2016-2017 学年第 2 学期《概率论与数理统计》课程 A 卷参考答案及评分标准

一、单项选择题（每小题 2 分，共 20 分）

ABCBC　ABCCC

二、填空题（每小题 2 分，共 16 分）

$1.\ \dfrac{1}{3};\ 2.\ \underline{a+b-1};\ 3.\ \dfrac{1}{3};\ 4.\ \underline{1-p^2};\ 5.\ \underline{5};\ 6.\ \underline{0.75};\ 7.\ \underline{n,\chi^2};\ 8.\ \dfrac{5}{21}.$

三、计算题（每小题 8 分，共 48 分）

1.设$A_i=\left\{\text{该箱内有}i\text{ 件次品}\right\},i=0,1,2,B=\left\{\text{顾客买下该箱玻璃杯}\right\}$,则

$A_0A_1A_2=\varnothing,A_0\cup A_1\cup A_2=\Omega.$

$$
\begin{aligned}
(1)P(B)&=P(A_0B\cup A_1B\cup A_2B)\\
&=P(A_0)P(B|A_0)+P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)\\
&=0.8\times1+0.1\times\frac{C_{19}^4}{C_{20}^4}+0.1\times\frac{C_{18}^4}{C_{20}^4}=\frac{448}{475}.\qquad(4\text{分})
\end{aligned}
$$

$$
(2)P(A_0|B)=\frac{P(A_0B)}{P(B)}=\frac{0.8\times1}{448/475}=\frac{95}{112}.\qquad(4\text{分})
$$

2.(1)易得区域D的面积为$\dfrac{1}{4}$,所以(X,Y)的联合密度函数为

$$
f(x,y)=\begin{cases}4,(x,y)\in D,\\0,\text{其他}.\end{cases}\qquad(2\text{分})
$$

$$
(2)X\text{ 的边缘密度函数为}f_X(x)=\begin{cases}\int_0^{2x+1}4dy,-\frac{1}{2}<x<0,\\0,\quad\text{其他}.\end{cases}=\begin{cases}4(2x+1),-\frac{1}{2}<x<0,\\0,\quad\text{其他}.\end{cases}
$$

$$
Y\text{ 的边缘密度函数为}f_Y(y)=\begin{cases}\int_{\frac{y-1}{2}}^{0}4dx,0<y<1,\\0,\quad\text{其他}.\end{cases}=\begin{cases}2(1-y),0<y<1,\\0,\quad\text{其他}.\end{cases}\qquad(4\text{分})
$$

$$
(3)\ f\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right)=4,\ f_X\left(-\frac{1}{4}\right)=2,\ f_Y\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3},\text{显然}f\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right)\neq f_X\left(-\frac{1}{4}\right)f_Y\left(\frac{1}{3}\right),
$$

故X,Y不相互独立.　　　　　　　　　　　　　　　　(2分)

$$
3.E(X)=\frac{1}{4},E(X^2)=\frac{1}{4},E(Y)=\frac{1}{6},E(Y^2)=\frac{1}{6},
$$

$$
D(X)=\frac{3}{16},D(Y)=\frac{5}{36},E(XY)=\frac{1}{12},
$$

$$
\therefore\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{24},\qquad(6\text{分})
$$

$$
\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{1}{\sqrt{15}}.\qquad(2\text{分})
$$

4.当$z \le 0$时，$F_Z(z)=P(Z \le z)=0$;

当$z>0$时，$F_Z(z)=P(Z \le z)=\iint\limits_{x+2y\le z} f(x,y)dxdy=\int_0^z \int_0^{\frac{z-x}{2}} 2e^{-(x+2y)}dydx=1-e^{-z}-ze^{-z}$,

综上得$Z=X+2Y$的分布函数为$F_Z=\begin{cases}1-e^{-z}-ze^{-z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$ (6分)

密度函数为$f_Z(z)=\begin{cases}ze^{-z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$ (2分)

5.因为$X\sim R[-1,2]$，则$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & -1<x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ (2分)

而$P(Y=-1)=P(X<0)=\int_{-1}^0 \frac{1}{3}dx=\frac{1}{3}$,

$P(Y=0)=P(X=0)=0$,

$P(Y=1)=P(X>0)=\int_0^2 \frac{1}{3}dx=\frac{2}{3}$,

因此所求分布律为

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$

. (6分)

6.设被盗索赔个数为X，则$X\sim B(n,p), n=100, p=0.2$，则

$$E(X)=np=20, D(X)=np(1-p)=16. \quad (2分)$$

根据拉普拉斯中心极限定理，可得

$$P(14\le X\le 30)\approx \Phi\left(\frac{30-20}{4}\right)-\Phi\left(\frac{14-20}{4}\right)=\Phi(2.5)+\Phi(1.5)-1=0.927. \quad (6分)$$

四、证明题（8 分）

因为$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，所以$\bar{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$，从而$E(\bar{X})=\mu, D(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}$. (2分)

因为
$$\begin{aligned}E(T)&=E\left(\bar{X}^2-\frac{1}{n}S^{*2}\right)=E(\bar{X}^2)-\frac{1}{n}E(S^{*2})\\&=D(\bar{X})+\left(E(\bar{X})\right)^2-\frac{1}{n}E(S^{*2})\\&=\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2-\frac{\sigma^2}{n}\\&=\mu^2\end{aligned}$$

所以T是μ^2的无偏估计. (6分)

五、应用题$(8分)$

设每年储备该产品a吨$(100<a<300)$,所获收益为Y,则

$$Y=g(X)=\begin{cases}5X-2a, X\le a,\\ \quad 3a, \quad X>a.\end{cases} \qquad (4分)$$

又X的密度函数为$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{200},100<x<300,\\ 0,\ 其他,\end{cases}$

则 $E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx=\int_{100}^{a}(5x-2a)\dfrac{1}{200}dx+\int_{a}^{300}3a\dfrac{1}{200}dx$

$$=\frac{1}{200}\left(-\frac{5}{2}a^2+1100a-25000\right),$$

故公司每年储备该产品220吨,可使获得的平均收益最大. $(4分)$