

暑期集训  
2022



西安电子科技大学  
XIDIAN UNIVERSITY

# 主席树

主讲人：刘焕宇  
队伍：乱码小飞船  
个人ID：gtxygyzb  
(工藤新一宫野志保)



# 主席树



西安电子科技大学  
XIDIAN UNIVERSITY

前置知识复习



1

主席树算法



2

基础题



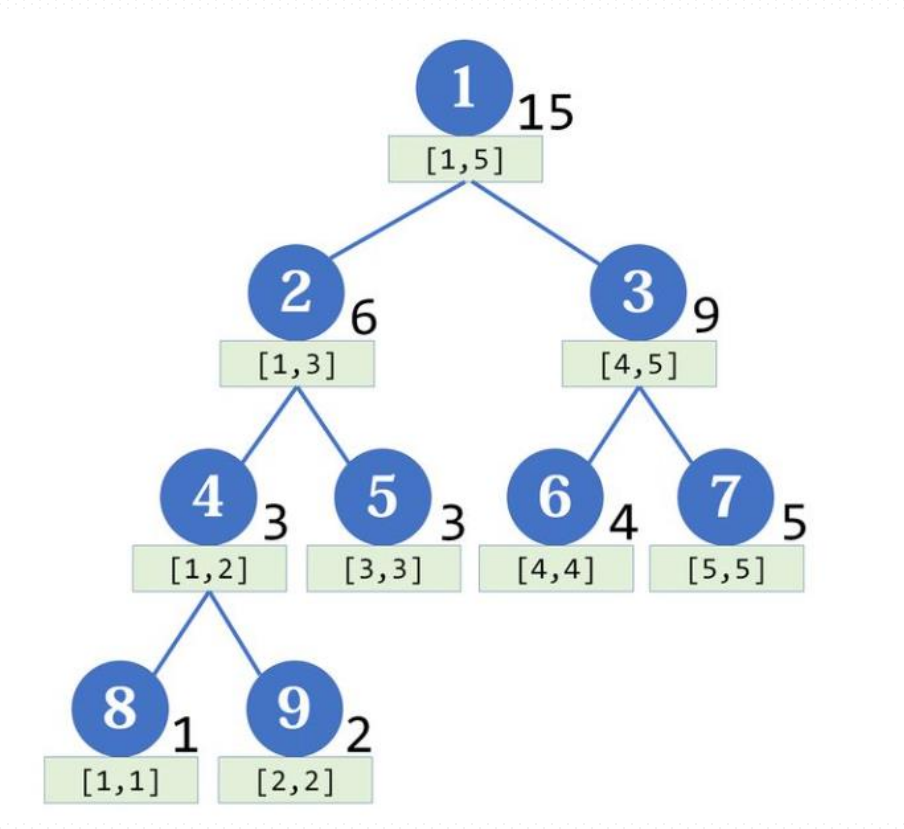
3

进阶题



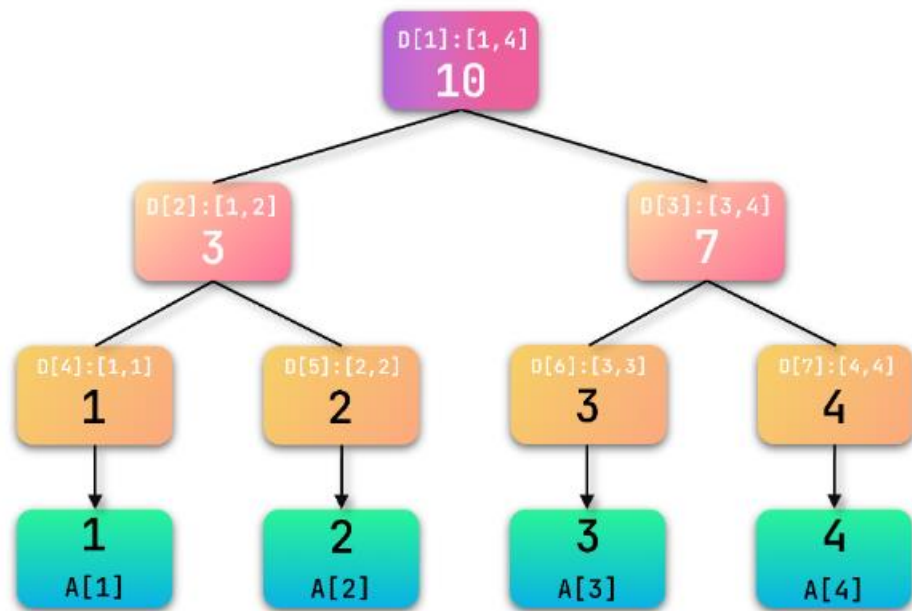
4





- $n$ 个叶子节点,  $n-1$ 个非叶子节点, 并且防止数组访问越界, 总共有:  
**四倍空间!!!!!!**

# 线段树



Weighted Segment Tree

权值线段树一般用于维护一段区间的数出现的次数

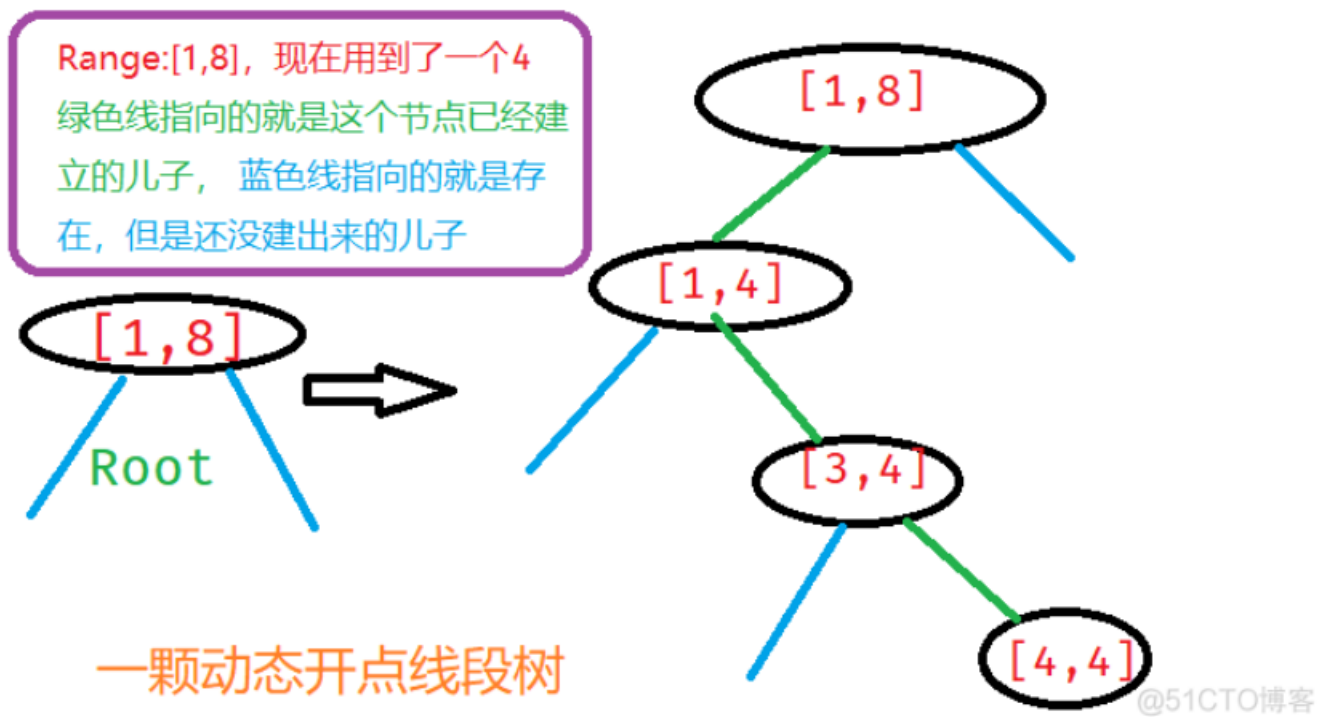
给定序列{ 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4 }  
可以建出左图所示的权值线段树

可以求整体第k大

采用元素到下标数组映射的方式进行插入。  
当空间不足时，常采用离散化的方式进行解决。

权值线段树

# 前置知识



- 链式储存法, 即对一个节点建立左右儿子指针, 指向它的左右儿子。

- 左右儿子从普通线段树的  $u \ll 1, u \ll 1|1$  变为  $lc[u], rc[u]$

- 利用一个类似线段树懒标记的思想, 如果一个节点需要使用, 那么我们就建立这个节点, 反之指向空节点代表当前没有信息。

动态开点

为什么需要动态开点线段树？

信息的继承：建立新节点时，若想使用历史信息，直接把孩子连向已经建立的节点即可

于数据结构而言，**可持久化**总是可以保留每一个历史版本，并且支持操作的不可变特性。而可持久化线段树（主席树）的本质就是多根线段树，每个**根**都代表一个历史版本。

为什么是每个根而不是每棵树呢？

假如我们每次进行更新操作时都要先拷贝一份上次的版本用来回溯，再对原本的线段树进行修改，这样的话无论时间复杂度还是空间复杂度都是难以接受的。

可持久化

主席树又叫做可持久化（权值）线段树，一开始使用来解决区间第k大问题

据说因其发明者黄嘉泰的名字首字母hjt而得名主席树



（名字短一点更方便，故后文都称为主席树）

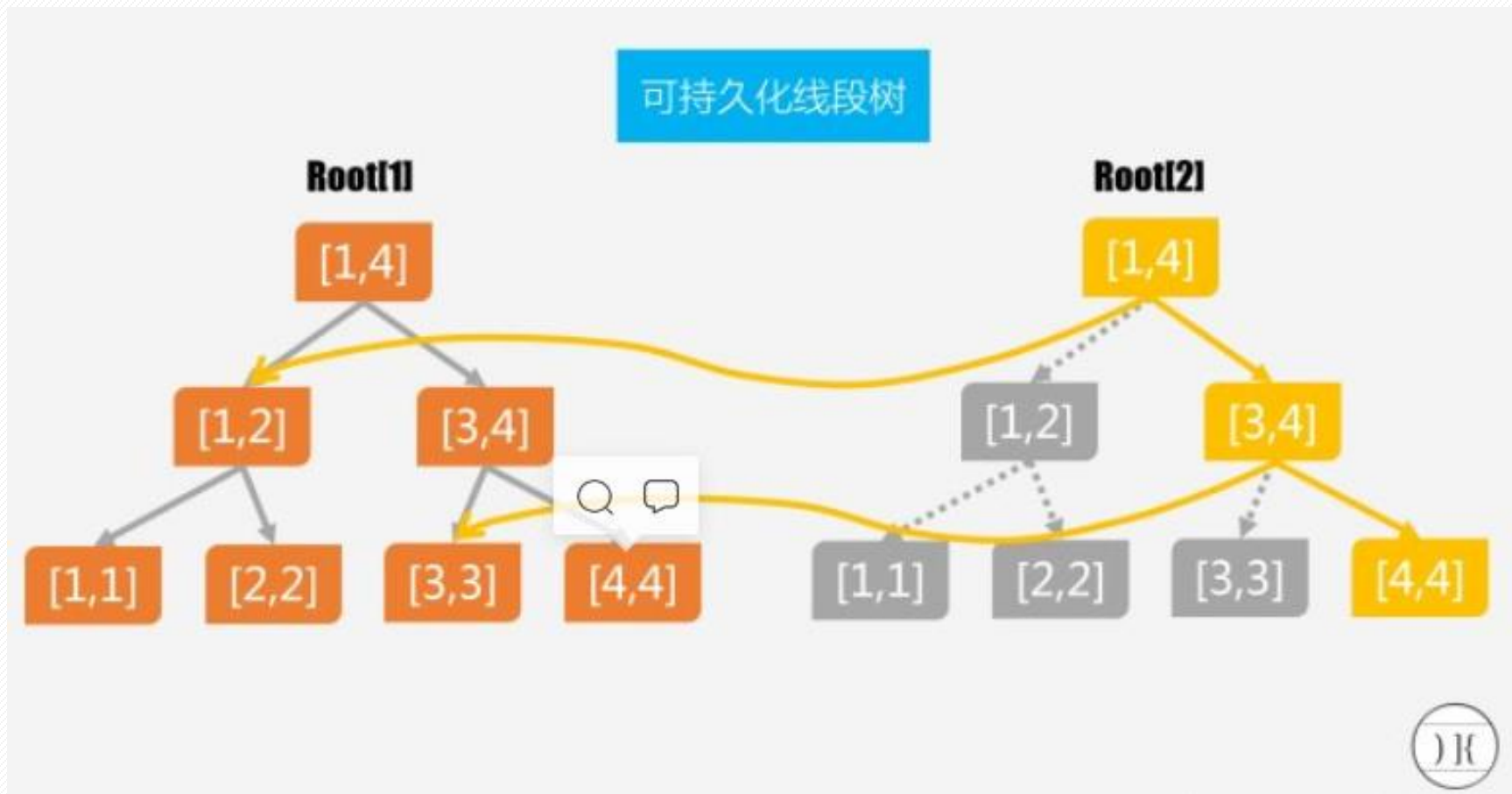
主席树





当我们在修改关键值时，只有相关区间的节点内的值会受到影响，而树本身结构并未发生变化，那么在每次修改时，不再是在原来的版本上下功夫，而是创建一系列新的节点，从而达到可持久化的目的。





所以我们只需要多记录一条链就能代表历史的版本了

给定  $n$  个整数构成的序列  $a_i$ ,  $q$  组询问将对于指定的闭区间  $[1, r]$  查询其区间内的第  $k$  小值。

按顺序  $i$  从 1 到  $n$  建立可持久化权值线段树  
每次查询第  $r$  个根  $rt[r]$ , 其余操作与普通权值线段树相同:  $k$  比左子树权值个数大, 则减去左子树大小后往右子树走, 否则往左子树走。

在权值离散化下, 时空复杂度均为  $O(n \log n)$

```
void add(int &u, int pre, int l, int r, int pos)
{
    u = ++top; //新建结点
    lc[u] = lc[pre]; rc[u] = rc[pre]; //左右节点继承pre
    val[u] = val[pre] + 1; //权值加一
    if (l == r) return ; //最后一层返回
    int mid = l + r >> 1;
    if (pos <= mid) add(lc[u], lc[pre], l, mid, pos); //往左
    else add(rc[u], rc[pre], mid + 1, r, pos); //往右
}
```

Luogu3834 主席树模板题：区间第 $k$ 大  
给定  $n$  个整数构成的序列  $a_i$ ， $q$ 组询问将对于指定的闭区间  $[l, r]$  查询其区间内的第  $k$  小值。

类似前缀和的方法，访问主席树时，同时从  $rt[r], rt[l - 1]$ 两个根一起向下遍历。设当前节点分别为  $u, pre$ ，则该节点所代表的权值区间的权值数量即为  $val[u] - val[pre]$ ，其余同例题一。

在权值离散化下，时空复杂度均为  $O(n \log n)$

```
int query(int u, int pre, int l, int r, int k)
{
    if (l == r) return l;
    int sum = val[lc[u]] - val[lc[pre]]; // 左节点权值数量
    int mid = l + r >> 1;
    if (k <= sum) return query(lc[u], lc[pre], l, mid, k); //往左递归
    else return query(rc[u], rc[pre], mid + 1, r, k - sum); //减掉左节点往右递归
}
```

## Luogu 3919 可持久化数组模板

你需要维护这样的一个长度为  $N$  的数组，支持如下两种操作：

1. 在某个历史版本上修改某一个位置上的值
  2. 访问某个历史版本上的某一位置的值
- 每一次操作1/2都记为一个历史版本，即使询问没有改变数组

1. 对于操作1，格式为  $v_i \ 1 \ loc_i \ val_i$ ，即为在版本  $v_i$  的基础上，将  $a_{loc_i}$  修改为  $val_i$
2. 对于操作2，格式为  $v_i \ 2 \ loc_i$ ，即访问版本  $v_i$  中  $a_{loc_i}$  的值

### 输入 #1

```
5 10
59 46 14 87 41
0 2 1
0 1 1 14
0 1 1 57
0 1 1 88
4 2 4
0 2 5
0 2 4
4 2 1
2 2 2
1 1 5 91
```

### 输出 #1

```
59
87
41
87
88
46
```

## Luogu 3919 可持久化数组模板

你需要维护这样的一个长度为  $N$  的数组，支持如下两种操作：

1. 在某个历史版本上修改某一个位置上的值
2. 访问某个历史版本上的某一位置的值

每一次操作1/2都记为一个历史版本，即使询问没有改变数组

- 建立可持久化位置线段树，只有最开始对数组建立完整的线段树，之后由于只修改一个位置，在线段树上只有  $\log(n)$  个节点需要修改，所以第  $i$  个版本直接继承  $rt[v_i]$  节点，左右儿子没有修改的直接连向历史版本，修改的儿子建立新节点，继续递归即可。

- 时空复杂度  $O(n \log n)$

例题三



暑期集训  
2022



西安电子科技大学  
XIDIAN UNIVERSITY

# 你已经学会了主席树 接下来开始做题吧！

没什么事，请你继续刷w



我们要飞上去噜!!

風になっちゃえよ僕ら~♪

没什么事，请你继续刷w



我们要飞上去噜!!

風になっちゃえよ僕ら~♪

早苗入手了最新的高级打字机。最新款自然有着与以往不同的功能，那就是它具备撤销功能，厉害吧。

请为这种高级打字机设计一个程序，支持如下 3 种操作：

1. `T x`：在文章末尾打下一个小写字母  $x$ 。（type 操作）

2. `U x`：撤销最后的  $x$  次修改操作。（Undo 操作）

（注意 Query 操作并不算修改操作）

3. `Q x`：询问当前文章中第  $x$  个字母并输出。（Query 操作）

文章一开始可以视为空串。

强制在线捏~~~  
注意Undo可以撤销Undo

Luogu 1383

# 基础题



```
if (ch == 'T')
{
    ch = read();
    ++cnt; len[cnt] = len[cnt - 1] + 1;
    PST::add(rt[cnt], rt[cnt - 1], 1, n, len[cnt], ch);
}
if (ch == 'U')
{
    scanf("%d", &x);
    ++cnt;
    rt[cnt] = rt[cnt - x - 1];
    len[cnt] = len[cnt - x - 1];
}
```

- 只需要再开一个数组 $len$ ，Undo时同 $rt$ 一起继承历史版本的字符串长度；修改时即可在 $len$ 的位置上直接单点修改，其余细节同可持久化位置线段树模板

Luogu 1383

# 基础题



西安电子科技大学  
XIDIAN UNIVERSITY

给一个长度为  $n$  的正整数序列  $a$ 。共有  $m$  组询问，每次询问一个区间  $[l, r]$ ，是否存在一个数在  $[l, r]$  中出现的次数严格大于一半。如果存在，输出这个数，否则输出 0。

$$1 \leq n, m \leq 5 \times 10^5, 1 \leq a_i \leq n。$$

## 输入 #1

```
7 5
1 1 3 2 3 4 3
1 3
1 4
3 7
1 7
6 6
```

## 输出 #1

```
1
0
3
0
4
```

POI2014  
Luogu 3567



给一个长度为  $n$  的正整数序列  $a$ 。共有  $m$  组询问，每次询问一个区间  $[l, r]$ ，是否存在一个数在  $[l, r]$  中出现的次数严格大于一半。如果存在，输出这个数，否则输出 0。

$$1 \leq n, m \leq 5 \times 10^5, 1 \leq a_i \leq n。$$

- 可持久化权值线段树（卡莫队捏！）
- 在树上搜索答案时，不断往 $val[u] - val[pre] \geq k$ 的儿子走，直到叶子结点输出权值，否则无解。 $k=(r-l+1)/2+1$
- 随机化

# 基础题



一家餐厅有  $n$  道菜, 编号  $1, 2, \dots, n$ , 大家对第  $i$  道菜的评价为  $a_i$ 。有  $m$  位顾客, 第  $i$  位顾客的期望值为  $b_i$ , 而他的偏好值为  $x_i$ 。因此, 第  $i$  位顾客认为第  $j$  道菜的美味度为  $b_i \text{ xor } (a_j + x_i)$ ,  $\text{xor}$  表示异或运算。

第  $i$  位顾客希望从这些菜中挑出他认为最美味的菜, 即美味值最大的菜, 但由于价格等因素, 他只能从第  $l_i$  道到第  $r_i$  道中选择。请你帮助他们找出最美味的菜。

第 1 行, 两个整数,  $n, m$ , 表示菜品数和顾客数。

对于 100% 的数据, 满足  $1 \leq n \leq 2 \times 10^5$ ,  $0 \leq a_i, b_i, x_i < 10^5$ ,  $1 \leq l_i \leq r_i \leq n$  ( $1 \leq i \leq m$ ),  $1 \leq m \leq 10^5$ 。

第 2 行,  $n$  个整数,  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 表示每道菜的评价值。

第 3 至  $m + 2$  行, 每行 4 个整数,  $b, x, l, r$ , 表示该位顾客的期望值, 偏好值, 和可以选择菜品区间。

## 输入 #1

```
4 4
1 2 3 4
1 4 1 4
2 3 2 3
3 2 3 3
4 1 2 4
```

## 输出 #1

```
9
7
6
7
```

Luogu3293

# 基础题



西安电子科技大学  
XIDIAN UNIVERSITY

一家餐厅有  $n$  道菜, 编号  $1, 2, \dots, n$ , 大家对第  $i$  道菜的评价为  $a_i$ 。有  $m$  位顾客, 第  $i$  位顾客的期望值为  $b_i$ , 而他的偏好值为  $x_i$ 。因此, 第  $i$  位顾客认为第  $j$  道菜的美味度为  $b_i \text{ xor } (a_j + x_i)$ ,  $\text{xor}$  表示异或运算。

第  $i$  位顾客希望从这些菜中挑出他认为最美味的菜, 即美味值最大的菜, 但由于价格等因素, 他只能从第  $l_i$  道到第  $r_i$  道中选择。请你帮助他们找出最美味的菜。

- 从高到低位贪心, 若在二进制下,  $b$  的第  $j$  位为  $b_j$ , 则查找  $[l, r]$  存不存在使  $x + a$  的第  $j$  位为  $b_j \oplus 1$  的数, 即主席树里实际查询的区间范围要减去  $x$
- 若存在, 则  $ans += 2^j$ , 下一次在主席树搜索的权值区间也相应的要增加  $2^j$ ;
- 若不存在, 则  $ans$  不变, 继续做下一位;
- 时间复杂度  $O(n \log n \log a)$ , 空间复杂度  $O(n \log n)$

**Luogu3293**



前几道题是较为明显的主席树，而进阶题和难题往往用主席树维护的东西很难一眼看出来

需要较深的思考或者其他数据结构的配合，比如dfs序上建主席树、SAM+主席树等等。

所以要求我们把基本的主席树模型掌握，才能在需要维护一个信息的时候，一眼发现，哦~这个可以用主席树！

权值和位置两种写法都需要反复理解、牢记在心！



小总结

休息一会儿!



西安电子科技大学  
XIDIAN UNIVERSITY



难题要来了



## 题目大意

火山国家有  $n$  个城市，编号从 1 到  $n$ ，城市 1 是首都，有一座大火山。城市  $i$  的温度是  $t_i$ 。

$n$  个城市用  $n - 1$  条无向边相连，第  $i$  条边连接城市  $u_i$  和  $v_i$ 。如果  $u_i$  比  $v_i$  更接近首都，则  $t_{u_i} > t_{v_i}$ 。首都的温度是最高的。

如果在城市  $x$  爆发生存温度为  $[l, r]$  的病毒，求会感染多少城市。

若一个城市的温度位于  $[l, r]$  之内，且它与另一个受感染的城市相连，则它也会被感染。

多组询问，强制在线

Eyjafjalla

## 题目大意

火山国家有  $n$  个城市，编号从 1 到  $n$ ，城市 1 是首都，有一座大火山。城市  $i$  的温度是  $t_i$ 。

$n$  个城市用  $n - 1$  条无向边相连，第  $i$  条边连接城市  $u_i$  和  $v_i$ 。如果  $u_i$  比  $v_i$  更接近首都，则  $t_{u_i} > t_{v_i}$ 。首都的温度是最高的。

如果在城市  $x$  爆发生存温度为  $[l, r]$  的病毒，求会感染多少城市。

若一个城市的温度位于  $[l, r]$  之内，且它与另一个受感染的城市相连，则它也会被感染。

- 先倍增跳到深度最浅且温度  $t \in [l, r]$  的节点  $u$ ，答案为  $u$  的子树内，温度在  $l$  到  $r$  间的节点个数
- 在DFS序上建立主席树，记录入栈序  $in_u$  和出栈序  $out_u$ ，访问入栈序和出栈序所对应的  $rt$ ，在DFS序上做与上文前缀和相同的方式，相减即可
- 时空复杂度  $O(n \log n)$



给你 $n$ 个正整数 $a_i$ ，有 $m$ 个询问，每次询问用区间 $[l, r]$ 内的数求和，最小不能表示的正整数是多少（只能从选定区间中选且每个数最多只能选一次），强制在线

如 $[1, 4, 2]$ 最小不能表示的数为8  
     $[2, 1, 6]$ 最小不能表示的数为4

## 进阶题



给你 $n$ 个正整数 $a_i$ ，有 $m$ 个询问，每次询问用区间 $[l, r]$ 内的数求和，最小不能表示的正整数是多少（只能从选定区间中选且每个数最多只能选一次），强制在线

- 如果当前区间没有1，那么答案肯定是1
- 假设当前有 $t$ 个1，那能表示出的数为 $[1, t]$ ，之后最大的数为 $z$ 。若 $z > t + 1$ ，则 $t + 1$ 即为答案，否则 $[1, t + z]$ 也可以表示出来
- 所以，对于每次的区间 $[1, t]$ ，都需要找出在区间 $[l, r]$ 内小于等于 $t$ 的数之和记为 $sum_{l,r}^t$ ，并更新 $t = sum_{l,r}^t$ ，之后接着重复算法过程，当 $t$ 不变时， $t + 1$ 即为答案。
- 这个过程最多不超过 $\log a_i$ 次（斐波那契）
- 查询 $sum_{l,r}^t$ 可用主席树维护，即用 $val[rt[r]] - val[rt[l - 1]]$ 之后根据 $t$ 再接着访问 $rt[r]$ 和 $rt[l - 1]$ 的左儿子或右儿子，单次时间复杂度 $O(\log n)$
- 总时间复杂度 $O(n \log n \log a_i)$ ，空间复杂度 $O(n \log a_i)$

# 进阶题



西安电子科技大学  
XIDIAN UNIVERSITY

给一个长为 $n$ 的串 $S$ ，共 $Q$ 次询问，每次询问给定 $x, y$ ，求将 $S$ 长为 $x$ 的前缀和长为 $y$ 的后缀拼接得到的新串在 $S$ 中出现了多少次。 $T$ 组数据。

$1 \leq T \leq 5, 1 \leq n, Q \leq 2 \times 10^5, 1 \leq x, y \leq n$

## Sample Input

```
1
6 3
ababaa
1 1
2 1
3 1
```

## Sample Output

```
1
2
1
```

HDU7084



给一个长为 $n$ 的串 $S$ ，共 $Q$ 次询问，每次询问给定 $x, y$ ，求将 $S$ 长为 $x$ 的前缀和长为 $y$ 的后缀拼接得到的新串在 $S$ 中出现了多少次。 $T$ 组数据。

$$1 \leq T \leq 5, 1 \leq n, Q \leq 2 \times 10^5, 1 \leq x, y \leq n$$

- 考虑KMP的fail树，树上的每个节点代表一个前缀，节点的父亲为该前缀的最长公共前后缀。也就是说，该节点的所有祖先，都是该前缀的一个border， $next$ 数组是最长的border；对于后缀，反序KMP后也有相同的结论

若 $S_{1..x} = S_{|S|-x+1..|S|}$ ，则 $S_{1..x}$ 为 $S$ 的border。

- 如果一组前缀和后缀拼起来在原串中每次出现，必然分界点为一组前缀的border与后缀border的组合

- 建出两颗fail树，将每个节点同前缀/后缀一一对应，则问题转化为，在 $x$ 的子树内，有多少个节点也在 $y$ 子树内

- 将一棵树按dfs序重新映射，此时权值变为连续；在第二棵树上建权值主席树维护映射过后的点权即可，时空复杂度 $O(n \log n)$

## Sample Input

```
1
6 3
ababaa
1 1
2 1
3 1
```

考虑KMP的fail树，树上的每个节点代表一个前缀，节点的父亲为该前缀的最长公共前后缀。也就是说，该节点的所有祖先，都是该前缀的一个border， $next$ 数组是最长的border；对于后缀，反序KMP后也有相同的结论



一个长度为  $n$  的序列  $a$ , 设其排过序之后为  $b$ , 其中位数定义为  $b_{n/2}$ , 其中  $a, b$  从 0 开始标号, 除法取下整。

给你一个长度为  $n$  的序列  $s$ 。

回答  $Q$  个这样的询问:  $s$  的左端点在  $[a, b]$  之间, 右端点在  $[c, d]$  之间的子区间中, 最大的中位数。

其中  $a < b < c < d$ 。

位置也从 0 开始标号。

我会使用一些方式强制你在线。

给你一个长度为  $n$  的序列  $s$ 。

回答  $Q$  个这样的询问： $s$  的左端点在  $[a, b]$  之间，右端点在  $[c, d]$  之间的子区间中，最大的中位数。

其中  $a < b < c < d$ 。



- 区间中位数可以考虑二分答案，大于  $mid$  的设为 1，小于设为 -1，查询区间内的和是否  $\geq 0$   $[b + 1, c - 1]$  是必选的，直接记录他们的和
- 接下来就是找  $[a, b]$  的最大后缀和  $[c, d]$  的最大前缀，所以对于每一个二分的  $mid$  值，建一棵线段树，记录区间和，区间最大后缀，最大前缀。
- 但是每次二分答案都需要建树，时空复杂度大大超限
- 发现对于数字每次增大，只有当前中位数一个值从 +1 变为 -1
- 只需要一开始就把所有  $mid$  情况的线段树都建好  $\rightarrow$  使用主席树，具体来说主席树上每一个节点同时维护区间和，区间最大后缀，最大前缀三个信息，开始建树的时候先按序列大小排序，再把 +1 到 -1 的修改信息，新开一个主席树的根就行了。

时间复杂度  $O(n \log^2 n)$ ，空间复杂度  $O(n \log n)$

暑期集训  
2022



西安电子科技大学  
XIDIAN UNIVERSITY

# 树套树

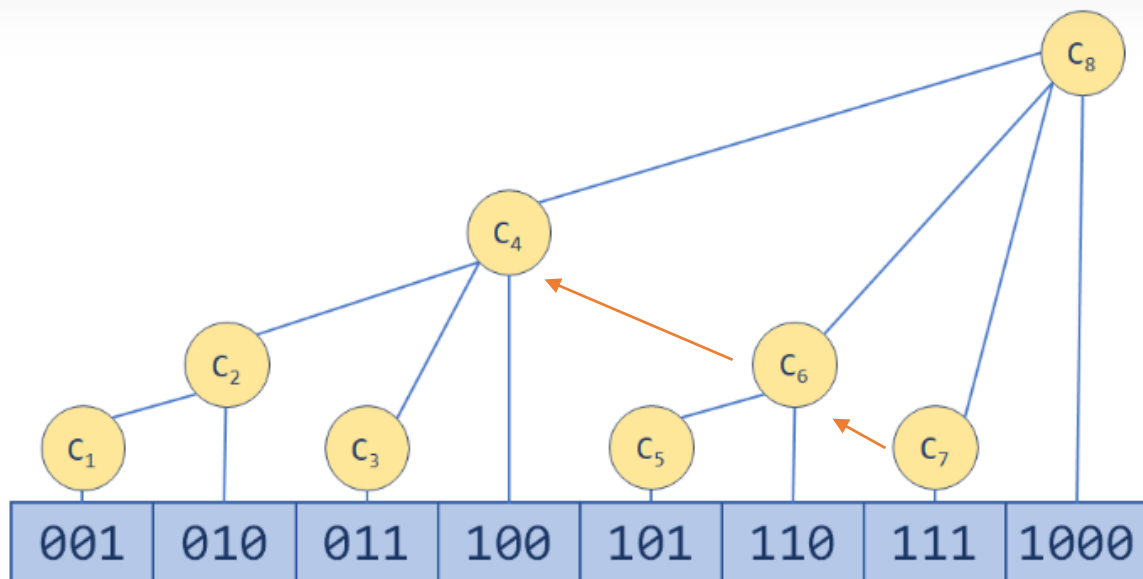


主讲人：刘焕宇  
队伍：乱码小飞船  
个人ID：gtxygyzb  
(工藤新一宫野志保)

# 前置知识



西安电子科技大学  
XIDIAN UNIVERSITY



- 用 $C_i$ 维护区间 $(A_i - \text{lowbit}(A_i), A_i]$ 信息
- 通过位运算巧妙化单次操作复杂度为 $\log(n)$
- 常数、码量小，解题技巧多，在某些情况下无法被线段树取代

树状数组



- 1、~~静态整体Kth~~ (滑稽)
- 2、单点修改动态整体Kth
  - 权值线段树 or 各种方法...
- 3、静态区间Kth
  - 主席树
- 4、单点修改动态区间Kth?

区间第K大



给定一个含有  $n$  个数的序列  $a_1, a_2 \dots a_n$ , 需要支持两种操作:

- `Q l r k` 表示查询下标在区间  $[l, r]$  中的第  $k$  小的数
- `C x y` 表示将  $a_x$  改为  $y$

对于 100% 的数据,  $1 \leq n, m \leq 10^5$ ,  $1 \leq l \leq r \leq n$ ,  $1 \leq k \leq r - l + 1$ ,  $1 \leq x \leq n$ ,  $0 \leq a_i, y \leq 10^9$ 。



# 树套树



给定一个含有  $n$  个数的序列  $a_1, a_2 \dots a_n$ , 需要支持两种操作:

- `Q l r k` 表示查询下标在区间  $[l, r]$  中的第  $k$  小的数
- `C x y` 表示将  $a_x$  改为  $y$

- 同主席树的思路相同, 首先需要维护的是前缀和, 但如果加上修改的话, 则需要对整个主席树最多  $n \log n$  个节点都进行修改, 显然超时
- 考虑放弃主席树, 使用树状数组维护前缀和, 此时树状数组记录的是代表区间  $(A_i - \text{lowbit}(A_i), A_i]$  的动态开点线段树的根。
- 修改时, 可以只修改  $\log$  个树状数组节点的根, 每个树状数组再修改  $\log$  个权值线段树的节点, 时间复杂度  $O(\log^2 n)$
- 查询时, 依旧是  $r$  位置减去  $l - 1$  位置, 这时候不再是两棵线段树作差, 而是  $\log$  棵线段树与  $\log$  棵线段树作差; 跳的时候,  $\log$  个节点一起跳到左子树/右子树, 时间复杂度  $O(\log^2 n)$
- **外层位置内层权值的树套树**, 总时空复杂度均为  $O(n \log^2 n)$

# 树套树



西安电子科技大学  
XIDIAN UNIVERSITY

你需要维护  $n$  个可重整数集，集合的编号从 1 到  $n$ 。

这些集合初始都是空集，有  $m$  个操作：

- `1 l r c`：表示将  $c$  加入到编号在  $[l, r]$  内的集合中
- `2 l r c`：表示查询编号在  $[l, r]$  内的集合的并集中，第  $c$  大的数是多少。

注意可重集的并是不去除重复元素的，如  $\{1, 1, 4\} \cup \{5, 1, 4\} = \{1, 1, 4, 5, 1, 4\}$ 。

## 输入 #1

```
2 5
1 1 2 1
1 1 2 2
2 1 1 2
2 1 1 1
2 1 2 3
```

## 输出 #1

```
1
2
1
```

## 【数据范围】

$$1 \leq n, m \leq 5 \times 10^4$$

$$1 \leq l, r \leq n$$

$$1 \text{ 操作中 } |c| \leq n$$

$$2 \text{ 操作中 } 1 \leq c < 2^{63}$$

Luogu3332

# 树套树

你需要维护  $n$  个可重整数集，集合的编号从 1 到  $n$ 。  
这些集合初始都是空集，有  $m$  个操作：

- `1 l r c`：表示将  $c$  加入到编号在  $[l, r]$  内的集合中
- `2 l r c`：表示查询编号在  $[l, r]$  内的集合的并集中，第  $c$  大的数是多少。



西安电子科技大学  
XIDIAN UNIVERSITY

- 求第  $c$  大的数可以二分答案，之后判断区间  $[l, r]$  内小于等于  $mid$  有多少个数。
- 由于其一个位置是一个集合，故我们选择外层权值线段树，内层位置线段树的树套树形式。
- 加入一个数时，访问相应的权值线段树区间，并将其指向的位置线段树对应的  $[l, r]$  区间  $+1$ ，表示该权值在  $[l, r]$  内均出现了一次，位置线段树维护区间和即可。
- 查询时同样的在权值线段树上，求该权值范围在  $l, r$  内出现了多少次，若答案过大，则往左子树走，否则往右子树走，即在外层权值线段树上的过程模拟了二分答案。
- 时空复杂度  $O(n \log n \log a)$

给你 $n$ 个正整数 $a_i$ ，有 $m$ 个询问，每次询问用区间 $[l, r]$ 内的数求和，最小不能表示的正整数是多少（只能从选定区间中选且每个数最多只能选一次），强制在线

如 $[1, 4, 2]$ 最小不能表示的数为8

$[2, 1, 6]$ 最小不能表示的数为4

是不是眼熟？加一条：单点修改！

# Yuuki and a problem



西安电子科技大学  
XIDIAN UNIVERSITY

给你 $n$ 个正整数 $a_i$ ，有 $m$ 个询问，每次询问用区间 $[l, r]$ 内的数求和，最小不能表示的正整数是多少（只能从选定区间中选且每个数最多只能选一次），强制在线，单点修改

记得这句话吗→ → → →

•所以，对于每次的区间 $[1, t]$ ，都需要找出在区间 $[l, r]$ 内小于等于 $t$ 的数之和记为 $sum_{l,r}^t$ ，并更新 $t = sum_{l,r}^t$ ，之后接着重复算法过程，当 $t$ 不变时， $t + 1$ 即为答案。

•维护前缀和与题一相同，使用树状数组，所以该题为树状数组套主席树（不要晕）

•查询时只需要把 $val[rt[r]] - val[rt[l - 1]]$ 换为树状数组上区间“右端点的 $\log$ 个节点之和”与“左端点的 $\log$ 个节点之和”的差即可

•修改时同理为树状数组上的 $\log$ 个节点，内层主席树也修改 $\log$ 个节点

•时空复杂度 $O(n \log n \log a)$

## 参考文献



西安电子科技大学  
XIDIAN UNIVERSITY

算法学习笔记(2) : 树状数组 <https://zhuanlan.zhihu.com/p/93795692>  
算法学习笔记(14): 线段树 <https://zhuanlan.zhihu.com/p/106118909>  
动态开点, 线段树合并和可持久化线段树 [https://blog.51cto.com/u\\_15060465/4167050](https://blog.51cto.com/u_15060465/4167050)  
主席树详解——让你躺着学会主席树 <https://blog.csdn.net/Foxreign/article/details/118770162>  
权值线段树详解 <https://blog.csdn.net/yanweiqi1754989931/article/details/117380913>  
树套树 P2617 Dynamic Rankin <https://www.luogu.com.cn/blog/zhoushuyu/solution-p2617>  
树状数组套主席树 <https://blog.csdn.net/yanweiqi1754989931/article/details/119951353>

补充资料

# 结语



西安电子科技大学  
XIDIAN UNIVERSITY

Thanks♪(・ω・)／