FCEIA - Universidad Nacional de Rosario
Métodos Numéricos - LCC 2017
Profesor: Alejandro G. Marchetti

Sucesiones y Series Numéricas

Sucesiones Numéricas

Definición. Una sucesión es una función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$.

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

Una sucesión genera una lista ilimitada de números:

$$f(1),\ f(2),\ f(3),\ \ldots,\ f(n),\ \ldots$$

donde $f(n)$ es el término n-ésimo de la sucesión. También se escribe la lista como

$$f_1,\ f_2,\ f_3,\ \ldots,\ f_n,\ \ldots$$

Es frecuente utilizar notaciones del tipo $\{f(n)\}$, $\{f_n\}$, o $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, para denotar una sucesión.

Ejemplos de sucesiones

- $f_n = a, \qquad a,\ a,\ a,\ \ldots$
- $f_n = n, \qquad 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$
- $f_n = \frac{1}{n}, \qquad 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots$
- $f_n = (-1)^n, \qquad -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \ldots\ (-1)^n,\ \ldots$

Convergencia de sucesiones

Definición. Una sucesión $\{f_n\}$ es **convergente** si existe un número real L tal que para cada $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un número natural $N(\varepsilon)$ tal que $\forall n \geq N$ se verifique $|f_n - L| < \varepsilon$. Se dice entonces que L es el **límite** de la sucesión $\{f_n\}$, y se escribe $L = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, o también $f_n \to L$, si $n \to \infty$. También decimos que la sucesión $\{f_n\}$ converge a L. Una sucesión que no converge se dice que es **divergente**.

Ejemplos

- la sucesión $\{\frac{1}{n}\}$ converge a 0.
- la sucesión $\{n!\}$ es divergente.
- la sucesión $\{(-1)^n\}$ no es convergente.

Teorema 1 (Unicidad del límite) *Una sucesión convergente tiene uno y sólo un límite.*

Demostración. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a = \lim_{n\to\infty} f_n$, $b = \lim_{n\to\infty} f_n$. Supongamos que $a \neq b$, por ejemplo $a < b$. Elijase z tal que $a < z < b$. Puesto que $z < b$ y b es límite de f_n, ha de existir un N' tal que para todo $n > N'$ sea $f_n > z$. Igualmente, puesto que $a < z$ y a es límite de f_n, ha de existir un N'' tal que para todo $n > N''$ sea $f_n < z$. Tomando $N = \max\{N', N''\}$, llegamos a una contradicción, ya que se tendría que cumplir $z < f_n < z$ para todo $n > N$. □

Definición. Una sucesión $\{f_n\}$ se dice que está **acotada superiormente** si existe algún número $c \in \mathbb{R}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \leq c$. Se dice que está **acotada inferiormente** si existe algún número $k \in \mathbb{R}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $k \leq f_n$. Se dice que está **acotada** si lo está superior e inferiormente. Esto equivale a que exista algún número $M > 0$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq M$.

Definición.

a) Una sucesión $\{f_n\}$ es **monótona creciente** si $f_n \leq f_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) Una sucesión $\{f_n\}$ es **monótona decreciente** si $f_{n+1} \leq f_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

c) Una sucesión $\{f_n\}$ es **monótona** cuando es creciente o decreciente.

d) Una sucesión $\{f_n\}$ es **estrictamente creciente** si $f_n < f_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

e) Una sucesión $\{f_n\}$ es **estrictamente decreciente** si $f_{n+1} < f_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2 *(i) Toda sucesión monótona creciente y acotada superiormente es convergente. (ii) Toda sucesión monótona decreciente y acotada inferiormente es convergente. Esto equivale a decir que una sucesión monótona converge si y sólo si es acotada.*

Demostración. Ver la demostración en Tom M. Apostol, 1982. □

Teorema 3 (Operaciones con sucesiones) *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones convergentes con límites*

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n, \qquad b = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Las siguientes reglas se cumplen:

1. *Regla de la suma:* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$

2. *Regla de la diferencia:* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$

3. *Regla del producto:* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$

4. *Regla de la multiplicación por una constante:* $\lim\limits_{n\to\infty}(cb_n) = cb$, *donde* $c \in \mathbb{R}$

5. *Regla del cociente:* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, *si* $b \neq 0$

Teorema 4 (Teorema del sandwich para sucesiones) *Sean* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, *y* $\{c_n\}$ *sucesiones de números reales. Si* $a_n \leq b_n \leq c_n$ *para toda* n *mayor que algún índice* N, *y* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$, *entonces también* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.

Demostración. El teorema es intuitivo. La demostración se obtiene a partir de la definición de límite. □

Repaso de la regla de L'Hôpital

La regla de L'Hôpital permite calcular límites indeterminados para funciones de variable real.

I) Indeterminaciones de la forma $0/0$, ∞/∞, $0.\infty$

Teorema 5 (Regla de L'Hôpital) *Sean* f *y* g *funciones diferenciables en un intervalo de la forma* $(a - r, a + r)$, *con* $a, r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. *Supongamos que*

a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$,

b) $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a - r, a + r)$, $x \neq a$,

c) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

Entonces, $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Justificación: Como f y g son diferenciables en a, entonces f y g son continuas en a. Luego $f(a) = 0$ y $g(a) = 0$. Por lo tanto podemos escribir

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

Si $x \to a$ la expresión de la derecha tiende a

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Luego

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Observación: El teorema es válido también para límites laterales: $x \to a^+$ o $x \to a^-$ y límites infinitos: $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$.

Ejemplos

$$\underbrace{\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{4x^3-x-3}}_{\frac{0}{0}} = \lim_{x\to 1}\frac{3x^2}{12x^2-1} = \frac{3}{11}$$

$$\underbrace{\lim_{x\to 0^+} x\ ln\, x}_{0.(-\infty)} = \underbrace{\lim_{x\to 0^+}\frac{ln\, x}{\frac{1}{x}}}_{-\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \underbrace{\lim_{x\to 0^+}(-x)}_{\substack{\text{no es una}\\ \text{indeterminación}}} = 0$$

II) Indeterminaciones de la forma $\infty - \infty$, $-\infty + \infty$
Se pasan primero a la forma $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$

Ejemplo

$$\underbrace{\lim_{x\to 0^+}\frac{4x+1}{x} - \frac{1}{\text{sen } x}}_{\infty-\infty} = \underbrace{\lim_{x\to 0^+}\frac{(4x+1)\text{sen } x - x}{x \text{ sen } x}}_{\frac{0}{0}}$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0^+}\frac{4 \text{ sen } x + (4x+1)(\cos x) - 1}{\text{sen } x + x\cos x}}_{\frac{0}{0}}$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0^+}\frac{4\cos x + 4\cos x - (4x+1)\text{sen } x}{\cos x + \cos x - x \text{ sen } x}}_{\substack{\text{no es una}\\ \text{indeterminación}}} = \frac{4+4}{2} = 4$$

III) Indeterminaciones de la forma ∞^0

Proposición 1 *Si $\lim_{x\to a} g(x)$ existe, entonces*

$$\lim_{x\to a} e^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x)}.$$

Si $f(x)$ es de la forma ∞^0 utilizar la Proposición 1:

$$f(x) = e^{\ln\ f(x)}$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = e^{\lim_{x\to\infty} \ln\ f(x)}$$

Cálculo de límite de sucesiones usando la regla de L'Hôpital

Teorema 6 (Uso de la regla de L'Hôpital) *Suponga que $f(x)$ es una función definida para todo $x \geq N$, $x \in \mathbb{R}$ y que $\{f_n\}$ es una sucesión de números reales tal que $f_n = f(n)$ para $n \geq N$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f_n = L.$$

Demostración. Ver demostración en Thomas y George, 2006. □

Series Numéricas

Definición. Dada una sucesión de números reales $\{a_n\}$, se puede formar otra sucesión $\{s_n\}$ para la cual

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

La sucesión de las sumas parciales $\{s_n\}$ se llama **serie infinita** o simplemente **serie**. Para representar una serie se utiliza la notación $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definición.

- Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una **serie de términos positivos** cuando $a_n > 0$ para cada n.
- Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una **serie alternada** cuando $a_n = (-1)^n c_n$, para alguna sucesión $\{c_n\}$ tal que $c_n > 0$ para cada n.

Ejemplo. La **serie armónica** es $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}$. Para esta serie tenemos

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad \text{y} \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

A continuación obtendremos una desigualdad que se cumple para la serie armónica, y que será utilizada mas adelante.

$$\begin{aligned} s_{2n} - s_n &= \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow s_{2n} - s_n \geq \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Ejemplo. Para la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$, tenemos $a_n = (-1)^n$, por lo cual es una serie alternada. Además

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k = -1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^n = \begin{cases} -1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Ejemplo. La **serie geométrica** de razón r es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n, \qquad \text{con } a_n = r^n.$$

Si $r > 0$ se trata de una serie de términos positivos.
Si $r < 0$ se trata de una serie alternada.
Para la serie geométrica se puede obtener una expresión analítica de las sumas parciales

$$\begin{aligned} rs_n &= r + r^2 + \cdots + r^{n+1} \;\Rightarrow \\ (1-r)s_n &= s_n - rs_n \\ &= (1 + r + \cdots + r^n) - (r + r^2 + \cdots + r^{n+1}) \\ &= 1 - r^{n+1} \end{aligned}$$

Luego, si $r \neq 1$ tenemos

$$s_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \tag{2}$$

Convergencia y divergencia de series

Definición. Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge** o es una **serie convergente** cuando la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ tiene límite finito.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n = s$$

El límite s es la **suma** de la serie. Una serie que no tiene límite finito se dice que es **divergente**.

Ejemplo. En (1) vimos que para la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ se cumple

$$\frac{1}{2} \leq s_{2n} - s_n.$$

Supongamos que existe s tal que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$. Luego

$$\frac{1}{2} \leq \lim_{n\to\infty} s_{2n} - \lim_{n\to\infty} s_n = s - s = 0.$$

Llegamos a una contradicción. Por lo tanto la serie armónica no converge.

Teorema 7 (Condición necesaria para la convergencia de una serie)

- *Si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge, entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
- *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, *entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge.*

Demostración. Supongamos que la serie converge y su suma es s. Luego

$$a_n = s_n - s_{n-1},$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0,$$

con lo cual el teorema queda demostrado. □

Nota:

- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ es condición necesaria pero no suficiente para la convergencia.
- $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ es condición suficiente para la divergencia.

Ejemplo. Consideremos la serie geométrica (de razón r)

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$$

Si $|r| > 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} r^n \neq 0 \Rightarrow$ la serie geométrica diverge.
En (2) se probó que si $r \neq 1$ entonces $s_n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$.
Luego, si $|r| < 1$ tenemos

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r}. \tag{3}$$

Notar que es posible obtener una expresión analítica para la suma de una serie geométrica de razón $|r| < 1$.

Reindexar términos

Mientras se preserve el orden de sus términos, podemos reindexar cualquier serie sin alterar su convergencia ni su suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1+h}^{\infty} a_{n-h} = \sum_{n=1-h}^{\infty} a_{n+h} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

Adición o supresión de términos

En una serie, siempre podemos agregar o suprimir un número finito de términos sin alterar su convergencia o divergencia. En el caso de la convergencia, esto suele modificar la suma.

Ejemplo. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ converge para cualquier $k > 1$ y se cumple:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{k-1} + \sum_{n=k}^{\infty} a_n$$

Ejemplo. Consider la serie geométrica (de razón r):

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n, \qquad s_n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}, \quad r \neq 1.$$

Vimos que si $|r| < 1$ luego $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-r}$. Si se suprime el primer término, tenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n, \qquad s_n = \frac{r - r^{n+1}}{1-r}, \quad r \neq 1.$$

En este caso, si $|r| < 1$ luego $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{r}{1-r}$.

Teorema 8 (Propiedad de linealidad) *Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ series convergentes con sumas s' y s'', respectivamente. Si α, β son constantes, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$ es convergente con suma $s = \alpha s' + \beta s''$.*

Demostración. Ver la demostración en Tom M. Apostol, 1982. □

Corolario 1 *Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ diverge.*

Demostración. Si $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ fuera convergente, también lo sería $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ puesto que

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) + \sum_{n=1}^{\infty}(-a_n),$$

y por lo tanto, debiera valer el Teorema 8. □

Propiedad telescópica

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es telescópica cuando la representamos en la forma $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$, es decir cuando para una sucesión $\{b_n\}$ se cumple $a_n = b_n - b_{n+1}$. En tal caso tenemos:

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1}$$

Teorema 9 (Suma de series telescópicas) *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones tales que $a_n = b_n - b_{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y solo si la sucesión $\{b_n\}$ converge, en cuyo caso*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - L, \qquad \text{donde} \;\; L = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Ejemplo. Si $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, entonces

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

con lo que $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$. Es decir, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge y su suma es 1.

Nota: Toda serie se puede ver trivialmente como una serie telescópica, puesto que siempre se puede elegir un b_1 arbitrario y hacer $b_{n+1} = b_1 - s_n$, $n \geq 1$.

$$\begin{array}{rrcll} & b_{n+1} & = & b_1 - s_n & \\ & b_n & = & b_1 - s_{n-1} & \\ a_n = & b_n - b_{n+1} & = & s_n - s_{n-1} & = a_n \end{array}$$

Criterios de convergencia para series de términos no negativos

Si los términos de la serie son no negativos, las sumas parciales también lo son.

$$a_n \geq 0, \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \quad \Rightarrow \quad s_n \geq 0, \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Teorema 10 (Criterio de acotación) *Si $a_n \geq 0$ para cada $n \geq 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y solo si la sucesión de sus sumas parciales $\{s_n\}$ está acotada superiormente.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \geq 0,$$

por lo que la sucesión $\{s_n\}$ es monótona creciente. Luego, por el Teorema 2, la sucesión $\{s_n\}$ converge si y solo si está acotada superiormente. □

Teorema 11 (Criterio de comparación) *Si $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$, y existe una constante $c > 0$ tal que $a_n \leq c b_n$, si $n \geq N$, entonces:*

- *Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.*
- *Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.*

Demostración. Sean las sumas parciales $s_n = a_1 + \ldots + a_n$, $t_n = b_1 + \ldots + b_n$. Entonces $a_n \leq c b_n$ implica $s_n \leq c t_n$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, sus sumas parciales están acotadas. Si M es una cota, se tiene $s_n \leq cM$ y, por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es también convergente puesto que sus sumas parciales están acotadas por cM. □

Ejemplo. Considerar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos(n^3)}{2^n+n}$. Podemos escribir la siguiente desigualdad:

$$0 \leq \frac{2+\cos(n^3)}{2^n+n} \leq \frac{3}{2^n} = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Sean

$$a_n = \frac{2+\cos(n^3)}{2^n+n}, \qquad b_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Luego se cumple $0 \leq a_n \leq b_n$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 3\sum_{n=1}^{\infty} 0,5^n$ converge (serie geométrica de razón $0,5 < 1$), entonces, por el criterio de comparación $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge.

Teorema 12 (Criterio del límite) *Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ dos sucesiones tales que $a_n \geq 0$, $b_n > 0$, y sea*

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

Si λ es finito y $\lambda \neq 0$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge si y solo si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Es decir, las dos series tienen el mismo carácter: ambas convergen o ambas divergen. (Notar que $0 < \lambda < \infty$).

Demostración. Sea $c \in (\lambda, \infty)$. Entonces existe algún $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n/b_n \leq c$ para todo $n \geq N$, es decir, $0 \leq a_n \leq cb_n$ para todo $n \geq N$. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge por el criterio de comparación (ver Teorema 11). Por otra parte, sea $d \in (0, \lambda)$. Existe algún $N' \in \mathbb{N}$ tal que $a_n/b_n \geq d$ para todo $n \geq N'$, es decir, $a_n \geq db_n \geq 0$ para todo $n \geq N'$. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también diverge por el criterio de comparación. $\square$

Teorema 13 (Criterio de la raíz) *Sea $\{a_n\}$ una sucesión tal que $a_n \geq 0$ y sea*

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Entonces

(a) Si $\alpha < 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(b) Si $\alpha > 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

(c) Si $\alpha = 1$, el criterio no decide.

Demostración. Si $\alpha < 1$, elíjase L tal que $\alpha < L < 1$. Entonces $0 \leq (a_n)^{\frac{1}{n}} \leq L$ para todo $n \geq N$. Por lo tanto, $a_n \leq L^n$ para todo $n \geq N$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} L^n$ es convergente (serie geométrica de razón $L < 1$). Luego, por el criterio de comparación (ver Teorema 11) la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
Para demostrar *(b)* se observa que $\alpha > 1$ implica $a_n > 1$ para una infinidad de valores de n y por lo tanto a_n no puede tender a 0. Por lo cual, no se cumple la condición necesaria de convergencia del Teorema 7, y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.
Para demostrar *(c)*, consideremos dos ejemplos en los que $a_n = 1/n$, y $a_n = 1/n^2$. En ambos casos $\alpha = 1$. Sin embargo, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge mientras que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ converge. $\square$

Teorema 14 (Criterio del cociente) *Sea $\{a_n\}$ una sucesión tal que $a_n > 0$ y sea*

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Entonces

(a) Si $L < 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(b) Si $L > 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

(c) Si $L = 1$, el criterio no decide.

Demostración. Si $L < 1$, elíjase z de manera que $L < z < 1$. Entonces ha de existir un N tal que $\frac{a_{n+1}}{a_n} < z$ para todo $n \geq N$. Luego

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < z = \frac{z^{n+1}}{z^n} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{z^{n+1}} < \frac{a_n}{z^n}, \quad \forall n \geq N.$$

Es decir, la sucesión $\{a_n/z^n\}$ es decreciente para $n \geq N$. En particular, $a_n/z^n \leq a_N/z^N$ para $n \geq N$, o de otro modo, $a_n \leq cz^n$, donde $c = a_N/z^N$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ converge (serie geométrica, razón $z < 1$), luego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge por el criterio de comparación.
Para demostrar *(b)*, basta observar que $L > 1$ implica $a_{n+1} > a_n$ para todo $n \geq N$, y por lo tanto a_n no tiende a 0.
Para demostrar *(c)* se pueden tomar los mismos ejemplos que en la demostración del item *(c)* del Teorema 13. □

Teorema 15 (Criterio de la Integral) *Sea f una función positiva y estrictamente decreciente definida en $[1, +\infty)$ tal que $f(n) = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y solo si la integral $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge.*

Demostración. Ver la demostración en Tom M. Apostol, 1982. □

Ejemplo. Consideremos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Sea $f(x) = \frac{1}{x^2}$.
f es positiva para todo x.
$f'(x) = -2x^{-3} < 0$ si $x > 0 \;\Rightarrow\; f$ es estrictamente decreciente en $[1, +\infty)$.
Estudiaremos la integral:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{-1}{x}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty} \left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1.$$

Entonces $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ converge y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

Criterios de convergencia para series alternadas

Las series alternadas son de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n + \cdots$$

donde cada $a_n > 0$.

Ejemplo. La **serie logarítmica** es una serie alternada:

$$\ln\,(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots .$$

Teorema 16 (Criterio de Leibniz) *Si $\{a_n\}$ es una sucesión monótona decreciente con límite 0, la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} a_n$ converge.*

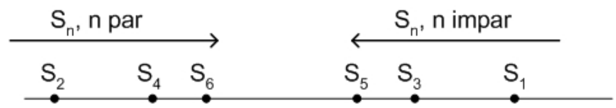

Figura 1: Demostración del criterio de Leibniz.

Demostración. La sucesión se sumas parciales $\{s_{2n}\}$ es creciente puesto que

$$s_{2(n+1)} - s_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq 0.$$

En forma similar, se puede demostrar que $\{s_{2n-1}\}$ es decreciente. Además, se cumple

$$s_{2n} < s_1 \ \text{ y } \ s_{2n-1} > s_2 \ \ \forall n.$$

Se tiene entonces que las sucesiones de sumas parciales son monótonas (crecientes las pares y decrecientes las impares) y acotadas (ver la representación en la Figura 1). Luego, ambas sucesiones son convergentes. Sea

$$s' = \lim_{n\to\infty} s_{2n}, \qquad s'' = \lim_{n\to\infty} s_{2n-1}.$$

Tenemos que

$$s' - s'' = \lim_{n\to\infty} (s_{2n} - s_{2n-1}) = \lim_{n\to\infty} (-a_{2n}) = 0.$$

Es decir, $s' = s''$ y la serie alternada es convergente. □

Ejemplo. Considerar la serie armónica alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$. La sucesión $\{\frac{1}{n}\}$ es decreciente con límite 0. Por lo tanto la serie armónica alternada converge. Recordar que la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ no converge.

Convergencia condicional y absoluta

Teorema 17 *Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, también converge $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y tenemos*

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| . \tag{4}$$

Demostración. Definamos $b_n = a_n + |a_n|$. Resulta $b_n = 0$ o $b_n = 2|a_n|$. Luego siempre vale $0 \leq b_n \leq 2|a_n|$. Notar que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es una serie de términos no negativos. Como $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge y $2\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ domina a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, luego $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge. Ahora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ y por el teorema de la propiedad de linealidad (ver Teorema 8), $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. En cuanto a la desigualdad (4), es una propiedad conocida del valor absoluto. □

Definición.

- Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **absolutamente convergente** si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.
- Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **condicionalmente convergente** si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y en cambio $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge.

Sucesiones y series de funciones

Definición. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Supongamos que para cada número natural n está dada una función $f_n : A \to \mathbb{R}$; la aplicación $n \to f_n$ recibe el nombre de **sucesión de funciones** (definidas en A).

Notación: $\{f_n\} = f_1,\ f_2,\ f_3\ \ldots,\ f_n,\ \ldots$

f_n es el término n-ésimo de la sucesión.

Para cada $x \in A$, podemos considerar la sucesión numérica que tiene por término n-ésimo el número real $f_n(x)$.

Definición. El **campo de convergencia** de una sucesión de funciones es el conjunto C de todos los puntos $x \in A$ para los que $\{f_n(x)\}$ converge.

Definición (Convergencia puntual). Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definidas en un conjunto A, S un subconjunto de A y f una función definida en S. Si $\forall x \in S$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, se dice que la sucesión $\{f_n\}$ **converge puntualmente** a f en S.

En este caso, a f se la llama la **función límite** de $\{f_n\}$ en S.

Cuando existe tal función f, decimos que $\{f_n\}$ es **convergente puntualmente** en S.

Ejemplo (Sucesión de funciones continuas con función límite discontinua). La sucesión $\{x^n\}$ converge puntualmente en $[0,1]$ a la función f definida en dicho intervalo por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Ejemplo (Sucesión para la que el límite de la integral no es igual a la integral del límite). Sea $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$ para $0 \le x \le 1$. La sucesión $\{f_n(x)\}$ converge puntualmente a $f(x) = 0$, para todo $x \in [0,1]$. Luego, $\int_0^1 f(x)\ dx = 0$. Sin embargo,

$$\int_0^1 f_n(x)\ dx = n \int_0^1 x(1-x^2)^n\ dx = -\frac{n}{2}\frac{(1-x^2)^{n+1}}{n+1}\bigg|_0^1 = \frac{n}{2(n+1)}$$

Por consiguiente,

$$\frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\ dx \ne \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ dx = 0.$$

Definición (Otra definición equivalente de convergencia puntual). Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definidas en A, S un subconjunto de A. La sucesión $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en S si y solo si para todo $x \in S$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N(\varepsilon, x)$ tal que siempre que $n > N(\varepsilon, x)$ se verifica $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

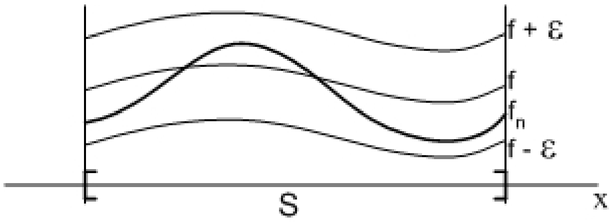

Figura 2: Interpretación gráfica de la convergencia uniforme. Se cumple que $f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$, si $n > N(\varepsilon)$, $\forall x \in S$.

Definición. Una **serie de funciones** $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es un par ordenado de sucesiones de funciones $\{f_n, s_n\}$ relacionadas por la condición:

$$s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$,
f_n es el **término** n**-ésimo** de la serie
s_n es la **suma parcial** n**-ésima** de la serie

Una serie de funciones **converge puntualmente** a una función s en S si para todo $x \in S$, $s(x) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Definición (Convergencia uniforme). Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definidas en A, S un subconjunto de A, f una función definida en S. Se dice que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en S si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $N(\varepsilon)$ tal que siempre que $n > N(\varepsilon)$ se verifica $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in S$. (Ver interpretación en la Figura 2).

Toda sucesión $\{f_n\}$ que converge uniformemente a f en S, también converge puntualmente a f en S.

Convergencia uniforme y continuidad

A diferencia de la convergencia puntual, la convergencia uniforme conserva la continuidad.

Teorema 18 *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones que converge uniformemente en un conjunto S a una función f, y sea x un punto de S. Si cada función f_n es continua en x, entonces f también es continua en x.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Según la definición de convergencia uniforme, existe algún $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $t \in S$

$$|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

de hecho, vale para todo $n > N(\frac{\varepsilon}{3})$.
f_n es continua en x, luego existe algún $\delta > 0$ tal que

$$|f_n(y) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

siempre que $|y-x|<\delta$. Entonces, si $|y-x|<\delta$ se tiene

$$\begin{aligned}|f(y)-f(x)| &= |f(y)-f_n(y)+f_n(y)-f_n(x)+f_n(x)-f(x)| \\ &\leq |f(y)-f_n(y)|+|f_n(y)-f_n(x)|+|f_n(x)-f(x)| \\ &< \varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon\end{aligned}$$

Es decir, f es continua en x. □

Ejemplo. La sucesión $f_n(x)=x^n$ no converge uniformemente a

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x<1 \\ 1 & \text{si } x = 1\end{cases}$$

en $[0,\ 1]$. Pues si convergiera uniformemente, la función límite sería continua, ya que cada f_n es continua.

Definición. Una serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ se dice que converge uniformemente a una función s en S cuando la sucesión $\{s_n\}$ de sus sumas parciales,

$$s_n=f_1+f_2+\cdots+f_n,$$

converge uniformemente a s en S.

Corolario 2 *Si una serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente a la función suma s en S y cada término f_n es una función continua en un punto $x\in S$, entonces f es continua en x.*

Convergencia uniforme e integración

La convergencia uniforme permite intercambiar el símbolo de integración con el paso al límite.

Teorema 19 *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas en un intervalo $[a,b]$ que convergen uniformemente en $[a,b]$ a una función f. Entonces f es integrable en $[a,b]$ y se cumple*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\ dx=\int_a^b f(x)\ dx.$$

Demostración. f es integrable porque es continua según el Teorema de convergencia uniforme y continuidad. Para cada $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^b f_n(x)\ dx-\int_a^b f(x)\ dx\right| = \left|\int_a^b \big(f_n(x)-f(x)\big)\ dx\right| \\ &\leq \int_a^b \big|f_n(x)-f(x)\big|\ dx \leq (b-a)\ \sup\left\{\big|f_n(x)-f(x)\big| : x\in[a,b]\right\}.\end{aligned}$$

Que $\{f_n\}$ converja uniformemente a f en $[a,b]$ implica que

$$\lim_{n\to\infty}\sup\left\{\big|f_n(x)-f(x)\big| : x\in[a,b]\right\}=0,$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_a^b f_n(x)\ dx - \int_a^b f(x)\ dx\right| = 0.$$

con lo cual el teorema queda demostrado. □

Condición suficiente para la convergencia uniforme de series de funciones

Teorema 20 (Criterio M de Weierstrass) *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ una serie de funciones que converge puntualmente hacia una función s en un conjunto S. Si existe una serie numérica de términos no negativos, convergente, $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$, tal que*

$$0 \leq |f_n(x)| \leq M_n, \quad \forall\ n \geq 1\ y\ \ \forall\ x \in S,$$

entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en S.

Demostración. Para cualquier $x \in S$ tenemos

$$\big|s(x) - s_n(x)\big| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como la serie $\sum_{k=n+1}^{\infty} M_n$ converge, existe algún $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N(\varepsilon)$ se cumple $\sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \varepsilon$ (condición de Cauchy para una serie convergente). Por lo tanto

$$\sup\{|s(x) - s_n(x)| : x \in S\} < \varepsilon, \qquad n > N(\varepsilon),$$

con lo cual $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente a s en S. □

Series de potencias

Definición. Una serie de potencias alrededor de $x = 0$ es una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

Una serie de potencias alrededor de $x = c$ es una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n + \cdots$$

en la cual el **centro** c y los coeficientes $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$ son constantes.

Nota: En general x, c, a_0, a_1, $\cdots$ son números complejos pero consideraremos solamente el caso en que son números reales.

Intervalo de convergencia

Cada serie de potencias está asociada a un intervalo, llamado **intervalo de convergencia** (círculo de convergencia en el plano complejo) tal que:

- la serie converge absolutamente para todo x interior al mismo.
- la serie diverge para todo x exterior al mismo.
- el comportamiento de la serie en los puntos frontera del intervalo no puede predecirse.

El intervalo de convergencia posee un **radio de convergencia** r alrededor del centro c (ver Figura 3). La demostración de la existencia del círculo de convergencia puede hallarse en Tom M. Apostol, 1982.

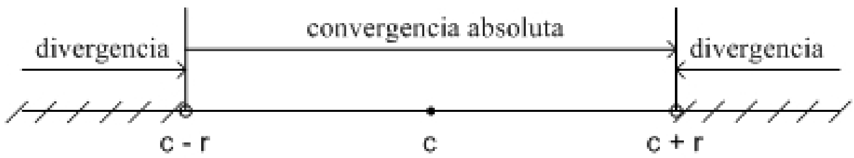

Figura 3: Intervalo de convergencia de una serie de potencias.

En general, el intervalo de convergencia puede determinarse mediante el criterio del cociente o de la raíz.

Ejemplo. Considerar la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Apliquemos el criterio del cociente. Si $x \neq 0$:

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{x^n} \right| = \frac{|x|}{n+1}$$

Se cumple $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$. Luego, la serie converge absolutamente para todo $x \neq 0$.
Si $x = 0$ la serie también converge y el radio de convergencia es $+\infty$.

Ejemplo. Considerar la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 3^n x^n$. Apliquemos el criterio de la raíz:

$$(n^2 3^n |x|^n)^{\frac{1}{n}} = 3\,|x|\, n^{\frac{2}{n}} \to 3\,|x|\,, \text{cuando } n \to \infty.$$

Por lo tanto la serie converge absolutamente si $|x| < 1/3$ y diverge si $|x| > 1/3$. Es decir, el radio de convergencia es $1/3$.
Esta serie diverge si $|x| = 1/3$, ya que $|n^2 3^n x^n| = n^2$.

Bibliografía

1. Tom M. Apostol, *CALCULUS*, Volumen 1, Editorial Reverté, 1982.

2. Thomas, Jr., and George B., *Cálculo. Varias variables*, Undécima edición, Pearson Education, México, 2006.