循环比赛的名次方案

一、问题重述

给出 5 支球队进行单循环比赛结果的竞赛图 G，连接两个顶点的箭头表示两支球队的比赛结果。对于每条有向边 (u,v) 表示 u 战胜 v，假设只有胜负，没有平局。请给出各队的名次，并将该算法推广到 n 支球队。

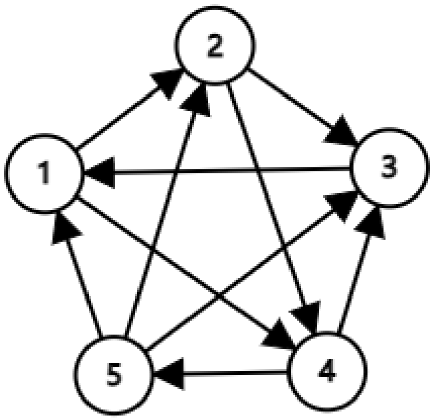


图 G

二、问题分析

一个简单的想法是统计出每支队伍的胜场，按从大到小的顺序排名。即统计出图 G 中每个顶点的出度，组成得分向量 $\boldsymbol{s}=(2,2,1,2,3)^{\mathrm{T}}$，虽然可以判断出 5 队为冠军，3 队排名垫底，但无法在 1,2,4 队之间决出高低。

为了用代数方法进行研究，定义该图的**邻接矩阵** $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{n*n}$ 如下：

$$a_{ij}=\begin{cases}1，存在从顶点 i 到 j 的有向边\\ 0，否则\end{cases} \tag{1}$$

依此，图 G 的邻接矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&1&1&0\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&1\\1&1&1&0&0\end{bmatrix} \tag{2}$$

则得分向量 $\boldsymbol{s}=(s_1,s_2,\dots,s_n)$ 可以表示为

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{e},\quad \mathbf{e}=(1,1,1,1,1)^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

进一步思考，只从得分考虑忽略了图中很大一部分信息，我们完全抛弃了一条边两端顶点代表的胜负关系信息，只单纯的对顶点的出度进行比较。比如 1,2,4 队中， 4 号队是唯一一支击败冠军 5 号队的队伍，将其与剩下两支队伍相提并论似乎不太合适。

基于这个思路，可以以每支队伍的得分定义队伍的“强度”。定义 $\mathbf{s}^{(1)}=\boldsymbol{s}$ 为每支队伍的一级得分向量，可代表每支队伍的“强度”。而定义每支队伍的新的二级得分向量 $\boldsymbol{s}^{(2)}$ 为其击败的所有队伍的得分总和，即有

$$\boldsymbol{s}^{(2)}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{s}^{(1)} \tag{4}$$

计算可得图 G 的二级得分向量为 $\boldsymbol{s}^{(2)}=(4,3,2,4,5)^{T}$ ，可以发现 2 号队此时排名比 1,4 队靠后了。为了进一步区分排名，我们可以再定义队伍的“强度”为他们的二级得分向量，再次计算三级得分向量 $\boldsymbol{s}^{(3)}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{s}^{(2)}=(7,6,4,7,9)$ ，继续迭代，即有

$$\boldsymbol{s}^{(k)}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{s}^{(k-1)}=\boldsymbol{A}^{k}\boldsymbol{e} \tag{5}$$

k 越大，用 $\boldsymbol{s}^{(k)}$ 作为排名的依据就越合理，如果 $k\to\infty$ 时， $\boldsymbol{s}^{(k)}$ 收敛于某个极限得分向量（为了不使它无限变大，应进行单位化），那么就可以用这个向量作为排名的依据。

三、问题求解

为了求解这个问题，我们需要得到一个定理。

定义 1 对于任意一对顶点，存在两条有向路径，使两顶点可以相互连通，这种有向图称为**强连通**的。

定义 2 对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 而言，如果存在一个排列阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P'AP}$ 为一个分块上三角阵，我们就称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可约的，否则就称该矩阵是不可约的。

定理 1 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 是不可约的当且仅当与矩阵对应的有向图 $G(\boldsymbol{A})$是强连通的。

Perron-Frobenius 定理[1] 非负不可约矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征根为正单根 λ，λ 对应特征向量 $\boldsymbol{s}$，有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{e}}{\lambda^k}=\boldsymbol{s} \tag{6}$$

与 (5) 式比较可知， $\boldsymbol{s}^{(k)}$, $k\to\infty$ 时（单位化后）将趋向 $\boldsymbol{A}$ 的对应于最大特征根的特征向量 $\boldsymbol{s}$， $\boldsymbol{s}$ 就是作为排名次依据的极限得分向量。

使用该算法，可求得 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征根 $\lambda=1.8393$ 和对应的特征向量$\boldsymbol{s}=(0.4623, 0.3880, 0.2514, 0.4623, 0.5990)^{\mathrm{T}}$，从而确定名次为

$$\{5,(1,4),2,3\}$$

四、模型推广

想要一般化这个问题，将其推广到 n 个节点的任意竞赛图。关键点在于对于非强联通的竞赛图的排序。进一步观察我们可以将排名问题理解为图中路径的问题，一条路径所经过的点集序列 $Q=(u_1,u_2,\dots,u_n)$，即确定了一种胜负关系链，靠前的队伍自然排名高。

定义 3　一条经过图 G 所有顶点的路径，称作**完全路径**。

对于 n 个顶点的竞赛图有如下的性质：

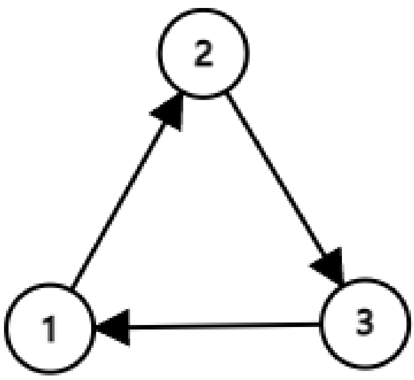
性质 1　竞赛图中一定存在完全路径。

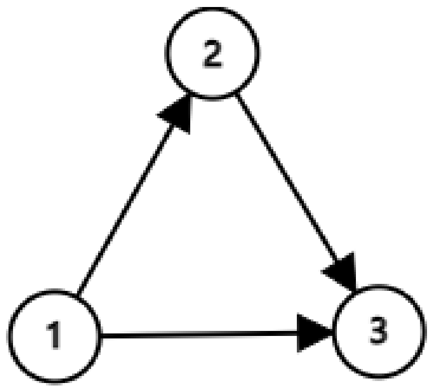
性质 2　如果竞赛图中存在唯一一条完全路径，则由该路径确定的唯一胜负关系链即为各支队伍的排名。

我们不妨从最简单的图开始重新思考。

2 个顶点的竞赛图排名次不成问题。

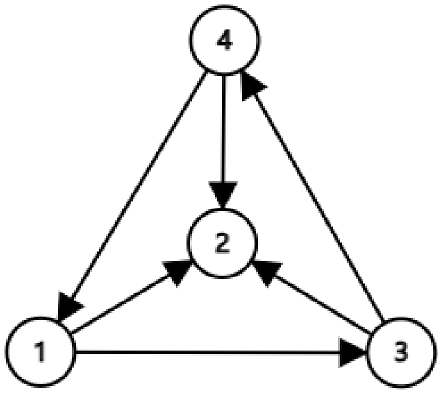
3 个顶点的竞赛图在同构意义下只有以下两种形式：



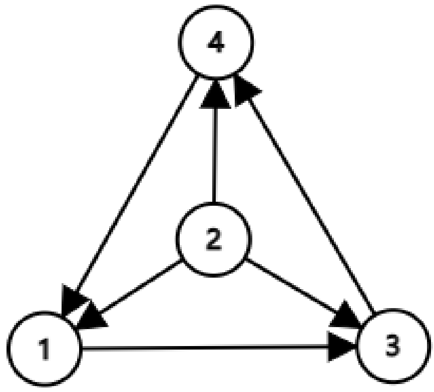


对于左图，3 支队名次相同，因为他们各胜一场；对于右图，名次排序显然应是$\{1,2,3\}$。

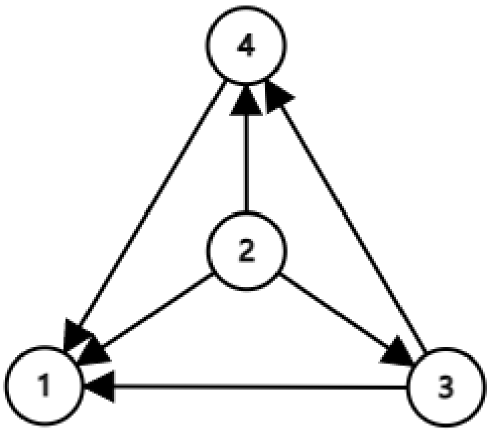
4 个顶点的竞赛图共有以下四种形式：



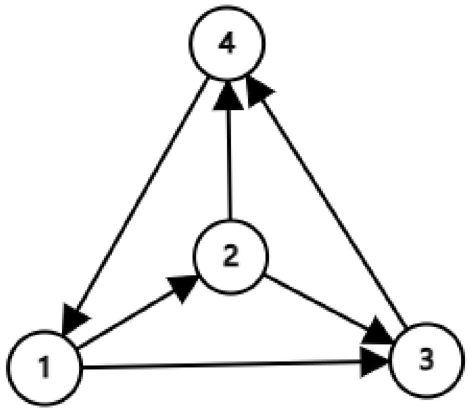
图（1）



图（2）



图（3）



图（4）

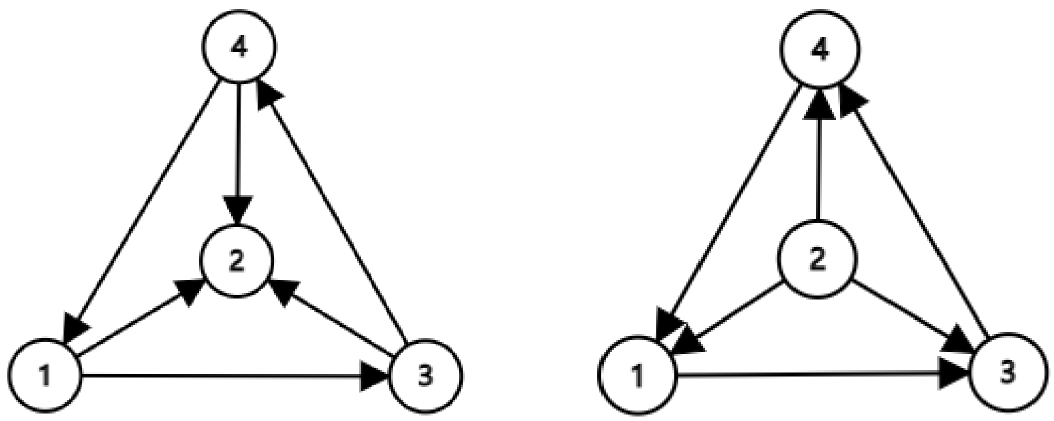
其中，只有图(4)属于强连通的，其对应的邻接矩阵是非负不可约的，可按照上文提及的算法进行排名。

图(3)属于**有向无环图**(Directed Acyclic Graph $-$ DAG)， $k \to \infty$, $\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{0}$，考虑到邻接矩阵乘法的意义：$\boldsymbol{A}^k$ 的各元素 a_{ij} 表示从节点 i 到 j 长度为 k 的路径条数。当 $k \to \infty$ 时，不存在环的有向图，即不存在长度为无穷的路径，$\boldsymbol{A}^k$ 必定趋于零矩阵。对于这类图，存在唯一的完全路径，该路径可以由**拓扑序列**求得，以此作为排名依据。

定义 4　对于图 $G = < V, E >$，若一个由图中所有点构成的序列 Q 满足：对于所有边$(u, v) \in E$，u 在 Q 中都出现在 v 之前,则称 Q 是该图的一个**拓扑序列**

求解拓扑序列的过程大体可以概括为[2]：寻找入度为 0 的点加入序列 Q，删除以该点为起始的所有的边，再次寻找入度为 0 的点，重复此过程。一般来说，拓扑序列并不是唯一的，但可以证明，有向无环竞赛图的拓扑序是唯一确定的，且每个点的出度数分别为$\{n-1, n-2, \dots, 1, 0\}$

让我们回到图（1）和图（2）



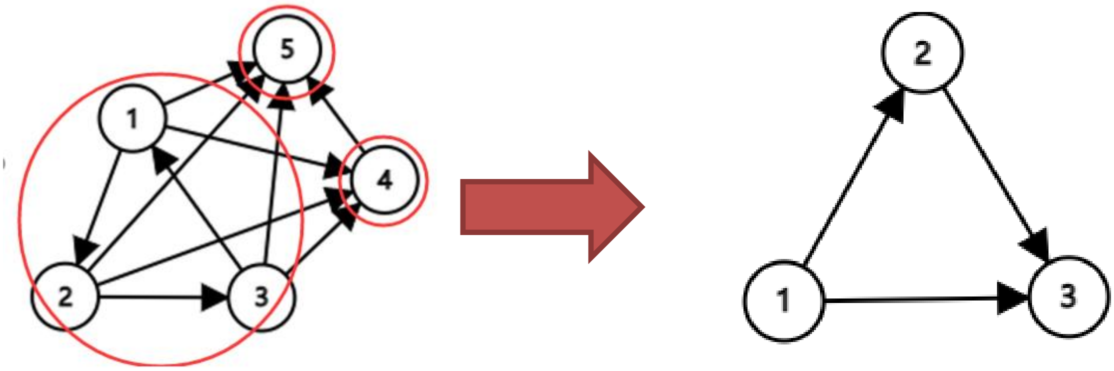
经过观察发现，点集（1,3,4）构成一条回路，他们与 3 个顶点时的情况一致，排名相同。二图的区别在于，左图 2 队于被所有队击败，右图 2 队反而击败了所有的队伍。2 队与其他队伍不存在强连通关系，这样的图我们成为是**部分强连通**的。

对于这类图，我们可以将其划分为若干极大强连通的子图，将其称为**强连通分量**。该划分可使用 tarjan 算法[3]可以在 $O(|V|+|E|)$ 的时间复杂度内求解。同一个强连通分量内的顶点，运用 Perron-Frobenius 定理进行排序。

tarjan 算法可以简单概括为，对图进行深度遍历，确定每个节点的 DFS 序（Depth-First-Search）并任意构出一颗生成树。将边分为**树边**与返祖边两类，再定义每个节点的 Low 序，为以其不断通过返祖边向根节点“爬树”能得到的最小的节点的 DFS 序。通过比较每个节点的 Low 序和 DFS 序判断割点、割边，进而划分强连通分量。

接着，我们将一个强连通分量中的所有节点缩成一个新节点，删除强连通分量内部的所有边，保留两个强连通分量间的边，并删去重边，可以建立一张图 $G' = < V', E' >$，$|V'| =$ 强连通分量的个数 。

这个过程可以由如下图可视化：



则图 G' 一定是有向无环图。

证明 若存在 $u, v \in V'$，且互相可达，则有 u, v 应该属于同一个强连通分量，与极大强连通子图的定义矛盾

所以，对于不同强连通分量的点，我们可以按照求图 G' 拓扑序的方式，给出同一强连通点集之间的排名。由于缩点后的 G' 显然也是一张竞赛图，所以其拓扑序是也唯一的，这就意味着不同点集之间的排名是唯一确定的。

对于以 Perron-Frobenius 定理构造的算法求出来的排名相同的队伍，可以考虑加赛，或者以并列处理。

5 个顶点以上的竞赛图虽然更加复杂，但基本类型仍如 4 个顶点竞赛图中所示的三种形式：有向完全图、强通图、部分强通图。

由于有向完全图每个点属于独立的强连通分量，强连通图整张图属于同一个分量，tarjan 算法并不影响其求解过程，所以，我们可以得出对于 n 支队伍的同一排名算法如下：

1. 使用 tarjan 算法求出图 G 按强连通性的唯一节点划分。
2. 对于同属于一个强连通分量的点，求得其对于的子邻接矩阵的特征根、特征向量，应用 Perron-Frobenius 定理求得归一化后的得分向量，作为同一强连通分量点集内部排名的依据。
3. 对于得分向量相同的队伍，可以通过加赛或并列的方式进一步排序
4. 对于不同强连通分量的点，以缩点的方法构造出新图 G' 。
5. 求得图 G' 的拓扑序，以此作为不同点集之间的排名方式。

五、参考文献

[1] https://blog.csdn.net/Anne033/article/details/108912018 Perron-Frobenius 定理介绍及推导

[2] https://blog.csdn.net/qq_41713256/article/details/80805338 拓扑排序介绍及其求法

[3] https://blog.csdn.net/sentimental_dog/article/details/53790582 Tarjan 算法求强连通分量与缩点

[4] 《数学模型》— 姜启源、谢金星