

1、行列式

- n 行列式共有 n^2 个元素，展开后有 $n!$ 项，可分解为 2^n 行列式；
- 代数余子式的性质：
 - A_{ij} 和 a_{ij} 的大小无关；
 - 某行（列）的元素乘以其它行（列）元素的代数余子式为 0；
 - 某行（列）的元素乘以该行（列）元素的代数余子式为 $|A|$ ；
- 代数余子式和余子式的关系： $M_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$ $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$
- 设 n 行列式 D ：

将 D 上、下翻转或左右翻转，所得行列式为 D_1 ，则 $D_1 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D$ ；

将 D 顺时针或逆时针旋转 90° ，所得行列式为 D_2 ，则 $D_2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D$ ；

将 D 主对角线翻转后（转置），所得行列式为 D_3 ，则 $D_3 = D$ ；

将 D 主副角线翻转后，所得行列式为 D_4 ，则 $D_4 = D$ ；
- 行列式的重要公式：
 - 主对角行列式：主对角元素的乘积；
 - 副对角行列式：副对角元素的乘积 $\times (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ ；
 - 上、下三角行列式（ $|\begin{smallmatrix} \blacktriangledown \\ \blacktriangle \end{smallmatrix}| = |\begin{smallmatrix} \blacktriangle \\ \blacktriangledown \end{smallmatrix}|$ ）：主对角元素的乘积；
 - $|\begin{smallmatrix} \blacktriangledown \\ \blacktriangle \end{smallmatrix}|$ 和 $|\begin{smallmatrix} \blacktriangle \\ \blacktriangledown \end{smallmatrix}|$ ：副对角元素的乘积 $\times (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ ；
 - 拉普拉斯展开式： $\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B|$ 、 $\begin{vmatrix} C & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^{m \cdot n} |A||B|$
 - 范德蒙行列式：大指标减小指标的连乘积；
 - 特征值；
- 对于 n 阶行列式 $|A|$ ，恒有： $|\lambda E - A| = \lambda^n + \sum_{k=1}^n (-1)^k S_k \lambda^{n-k}$ ，其中 S_k 为 k 阶主子式；
- 证明 $|A| = 0$ 的方法：
 - $|A| = -|A|$ ；
 - 反证法；
 - 构造齐次方程组 $Ax = 0$ ，证明其有非零解；
 - 利用秩，证明 $r(A) < n$ ；
 - 证明 0 是其特征值；

2、矩阵

- A 是 n 阶可逆矩阵：

$\Leftrightarrow |A| \neq 0$ （是非奇异矩阵）；

$\Leftrightarrow r(A) = n$ （是满秩矩阵）

$\Leftrightarrow A$ 的行（列）向量组线性无关；

\Leftrightarrow 齐次方程组 $Ax = 0$ 有非零解；

$\Leftrightarrow \forall b \in R^n$ ， $Ax = b$ 总有唯一解；

$\Leftrightarrow A$ 与 E 等价；

$\Leftrightarrow A$ 可表示成若干个初等矩阵的乘积；

$\Leftrightarrow A$ 的特征值全不为 0；

$\Leftrightarrow A^T A$ 是正定矩阵;

$\Leftrightarrow A$ 的行(列)向量组是 R^n 的一组基;

$\Leftrightarrow A$ 是 R^n 中某两组基的过渡矩阵;

2. 对于 n 阶矩阵 A : $AA^* = A^*A = |A|E$ 无条件恒成立;

$$\begin{aligned} 3. \quad (A^{-1})^* &= (A^*)^{-1} & (A^{-1})^T &= (A^T)^{-1} & (A^*)^T &= (A^T)^* \\ (AB)^T &= B^T A^T & (AB)^* &= B^* A^* & (AB)^{-1} &= B^{-1} A^{-1} \end{aligned}$$

4. 矩阵是表格, 推导符号为波浪号或箭头; 行列式是数值, 可求代数和;

5. 关于分块矩阵的重要结论, 其中均 A 、 B 可逆:

若 $A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ & & & A_s \end{pmatrix}$, 则:

I、 $|A| = |A_1| |A_2| \cdots |A_s|$;

II、 $A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & \\ & A_2^{-1} & \\ & & \ddots \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$;

②、 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$; (主对角分块)

③、 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$; (副对角分块)

④、 $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$; (拉普拉斯)

⑤、 $\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$; (拉普拉斯)

3、矩阵的初等变换与线性方程组

1. 一个 $m \times n$ 矩阵 A , 总可经过初等变换化为标准形, 其标准形是唯一确定的: $F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}$;

等价类: 所有与 A 等价的矩阵组成的一个集合, 称为一个等价类; 标准形为其形状最简单的矩阵;

对于同型矩阵 A 、 B , 若 $r(A) = r(B) \Leftrightarrow A \sim B$;

2. 行最简形矩阵:

①、只能通过初等行变换获得;

②、每行首个非 0 元素必须为 1;

③、每行首个非 0 元素所在列的其他元素必须为 0;

3. 初等行变换的应用: (初等列变换类似, 或转置后采用初等行变换)

①、若 $(A, E) \xrightarrow{r} (E, X)$, 则 A 可逆, 且 $X = A^{-1}$;

②、对矩阵 (A, B) 做初等行变化, 当 A 变为 E 时, B 就变成 $A^{-1}B$, 即: $(A, B) \xrightarrow{r} (E, A^{-1}B)$;

③、求解线性方程组: 对于 n 个未知数 n 个方程 $Ax = b$, 如果 $(A, b) \xrightarrow{r} (E, x)$, 则 A 可逆, 且 $x = A^{-1}b$;

4. 初等矩阵和对角矩阵的概念:

①、初等矩阵是行变换还是列变换, 由其位置决定: 左乘为初等行矩阵、右乘为初等列矩阵;

②、 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ，左乘矩阵 A ， λ_i 乘 A 的各行元素；右乘， λ_i 乘 A 的各列元素；

③、对调两行或两列，符号 $E(i, j)$ ，且 $E(i, j)^{-1} = E(i, j)$ ，例如： $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ ；

④、倍乘某行或某列，符号 $E(i(k))$ ，且 $E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k}))$ ，例如： $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & k & \\ & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{k} & \\ & & 1 \end{pmatrix} (k \neq 0)$ ；

⑤、倍加某行或某列，符号 $E(ij(k))$ ，且 $E(ij(k))^{-1} = E(ij(-k))$ ，如： $\begin{pmatrix} 1 & & k \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & -k \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} (k \neq 0)$ ；

5. 矩阵秩的基本性质：

①、 $0 \leq r(A_{m \times n}) \leq \min(m, n)$ ；

②、 $r(A^T) = r(A)$ ；

③、若 $A = B$ ，则 $r(A) = r(B)$ ；

④、若 P 、 Q 可逆，则 $r(A) = r(PA) = r(AQ) = r(PAQ)$ ；（可逆矩阵不影响矩阵的秩）

⑤、 $\max(r(A), r(B)) \leq r(A, B) \leq r(A) + r(B)$ ；（※）

⑥、 $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$ ；（※）

⑦、 $r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$ ；（※）

⑧、如果 A 是 $m \times n$ 矩阵， B 是 $n \times s$ 矩阵，且 $AB=0$ ，则：（※）

I、 B 的列向量全部是齐次方程组 $AX=0$ 解（转置运算后的结论）；

II、 $r(A) + r(B) \leq n$

⑨、若 A 、 B 均为 n 阶方阵，则 $r(AB) \geq r(A) + r(B) - n$ ；

6. 三种特殊矩阵的方幂：

①、秩为 1 的矩阵：一定可以分解为列矩阵（向量） \times 行矩阵（向量）的形式，再采用结合律；

②、型如 $\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的矩阵：利用二项展开式；

二项展开式： $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \dots + C_n^m a^{n-m} b^m + \dots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n = \sum_{m=0}^n C_n^m a^m b^{n-m}$ ；

注：I、 $(a+b)^n$ 展开后有 $n+1$ 项；

II、 $C_n^m = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1 \ 2 \ 3 \ \dots \ m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ $C_n^0 = C_n^n = 1$

III、组合的性质： $C_n^m = C_n^{n-m}$ $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$ $\sum_{r=0}^n C_n^r = 2^n$ $rC_n^r = nC_{n-1}^{r-1}$ ；

③、利用特征值和相似对角化：

7. 伴随矩阵：

①、伴随矩阵的秩： $r(A^*) = \begin{cases} n & r(A) = n \\ 1 & r(A) = n-1 \\ 0 & r(A) < n-1 \end{cases}$ ；

③、 α, β, γ 线性相关 $\Leftrightarrow \alpha, \beta, \gamma$ 共面;

6. 线性相关与无关的两套定理:

若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1}$ 必线性相关;

若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}$ 必线性无关; (向量的个数加加减减, 二者为对偶)

若 r 维向量组 A 的每个向量上添上 $n-r$ 个分量, 构成 n 维向量组 B :

若 A 线性无关, 则 B 也线性无关; 反之若 B 线性相关, 则 A 也线性相关; (向量组的维数加加减减)

简言之: 无关组延长后仍无关, 反之, 不确定;

7. 向量组 A (个数为 r) 能由向量组 B (个数为 s) 线性表示, 且 A 线性无关, 则 $r \leq s$ (二版 P_{74} 定理 7);

向量组 A 能由向量组 B 线性表示, 则 $r(A) \leq r(B)$; (P_{86} 定理 3)

向量组 A 能由向量组 B 线性表示

$\Leftrightarrow AX=B$ 有解;

$\Leftrightarrow r(A)=r(A, B)$ (P_{85} 定理 2)

向量组 A 能由向量组 B 等价 $\Leftrightarrow r(A)=r(B)=r(A, B)$ (P_{85} 定理 2 推论)

8. 方阵 A 可逆 \Leftrightarrow 存在有限个初等矩阵 P_1, P_2, \dots, P_l , 使 $A=P_1 P_2 \dots P_l$;

①、矩阵行等价: $A \xrightarrow{r} B \Leftrightarrow PA=B$ (左乘, P 可逆) $\Leftrightarrow Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解

②、矩阵列等价: $A \xrightarrow{c} B \Leftrightarrow AQ=B$ (右乘, Q 可逆);

③、矩阵等价: $A \sim B \Leftrightarrow PAQ=B$ (P, Q 可逆);

9. 对于矩阵 $A_{m \times n}$ 与 $B_{l \times n}$:

①、若 A 与 B 行等价, 则 A 与 B 的行秩相等;

②、若 A 与 B 行等价, 则 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解, 且 A 与 B 的任何对应的列向量组具有相同的线性相关性;

③、矩阵的初等变换不改变矩阵的秩;

④、矩阵 A 的行秩等于列秩;

10. 若 $A_{m \times s} B_{s \times n} = C_{m \times n}$, 则:

①、 C 的列向量组能由 A 的列向量组线性表示, B 为系数矩阵;

②、 C 的行向量组能由 B 的行向量组线性表示, A^T 为系数矩阵; (转置)

11. 齐次方程组 $Bx=0$ 的解一定是 $ABx=0$ 的解, 考试中可以直接作为定理使用, 而无需证明;

①、 $ABx=0$ 只有零解 $\Rightarrow Bx=0$ 只有零解;

②、 $Bx=0$ 有非零解 $\Rightarrow ABx=0$ 一定存在非零解;

12. 设向量组 $B_{n \times r}: b_1, b_2, \dots, b_r$ 可由向量组 $A_{n \times s}: a_1, a_2, \dots, a_s$ 线性表示为: (P_{110} 题 19 结论)

$$(b_1, b_2, \dots, b_r) = (a_1, a_2, \dots, a_s)K \quad (B=AK)$$

其中 K 为 $s \times r$, 且 A 线性无关, 则 B 组线性无关 $\Leftrightarrow r(K)=r$; (B 与 K 的列向量组具有相同线性相关性)

(必要性: $\because r=r(B)=r(AK) \leq r(K), r(K) \leq r, \therefore r(K)=r$; 充分性: 反证法)

注: 当 $r=s$ 时, K 为方阵, 可当作定理使用;

13. ①、对矩阵 $A_{m \times n}$, 存在 $Q_{n \times m}$, $AQ=E_m \Leftrightarrow r(A)=m$ 、 Q 的列向量线性无关; (P_{87})

②、对矩阵 $A_{m \times n}$, 存在 $P_{n \times m}$, $PA=E_n \Leftrightarrow r(A)=n$ 、 P 的行向量线性无关;

14. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关

\Leftrightarrow 存在一组不全为 0 的数 k_1, k_2, \dots, k_s , 使得 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_s \alpha_s = 0$ 成立; (定义)

$$\Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = 0 \text{ 有非零解, 即 } Ax=0 \text{ 有非零解;}$$

$\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) < s$, 系数矩阵的秩小于未知数的个数;

15. 设 $m \times n$ 的矩阵 A 的秩为 r , 则 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解集 S 的秩为: $r(S)=n-r$;

16. 若 η^* 为 $Ax=b$ 的一个解, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 为 $Ax=0$ 的一个基础解系, 则 $\eta^*, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关; (P_{111} 题 33 结论)

5、相似矩阵和二次型

1. 正交矩阵 $\Leftrightarrow A^T A = E$ 或 $A^{-1} = A^T$ (定义), 性质:

$$\textcircled{1}、A \text{ 的列向量都是单位向量, 且两两正交, 即 } a_i^T a_j = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} (i, j=1, 2, \dots, n);$$

$\textcircled{2}、$ 若 A 为正交矩阵, 则 $A^{-1} = A^T$ 也为正交阵, 且 $|A| = \pm 1$;

$\textcircled{3}、$ 若 $A、B$ 正交阵, 则 AB 也是正交阵;

注意: 求解正交阵, 千万不要忘记施密特正交化和单位化;

2. 施密特正交化: (a_1, a_2, \dots, a_r)

$$b_1 = a_1;$$

$$b_2 = a_2 - \frac{[b_1, a_2]}{[b_1, b_1]} b_1$$

.....

$$b_r = a_r - \frac{[b_1, a_r]}{[b_1, b_1]} b_1 - \frac{[b_2, a_r]}{[b_2, b_2]} b_2 - \dots - \frac{[b_{r-1}, a_r]}{[b_{r-1}, b_{r-1}]} b_{r-1};$$

3. 对于普通方阵, 不同特征值对应的特征向量线性无关;

对于实对称阵, 不同特征值对应的特征向量正交;

4. $\textcircled{1}、A$ 与 B 等价 $\Leftrightarrow A$ 经过初等变换得到 B ;

$$\Leftrightarrow PAQ = B, \quad P、Q \text{ 可逆};$$

$$\Leftrightarrow r(A) = r(B), \quad A、B \text{ 同型};$$

$\textcircled{2}、A$ 与 B 合同 $\Leftrightarrow C^T A C = B$, 其中可逆;

$$\Leftrightarrow x^T A x \text{ 与 } x^T B x \text{ 有相同的正、负惯性指数};$$

$\textcircled{3}、A$ 与 B 相似 $\Leftrightarrow P^{-1} A P = B$;

5. 相似一定合同、合同未必相似;

若 C 为正交矩阵, 则 $C^T A C = B \Rightarrow A \sim B$, (合同、相似的约束条件不同, 相似的更严格);

6. A 为对称阵, 则 A 为二次型矩阵;

7. n 元二次型 $x^T A x$ 为正定:

$$\Leftrightarrow A \text{ 的正惯性指数为 } n;$$

$$\Leftrightarrow A \text{ 与 } E \text{ 合同, 即存在可逆矩阵 } C, \text{ 使 } C^T A C = E;$$

$$\Leftrightarrow A \text{ 的所有特征值均为正数};$$

$$\Leftrightarrow A \text{ 的各阶顺序主子式均大于 } 0;$$

$$\Rightarrow a_{ii} > 0, |A| > 0; \text{ (必要条件)}$$