Newmark β–Yöntemi

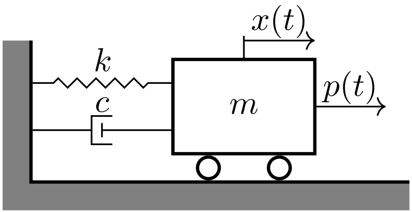
Yapı Dinamiği Çalıştayı
İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü
İzmir, 9-16 Eylül

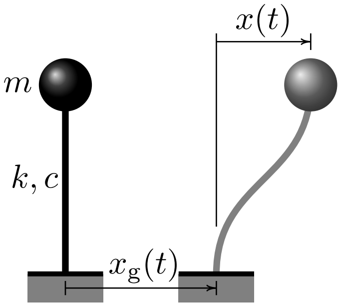
Barış Erkuş

İstanbul Teknik Üniversitesi
İnşaat Mühendisliği Bölümü

9 Eylül 2019

İçerik





Tek serbestlik dereceli sistemlerin (TSDS) hareket denklemi şu şekilde yazılabilir:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = p(t)$$

Eğer dış kuvvet yerine yer hareketi $\ddot{x}_g(t)$ var ise denklem şu hali alır:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = -m\ddot{x}_g(t)$$

Burada $x(t)$, $\dot{x}(t)$ ve $\ddot{x}(t)$ sırası ile mesnede göre yerdeğiştirme, hız ve ivme; m, c ve k sırası ile kütle, sönüm katsayısı ve yay katsayısıdır.

- Sayısal analiz yöntemlerinde, sistem cevaplarının sürekli fonksiyonları yerine, bu fonksiyonların verilen zaman anlarındaki değerleri bulunur. Bu zaman anları genelde bir zaman aralığı kullanılarak tanımlanır: 0, Δt, $2\Delta t$, $3\Delta t$, ... Bazen bu anlar bir indis ile de tanımlanmaktadır: 0, 1, 2, ..., $t-1$, t, $t+1$, ... (örnek: x_0, $\dot{x}_t$, $\ddot{x}_{t+1}$)
- Sayısal yöntemlerde genelde ilk önce ivme, hız ve yerdeğiştirme sadece bir tür cevap türünden yaklaşık olarak ifade edilir (örnek: ivme ve hız, yerdeğiştirme türünden ifade edilir). Sonra hareket denklemi bu bilinmeyen üzerinden tanımlanır ve t anı değerleri bilindiğinden bir sonraki adım $(t+1)$ için çözüm ya da hesap yapılır. Bundan dolayı bu yöntemler artımsal (İng. incremental) ya da zaman-adımsal (time-stepping) olarak da tanımlanır.

Kapalı ve Açık Yöntemler

- Sayısal yöntemlerin bazılarında, t anındaki sistem tepkileri $t+1$ anındaki tepkilere bağlı olabilir. Bu durumda hareket denkleminin $t+1$ anındaki dengesinin sağlanması üzerine hesaplar yapılır. Bu andaki cevaplar denklemde bilinmeyen olarak ifade edilir ve hareket denkleminin çözümü için mutlaka yay sabitinin tersi alınarak hesap yapılması gerekir. Yay sabitinin tersi alınması gereken bu tip yöntemler kapalı/örtük (implicit) yöntem olarak adlandırılır.
- Diğer tür sayısal yöntemlerde, $t+1$ anındaki tepkiler, t ve $t-1$ anlarında bilinen tepkiler cinsinden yaklaşık olarak hesaplanabilir. Bu tür yöntemler açık/belirtik (explicit) olarak adlandırılır. Bu durumda hareket denkleminin $t+1$ anındaki dengesinin sağlanması ile ilgili bir hesap yapılmaz; ancak istenirse bazı kontroller (örnek: enerji dengesi) yapılabilir. Açık yöntemlerde yay sabitinin ya da rijitlik matrisinin tersinin alınmasına gerek yoktur, ancak bazı yöntemlerde kütle ve sönümleme matrislerinin tersi alınması gerekebilir.

İçerik

Taylor Dizisi Açılımı

Newmark β-yönteminde yerdeğiştirme ve hız fonksiyonlarının Taylor dizisi açılımı kullanılmaktadır. Verilen reel ve tüm türevleri alınabilen bir fonksiyonun $f(x)$, verilen bir x değeri $x = a$ etrafındaki Taylor dizi açılımı şu şekildedir:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

Taylor dizisi açılımı, tek serbestlik dereceli bir sistemin yerdeğiştirme ve hız fonksiyonlarının artımsal ifadesi için kullanılabilir:

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \dot{x}(t)\Delta t + \frac{\ddot{x}(t)}{2!}(\Delta t)^2 + \frac{\dddot{x}(t)}{3!}(\Delta t)^3 + \cdots$$

$$\dot{x}(t+\Delta t) = \dot{x}(t) + \ddot{x}(t)\Delta t + \frac{\dddot{x}(t)}{2!}(\Delta t)^2 + \frac{\ddddot{x}(t)}{3!}(\Delta t)^3 + \cdots$$

Newmark Yönteminde Kabuller-1

Newmark yönteminde dördüncü ve üstü türevli terimler ihmal edilmektedir:

$$
\begin{aligned}
x(t+\Delta t) &= x(t) + \dot{x}(t)\Delta t + \frac{\ddot{x}(t)}{2!}(\Delta t)^2 + \frac{1}{3!}\dddot{x}(t)(\Delta t)^3 \\
\dot{x}(t+\Delta t) &= \dot{x}(t) + \ddot{x}(t)\Delta t + \frac{1}{2!}\dddot{x}(t)(\Delta t)^2
\end{aligned}
$$

Yöntemde üçüncü türevli terimin yerdeğiştirme ve hıza olan katkıları sırası ile $0 < \beta < 1$ ve $0 < \gamma < 1$ katsayıları ile ayarlanabilmektedir:

$$
\frac{1}{3!}\dddot{x}(t) \rightarrow \beta\dddot{x}(t) \qquad \text{ve} \qquad \frac{1}{2!}\dddot{x}(t) \rightarrow \gamma\dddot{x}(t)
$$

Görüldüğü üzere, $\beta = 1/3!$ ve $\gamma = 1/2!$ durumunda, yerdeğiştirme ve hız fonksiyonları Taylor dizisi açılımın yaklaşık haline denk gelmektedir.

Üçüncü türev de yaklaşık olarak ifade edilmektedir:

$$\dddot{x}_{\mathrm{y}}(t) = \frac{\ddot{x}(t+\Delta t) - \ddot{x}(t)}{\Delta t}$$

Bu durumda yerdeğiştirme ve hız şu şekilde ifade edilmektedir:

$$\begin{aligned} x(t+\Delta t) &= x(t) + \dot{x}(t)\Delta t + \frac{\ddot{x}(t)}{2!}(\Delta t)^2 + \beta \dddot{x}_{\mathrm{y}}(t)(\Delta t)^3 \\ \dot{x}(t+\Delta t) &= \dot{x}(t) + \ddot{x}(t)\Delta t + \gamma \dddot{x}_{\mathrm{y}}(t)(\Delta t)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t+\Delta t) &= x(t) + \dot{x}(t)\Delta t + \frac{\ddot{x}(t)}{2!}(\Delta t)^2 + \beta \frac{\ddot{x}(t+\Delta t) - \ddot{x}(t)}{\Delta t}(\Delta t)^3 \\ \dot{x}(t+\Delta t) &= \dot{x}(t) + \ddot{x}(t)\Delta t + \gamma \frac{\ddot{x}(t+\Delta t) - \ddot{x}(t)}{\Delta t}(\Delta t)^2 \end{aligned}$$

Newmark Yönteminde Kabuller-3

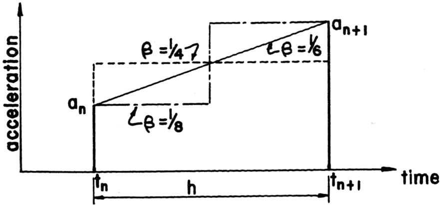
Bu ifadeler sadeleştirildiğinde şu denklemler elde edilmektedir:

$$
\begin{aligned}
x(t+\Delta t) &= x(t) + \dot{x}(t)\Delta t + (\frac{1}{2} - \beta)\ddot{x}(t)(\Delta t)^2 + \beta\ddot{x}(t+\Delta t)(\Delta t)^2 \\
\dot{x}(t+\Delta t) &= \dot{x}(t) + (1-\gamma)\ddot{x}(t)\Delta t + \gamma\ddot{x}(t+\Delta t)(\Delta t)
\end{aligned}
$$

Kabuller

$$
\begin{aligned}
x_{t+1} &= x_t + \Delta t\dot{x}_t + (\frac{1}{2} - \beta)(\Delta t)^2\ddot{x}_t + \beta(\Delta t)^2\ddot{x}_{t+1} \\
\dot{x}_{t+1} &= \dot{x}_t + (1-\gamma)\Delta t\ddot{x}_t + \gamma\Delta t\ddot{x}_{t+1}
\end{aligned}
$$

Burada $\square_t$ ve $\square_{t+1}$ sırası ile t ve $t+\Delta t$ anlarındaki (ya da t_n ve t_{n+1} anlarındaki) değerleri ifade etmektedir.



İvmenin t ve $t + \Delta t$ anları arasındaki değişiminin sabit ve bu iki andaki ivmelerin ortalaması olduğu kabul edilirse:

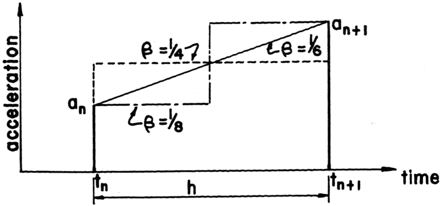
$$\ddot{x}(\tau) = \frac{\ddot{x}_{t+1} + \ddot{x}_t}{2}$$

Bu durumda hız ve yerdeğiştirme:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(\tau) &= \dot{x}_t + \frac{1}{2}\left(\ddot{x}_{t+1} + \ddot{x}_t\right)\tau \\
x(\tau) &= x_t + \dot{x}_t\tau + \frac{1}{4}\left(\ddot{x}_{t+1} + \ddot{x}_t\right)\tau^2
\end{aligned}$$

Bu kabuller Newmark yönteminde $\gamma = 1/2$ ve $\beta = 1/4$ kullanılması durumuna denk gelmektedir.

Özel Haller: Doğrusal İvme



İvmenin t ve $t + \Delta t$ anları arasındaki değişiminin sabit ve bu iki andaki ivmelerin ortalaması olduğu kabul edilirse:

$$\ddot{x}(\tau) = \ddot{x}_{t+1} + \frac{\ddot{x}_{t+1} - \ddot{x}_t}{\Delta t}\tau$$

Bu durumda hız ve yerdeğiştirme:

$$\begin{aligned} \dot{x}(\tau) &= \dot{x}_t + \ddot{x}_t\tau + \frac{1}{2\Delta t}\left(\ddot{x}_{t+1} + \ddot{x}_t\right)\tau^2 \\ x(\tau) &= x_t + \dot{x}_t\tau + \frac{1}{2}\ddot{x}_t\tau^2 + \frac{1}{6\Delta t}\left(\ddot{x}_{t+1} + \ddot{x}_t\right)\tau^3 \end{aligned}$$

Bu kabuller Newmark yönteminde $\gamma = 1/2$ ve $\beta = 1/6$ kullanılması durumuna denk gelmektedir.

Özel Haller: $\gamma \neq 1/2$ Durumu

$$
\begin{aligned}
x(t+\Delta t) &= x(t) + \dot{x}(t)\Delta t + \frac{\ddot{x}(t)}{2!}(\Delta t)^2 + \frac{1}{3!}\dddot{x}(t)(\Delta t)^3 \\
\dot{x}(t+\Delta t) &= \dot{x}(t) + \ddot{x}(t)\Delta t + \frac{1}{2!}\dddot{x}(t)(\Delta t)^2
\end{aligned}
$$

- Bu durumda, hız fonksionu asıl Taylor dizisi açılımına denk gelen değişkenden farklı olacaktır.
- Örnek olarak $\gamma > 1/2$ olması durumunda hız fonksiyonunun sanki bir sönümleme varmış gibi hesaplanacağı görülmektedir.
- Bu ek hayali sönümleme etkisini yaratmamak için $\gamma = 1/2$ değerinin kullanılması önerilmektedir.

Newmark Yönteminde Çözüm

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= x_t + \Delta t \dot{x}_t + (\frac{1}{2} - \beta)(\Delta t)^2 \ddot{x}_t + \beta (\Delta t)^2 \ddot{x}_{t+1} \\ \dot{x}_{t+1} &= \dot{x}_t + (1-\gamma)\Delta t \ddot{x}_t + \gamma \Delta t \ddot{x}_{t+1} \end{aligned}$$

Hareket denkleminin $t+1$ anındaki hali:

$$m\ddot{x}_{t+1} + c\dot{x}_{t+1} + kx_{t+1} = -m\ddot{x}_{\mathrm{g},t+1}$$

Denklemde tüm bilinmeyenler $\ddot{x}_{t+1}$ cinsinden yazılabilir. Bu durumda denklem bilinmeyenin $\ddot{x}_{t+1}$ olduğu cebirsel hali alır ve $t+1$ anı için çözülebilir.

- Açıklanan bu yöntemde rijitlik sabitinin tersi alındığından yöntem **kapalı (implicit)** bir yöntemdir.
- Ancak, dikkat edilirse, eğer $\beta = 0$ ve $\gamma = 0$ alınırsa, $t+1$ anındaki yerdeğiştirme ve hız $t+1$ anındaki ivmeden bağımsız olur. Hareket denkleminin çözümünde rijitlik matrisinin tersi yerine kütle matrisinin tersi alınır. Bu durumda yöntem **açık (explicit)** bir yöntem olur.

Artımsal Formülasyon-1

Hareket denkleminin $t+1$ anı için yazılacak hali, t anındaki denklemden çıkarılırsa, denklemin artımsal hali elde edilir:

$$m\Delta\ddot{x}^t + c\Delta\dot{x}^t + k\Delta x^t = \Delta p^t$$

Burada $\Delta\square^t = \square_{t+1} - \square_t$ değişkenlerin artımsal halini ifade etmektedir. Deprem durumu (yer ivmesi) için dış kuvvetler:

$$\begin{aligned} p^t &= p(t) = -m\ddot{x}_{\mathrm{g}}(t) \\ p^{t+1} &= p(t+\Delta t) = -m\ddot{x}_{\mathrm{g}}(t+\Delta t) \end{aligned}$$

Artımsal Formülasyon-2

Bu formülasyonun kullanımı için t anındaki değerler bilinmeli ve cevapların $\Delta\Box^t$ değerleri hesaplanarak bir sonraki adımdaki değerleri bulunmalıdır. Bundan dolayı yerdeğiştirme ve hız t anı değerleri ve $\Delta\Box^t$ değerleri cinsinden tekrar yazılmıştır:

$$
\begin{aligned}
x_{t+1} &= x_t + \Delta t\dot{x}_t + (\frac{1}{2} - \beta)(\Delta t)^2\ddot{x}_t + \beta(\Delta t)^2\ddot{x}_{t+1} \\
x_{t+1} - x_t &= \Delta t\dot{x}_t + (\frac{1}{2} - \beta)(\Delta t)^2\ddot{x}_t + \beta(\Delta t)^2(\ddot{x}_t + \Delta\ddot{x}^t) \\
\Delta x^t &= \Delta t\dot{x}_t + (\frac{1}{2} - \beta)(\Delta t)^2\ddot{x}_t + \beta(\Delta t)^2\ddot{x}_t + \beta(\Delta t)^2\Delta\ddot{x}^t \\
\Delta x^t &= \Delta t\dot{x}_t + [\frac{1}{2}(\Delta t)^2 - \beta(\Delta t)^2 + \beta(\Delta t)^2]\ddot{x}_t + \beta(\Delta t)^2\Delta\ddot{x}^t \\
\Delta x^t &= \Delta t\dot{x}_t + \frac{1}{2}(\Delta t)^2\ddot{x}_t + \beta(\Delta t)^2\Delta\ddot{x}^t \\
\Delta\dot{x}^t &= \Delta t\ddot{x}_t + \gamma\Delta t\Delta\ddot{x}^t
\end{aligned}
$$

Artımsal Formülasyon-3

Bu noktadan sonra bu denklemler, hareket denklemine konulup $\Delta\ddot{x}^t$ için çözülebilir. Ancak, özellikle doğrusal olmayan analiz yöntemlerine uyumlu olması açısından bilinmeyenin Δx^t olduğu bir formülasyon daha uygun olmaktadır. Bundan dolayı denklemler Δx^t değerinin bilinmeyen olduğu hali ile tekrar yazılmalıdır. Bunun için bir önceki denklemlerden $\Delta\ddot{x}^t$ çekilir:

$$\Delta\ddot{x}^t = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}\Delta x^t - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{x}_t - \frac{1}{2\beta}\ddot{x}_t$$

ve yerdeğiştirme ve hız denklemlerinde yerine konur:

$$\begin{aligned}
\Delta\dot{x}^t &= \Delta t\ddot{x}_t + \gamma\Delta t\Delta\ddot{x}^t \\
\Delta\dot{x}^t &= \Delta t\ddot{x}_t + \gamma\Delta t\left(\frac{1}{\beta(\Delta t)^2}\Delta x^t - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{x}_t - \frac{1}{2\beta}\ddot{x}_t\right) \\
\Delta\dot{x}^t &= \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\Delta x^t - \frac{\gamma}{\beta}\Delta t\dot{x}_t + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\ddot{x}_t
\end{aligned}$$

Artımsal Formülasyon-4

Görüldüğü üzere hız ve ivme denklemleri bilinmeyen Δx^t cinsinden yazılmıştır. Bu değerler hareket denklemine konursa denkleminin cebirsel hali elde edilir:

$$\tilde{k}\Delta x^t = \Delta\tilde{p}^t$$

Burada

$$\begin{aligned}
\tilde{k} &= k + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}c + \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}m \\
\Delta\tilde{p}^t &= \Delta p^t + \left(\frac{1}{\beta\Delta t}m + \frac{\gamma}{\beta}c\right)\dot{x}_t + \left[\frac{1}{2\beta}m + \Delta t\left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)c\right]\ddot{x}_t
\end{aligned}$$

Yöntemin başında ($t = 0$ sn anı) hız ve yerdeğiştirme sıfır değilse:

$$\ddot{x}^0 = \frac{p^0 - c\dot{x}^0 - kx^0}{m}$$

Özet

Bilinen değerler: $x^t, \dot{x}^t$ ve $\ddot{x}^t$

$$
\begin{aligned}
\tilde{k}\Delta x^t &= \Delta\tilde{p}^t \\
\tilde{k} &= k + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}c + \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}m \\
\Delta\tilde{p}^t &= \Delta p^t + \left(\frac{1}{\beta\Delta t}m + \frac{\gamma}{\beta}c\right)\dot{x}_t + \left[\frac{1}{2\beta}m + \Delta t\left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)c\right]\ddot{x}_t \\
\Delta\ddot{x}^t &= \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}\Delta x^t - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{x}_t - \frac{1}{2\beta}\ddot{x}_t \\
\Delta\dot{x}^t &= \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\Delta x^t - \frac{\gamma}{\beta}\Delta t\dot{x}_t + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\ddot{x}_t
\end{aligned}
$$

$$
x^{t+1} = x^t + \Delta x^t \qquad \dot{x}^{t+1} = \dot{x}^t + \Delta\dot{x}^t \qquad \ddot{x}^{t+1} = \ddot{x}^t + \Delta\ddot{x}^t
$$

Kararlılık-1

Newmark yöntemi şu şart sağlanır ise kararlı olmaktadır:

$$\frac{\Delta t}{T_{\mathsf{n}}} \leq \frac{1/\pi}{\sqrt{2\gamma - 4\beta}}$$

Burada T_{n} sistemin doğal salınım periyodudur. $\gamma = 1/2$ olması durumunda:

$$\frac{\Delta t}{T_{\mathsf{n}}} \leq \frac{1/\pi}{\sqrt{1 - 4\beta}}$$

Görüldüğü üzere, ortalama ivme durumunda $\beta = 1/4$, bu kriter

$$\frac{\Delta t}{T_{\mathsf{n}}} \leq \infty$$

olmaktadır. Bundan dolayı ortalama ivme kabulü her durumda kararlıdır.

Kararlılık-2

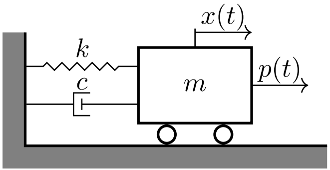
Doğrusal ivme durumunda $\beta = 1/6$,

$$\Delta t \leq 0.551 T_{\mathsf{n}}$$

olmaktadır. İnşaat mühendisliğinde yapı periyotlarının 0.1 sn-10 sn aralığında olduğu düşünülürse, $\Delta t \leq 0.05$ sn olması önerilebilir. Deprem kayıtları genelde en fazla $\Delta t = 0.02$ sn kullanmaktadır. Diğer tip analizlerde ise Δt genelde $\Delta t \leq 0.05$ sn şartını sağlayacak şekilde seçilebilir.

İçerik

Örnek: Harmonik Yükleme

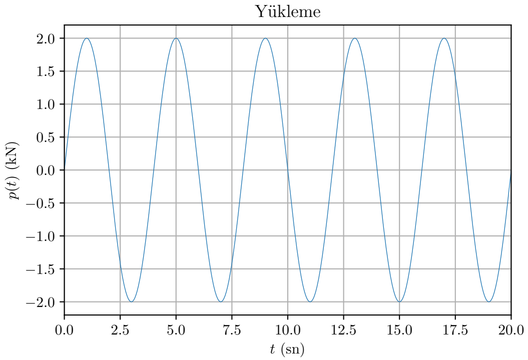


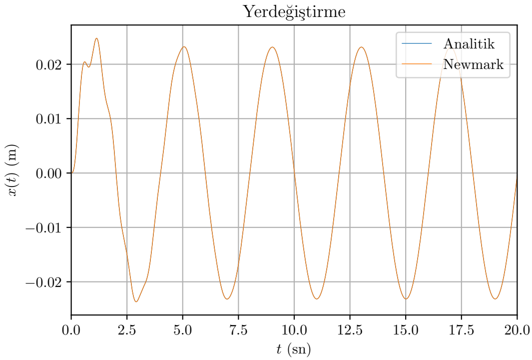
$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = Psin(\bar{\omega}t)$$

$A = 2$, $\bar{\omega} = \pi/2$, $\omega_{\mathsf{n}} = 2\pi$ ve $\xi = \%5$ seçilmiştir.

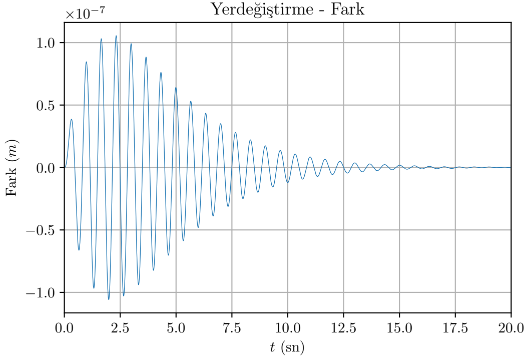
Analitik Çözüm: $x(t) = e^{-\xi\omega_n t}(A\cos\omega_{\mathsf{D}}t + B\sin\omega_{\mathsf{D}}t) + \dfrac{x_{\mathsf{st}}\sin(\bar{\omega}t - \theta)}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}}$

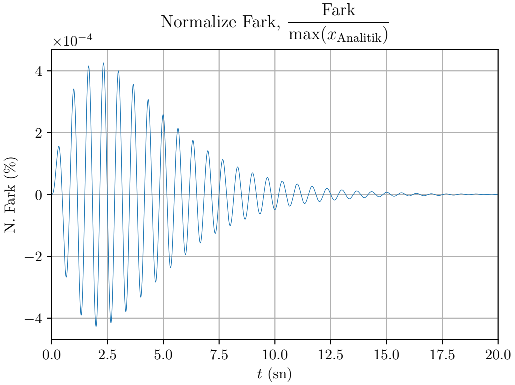
Örnek: Harmonik Yükleme



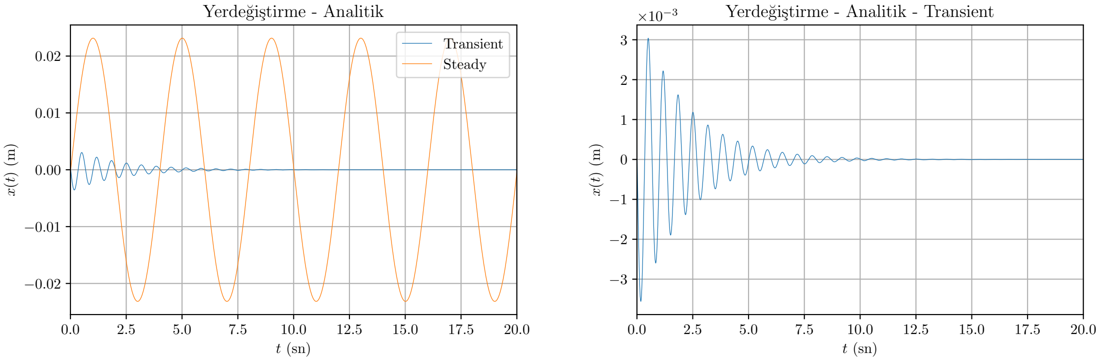


Örnek: Harmonik Yükleme

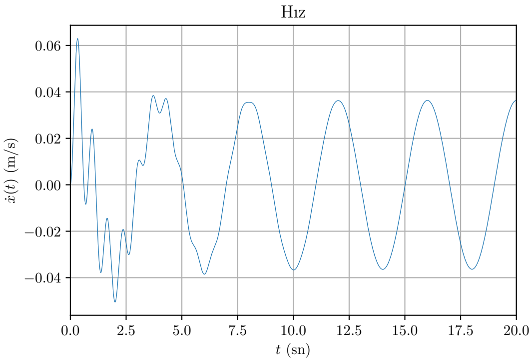


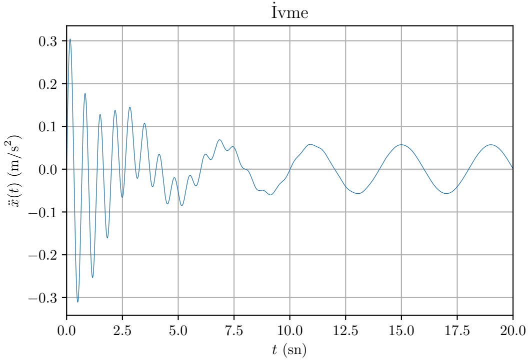


Örnek: Harmonik Yükleme

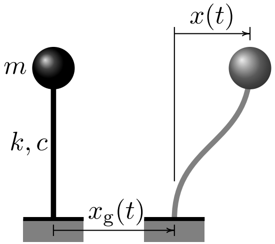


Örnek: Harmonik Yükleme





Örnek: Yer Hareketi

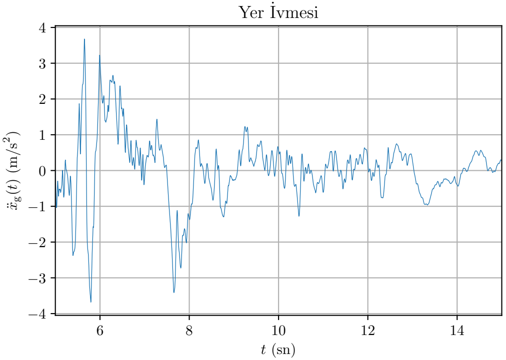


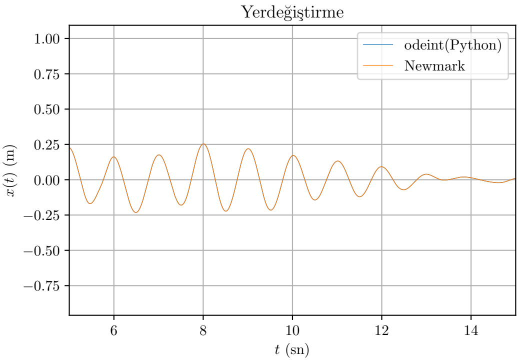
$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = -m\ddot{x}_{\mathrm{g}}(t)$$

Bu analizlerde $\omega_{\mathrm{n}} = 2\pi$, $\xi = \%5$, $\beta = 1/4$ ve $\gamma = 1/2$'dir.

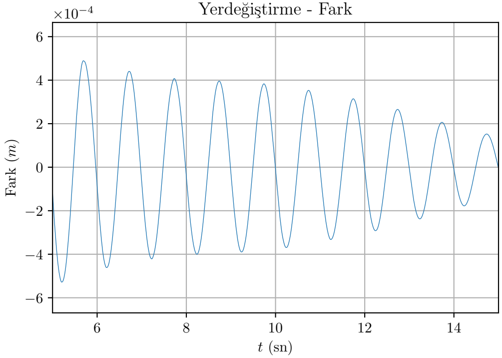
1979 Imperial Valley depreminin 952 nolu kayıt istasyonuna ait faya dik yer ivme kaydı kullanılmıştır.

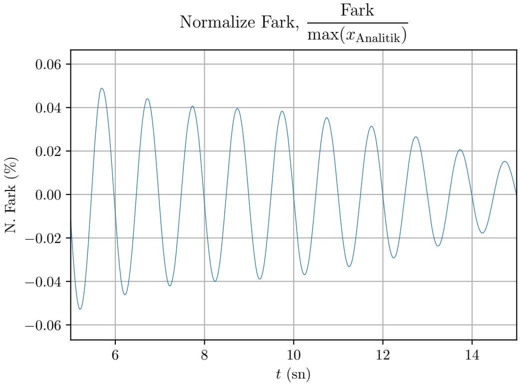
Örnek: Yer Hareketi



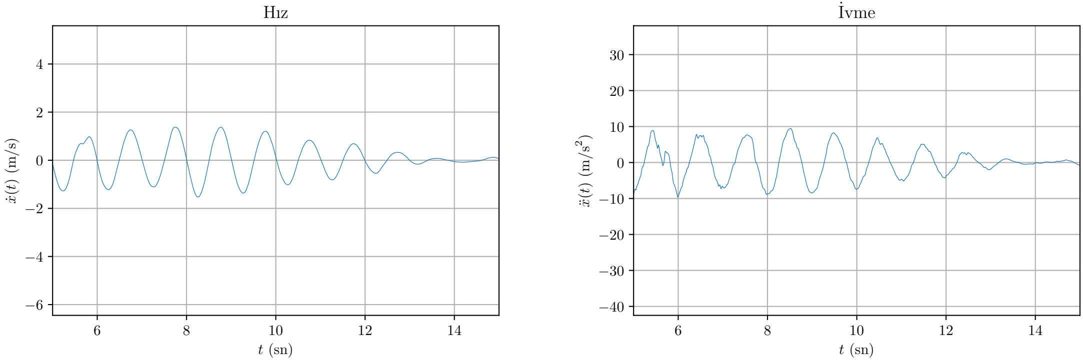


Örnek: Yer Hareketi





Örnek: Yer Hareketi



TEŞEKKÜRLER