ESTUDIO ECONÓMICO-MATEMÁTICO DE APUESTAS EN LA RULETA - SIMULACION

Fadua Dora Sicardi **Franco Giangiordano** **Gonzalo Turconi** **Ignacio Curti**

16 de agosto de 2022

ABSTRACT

Este trabajo de investigación tiene por objetivo profundizar el comportamiento de la ruleta dependiendo de las diferentes estrategias abordadas desde el punto de vista del apostador. Debido a sus amplios rango de aplicaciones, la teoría de las estrategias es parte fundamental de la probabilidad. En este informe se presentan las nociones básicas y se recopilan algunas de sus aplicaciones en probabilidad y análisis de los efectos presentados al cambiar los montos iniciales de apuesta, dando idea de los diferentes escenarios resultantes.

***K*eywords**

simulación, ruleta, Martingala, Fibonacci, D'Alembert, Teorema Central del Límite.

1. Introducción

Estudiaremos ahora una familia de procesos estocásticos que es importante dentro de la teoría de la probabilidad, principalmente por sus aplicaciones teóricas,tanto así, que su estudio resulta imprescindible para la teoría moderna de la probabilidad.
Existen muchos tipos de juegos de apuestas y por lo tanto un gran número de estrategias que utilizan los jugadores para apostar. Nos centraremos en una clase particular de juegos a los cuales se les conoce en la literatura como juegos de apuestas sucesivas. Estos consisten en apostar sucesivamente cierta cantidad, la cual se fija mediante cierta regla, y de tal manera que en cada juego se puede perder o ganar la cantidad apostada. Ejemplos de este tipo de juegos pueden ser apostar a cierto color en la ruleta sucesivamente durante varios juegos.

2. Estrategias de apuesta estudiadas

- **Martingala:** Es una de las estrategias de ruleta más populares y se puede usar en otros juegos de casino como el blackjack o incluso en apuestas deportivas. La Martingala apareció en la Francia del siglo XVIII, y consiste en empezar con una cantidad fija en la apuesta inicial. Si la jugada es ganadora, se mantiene la apuesta para la siguiente tirada, pero si la apuesta es perdedora, se dobla la apuesta sucesivamente hasta lograr una apuesta ganadora. El beneficio es la apuesta inicial. Existe una variante de esta estrategia llamada martingala inversa. Establecemos una cantidad fija para la apuesta inicial, que mantendremos en caso de perder o duplicaremos si resulta ganadora. Hay que tener en cuenta que por sus características tanto la martingala como la martingala inversa son estrategias de ruleta efectivas en apuestas simples, por ejemplo en apuestas a rojo/negro. En otras apuestas de ruleta, por ejemplos a un número, no se deberían aplicar.

- **Fibonacci:** Este sistema matemático de apuestas sigue la sucesión numérica de Leonardo de Pisa 1-2-3-5-8-13-21-34. Es la suma de las dos cifras anteriores, e indica el stake a jugar. El stake sube cada vez que perdemos y al acertar volvemos al primer valor de la sucesión. De nuevo, es una apuesta interesante para las apuestas simples pero exige un buen control del bank, en especial si es escaso. Por eso, no es necesario llegar al stake

34 sino que podemos marcar un límite de pérdidas para no comprometer el bank. Es una estrategia muy a largo plazo.

- **D'Alembert:** Esta estrategia consiste en que el jugador haga apuestas sencillas por la misma cantidad mientras vaya ganando. Si pierde apuesta una unidad adicional y sigue añadiendo en cada apuesta hasta que gane. Cada vez que gane sustrae una unidad en cada apuesta hasta que pierda

3. Marco teórico

En la ruleta los resultados posibles en cada jugada son 0, 1, 2,. . . , 36. En el análisis del juego, tales resultados no son importantes por sí mismos, sino por las ganancias o pérdidas que puedan ocasionar. Tomamos un ejemplo concreto: un jugador apuesta 2 fichas al color negro. Si en la ruleta sale el "0" o un número rojo, el jugador pierde sus 2 fichas, es decir, tiene una ganancia de –2. En caso contrario, el jugador recupera sus fichas y el casino le entrega 2 más, con lo cual hay una ganancia de 2. Podemos pensar entonces en una función F, que transforme cada resultado posible de la ruleta en la correspondiente ganancia del jugador. Por ejemplo, como el "4" es negro y el "9" es rojo, tendremos F(4) = 2 y F(9) = -2. Como ya hemos observado, el "0" no beneficia al jugador, de modo que F(0) = -2. Muchas veces es útil asignar un valor numérico a cada uno de los resultados posibles. En el caso del jugador que apostó 2 fichas al color negro, la función F : 0,1,2,...,36 $\rightarrow \Re$ es la que lleva a cabo tal asignación. "Dado un experimento aleatorio, el conjunto de sus resultados posibles, que denotaremos por E, se denomina **espacio muestral** de dicho experimento. Para cada característica de los elementos de E se puede definir una función X:E $\rightarrow \Re$, llamada **variable aleatoria**, cuyo valor X(e) en cada elemento e de E proporciona información sobre la naturaleza de e con respecto a la característica estudiada." Para una correcta ejecución recurrimos a unas definiciones cruciales tales como frecuencia relativa y promedio. La **frecuencia relativa** (fi) de un valor Xi es la proporción de valores iguales a Xi en el conjunto de datos $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Es decir, la frecuencia relativa es la frecuencia absoluta dividida por el número total de elementos N:

$$f_i = \frac{n_i}{N} \tag{1}$$

siendo $(X_1, X_2, \ldots, X_N)$ el conjunto de datos y n_i el total de valores iguales a X_i

Las frecuencias relativas son valores entre 0 y 1, $(0fi1)$. La suma de las frecuencias relativas de todos los sujetos es siempre 1. Supongamos que en el conjunto tenemos k números (o categorías) diferentes, entonces:

$$\sum_{i=1}^{k} f_i = f_1 + f_2 + \ldots + f_k = 1 \tag{2}$$

El **promedio** μ es una medida de posición. No coincide necesariamente con un valor de la variable. El cálculo del promedio de n observaciones de la variable X (x_i con i = 1, 2,. . . ,n), resulta:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{3}$$

La **varianza** σ^2 se define como el promedio de los cuadrados de las diferencias de los datos con promedio:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2}{N} \tag{4}$$

La **desviación estándar** σ es la raíz cuadrada positiva de la varianza:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \tag{5}$$

4. Exposición de los resultados y análisis de los mismos

A continuación se detallan los gráficos correspondientes a los resultados obtenidos al finalizar la simulación

4.1. Fibonacci

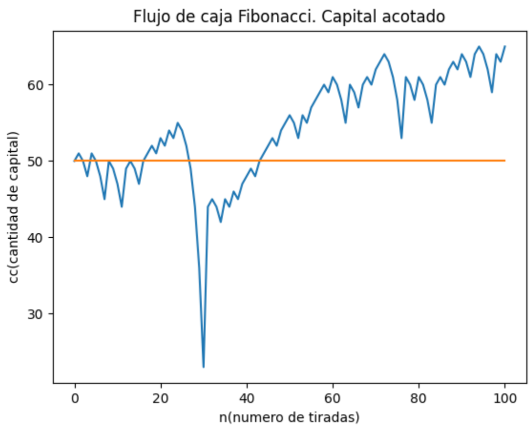

Figura 1: *Flujo de caja con capital acotado en estrategia Fibonacci*

En la estrategia Fibonacci podemos notar una caída de capital: un punto de inflexión claro en la tirada número 30, muy cerca de perdelo todo. A partir de aquí se ve un incremento variable de ganancias con pérdidas más pequeñas quedando con un mayor capital que el inicial. Esto se ve reprensentado en la **figura 1**.

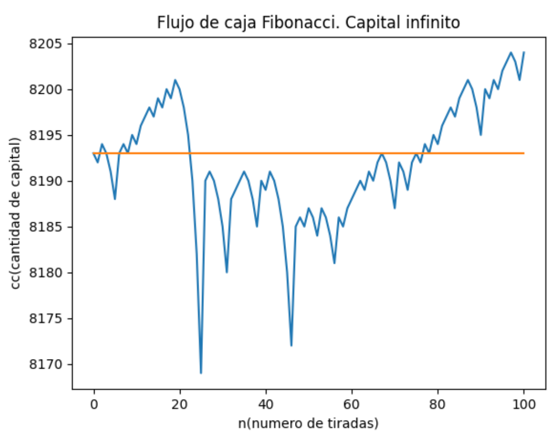

Figura 2: *Flujo de caja con capital infinito en estrategia Fibonacci*

Por otro lado, analizando la caja con capital infinito respecto a la **figura 2**, notamos dos caídas de capital: un punto de inflexión claro en la tirada número 24 y otro en la tirada número 46. A partir de aquí un incremento muy variable de ganancias con pérdidas más pequeñas quedando con un mayor capital que el inicial.

A continuacion detallaremos la **figura 3** y **figura 4** donde podemos observar que, con el correr de las tiradas, la frecuencia de aciertos tiende a ubicarse debajo del 50 %. Este resultado está dentro del rango esperado debido a la presencia del 0.

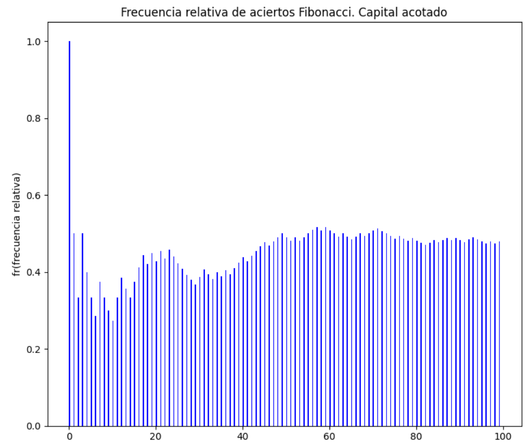

Figura 3: *Frecuencia Relativa de aciertos con capital acotado en la estrategia Fibonacci*

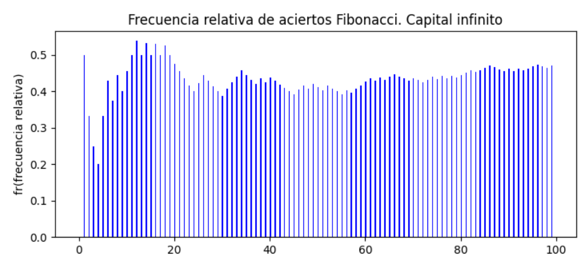

Figura 4: *Frecuencia Relativa de aciertos con capital infinito en la estrategia Fibonacci*

En cuanto a frecuencia relativa de aciertos nos referimos al porcentaje de victorias sobre tiradas totales de la ruleta. Podemos ver que en la **figura 3** la frecuencia relativa de aciertos tras la primer tirada de ruleta es 1 lo que quiere decir que el jugador acertó en la primer tirada. Con el pasar de las tiradas el valor se estabiliza hasta ubicarse por debajo del 50 %.
En la **figura 4** observamos que tras la primer tirada la frecuencia relativa de aciertos es 0, es decir, el jugador no acertó en esta primer tirada. Como en el caso anterior el valor se estabiliza con el paso de las tiradas y se ubica debajo del 50 %.
En ambos casos observamos que el jugador gana cerca del 50 % de las veces que juega a la ruleta.

Seguidamente en la **figura 5** podemos observar que todas las corridas terminan por encima del capital inicial, aumentando cerca de un 50 %, obteniendo valores entre \$65 y \$80, salvo una corrida que se mantuvo aproximadamente en \$50. Por otro lado en la **figura 6** vemos una corrida, representada con color rojo, que terminó considerablente por debajo del capital inicial.

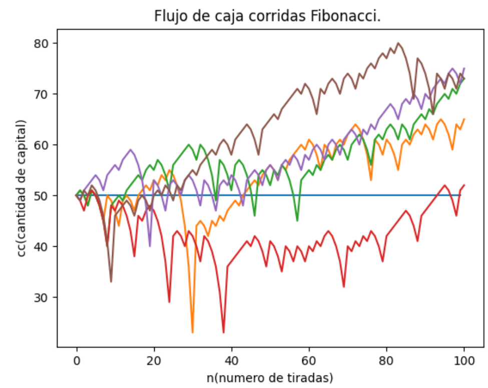

Figura 5: *Flujo de cajas en total de corridas con capital acotado en estrategia Fibonacci*

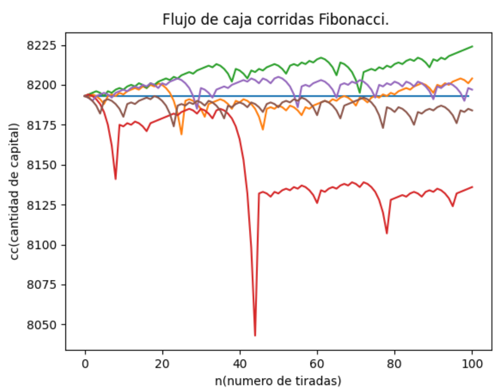

Figura 6: *Flujo de cajas en total de corridas con capital infinito en estrategia Fibonacci*

Posteriormente detallaremos las gráficas, correspondientes a la **figura 7** y **figura 8**, donde podemos apreciar que la frecuencia de aciertos de cada corrida tiende a estar entre 50 % y 40 %, estos resultados están dentro del rango esperado debido a la presencia del 0.

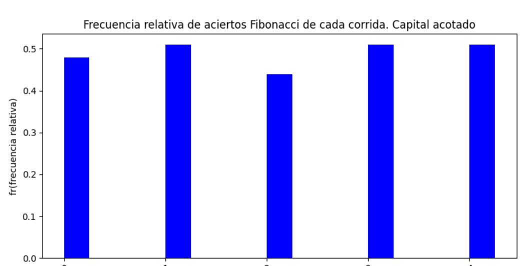

Figura 7: *Frecuencia Relativa de aciertos de cada corrida con capital acotado en estrategia Fibonacci*

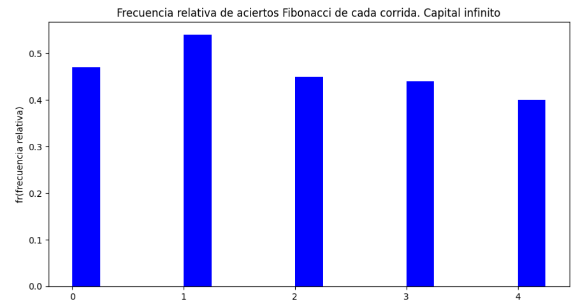

Figura 8: *Frecuencia Relativa de aciertos de cada corrida con capital infinito en estrategia Fibonacci*

Aquí observamos la frecuencia relativa de aciertos al final de cada una de las 5 corridas. En todos los casos terminamos con valores cercanos a 0.50; por lo general, ligeramente inferiores debido a que existen más números en la ruleta que hacen perder al jugador que valores que lo hacen ganar.

4.2. Martingala

Seguidamente, en la **figura 9** notamos que el jugador tuvo una mala racha que lo condujo a llegar a casi 0 en la caja. A partir de aquí comienza un incremento variable de ganancias. Cerca del final, el jugador se encuentra con una cantidad de capital muy alta comparada con la que se comenzó. Sin embargo, una serie de derrotas lo ubican debajo del valor de caja inicial. Si bien lo recupera con una apuesta en la última tirada, el hecho de poder perderlo todo en solo una serie de derrotas indica que la estrategia Martingala no siempre funciona al corto plazo y con una cantidad de capital finita.

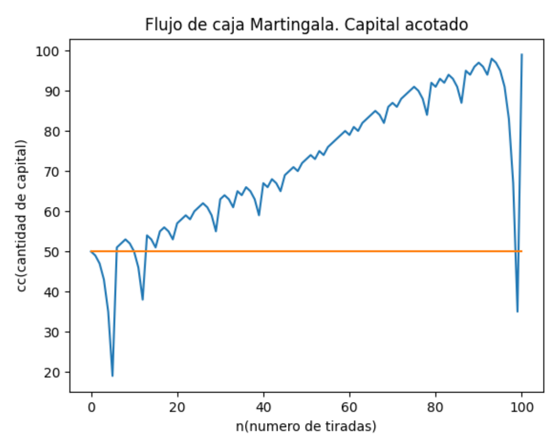

Figura 9: *Flujo de caja con capital acotado en estrategia Martingala*

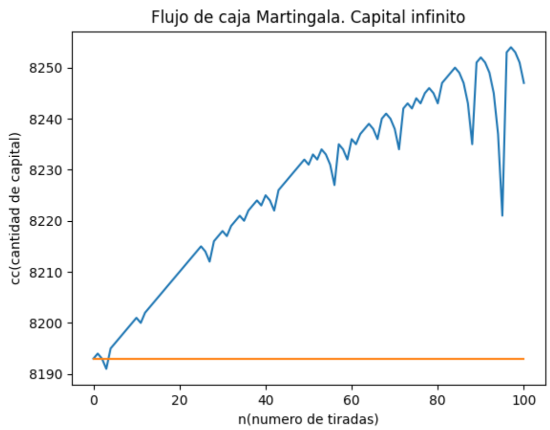

Figura 10: *Flujo de caja con capital infinito en estrategia Martingala*

Por otro lado, en la **figura 10** podemos notar que ocurre lo contrario a la figura 9, puesto que a medida que el número de intentos (tiradas) se acerca al infinito, la probabilidad de fracasar se acerca al 0.
Esto significa que con recursos infinitos y sin limitaciones del casino, acabariamos ganando. Notamos que el capital final aumentó considerablemente respecto al inicial.

A continuacion detallamos la **figura 11** donde podemos observar que, al inicio, la frecuencia relativa de aciertos es demasiado baja sin embargo se va estabilizando al valor esperado a medida que se incrementa el número de tiradas. En la **figura 12** estamos ante un caso anómalo puesto que la frecuencia relativa de aciertos en las primeras tiradas es sorpresivamente elevada. Si bien la frecuencia relativa comienza a descender hacia el valor esperado conforme se incrementa el número de tiradas, el valor final termina siendo superior a 60 %.

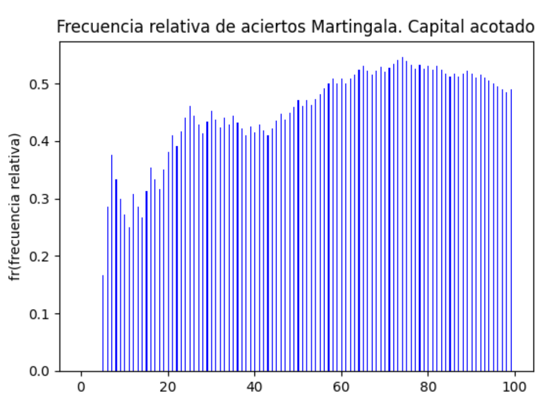

Figura 11: *Frecuencia Relativa de aciertos con capital acotado en la estrategia Martingala*

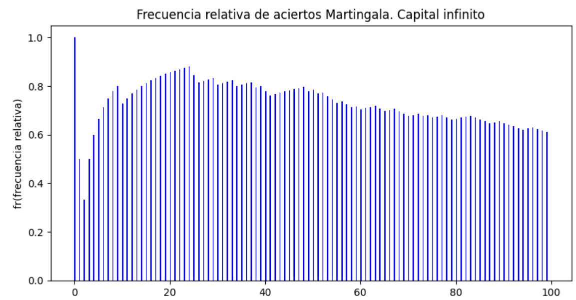

Figura 12: *Frecuencia Relativa de aciertos con capital infinito en la estrategia Martingala*

En cuanto a frecuencia relativa de aciertos nos referimos al porcentaje de victorias sobre tiradas totales de la ruleta. Podemos ver que en la **figura 11** la frecuencia relativa de aciertos tras las primeras 6 tiradas de ruleta es 0 lo que quiere decir que el jugador no acertó en ninguno de esos 6 giros de ruletas. Con el pasar de las tiradas el valor se estabiliza hasta ubicarse por debajo del 50 %.
En la **figura 12** notamos un caso anómalo ya que la frecuencia relativa de aciertos tras 25 tiradas es cercana al 80 %, un valor bastante alto comparado al anterior esperado. Si bien el valor se estabiliza con el paso de las tiradas, este se termina ubicando en valores cercanos al 60 %.

Seguidamente, en base a los resultados de las gráficas de la **figura 13** y **figura 14**, queda en evidencia que estamos ante una estrategia mucho más riesgosa. Si bien podemos alcanzar valores máximos más altos que en Fibonacci, también está la posibilidad de perderlo todo de manera estrepitosa. En la **figura 13** encontramos tres corridas con valores mayores a 80 y dos corridas que terminan en la quiebra, mostrando la falta de consistencia en la estrategia (con números de caja finitos). Notamos también que en la **figura 14** que, a pesar de tener inmensas pérdidas, al tener capital infinito el jugador se recupera y termina con un valor de caja mayor al inicial.

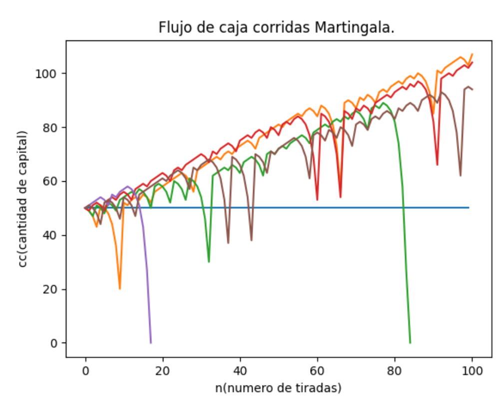

Figura 13: *Flujo de cajas en total de corridas con capital acotado en estrategia Martingala*

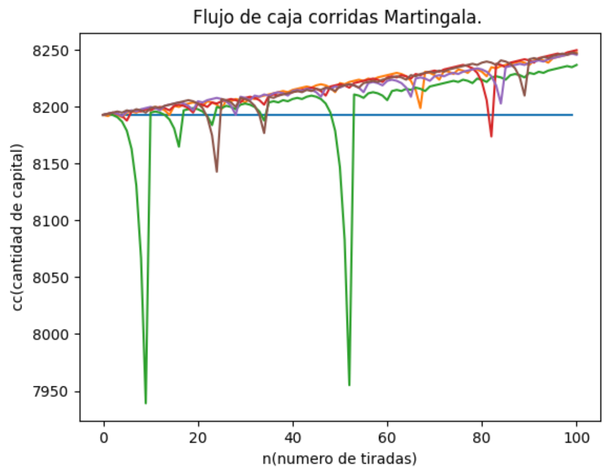

Figura 14: *Flujo de cajas en total de corridas con capital infinito en estrategia Martingala*

Posteriormente detallaremos las gráficas, correspondientes a la **figura 15** y **figura 16**, muestran que la probabilidad de éxito se encuentra apenas por debajo del 50 %, lo cual resulta lógico debido a que se trata de apuestas simples. Sin embargo en algunos casos ese porcentaje se incrementó hasta llegar a un 60 % de aciertos.

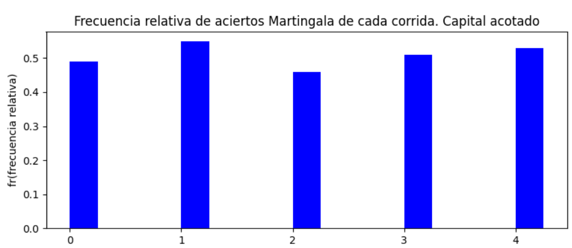

Figura 15: *Frecuencia Relativa de aciertos de cada corrida con capital acotado en estrategia Martingala*

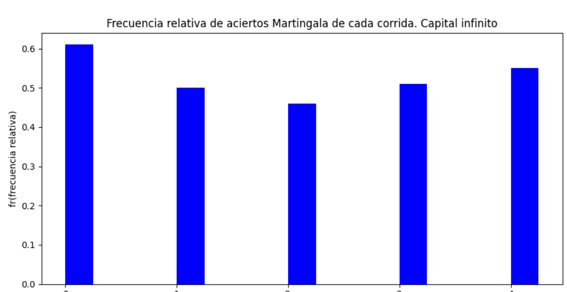

Figura 16: *Frecuencia Relativa de aciertos de cada corrida con capital infinito en estrategia Martingala*

4.3. d'Alembert

Seguidamente, en la **figura 17** y **figura 18** observamos que las corridas finalizan por debajo del capital inicial. Sin embargo tanto los aumentos como los decrementos se van dando de manera gradual, esto es así debido a que esta estrategia es más conservadora que las anteriores. Los grandes picos y caídas que se pueden observar son productos de largas rachas de derrotas que, a pesar de ser una estrategia conservadora, producen una gran pérdida de capital.

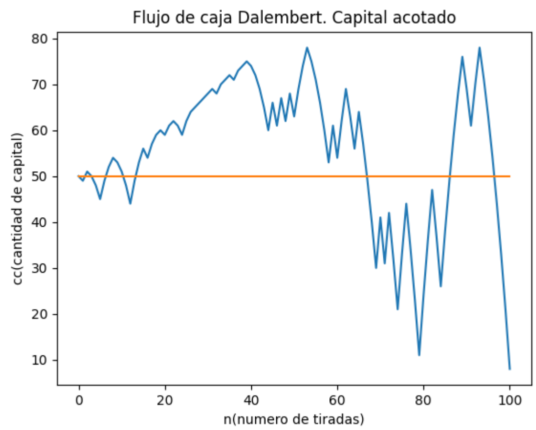

Figura 17: *Flujo de caja con capital acotado en estrategia d'Alembert*

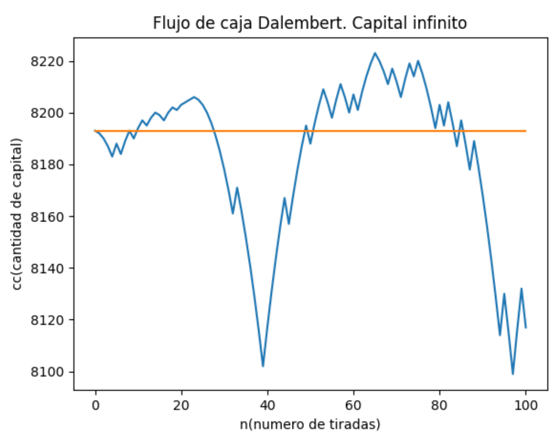

Figura 18: *Flujo de caja con capital infinito en estrategia d'Alembert*

Por otro lado, a continuacion, una vez más observamos tanto en la **figura 19** y la **figura 20** cómo la frecuencia de aciertos tiende a estabilizarse justo por debajo del 50 %, ya que todas las estrategias analizadas se basan en apuestas simples (sucesos independientes con una probabilidad de 48.65 % de ocurrencia).

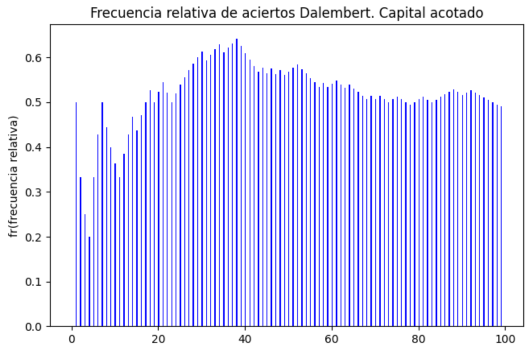

Figura 19: *Frecuencia Relativa de aciertos con capital acotado en la estrategia d'Alembert*

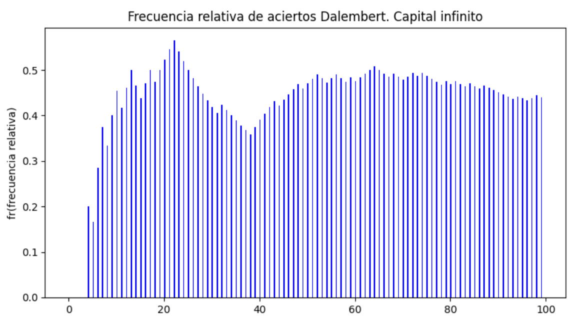

Figura 20: *Frecuencia Relativa de aciertos con capital infinito en la estrategia d'Alembert*

En cuanto a frecuencia relativa de aciertos nos referimos al porcentaje de victorias sobre tiradas totales de la ruleta. Podemos ver que en la **figura 19** la frecuencia relativa de aciertos tras la primer tirada de ruleta es 0 lo que quiere decir que el jugador no acertó en ese giro. Con el pasar de las tiradas el valor se estabiliza hasta ubicarse alrededor del 50 %.
En la **figura 20** observamos que la frecuencia relativa de aciertos tras las primeras 4 tiradas es 0 %, es decir que no acertó en ninguno de esos giros de ruleta. Como en el caso anterior, el valor termina estabilizándose en un valor cercano al 50 %.

Seguidamente, en base a los resultados de las gráficas de la **figura 21** y **figura 22**, queda en evidencia que estamos ante un sistema de apuestas muy equilibrado, por lo que las ganancias nunca serán muy altas. Además si entras en una secuencia de pérdidas consecutivas, es posible que no puedas revertir la situación, ya que las ganancias son relativamente bajas.

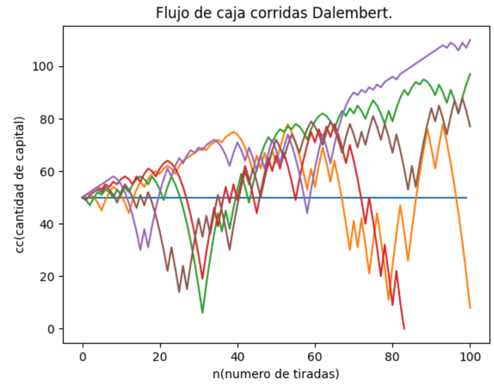

Figura 21: *Flujo de cajas en total de corridas con capital acotado en estrategia d'Alembert*

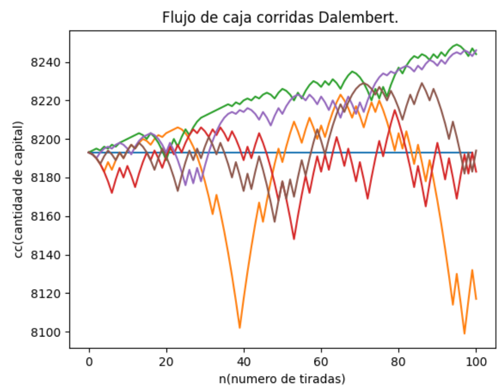

Figura 22: *Flujo de cajas en total de corridas con capital infinito en estrategia d'Alembert*

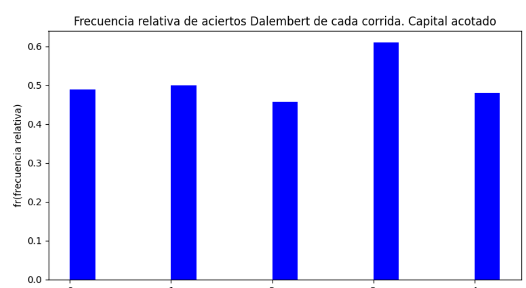

Figura 23: *Frecuencia Relativa de aciertos de cada corrida con capital acotado en estrategia d'Alembert*

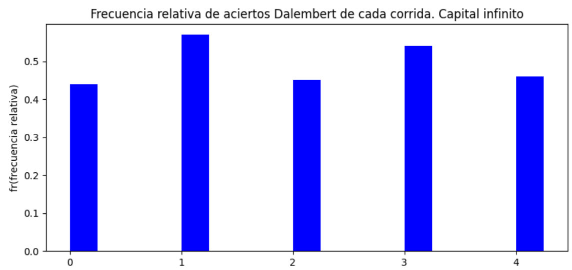

Figura 24: *Frecuencia Relativa de aciertos de cada corrida con capital infinito en estrategia d'Alembert*

Aquí observamos en la **figura 23** y en la **figura 24** la frecuencia relativa de aciertos al final de cada una de las 5 corridas. En todos los casos terminamos con valores cercanos a 0.50, exceptuando un caso anómalo que supera el 60 %. En el resto de los casos encontramos valores ligeramente debajo del teórico esperado debido a que existen más números en la ruleta que hacen perder al jugador que valores que lo hacen ganar.

4.2. Las estrategias Fibonacci, Martingala y d'Alembert

Referencias:
Fibonacci.
Martingala.
d'Alembert.

Figura 24: *Flujo de cajas promedio de todas las corridas con capital acotado*

En la **figura 24** se observan los valores promedios del valor de caja de múltiples corridas para cada estrategia a lo largo de 100 tiradas con capital acotado. Podemos ver que, tras una gran cantidad de corridas, las tres estrategias terminan ubicándose debajo del valor de caja inicial.

Se puede concluir que ninguna termina siendo una estrategia verdaderamente efectiva en el largo plazo. Poniéndonos más específicos, notamos que la estrategia más conservadora, Fibonacci, es la que menos pérdida genera mientras que la estrategia más arriesgada, la Martingala, obtiene valores muy bajos. La estrategia D'Alembert tampoco logra buenos resultados y termina obteniendo una efectividad cercana a la Martingala.

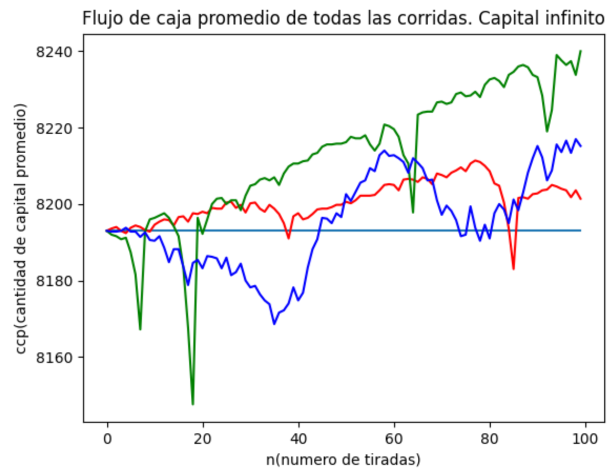

Figura 25: *Flujo de cajas promedio de todas las corridas con capital infinito*

En la **figura 25** observamos los valores promedios detallados anteriormente para el caso de capital infinito. Podemos observar claramente que los valores son mejores que los encontrados en la **figura 24**. Esto se debe a que con capital infinito el jugador nunca puede quedar en bancarrota, es decir, flujo de caja final igual a 0, algo que provoca un gran decremento en el promedio. Podemos concluir que, con capital ilimitado, estas terminan siendo buenas estrategias de apuestas.
Entrando en detalle, podemos ver que la Martingala es la estrategia con mejor desempeño. Esto se debe a que es la más arriesgada y, por lo tanto, la que provee mayor ganancia. Sin embargo, al contar con capital infinito, el riesgo pasa a ser nulo pero la probabilidad de ganancia se mantiene. También notamos como las estrategias más reservadas se benefician de tener capital infinito. Tanto la D'Alembert como la Fibonacci, a diferencia de los casos con capital acotado, terminan con valores superiores al inicial y se pueden considerar estrategias ganadoras al largo plazo.

5. Conclusión

A través de la simulación realizada, concluimos que utilizando la estrategia Martingala, si duplicamos nuestra apuesta inicial una y otra vez, tarde o temprano, la bola de la ruleta caerá en un número que nos permita ganar la apuesta. A medida que el número de intentos se acerca al infinito, la probabilidad de fracasar se acerca al 0, esto se puede comprobar mediante el ”Teorema Central del Límite” y la ”Ley de los Grandes Números” que son usados ocasionalmente para referirse al principio de que la probabilidad de cualquier evento posible (incluso uno improbable) ocurra al menos una vez en una serie, incrementa con el número de eventos en la serie. Esto significa que con recursos infinitos y sin limitaciones del casino eventualmente acabaríamos ganando.
Sin embargo, en la realidad, los jugadores disponemos de un presupuesto limitado por lo que si empleamos la estrategia a largo plazo acabaremos perdiendo todo nuestro dinero y no podríamos efectuar más apuestas que nos permitan completar un ciclo ganador.
Por otro lado, cuando aplicamos el algoritmo de la estrategia de Fibonacci, si nosotros logramos volver al inicio de la secuencia completamos un ciclo ganador. No obstante, una victoria tras una racha de 6 derrotas consecutivas, por ejemplo, significaría una pérdida de 32 (1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13) y una ganancia de 21, resultando en una pérdida neta de 11 unidades monetarias. Entonces una apuesta ganadora puede no sernos suficiente para compensar una serie de apuestas perdedoras.
En resumen, esta estrategia es similar a la Martingala, pero en las gráficas apreciamos elevaciones y decrecimientos de las curvas más moderadas. El presupuesto crece de forma más lenta, pero también lo hace el importe de las apuestas cuando se tiene una mala racha. Observamos que si jugamos más tiradas, nuestros presupuestos alcanzaron máximos más bajos que con la estrategia Martingala pero no encontramos casos donde el jugador termine en bancarrota (en los casos de capital infinito).
Deducimos que esta estrategia requiere más giros de la rueda para obtener el mismo beneficio que la estrategia Martingala, haciéndola menos rentable aunque menos riesgosa.
Por último, la estrategia de d’Alembert mantiene el punto de equilibrio eligiendo gastos moderados. Incluso si apostamos muy poco, podemos mantener nuestra caja por más tiempo. Dado que es un sistema de apuestas muy equilibrado y de baja inversión, las ganancias nunca son muy altas.
Este sistema de apuestas resulta menos arriesgado que las estrategias nombradas anteriormente, puesto que el importe de las apuestas crece de manera lenta durante las malas rachas, no necesitamos un presupuesto muy grande.
Un problema que encontramos en esta estrategia es que, a diferencia de Fibonacci y Martingala, al ganar tras una racha de derrotas el valor de la apuesta no vuelve al estado inicial (1 unidad monetaria) sino que sólo se reduce en una unidad. Esto provoca que una victoria que se alcanzó tras una racha de derrotas mantenga un valor similar al anterior (generalmente alto), creando cierto riesgo en caso de futuras rachas negativas.
Las estrategias son muy distintas en términos de riesgos y ganancia potencial pero comparten la característica de tender a terminar sobre el valor de caja inicial tras una serie considerable de corridas. Esto no significa que las estrategias generen siempre ganancia; es probable que encontremos casos donde el jugador quede en bancarrota, incluso con estrategias conservadoras.
En conclusión, a pesar de ser estrategias que con una gran cantidad de tiradas de ruleta terminen, en promedio, superando el valor de caja inicial, no las consideramos estrategias confiables para vencer en la ruleta en casos realísticos.

Referencias

https://python-para-impacientes.blogspot.com/2014/08/graficos-en-ipython.html
https://relopezbriega.github.io/blog/2015/06/27/probabilidad-y-estadistica-con-python/
https://es.casino.guru/estrategias-timos-ruletaestrategia-ruleta-martingala