本试卷适应范围
工学院

南京农业大学试题纸

学年 2015-2016　学期 1　课程类型：必修　试卷类型：A

课程 概率论与数理统计 班级____________ 学号___________ 姓名___________ 成绩___________

注意：所有题目都做在本试卷相应处，不得使用计算器，解答题只需写出主要步骤。

一、填空题(本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分)

1. 设随机事件 A 与 B 相互独立，P（A）=P（B）=0.5，则 P（A∪B）= 0.75 .

2. 设随机变量 X～B（3，0.4），且随机变量 Y＝$\dfrac{X(3-X)}{2}$，则 P｛Y＝1｝＝ 0.72 .

3．设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{2}, & -1<x<1;\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 则 E（X|X|）= 0 .

4.设随机变量 X 服从参数为 2 的泊松分布，则由切比雪夫不等式估计 P{|X-E（X）|<2}≥ 0.5 .

5．设 X_1，X_2，…，X_9 为来自总体 X 的样本，X 服从正态分布 N（μ，3^2），则μ的置信度为 0.95 的置信区间的长度为 3.92 .（附：$\Phi(1.96)=0.975$）

二、计算题（本大题共 5 题，每小题 6 分，共 30 分）

1. 将 3 个球随机地放到 4 个杯子中，求杯子中球的最大个数为 2 的概率.

解：$P=1-\dfrac{4\times3\times2+4}{4\times4\times4}(4')$

$=\dfrac{9}{16}(2')$

2.已知二维随机变量（X，Y）～N(0,0,1,4,ρ), 又知$D(2X-Y)$=1，求ρ.

解：D(2X-Y)=4D(X)+D(Y)-4Cov(X,Y)(2')

$=4D(X)+D(Y)-4\rho\sqrt{D(X)D(Y)}(2')$

$=8-8\rho=1(1')$

$\Rightarrow \rho=\dfrac{7}{8}(1')$

3.已知总体X服从参数为λ的泊松分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是此总体的一个样本，求参数λ的极大似然估计量.

解：$L=\dfrac{\lambda^{\sum x_i}}{(x_1!)\cdots(x_n!)}e^{-n\lambda}(2')$

$$Ln(L)=(\sum x_i)Ln(\lambda)-n\lambda-Ln[(x_1!)\cdots(x_n!)](2')$$

$$[Ln(L)]_{\lambda}^{'}=\frac{\sum x_i}{\lambda}-n=0\Rightarrow\lambda=\frac{1}{n}\sum x_i(2')$$

4.已知随机变量$X\sim f(x)=\begin{cases}kx+1 & 0\le x<2\\ 0 & else\end{cases}$，求（1）常数 k.　（2）P(1<X<2).

解：$\int_0^2(kx+1)dx=2k+2=1\Rightarrow k=-\frac{1}{2}(3')$

$$P(1<X<2)=\int_1^2(-\frac{1}{2}x+1)dx=\frac{1}{4}(3')$$

5.已知随机变量$X\sim N(3,2^2)$,求c,使得$P(X>c)=P(X\le c)$.

解：$\mathrm{P(X>C)=1-P(X\le C)=P(X\le C)\Rightarrow P(X\le C)}=\frac{1}{2}(2')$

$$\Rightarrow\Phi(\frac{c-3}{2})=\frac{1}{2}(2')$$

$$\Rightarrow\frac{c-3}{2}=0\Rightarrow c=3(2')$$

三、综合计算题（本大题共 5 题，每小题 8 分，共 40 分）

1. 某学生接连参加同一课程的两次考试，第一次及格的概率为 p，若第一次及格，则第二次及格的概率也为 p；若第一次不及格则第二次及格的概率为$\frac{p}{2}$. 已知该学生第二次已经及格，求他第一次及格的概率.

解：$P=\dfrac{pp}{pp+(1-p)\times\frac{p}{2}}(7')$

$$=\frac{2p}{p+1}(1')$$

2. 袋中有 a 个白球和 b 个黑球，从中任取一球，然后放回，并同时再放进与取出的球同色的球 c 个，如此总共进行三次，求取出的三个球中前两个是黑球，第三个是白球的概率.

解：$P=\dfrac{b}{a+b}\times\dfrac{b+c}{a+b+c}\times\dfrac{a}{a+b+2c}(8')$

3.已知随机变量X服从$(0,1)$上的均匀分布,$Y=e^X$,求Y的概率密度函数.

$$\text{解：}F_Y(y)=\begin{cases}0 & y\le 1\\ Ln(y) & 1<y\le e\text{（5'）}\\ 1 & e<y\end{cases}\Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y} & 1<y<e\\ 0 & else\end{cases}(3')$$

4.某种电气元件的寿命服从数学期望为 100 小时的指数分布，现随机地取 16 只，设它们的寿命是相互独立的，用中心极限定理求出这 16 只元件的寿命总和大于 1920 小时的概率.

（可能用到的数据：$\Phi(0.8)=0.79\quad \Phi(1)=0.84\qquad \Phi(2)=0.98$）

$$\text{解:}\sum X_i\sim\text{(近似)}\,\mathrm{N}(1600,400^2)(5')$$

$$\Rightarrow P(\sum X_i>1920)\approx 1-\Phi(\frac{1920-1600}{400})=0.21(3')$$

5.已知总体 $X\sim N(0,2^2)$, X_1,X_2,X_3,X_4是来自该总体的一个样本，

$Y=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2$, 求常数$a,b$,使得$Y$服从$\chi^2$分布.

$$\text{解:}\frac{X_1-2X_2}{\sqrt{20}}\sim N(0,1),\frac{3X_3-4X_4}{10}\sim N(0,1)(4')$$

$$\Rightarrow(\frac{X_1-2X_2}{\sqrt{20}})^2+(\frac{3X_3-4X_4}{10})^2\sim\chi^2(2)(2')$$

$$\Rightarrow a=\frac{1}{20},b=\frac{1}{100}(2')$$

四、综合题（本大题共 1 题，共 10 分）已知（X，Y）~ $f(x,y)=\begin{cases}cx^2y, & x^2\le y\le 1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$

（1） 求常数 c (2) 随机变量 X 与 Y 相互独立吗，为什么？

$$\text{解:}\iint_{R^2}f(x,y)dxdy=1\Rightarrow\frac{4}{21}c=1\Rightarrow c=\frac{21}{4}(3')$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\dfrac{21}{8}x^2(1-x^4) & -1<x<1\\ 0 & else\end{cases}(3'),$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\dfrac{7}{2}y^2\sqrt{y} & 0<y<1\\ 0 & else\end{cases}(3')$$

$$\Rightarrow f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)\Rightarrow X,Y\text{不相互独立（1'）}$$

五、应用题（本大题共 1 题，共 5 分）已知在生产正常的情况下，铁水含碳量 X 服从正态分布，其方差为 0.03，现抽测了 10 炉铁水，算得铁水含碳量的样本方差为 0.0375.试问生产的铁水含碳量方差与正常情况下的方差有无显著差异？

(显著性水平$\alpha = 0.05$，已知$P(\chi^2(9) < 2.7) = P(\chi^2(9) > 19.0) = 0.025$)

$$\text{解:}\frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{10 \times 0.0375}{0.03} = 12.5 \notin (0, 2.7) \cup (19.0, +\infty)(3')$$

$\Rightarrow$ 方差无显著差异（2'）