bir saat ve cetvel ile başka bir ortamda aynı cihazlarla yapacağınız uzunluk ve zaman ölçümleri arasında fark olmayacağı varsayılır.

Maddenin miktarına ilişkin bir kavram olan kütle, ağırlık hissi ile doğrudan ilintili olması dolayısıyla kuvvete kıyasla daha kolay içselleştirilebildiğinden (daha az soyut olduğundan), çoğu kez üçüncü temel bileşen olarak kabul edilir. Kütle, uzunluk ve zaman verilirse bu durumda 'kuvvet' diye adlandırılan, fiziksel karşı koyuş dolayısıyla hissedilebilen ama etkimesi için temasa gerek olmayan, temelde soyut bir kavram tanımlanabilir. Newton mekaniğinin başarısı, bu soyutlama ile birlikte cisimlerin iç ve dış etkiler altında zaman içinde nasıl hareket edeceğini tanımlayan ve deney sonuçları ile makul ölçüde örtüşen fizik yasalarını ortaya koyabilmiş olmasıdır.

Yapılarda kuvvetten söz edilirken, dış ve iç kuvvetler ayırımına sıkça rastlanır. Dış kuvvetler ile genelde yapıda gözlenen şekildeğişimden [deformasyon] bağımsız yük etkileri kast edilir. Örneğin bir konsol kirişin ucuna asılı tekil yük, kirişin tepkisinden bağımsız biçimde aynı şiddeti ve yönü koruyacak bir dış yüküdür. İç kuvvetler ise yapıda oluşan şekildeğişimlerle bağlantılıdır. Yukarıdaki kiriş örneğinde mesnette oluşacak kesme kuvveti ve moment, iç kuvvet olarak sınıflandırılacak niceliklerdir. Dış kuvvetlerin modellenmesi, mühendislikte büyük önem taşıyan, oldukça zor bir konudur. İç kuvvetlerin hesabı ise incelenen yapının modellenmesini gerektirir. Yapı dinamiğinde dış yüklerin dışında yapıda oluşacak tepkileri belirleyen üç temel bileşenden söz etmek mümkündür: kütle, rijitlik ve sönüm.

Kütle, yapının ivmelenmesi ile doğrudan ilintili kuvvetleri belirler. Tekil bir m kütlelerinde oluşacak ivme, Newton'un hareket yasasına göre, üzerine etkiyen kuvvetin kütleyle bölünmesi ile hesaplanır. Dolayısıyla deprem nedeniyle harekete geçen bir yapıdaki kütlelerde ortaya çıkan ivmelerin yapıda kuvvet etkileri yarattığı ve bu etkilerin yapı elemanlarınca karşılanması gerektiği düşünülürse, büyük kütlelerin ivmelenmesinin yapıyı zorlayıcı ve statik hesapta dikkate alınmayan yükler ortaya çıkaracağı anlaşılar.

Rijitlik, yapının taşıyıcı sisteminin harekete karşı koymasının bir ölçüsüdür. Hareket sırasında ortaya çıkan ötelenme ve dönmeler yapı elemanlarını şekil değiştirmeye zorlar, elemanlarda oluşan iç kuvvetler ise bu zorlamaya direnç gösterir. Genelde yapı elemanlarında yük ve şekildeğişim [deformasyon] arasındaki ilişkinin yükleme hızından bağımsız olduğu kabul edilir ve bu nedenle söz konusu direncin yalnız yerdeğişime [deplasmana] bağlı olduğu modeller kullanılır. Eğer yük etkisi ortadan kalktıktan sonra o yük etkisi nedeniyle oluşmuş tüm şekildeğişim ortadan kalkıyorsa bu durumda yapı elemanının elastik davrandığı söylenir. Öte yandan kimi yüklemeler altında yapı elemanının çeşitli bölgelerinde akma ortaya çıkar; böylesi durumlarda kalıcı şekildeğişimler gözlenir ve elastikötesi davranıştan söz edilir. Küçük şekildeğişim miktarlarında yük ve şekildeğişim arasındaki ilişki doğrusal olur ve yapı davranışı doğrusal elastik ya da kısaca doğrusal olarak adlandırılır. Yapının rijitliği, yük ve şekildeğişim arasındaki ilişkiyi tanımladığından ve yükleme hızından bağımsız olduğu kabul edildiğinden, statik hesapla belirlenir; kütle, sönüm ve yükün niteliğinden bağımsızdır.

Sönüm, yapının hareket sırasında enerji tüketebilme yetisini tanımlar. Enerji tüketimi mikro ölçekten makro ölçeğe geniş bir yelpazede çeşitli olgulara dayanır, ancak bu olguların doğrudan dikkate alınması büyük yapılar için mümkün değildir. Bu nedenle çoğu kez, basit olmakla birlikte gözlemlerle uyumlu bir davranış ortaya çıkartan doğrusal viskoz sönüm modeli kullanılır. Kısaca viskoz sönüm olarak anılacak bu yaklaşımda sönüm nedeniyle ortaya çıkacak direnç kuvvetleri, şekildeğişim hızı ile doğru orantılı kabul edilir.

Bununla birlikte aradaki ilişkiyi tanımlayan katsayılar, kütle ve rijitliğin aksine, yapının geometrisi ve malzeme özelliklerinden çıkarsanamaz; dolayısıyla ya yapı üzerinde gerçekleştirilecek deneylerle ya da benzer yapılarda benzer yük seviyelerinde daha önce gözlenmiş değerlerden yola çıkarak belirlenmeleri gerekir.

Statik yükleme altında çözümlemede yapıya etkitilen yüklerin şiddetleri belirleyici olur. Bununla birlikte dinamik yüklemede, yüklerin şiddeti kadar ve hatta kimi durumda çok daha fazla olmak üzere yüklerin zaman içinde nasıl değiştiği de belirleyicidir. Dinamik çözümlemede kullanılabilecek yaklaşımlar iki ana başlıkta toplanır: zaman tanım alanında çözümleme ve frekans tanım alanında çözümleme. Zaman tanım alanında çözümlemede, yük, yerdeğişim, hız ve ivme arasındaki ilişkileri tanımlayan türevsel denklemlere dayanarak bir tepki niceliğinin (örneğin belirli bir noktanın ötelenmesi ya da belirli bir kesit üzerindeki eğilme momenti) zaman içinde nasıl değiştiğinin belirlenmesi esastır. Bir yük etkisinin zaman içinde değişimini gösteren eğriye (ya da bu eğri üzerinde yer alan noktaları belirleyen zaman - yük değeri çiftlerine) yük tarihçesi, bir tepki niceliğinin zaman içinde değişimini gösteren eğriye (ya da bu eğri üzerinde yer alan noktaları belirleyen zaman - tepki değeri çiftlerine) ise tepki tarihçesi denir.

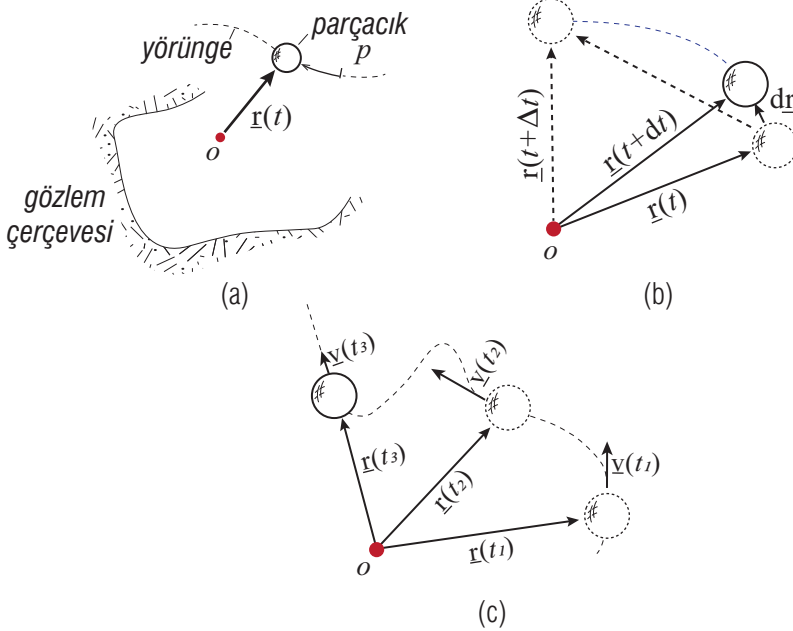
1.2 Hareketin Geometrisi

Mekanikte en sık başvuru alan modellerden biri, kütlelerinin boyutsuz bir noktada toplandığı varsayılan parçacıktır. Gerçekte böylesi bir boyutsuz nokta söz konusu olmasa da, gözlemlenen kütle ele alınan problemin boyutlarına kıyasla çok küçükse veya kütlelerin hareketi küçümsenmesi dikkate almayı gerektirmiyorsa, bu durumlarda kütleli tek bir nokta ile temsil etmek kabul edilebilir bir yaklaşımdır.

Bir parçacığın hareketinin gözlemlenmesi, bu gözlemin yapılacağı bir gözlem çerçevesinin varlığını gerektirir. Ölçüm kıyaslama gerektirir ve gözlem çerçevesi de fiziksel değişkenlerin ölçümüne olanak sağlayan yapıdır. Bir parçacığın hareketini dünya üzerinden gözlemleyen bir kişi, ölçümlerinde dünyayı esas alacaktır: örneğin kendisi dünya üzerinde sabit dururken bir arabanın düz bir çizgi üzerinde yanından geçtiğini gören kişi, arabanın yönü ve hızı gibi olgular hakkında kendine ve çevresine kıyasla bir takım çıkarımlarda bulunur. Oysa hem gözlemi yapan kişi hem de gözlenen araba, dünya gerek güneş sistemi ile birlikte uzayda ilerlerken gerek güneş çevresindeki yörüngesinde gerek kendi etrafında dönerken onunla birlikte hareket ederler. Dolayısıyla dünya dışında, mesela ayda yaşayan bir gözlemci için dünya üzerinde hareket eden bir parçacığın hareketi, dünya üzerinde yaşayan bir gözlemcinin ölçtüğünden oldukça farklı olacaktır. Gözlem çerçevelerinin bu farklılığı sıradan bir tespit gibi

gözökmekle birlikte ciddi ve çarpıcı bir soruyu gündeme taşır: Sonsuz sayıda gibi gözöken gözlem çerçeveslerinden hangisini esas almak gerekir; ya da, bir başka deyişle, hareket yasaları olarak ileride göreçğimiz önermeler her gözlem çerçevesinde geçerli midir?

Newton mekaniğinde hareket yasalarının geçerli olduğı bir eylemsiz gözlem çerçevesinin varlığı kabul edilir. Böylesi bir çerçeve, mutlak anlamda hareketsiz duracak ya da sabit bir hızla ötelenme hareketi yapıyor olacaktır; yani söz konusu olan, ivmelenmeyen bir gözlem çerçevesidir. Dünya bu tanıma uymasa da hatalar gözlem çerçevesinin ivmeleri ile ilintili olduğundan, incelenen olgularda beklenen ivmeler dünyanın hareketi nedeniyle oluşacaklara kıyasla oldukça baskınsa, dünyanın gözlem çerçevesi olarak kullanılması büyük sorun yaşatmayabilir.



ŞEKİL 1.1: Hareket eden parçacık.

Eylemsiz bir gözlem çerçevesinde sabit duran gözlemcinin Şekil 1.1'de üzerinde gösterilen ve belirli bir yörünge üzerinde hareket eden p parçacığının hareketini takip etmesi, her t anında parçacığın kendisine göre konumunu, yani $\underline{r}(t)$ ile belirtilen konum vektörünü bilmesi demektir. Her vektör gibi konum

vektörünün de bir büyüklüğü ve yönü vardır; dolayısıyla konum vektörünü zamanda izlemek, hem bu vektörün büyüklüğünde, yani o ve p noktaları arasındaki mesafede, hem de o noktasından başlayıp p noktasına doğru uzanan ok parçasının yönünde zaman içinde oluşacak değişiklikleri takip etmek anlamına gelir.

Aynı gözlem çerçevesinde \underline{r} vektörünün zaman göre birinci türevi, parçacığın o gözlem çerçevesinde anlık hız vektörünü verir:

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} \quad (1.1)$$

Şekil 1.1'de gösterilen adımlardan çıkarsanabileceği üzere hız vektörü, her an yöründeğe teğet olacaktır.

Hız vektörünün zamana göre birinci, dolayısıyla konum vektörünün zamana göre ikinci türevi de parçacığın o gözlem çerçevesindeki anlık ivme vektörünü verir:

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d^2\underline{r}}{dt^2} = \underline{a} \quad (1.2)$$

Genel durumda ivme vektörünün hem yörüngeye teğet ve hem yörüngeye eğrilğine bağlı olarak merkezci bileşeninden söz etmek mümkündür. İvmenin teğet bileşeni, hızın artması, merkezci bileşeni ise hızın (yörüngeye hep teğet kalması için) yönünün değişmesi ile ilintili olacaktır.

Parçacığın konum vektörü, zaman dışında belirli sayıda değişkene bağlı olacaktır. Bir sistemin hareketi tümüyle tanımlamakta kullanılabilecek bağımsız değişkenlere sistemin serbestlikleri, bu değişkenlerin sayısına ise sistemin serbestlik derecesi adı verilir. Bu serbestlikler q_i simgesi ile gösterilecek olursa, burada incelenecek sistemler için aşağıdaki genel bağımlılıklar geçerli olacaktır:

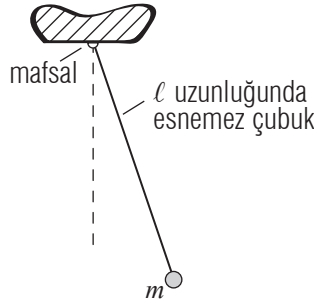
$$\underline{r} = \underline{r}(q_i, t); \quad \underline{v} = \underline{v}(q_i, \dot{q}_i, t); \quad \underline{a} = \underline{a}(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, t) \quad (1.3)$$

Yukarıdaki bağlantılarda olduğu gibi metnin geri kalanında bir değişkenin üzerindeki nokta, o değişkenin zaman göre nokta sayısı kadar türevini ifade etmektedir. Bu simgeleştirme ile konum, hız ve ivme arasındaki bağıntılar da aşağıdaki biçimi alacaktır:

$$\underline{a} = \dot{\underline{v}} = \ddot{\underline{r}} \quad (1.4)$$

1.2.1 Basit Sarkaç

Ucunu m kütlesi asılı, diğer ucundan mafsalla tutturulduğu nokta etrafında serbestçe dönebilen kütsesiz bir çubuktan oluşan basit sarkaç, şimdiye kadar sözü edilen nicelikleri gözde canlandırabilmek için oldukça bilinen bir örnektir. ℓ uzunluğunda böylesi bir sarkaç, Şekil 1.2'de gösterilmiştir.



ŞEKİL 1.2: Basit sarkaç.

Şekil 1.2, problemin başlangıç halidir. Bu aşamada bile birçok modelleme varsayımı (kütlesizlik, esnemezlik, mafsal bağlantı gibi) barındıran problemi matematiksel olarak incelemeye başlayabilmek için bir takım nicelikleri tanımlamak gerekir. İlk soru, bu problemde takip edilmek istenen cismin konumunu her an belirleyebilmek için kaç değişkene ihtiyaç olduğudur. Bir düzlem üzerinde hareket eden tek bir parçacığı takip etmek, en genel durumda iki bağımsız koordinatla başarılabilir. Örneğin Şekil 1.3(a)'da görülen x ve y koordinatları bu iş için oldukça uygundur ve bu koordinatlar yardımıyla parçacığın o noktasına göre konumu,

$$\underline{r} = x \underline{i}_x + y \underline{i}_y \quad (1.5)$$

vektörüyle ifade edilir. Burada x ve y zaman içinde değişir, ancak birim vektörler \underline{i}_x ve \underline{i}_y zaman içinde hem büyüklüklerini hem de yönlerini korurlar.

İlk bakışta makul gözükse de bu yaklaşımda göz ardı edilen, x ve y değişkenlerinin birbirlerinden bağımsız olmayışıdır. Parçacık ile o noktası arasındaki mesafe her an ℓ kadar olduğundan, koordinatlar herhangi bir t anında,

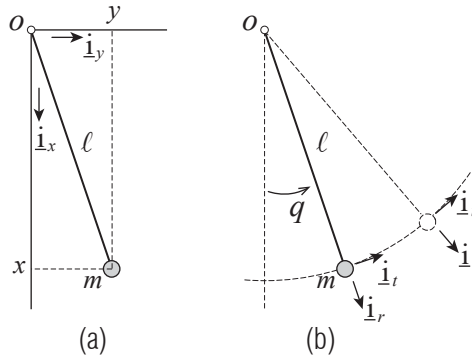
$$x^2 + y^2 = \ell^2 \quad (1.6)$$

bağıntısını sağlarlar. Koordinatlar arasında böylesi ilişkileri tanımlayan bağıntılara kısıt denklemleri denir ve her bir kısıt denklemi aslında serbestlik derecesini azaltır. Örneğin tek bir parçacığın uzayda hareketinin takibi üç koordinatın bilinmesini gerekli kılar. Eğer parçacık buradaki gibi bir düzlem üzerinde hareket ediyorsa o durumda $z = 0$ gibi bir kısıt denkleminden söz edilmektedir ve takip gerektiren koordinat sayısı ikiye iner. Bir de parçacığın bir çember üzerinde hareketi söz konusu ise, o durumda da Denklem (1.6)'deki

kısıt denklemi dolayısıyla bağımsız koordinat sayısı bire iner. Dolayısıyla sarkaç, tek serbestlik dereceli bir sistemdir. Bu durumda parçacığın hızı,

$$\underline{v} = \dot{x} \underline{i}_x + x \frac{d \underline{i}_x}{dt} + \dot{y} \underline{i}_y + y \frac{d \underline{i}_y}{dt} = \dot{x} \underline{i}_x - \frac{x \dot{x}}{\sqrt{\ell^2 - x^2}} \underline{i}_y \quad (1.7)$$

olacaktır. Birim vektörlerin zaman göre türevinin sıfır olması işlemlerde kolaylaştırıcı olsa da, x y y arasındaki bağımlılık türev mertebesi arttıkça karmaşıklığı arttıracaktır.



ŞEKİL 1.3: Basit sarkaç için serbestlikler.

Sarkaç için daha makul bir seçim, problemi tanımlamak için sarkaçın düşey ile yaptığı q açısını genelleştirilmiş koordinat olarak kullanmaktır. Bu açı bilindiğinde istenirse x ve y koordinatları,

$$x = \ell \cos q, \quad y = \ell \sin q$$

bağıntılarından kolayca hesaplanır. Vektör kurgusunda ise kütlenin o noktasına göre konumu,

$$\underline{r}(t) = \ell \underline{i}_r$$

biçiminde ifade edilebilir. Ancak zaman göre türev alındığında, örneğin hız için,

$$\underline{v}(t) = \frac{d \ell}{dt} \underline{i}_r + \ell \frac{d \underline{i}_r}{dt} = \ell \frac{d \underline{i}_r}{dt}$$

elde edilir. Bu yaklaşımda karmaşıklığı getiren, Şekil 1.3(b)'de görüldüğü gibi birim vektörlerin doğrultularının sabit olmaması, dolayısıyla bunların zamana göre türevlerinin sıfırdan farklı olmasıdır. Öte yandan birim vektörlerin türevleri

görece kolaylıkla hesaplanabilir. Bunun için cebirsel yaklaşım izlenecek olursa, r ve t doğrultularındaki birim vektörler ile sabit x ve y doğrultularındaki birim vektörler arasındaki ilişkilerin,

$$\begin{aligned}\hat{i}_r &= \hat{i}_x \cos q + \hat{i}_y \sin q \\ \hat{i}_t &= -\hat{i}_x \sin q + \hat{i}_y \cos q\end{aligned}$$

olduğu belirlendikten sonra, bu ifadelerde türev işlemi gerçekleştirilerek,

$$\begin{aligned}\frac{d \hat{i}_r}{dt} &= -\dot{q} \hat{i}_x \sin q + \dot{q} \hat{i}_y \cos q = \dot{q} \hat{i}_t \\ \frac{d \hat{i}_t}{dt} &= -\dot{q} \hat{i}_x \cos q - \dot{q} \hat{i}_y \sin q = -\dot{q} \hat{i}_r\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla sarkaç kütesinin hızı ve ivmesi aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\underline{v}(t) = \ell \frac{d \hat{i}_r}{dt} = \dot{q} \ell \hat{i}_t \quad (1.8)$$

$$\underline{a}(t) = \frac{d \dot{q}}{dt} \ell \hat{i}_t + \dot{q} \ell \frac{d \hat{i}_t}{dt} = \ddot{q} \ell \hat{i}_t - \dot{q}^2 \ell \hat{i}_r \quad (1.9)$$

1.3 Hareket Denklemlerinin Türetilmesi

Hareket denklemleri türetilirken en temel ilke, Newton'un parçacık için öne sürdüğü hareket yasasıdır:

$$\underline{f}(t) = \frac{d m \underline{v}(t)}{dt} = m \underline{a}(t) \quad (1.10)$$

Denklemden yer alan \underline{f} , parçacığa t anında etkiyen tüm kuvvetlerin bileşkesidir. Her ne kadar son eşitlik burada incelenecek sistemler için her zaman geçerli olacaksa da aslında momentumdaki değişimin dikkate alınması gerektiği ve kütle değişen sistemlerde son eşitliğin geçerli olmayacağını vurgulamak gerekir.

d'Alembert ilkesi, herhangi bir anda büyüklüğü parçacığın kütlesi ile ivmesinin şiddetinin çarpımı kadar, yönü ise ivmenin tersi yönde olan bir kuvvet etkitildiğinde, parçacığın o an için statik dengede olacağı söyler. Bu durumda hareket denklemi, $\underline{f}_d = -m \underline{a}$ için,

$$\underline{f}(t) + \underline{f}_d = \underline{0} \quad (1.11)$$

olacaktır. Her ne kadar matematiksel olarak tümüyle aynı denklemden söz ediliyor olsa da, problemi anlık bir statik probleme dönüştürmek, sanal iş gibi statik denge durumları için geliştirilmiş farklı yaklaşımların uygulanabilmesini

sağlar. Bu sebeple bu basit dönüşüm önemli bir yaklaşım farkına işaret etmektedir ve d'Alembert ilkesine sıklıkla başvurulur. Üstelik, tek bir parçacık yerine bir parçacık topluluğundan söz edildiğinde dahi aynı ilke gereği hareket denklemlerini kurgulamak easa olarak aynı temel yaklaşıma dayanır. Öte yandan Newton'un parçacık yasasının parçacık topluluklarına genelleştirilmesi, doğrusal ve açısal momentum üzerinden, Euler'in hareket denklemleri vasıtasıyla olur.

Burada sözünü edeceğimiz son yaklaşım, enerji temelli Lagrange denklemleridir. Bu yaklaşımın ayrıntılarını aktarmak için sistemin (tek bir parçacık ya da parçacık topluluğu) n tane serbestliği olduğunu varsayalım ve genelleştirilmiş koordinatları q_1, q_2, \dots, q_n ile gösterelim. Tüm sistemin takibi için bu koordinatlar yeterli olacağından, sistemin kinetik enerjisi \mathcal{T} ve potansiyel enerjisi \mathcal{V} , burada incelenen mekanik sistemler için genelleştirilmiş koordinatlara ve hızlara bağlı olacaktır:

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}(q_i, t), \quad \mathcal{T} = \mathcal{T}(q_i, \dot{q}_i, t)$$

Korunumlu kuvvetlerin hepsi potansiyel içinde ifade edilir. Korunumsuz kuvvetlerin bir genelleştirilmiş koordinatta δq_i kadar değişim olduğunda yaptığı iş ise, $\bar{W}_i = \mathcal{F}_i \delta q_i$ olsun (genelleştirilmiş koordinatlar bağımsız ise bu işlem her biri için ayrı ayrı yapılabilir). Bu durumda Lagrange denklemleri, her bir genelleştirilmiş koordinat ($i = 1, 2, \dots, n$) için, aşağıdaki gibidir:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_i} = \mathcal{F}_i \quad (1.12)$$

Enerji sayıl (skaler) bir büyüklük olduğundan bu denklemleri kurgulamak karmaşık sistemler için görece kolaylık sağlayacaktır.

1.3.1 Basit Sarkaçın Hareket Denklemleri

Yukarıdaki yaklaşımları basit bir örnek üzerinden aktarmak adına öncelikle tek bir parçacıktan oluşan basit sarkaçı ele alalım. Sarkaç hareketinin geometrisi, hatırlatma amaçlı olarak Şekil 1.4(a)'da verilmiştir.

Newton'un hareket yasasına göre bileşke kuvvetin hesabı gerekmektedir. Bunun için önce sistemin serbest cisim diyagramı çizilerek tüm etkiyen kuvvetlerin tespiti gerekir. Şekil 1.4(b)'de sarkaç parçacığının serbest cisim diyagramı verilmektedir. Burada mg , yerçekimi sebebiyle oluşan ağırlığı, N ise bağlantı çubuğundaki eksenel kuvveti göstermektedir. r ve t eksenleri kullanıldığında bileşke kuvvet,

$$\underline{f} = (mg \cos q - N) \underline{i}_r + (-mg \sin q) \underline{i}_t$$

olur. Parçacığın ivmesi daha önce Denklem (1.9)'de verilmiştir. Dolayısıyla Newton'un hareket yasasına göre,

$$\underline{f}(t) = m\underline{a}(t) \rightarrow (mg \cos q - N) \underline{i}_r + (-mg \sin q) \underline{i}_t = -m\ell \dot{q}^2 \underline{i}_r + m\ell \ddot{q} \underline{i}_t$$

olması gerekir. Buradan iki bileşen için iki ayrı denklem elde edilir:

$$m\ell \ddot{q} + mg \sin q = 0 \quad (1.13a)$$

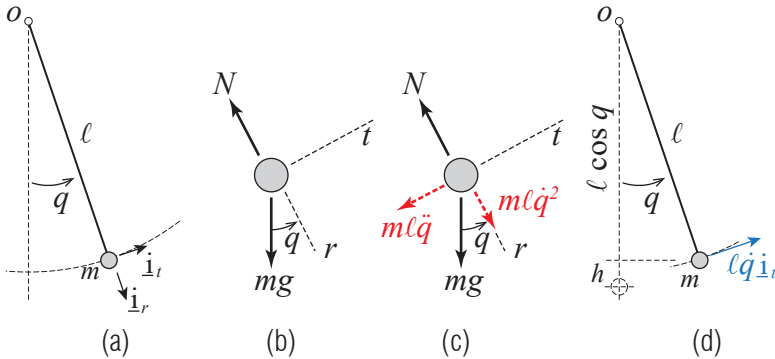
$$m\ell \dot{q}^2 + mg \cos q - N = 0 \quad (1.13b)$$

Denklem (1.13a), tek bilinmeyen olarak genelleştirilmiş koordinat q ve onun zamana göre türevlerini içeren, çözümünü sonrası sistemde istenen her bilinmeyenin hesaplanabileceği hareket denklemdir. Örneğin eğer $q(t)$ bulunabilirse, o takdirde Denklem (1.13b) kullanılarak ipteki eksenel kuvvet N belirlenebilir.

Denklem (1.13a)'i biraz daha basitleştirerek aşağıdaki biçimde yazmak mümkündür:

$$\ddot{q} + \frac{g}{\ell} \sin q = 0 \quad (1.14)$$

Bu denklem, doğrusaldışı, ikinci mertebe bir türevsel denklemdir. Denklem sağ tarafı sıfıra eşit olduğundan sistemde bir dış zorlama yoktur, böylesi denklemler türdeş (homojen) olarak adlandırılır. Denklemi çözmek, başlangıç anında belirli başlangıç koşulları ($q(0)$, $\dot{q}(0)$) ardından gelişecek hareketi ($q(t)$) bulabilmek demektir.



ŞEKİL 1.4: (a) Basit sarkaç, (b) serbest cisim diyagramı, (c) d'Alembert kuvvetleri ile serbest cisim diyagramı, (d) hız ve yükseklik.

Aynı problemi d'Alembert ilkesi vasıtasıyla ele almak istersek bu durumda, Şekil 1.4(c)'de gösterilenler gibi, sistemi anlık dengeye getirecek d'Alembert

kuvvetlerini eklemek gerekir. Şekil 1.4(c)'de verilen serbest cisim diyagramı statik bir dengeyi işaret etmekte olup, t ve r doğrultularında kuvvetlerin toplamı sıfıra eşitlenmelidir:

$$m\ell\ddot{q} + mg \sin q = 0 \quad (1.15a)$$

$$m\ell\dot{q}^2 + mg \cos q - N = 0 \quad (1.15b)$$

Bu tek parçacık için d'Alembert yaklaşımının faydası açık olmamakla birlikte durum bir sonraki örnekte değişecektir.

Basit sarkaç için son olarak Lagrange denklemleri yardımıyla hareket denklemlerini türetmeye çalışalım. Şekil 1.4(c)'de belirtildiği gibi parçacığın hız vektörü, $\underline{v}(t) = \ell\dot{q}\underline{i}_t$ olarak ifade edilebilir. Dolayısıyla t anında sistemin kinetik enerjisi,

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}m\underline{v} \cdot \underline{v} = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{q}^2$$

kadardır. $q = 0$ konumuna denk gelen hareketsiz denge durumunda potansiyel enerji \mathcal{V}_o kadarsa, sarkaç düşeyle q kadar açı yaptığında kütlelin potansiyel enerjisi,

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_o + mgh = \mathcal{V}_o + mg\ell(1 - \cos q)$$

olur. q açısı δq kadar değiştiğinde iş yapan herhangi bir korunumsuz kuvvet olmadığından (N kuvveti neden iş yapmaz?), genelleştirilmiş kuvvet $\mathcal{F} = 0$ olur. Böylece Lagrange denklemlerinden,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q} = m\ell^2\ddot{q} + mg\ell \sin q = 0 \quad (1.16)$$

elde edilir ki bu ifade de sadeleştirilerek yine

$$\ddot{q} + \frac{g}{\ell} \sin q = 0$$

biçiminde yazılabilir.

Basit sarkaç konusunu kapatmadan önce, denklemlerin doğrusallaştırılması hakkında birkaç söz söylemek gerekir. Her ne kadar Denklem (1.14) doğrusaldışı bir türevsel denklem ise de, eğer hareket genliğinin küçük kaldığı kabul edilirse,

$$q \ll 1 \quad \text{için} \quad q \approx \sin q \approx \tan q$$

olacağından, bu durumda hareket denklemi,

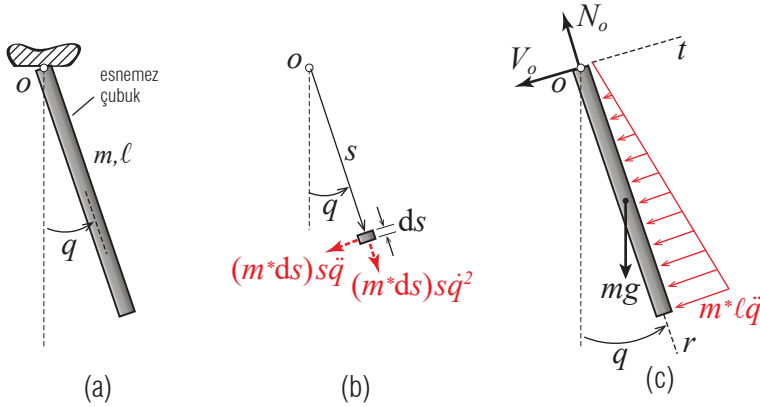
$$\ddot{q} + \frac{g}{\ell} q = 0$$

biçimini alır. Titreşimlerde çoğu kez yapıların hareketlerinin (sistemin boyutlarına göre ve malzemenin elastikötesi davranış göstermediği durumda) küçük kaldığı varsayımı geçerlidir ve aksi belirtilmedikçe bu tür doğrusallaştırmalar yapılır. Dolayısıyla doğrusal titreşim incelemelerinde yukarıdaki basitleştirme istisna değil neredeyse kuraldır.

1.3.2 Bileşik Sarkaç

Sarkaç problemini biraz daha geliştirerek yukarda anlatılan yöntemlerin uygulamalarını ayrıntılandırmak mümkün olacaktır. Bunun için, Şekil 1.5a'da gösterilen, bir ucu etrafında serbestçe dönen, ℓ uzunluğunda esnemez bir çubukla yapılmış bileşik sarkaçı ele alalım. Çubuğun birim boydaki kütlesi m^* , toplam kütlesi ise $m = m^*\ell$ olsun. Esnemez çubuk sonsuz sayıda parçacık barındırdığından, Newton'un tek bir parçacık için ortaya koyduğu yasa yukarıdaki haliyle kullanılamaz (Euler yasalarını şimdilik kapsam dışı bırakıyoruz).

Öte yandan bileşik sarkaçın hareket denklemi türetilirken, görünürde Newton'un yasasıyla tümüyle aynı olan d'Alembert ilkesinden yararlanılabilir. Bunun için önce, mafsala s kadar uzaklıkta, ds uzunluğunda küçük bir parçayı ele alalım. Bu parçanın kütlesi m^*ds , teğet ivmesi $s\ddot{q}$, merkezci ivmesi de $s\dot{q}^2$ kadardır. Dolayısıyla bu küçük parçayı anlık statik dengeye getirmek için üzerine etkililmesi gereken d'Alembert kuvvetleri, Şekil 1.5b'dekiler gibidir. (ÖNEMLİ: Bu parçaya başka hangi kuvvetler etmektedir?)



ŞEKİL 1.5: (a) Mafsalla tutturulduğu uç etrafında serbestçe dönen esnemez çubuk, (b) çubuğun küçük bir parçası üzerine etkitilecek d'Alembert kuvvetleri, (c) bir teğet doğrultudaki d'Alembert kuvvetleri ile tüm sistemin serbest cisim diyagramı.

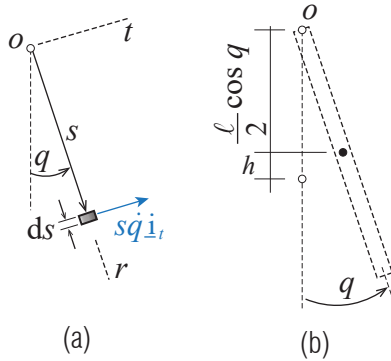
Şimdi çubuk boyunca çubuğu oluşturan böyle parçaları birleştirelim ve yalnız teğet doğrultudaki d'Alembert kuvvetlerini düşünelim. Parçalar arasındaki etkileşim kuvvetleri birer iç kuvvet olduğundan Şekil 1.5c'deki

serbest cisim diyagramında yer almazlar. o noktasına etkiyen N_o ve V_o kuvvetleri, mafsaldaki eksenel kuvvet ve kesme kuvvetidir. Bu bilinmeyen kuvvetleri devre dışı bırakmak için o noktasına göre moment alınır, d'Alembert kuvvetleri etkitilen sistemde momentlerin toplamının sıfıra eşit olması gerekir (merkezci d'Alembert kuvvetleri bu moment denkleminde katkı vermeyecektir çünkü tümünün etki çizgisi o noktasından geçmektedir):

$$\left(\frac{1}{2}(m^* \ell \ddot{q})\ell\right) \left(\frac{2}{3}\ell\right) + (mg \sin q) \left(\frac{\ell}{2}\right) = 0$$

Bu denklem sadeleştirilerek $q \ll 1$ için doğrusallaştırıldığında, q değişkenini yöneten hareket denklemi aşağıdaki biçimi alır:

$$\ddot{q} + \frac{3g}{2\ell}q = 0$$



ŞEKİL 1.6: (a) Bileşik sarkaç çubuğunun küçük bir parçasının hızı, (b) ağırlık merkezinin yükselmesi.

Bu sistem için Lagrange denklemlerinin uygulaması da görece kolaydır. Mafsala s kadar uzaklıkta, ds uzunluğunda küçük bir parçanın kütlesi $m^* ds$, hızı ise Şekil 1.6a'da gösterildiği gibi $s\dot{q}\mathbf{i}_t$ olur. Dolayısıyla bu küçük parçanın kinetik enerjisi,

$$\frac{1}{2}(m^* ds)(s\dot{q}\mathbf{i}_t) \cdot (s\dot{q}\mathbf{i}_t) = \frac{1}{2}m^* s^2 \dot{q}^2 ds$$

ve sistemin toplam kinetik enerjisi de, küçük parçaların kinetik enerjilerinin toplamından (bu durumda integralinden)

$$\mathcal{T} = \int_0^\ell \frac{1}{2}m^* s^2 \dot{q}^2 ds = \frac{1}{6}m^* \ell^3 \dot{q}^2 = \frac{1}{6}m\ell \dot{q}^2$$

olarak hesaplanır. $q = 0$ konumuna denk gelen hareketsiz denge durumunda potansiyel enerji \mathcal{V}_o kadarsa, çubuk düşeyle q kadar açı yaptığında ağırlık merkezinin yukarı hareketi dolayısıyla potansiyel enerjisi artar:

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_o + mgh = \mathcal{V}_o + mg\frac{\ell}{2}(1 - \cos q)$$

q açısı δq kadar değiştiğinde iş yapan herhangi bir korunumsuz kuvvet olmadığından, genelleştirilmiş kuvvet $\mathcal{F} = 0$ olur. Böylece Lagrange denklemlerinden,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q} = \frac{1}{6}m\ell\ddot{q} + mg\frac{\ell}{2}\sin q = 0 \quad (1.17)$$

elde edilir ve yine bu denklem sadeleştirilip $q \ll 1$ için doğrusallaştırıldığında, q değişkenini yöneten hareket denklemi aşağıdaki biçimi alır:

$$\ddot{q} + \frac{3g}{2\ell}q = 0$$

1.3.3 Rijitlik ve Yay Modeli

Sarkaç probleminde sistemi ilk konumuna getirmeye çalışan etki yerçekimi ve ağırlıktır. Yapı elemanları ise genelde şekildeğişim dolayısıyla oluşan iç kuvvetlerle harekete karşı koyar. Bu kuvvetlerin hesabı ise mukavemetten bilinen yük-şekildeğişim ilişkilerine dayanır.

Basit bir örnek adına Şekil 1.7a'da gösterilen kütesiz konsol kiriş ve kirişin serbest ucuna asılı m kütesini ele alalım. Sabir enkesitli kirişin eğilme rijitliği EI , uzunluğu l olsun.

Küçük genlikli titreşimler için bu sistemin tek serbestliği, kütlelin düşey hareketidir. Böyle bir hareket sırasında kütlelin serbest cisim diyagramı, d'Alembert kuvvetini de barındıran biçimde Şekil 1.7b'de verilmektedir. Kütleyle etkileyen V kuvveti, kütle ile kiriş arasındaki etkileşim dolayısıyla vardır. Sistemde oluşan şekildeğişim, bu kuvvetin büyüklüğünün, kirişin serbest ucunu q kadar öteleyecek kadar olmasını gerektirir. Dolayısıyla problemin bu kısmı, konsol kirişin ucuna etkileyen tekil yük ile yük altında oluşan sehim arasındaki ilişkinin belirlenmesini gerektirir. Tümüyle statik hesap konusu olan bu etkileşim, temel mukavemetten hatırlayacağımız gibi,

$$V = \frac{3EI}{\ell^3}q$$

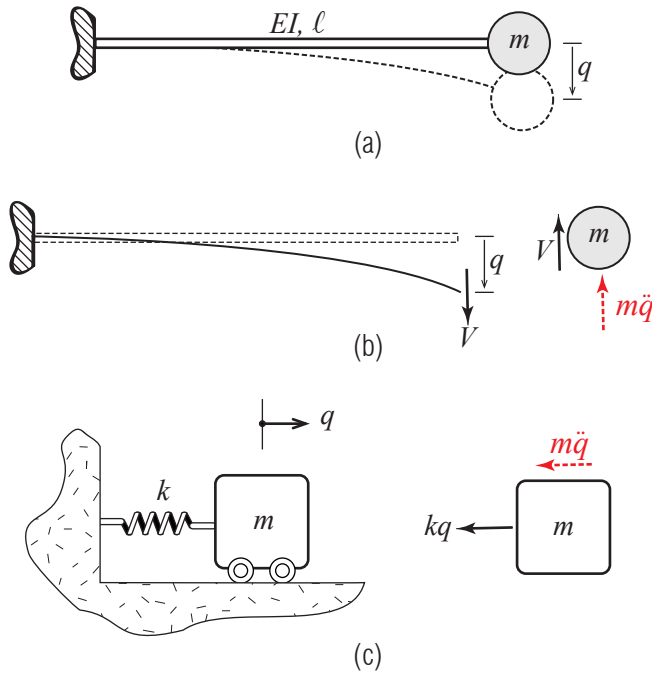
bağıntısıyla tanımlanır. Doğrusal taşıyıcı sistemlerde yük ve ötelenme yahut dönme arasındaki ilişki her zaman

$$P = k\Delta$$

biçiminde ifade edilebilecektir. Buradaki k niceliğine sistemin rijitliği denir. Yukarıdaki örnekte sistemin rijitliği $k = 3EI/\ell^3$, hareket denklemi de

$$m\ddot{q} + \frac{3EI}{\ell^3}q = 0$$

olur.



ŞEKİL 1.7: (a) Ucuna kütle asılı konsol kiriş, (b) kütle için serbest cisim diyagramı ve kiriş ucundaki kesme kuvveti.

Yük ve tepki arasındaki ilişkinin $P = k\Delta$ biçiminde ifade edilebilmesi, taşıyıcı sistemin aslında rijitliği k kadar olan doğrusal bir yay ile temsil edilebilmesini mümkün kılar. Dolayısıyla tüm doğrusal, sönümsüz, serbest titreşen tek serbestlik dereceli (TSD) sistemler için prototip, Şekil 1.7’de gösterilen kütle - yay sistemidir. Bu sistemin gerçek bir yapıyı temsil etmesi, kütle ve yay sabitlerinin yukarıdaki örnekte olduğu gibi uygun biçimde hesaplanmasını gerektirir. Bununla birlikte bu hesap sonrasında yukarıdaki

tanıma uyan tüm sistemler için hareket denklemi,

$$m\ddot{q} + kq = 0$$

olacaktır.

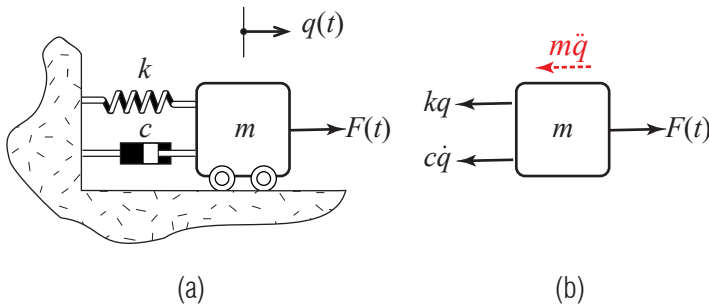
1.3.4 Sönüm

Sönüm, yapının hareket sırasında enerji tüketebilme yetisini tanımlar. Enerji tüketimi mikro ölçekten makro ölçeğe geniş bir yelpazede çeşitli olgulara dayanır, ancak bu olguların doğrudan dikkate alınması büyük yapılar için mümkün değildir. Bu nedenle çoğu kez, basit olmakla birlikte gözlemlerle uyumlu bir davranış ortaya çıkartan doğrusal viskoz sönüm modeli kullanılır. Kısaca viskoz sönüm olarak anılacak bu yaklaşımda sönüm nedeniyle ortaya çıkacak direnç kuvvetleri, şekildeğişim hızı ile doğru orantılı kabul edilir ve yük ile şekildeğişim arasındaki ilişki,

$$P = c\dot{\Delta}$$

bağıntısıyla tanımlanır.

Önemle vurgulanması gereken nokta, sönümü modellemekte kullanılan katsayıların, kütle ve rijitliğin aksine, yapının geometrisi ve malzeme özelliklerinden çıkarılamayacağıdır. Bu katsayıların ya yapı üzerinde gerçekleştirilecek deneylerle ya da benzer yapılarda benzer yük seviyelerinde daha önce gözlenmiş değerlerden yola çıkarak belirlenmeleri gerekir.



ŞEKİL 1.8: Dış yük etkisinde viskoz sönümlü TSD sistemler için prototip model.

Sönümün TSD modele katılmasıyla birlikte, dış yük etkisini de dikkate alan prototip, Şekil 1.8a'daki hali alır. Bu durumda d'Alembert kuvvetlerini

de barındıran serbest cisim diyagramındaki kuvvetlerin toplamının sıfır olması gerekir:

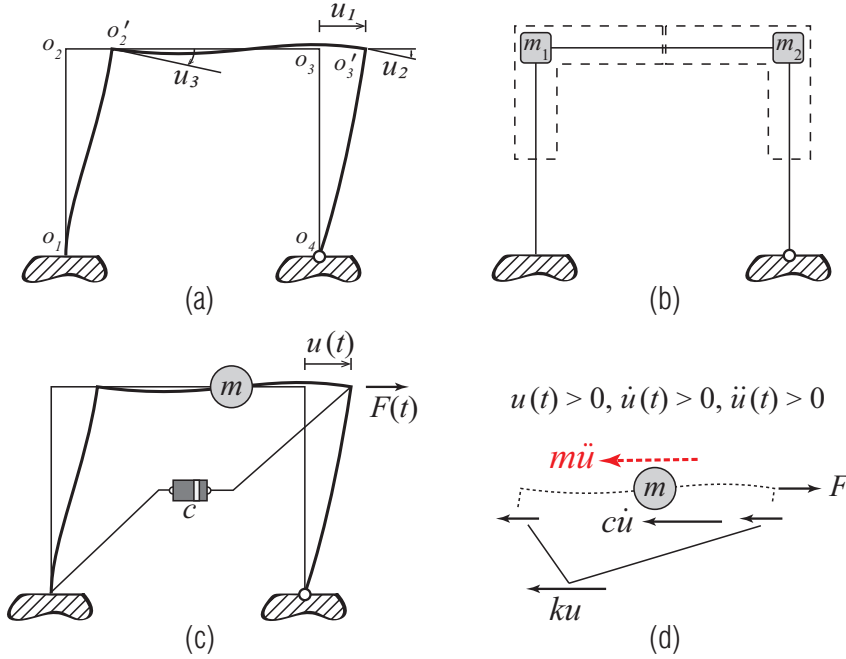
$$m\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + kq(t) = F(t)$$

1.3.5 Tek Katlı Çerçeve

Titreşim sırasında basit bir yapıda oluşacak hareketi tanımlayabilmek adına önce Şekil 1.9'de gösterilen tek açıklıklı $o_1o_2o_3o_4$ çerçevesini ele alalım. Çerçeve genel bir statik yükleme etkisinde ise, şekildeğişim sonrası durumu izleyebilmek için Şekil 1.9a'da gösterilen üç serbestlikte oluşan yerdeğişimleri bilmek gerekir: kiriş hizasındaki düğüm noktalarının yanal ötelenmesi u_1 ile yine bu düğüm noktalarında ortaya çıkan dönmeler u_2 ve u_3 . Bu haliyle bile çözümlemeyi kolaylaştırmak adına birtakım kabuller yapılmış ve örneğin çubuk uzunluklarının değişmeyeceği, yani çubukların eksenel rijitliklerinin eğilme rijitliklerine kıyasla çok daha büyük oldukları ve gözlenen şekildeğişimin tümüyle eğilmeden kaynaklandığı varsayılarak, hem o_1 ve o_2 noktalarının yanal ötelenmelerinin aynı olacağı kabul edilmiş hem de bu noktalarda düşey doğrultuda ötelenme olmayacağı düşüncesi ile ilgili serbestlikler hesaba katılmamıştır.

Dinamik çözümlemede dikkate alınacak ek hususlardan biri, sistemin kütesinin ve bu kütlelerin ivmelenmesinin getirdiği kuvvetlerin dağılımıdır. Böyle bir çerçevede harekete etki edecek kütlelerin büyük kısmının döşeme ve altındaki kiriş(ler)den kaynaklandığı düşünülebilir. Eğer kolonların kütleyle katkıları da dikkate alınacak olursa, kolon kütesinin tümünün değil ancak bir kısmının harekete etkisi olduğunu düşünmek makul olacaktır. İlgili tüm kütleler hareketli düğüm noktalarına paylaştırılabilir ve örneğin Şekil 1.9b'de gösterildiği gibi sistemde yayılı durumda bulunan kütlelerin etkisi, düğüm noktalarındaki serbestliklerde toplanmış iki tekil kütle ile temsil edilebilir. Bu aşamada ikinci soru, düğüm noktalarındaki dönme hareketleri ve ilgili ivmelerin hesaplarda ne kadar yer tutacağıdır. Deprem sırasında ortaya çıkan etkiler, dönme serbestliklerine doğrudan etkiyen moment benzeri zorlamalara pek yol açmazlar; dolayısıyla düğüm noktalarındaki dönmeler bağımsız zorlamalar altında değil, yanal ötelenmeden kaynaklanan ikincil hareketler biçiminde oluşur. Dönme serbestliklerindeki ivmelerin görece küçük kalacağı kabul edilirse bu durumda dinamik denge denklemlerinde bu ivmelerle ilintili kuvvetler rol oynamaz. Böylece kütleler düğüm noktalarındaki ötelenme serbestliklerine paylaştırılırken dönme serbestliklerine kütle atanmaz. Sonlu elemanlar programları ile yapılan hesaplarda sıklıkla kullanılan bu basit kütle modeline yığılı kütle modeli denir. Söz konusu çerçevede düğüm noktalarının yanal ötelenmeleri aynı olduğundan, iki düğüm noktasına yığılmış m_1 ve m_2 kütlelerinin toplamda Şekil 1.9c'de gösterilen tekil $m = m_1 + m_2$ kütesine denk oldukları düşünülebilir. Bu basitleştirme ile birlikte, hareket denklemini kurgulamadan önce iki ögenin daha ayrıntılarının belirlenmesi

gerekir: çerçevenin yanal rijitliği ve sönüm.



ŞEKİL 1.9: (a) Statik çözümlemede serbestlikler, (b) kütlelerin düğüm noktalarına yığılması, (c) dinamik çözümlemede serbestlik, (d) serbestlik doğrultusunda dış kuvvet etkidiğinde kütlenin serbest cisim diyagramı.

Dinamik harekette belirleyici serbestlik u ötelenmesi olsa da, çerçevenin bu serbestlik doğrultusundaki kuvvete göstereceği direnç, kolon ve kirişlerin hem dönme hem de ötelenmeye ne kadar direnç gösterdiklerine bağlı olacaktır. Şekil 1.9a'daki serbestlikler düşünüldüğünde, doğrusal elastik bir sistem için statik denge,

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.18)$$

bağıntısıyla tanımlanır. Dönme serbestliklerindeki ivmeler ihmal edildiğinden ve dönme serbestliklerine doğrudan etkiyen bir dış yük bulunmadığından, ilgili serbestliklerin denklemlerinde sağ taraflar sıfıra eşittir. Bu denklemler

kullanıldığında u_2 ve u_3 ile u_1 arasındaki ilişki için,

$$-\begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} \\ k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} k_{21} \\ k_{31} \end{bmatrix} u_1 = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (1.19)$$

bağıntısı bulunur ve bu sonuç ilk denklemde yerine konarak $u = u_1$ ve F arasında aşağıdaki ilişkiye ulaşılır:

$$\left(k_{11} - \begin{bmatrix} k_{12} & k_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} \\ k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} k_{21} \\ k_{31} \end{bmatrix} \right) u_1 = F \rightarrow ku = F \quad (1.20)$$

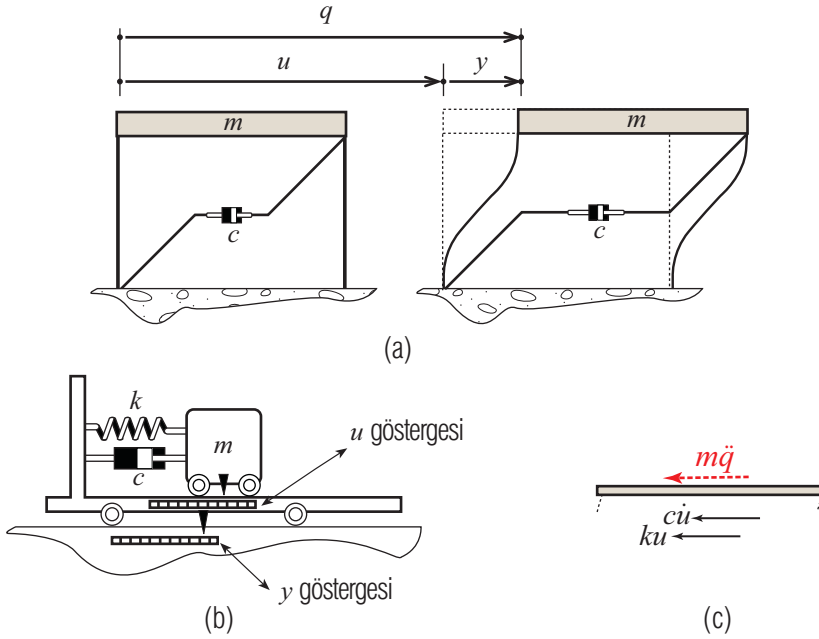
Yukarıdaki bağıntılarda ‘-1’ üstsimgesi matrisin tersini göstermektedir. Sonuçta elde edilen k , sistemin yanal rijitliği olarak adlandırılır ve dinamik harekette şekildeğişim nedeniyle serbestlik doğrultusunda oluşacak iç kuvvetlerin hesabında kullanılır. Eğer herhangi bir an için $u_1 = u$ değeri hesaplanırsa o anda düğüm noktalarındaki dönmeler Denklem (1.19) yardımıyla bulunabilecektir. Dönme serbestliklerinin dinamik denklemlerden elenmesi ile ilgili olarak örnek üzerinden kısaca anlatılan bu yaklaşım statik sıkıştırma olarak adlandırılır ve dönme serbestliklerine kütle atanmayan modellerde hesapları basitleştirmek adına sıklıkla kullanılır.

Sistemin yanal rijitliği belirlendikten sonra geriye kalan tek öge, enerji tüketimini modellemekte kullanılacak sönümün modele katılmasıdır. Sönüm için en sık kullanılan model, Şekil 1.9c’de iki çapraz uç arasına yerleştirilmiş kutu ile temsil edilen viskoz sönümleyicidir. Bu modelde sönümleyicinin aktardığı kuvvet, sönümleyicinin iki ucu arasındaki görelî hıza bağlıdır. Eğer ilişki doğrusal ise bu durumda sönümleyici harekete $c\dot{u}$ kadar bir kuvvetle karşı koyacaktır. Viskoz sönüm katsayısı olarak adlandırılan c katsayısının değeri, daha önce de sözü edildiği gibi yapı özelliklerinden doğrudan hesaplanamaz. Öte yandan ileride görüleceği üzere belirleyici olan doğrudan bu katsayı değil, onunla ilintili ve deneyle tespit edilebilen bir başka katsayıdır.¹

Yukarıda anlatılan yaklaşım ve basitleştirmeler sonucu elde edilen modelde tüm davranış tek bir bağımsız değişkene, u serbestliğinde oluşan harekete bağlıdır. Zamanın herhangi bir anında u değişkeninin (ve türevlerinin) değeri bilindiğinde sistemin o anda aldığı biçim belirlenebilir ve herhangi bir noktadaki iç kuvvetler hesaplanabilir. Bu TSD sistem, yukarıda sözü edildiği gibi, Şekil 1.8’deki kütle-yay-sönümleyici modeline denktir. Kütlenin hareket denklemi, d’Alembert kuvvetini de barındıran serbest cisim diyagramındaki kuvvetlerin dengesinden bulunur:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F \quad (1.21)$$

¹Bu tür sönümleyiciler gerçekte üretilerek yapılarda titreşimleri azaltmak amacıyla kullanılmaktadırlar. Üretilen viskoz sönümleyicilerde kuvvet ve hız arasındaki ilişki çoğunlukla doğrusal olmayıp, hızın belirli bir kuvvetine bağlı olabilir.



ŞEKİL 1.10: (a) Yer hareketi sırasında oluşacak ötelenme, (b) yer hareketi etkisindeki TSD sistem için prototip model, (c) yer hareketi etkisinde salınan kütlenin serbest cisim diyagramı.

Yer hareketi etkisindeki bir sistem için de benzer bir yaklaşım izlenebilir. Deprem kaynaklı yer hareketi sırasında yapının oturduğu zeminin kendisi, Şekil 1.10(a)'da şematik olarak gösterilen biçimde hareket edecektir. Eğer yerin zamana bağlı hareketi $y = y(t)$ ile gösterilecek olursa, bu durumda $o_1o_2o_3o_4$ çerçevesi hiç esnemesi dahi y kadar ötelenecek ve $o'_1o'_2o'_3o'_4$ konumuna gelecektir. Çerçevenin esnemesi, kütlenin yere göre ötelenmesi anlamına gelir; eğer bu görelî ötelenme u kadarsa kütlenin mutlak ötelenmesi $q = y + u$ olacaktır. Bu durumda kütlenin serbest cisim diyagramı, Şekil 1.10(c)'deki gibi çizilebilir. Burada d'Alembert kuvvetinin şiddeti, kütle ile mutlak ivmenin çarpımı, yani $m\ddot{q} = m(\ddot{u} + \ddot{y})$ kadardır, çünkü hareket yasası gereği ivme durağan bir noktaya göre tanımlanır. Şekildeğişim ve sönümle ilintili kuvvetler çerçevede şekil değişim olmadan ortaya çıkmazlar ve dolayısıyla görelî harekete bağlıdırlar. Sisteme etkiyen başka bir dış yük bulunmadığından ($F = 0$), hareket denklemi,

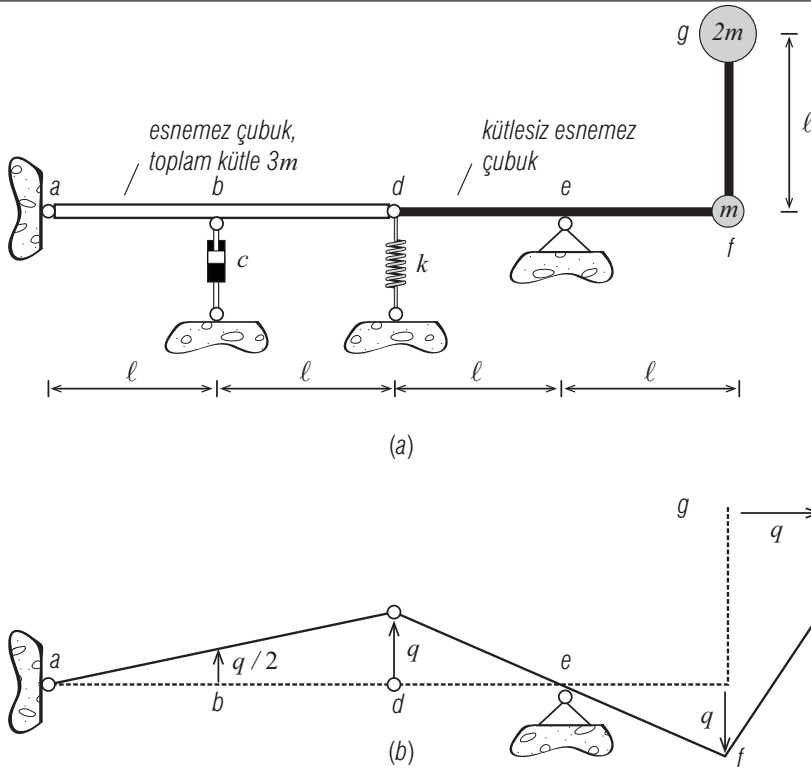
$$m\ddot{q} + c\dot{u} + ku = 0 \rightarrow m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{y} \quad (1.22)$$

olarak elde edilir. Yer hareketi y sistemi zorlayan etken olduğundan ve genelde

bilindiği varsayıldığından eşitliğin sağ tarafında gösterilir. Denklemin sağ tarafı kuvvet biriminde olduğundan kimi yayınlarda $F_e = -m\ddot{y}$ zorlamasına etkin deprem yükü denir.

1.3.6 Sanal İş

d'Alembert ilkesinin uygulamada yarattığı avantaj, esas olarak statik çözümleme için geliştirilen yöntemlerin uygulanabilemsine olanak sağlamasıdır. Bu yöntemlerin en önemlilerinden biri, sanal iş ilkesidir. Sanal iş, özellikle fazla kısıtlı ve bağlantılı çok parçalı sistemlerde uygun seçilen sanal yerdeğişim biçimleri sayesinde görece kolay çözüm elde edilmesine olanak sağlar.

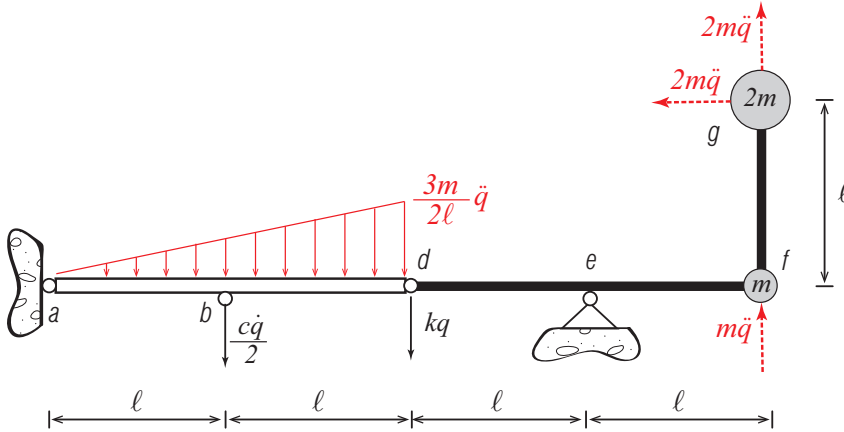


ŞEKİL 1.11: (a) Mafsallı bağlantılı sistem, (b) genelleştirilmiş koordinat seçimi.

Sanal iş ilkesine göre, statik dengede olan bir sisteme (kısıtlarla uyumlu) sanal bir yerdeğişim tatbik edildiğinde, sisteme etkiyen dış yükler

tarafından sanal yerdeğişimler üzerinden yapılan iş (δW_e), sistemdeki iç kuvvetler tarafından (sanal yerdeğişim dolayısıyla oluşan) sanal şekildeğişimler üzerinden yapılan işe (δW_i) eşit olacaktır ($\delta W_e = \delta W_i$). Sanal yerdeğişim üzerinde belirgin bir kısıt olmamakla birlikte geometrik doğrusalılığı önlemek ve model kabullerinin geçerli olmasını sağlamak için genellikle çok küçük sanal değışimler kullanılır.

Bu ilkenin uygulamasını görebilmek için Şekil 1.11a'da gösterilen sistemi ele alalım. Birbirlerine mafsallarla bağlı esnemez çubuklardan oluşan sistemde ilk yapılması gereken, sistemin kaç serbestliği olduğunu belirlemek ve uygun bir genelleştirilmiş koordinat seçmektir. Sistem incelendiğinde, çubukların esnemezliği dolayısıyla aslında herhangi bir noktanın hareketi bilindiğinde diğer tüm parçaların yerleşiminin belirlenebileceği anlaşılmaktadır. Örneğin d noktasının düşey ötelenmesi sonrası sistemin geri kalanının alacağı biçim, Şekil 1.11b'de gösterilmektedir. Bu aşamada seçim mühendisin tercihidir ve geçmiş tecrübelere dayanarak problemi görece basitleştirecek bir seçenek belirlenebilir. Buradaki örnekte d noktasının yukarı doğru hareketi genelleştirilmiş koordinat q olarak tanımlanacaktır.



ŞEKİL 1.12: Mesnet tepkileri haricindeki dış yükler.

Herhangi bir anda, $g > 0$, $\dot{q} > 0$ ve $\ddot{q} > 0$ olsun ve o anda sistemdeki kütlelere 'd'Alembert kuvvetlerini etkielim. Hareket genliği küçük olduğunda mesnet tepkileri dışındaki yük dağılımı Şekil 1.12'deki gibi olur. Bu durumda sistem statik dengede olacaktır. Şimdi serbestlikte δq kadar küçük bir miktar oynama olduğunu varsayalım. Bu tümüyle sanal bir oynamadır çünkü sisteme bu oynamaya yol açacak herhangi bir etki bulunmamaktadır. Sanal yerdeğişim mesnet kısıtları ile uyumlu biçimde seçildiğinden, bilinmeyen

mesnet kuvvetleri bu yerdeğişim sırasında iş yapmazlar. Üstelik sistemde yer alan taşıyıcı elemanlar esnemez çubuklar olduğundan, bu çubuklarda şekildeğişim ve dolayısıyla iç iş oluşmaz. Böylece sanal iş ilkesi, $\delta W_e = 0$ biçimini alır.

Şekil 1.12'deki dış kuvvetlerin sanal işi hesaplamak için, Şekil 1.11b'deki geometri küçük δq için değerlendirilerek aşağıdaki bağıntılara ulaşılır:

$$-(2m\ddot{q})\delta q - (2m\ddot{q})\delta q - (m\ddot{q})\delta q - \left(\frac{2\ell}{2} \frac{3m}{2\ell} \ddot{q}\right) \left(\frac{2}{3}\delta q\right) - \left(\frac{c}{2}\dot{q}\right) \frac{\delta q}{2} - kq\delta q = 0$$

$$\left\{6m\ddot{q} + \frac{c}{4}\dot{q} + kq\right\} \delta q = 0$$

Sanal iş ilkesi gereği bu denklemin herhangi bir δq için sağlanması gerekir. Bu ise ancak ayraç içindeki ifadenin sifıra eşit olması ile mümkündür ve böylece hareket denklemi elde edilir:

$$6m\ddot{q} + \frac{c}{4}\dot{q} + kq = 0 \quad (1.23)$$