

本试卷适用范围
本科二年级

南京农业大学试题 (2010.1.)

学年 2009-2010 第 1 学期 课程类型: 必修

试 卷 类 型: (A)

课程 概率论与数理统计 班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____ 成绩 _____

特别说明: • 考试不准携带使用计算器

• 所有解答必须填写在本试卷对应试题的空白处, 否则无效

• 数学用表: $\sqrt{2\pi} = 2.5066$, $\Phi(1) = 0.8413$, $\frac{1}{\sqrt{13}} = 0.277$,

$\Phi(0.277) = 0.6100$, $\Phi(2.493) = 0.9938$, $\Phi(3) = 0.9987$.

一. 选择题 (每小题 2 分, 共 12 分):

1. 设 $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.7$, $P(A|B) = 0.8$, 则下列结论正确的是 ()

(A) A 与 B 相互独立 (B) A 与 B 互不相容

(C) $B \supset A$ (D) $P(A+B) = P(A) + P(B)$

2. 若函数 $y = f(x)$ 是一随机变量 X 的密度函数, 则一定成立的是 ()

(A) $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$; (B) $f(x)$ 的值域为 $[0, 1]$;

(C) $f(x)$ 为非负; (D) $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

3. 若随机变量 X 与 Y 不相关, 则与之等价的条件是 ()

(A) $D(X+Y) = D(X)D(Y)$; (B) $D(X+Y) = D(X-Y)$;

(C) $D(X+Y) \neq D(X)D(Y)$; (D) $D(X+Y) \neq D(X-Y)$.

4. 记随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x+3)^2}{4}}$ ($x \in (-\infty, +\infty)$), 则服从

$N(0, 1)$ 的随机变量为 ()

(A) $\frac{X+3}{2}$; (B) $\frac{X-3}{\sqrt{2}}$; (C) $\frac{X-3}{2}$; (D) $\frac{X+3}{\sqrt{2}}$.

5. 设随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 独立同分布, 并且 $E(X_i) = 1, D(X_i) = 8$,

$(i = 1, 2, \dots, n)$, 则用切比雪夫不等式可估计 $P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - 1\right| < 4\right\} \geq$ ()

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $1 - \frac{1}{2n}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{2n}$

6. 设一批零件的长度服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 其中 μ, σ^2 均未知. 现从中随机抽取 16 个零件, 测得样本均值 $\bar{x} = 20(\text{cm})$, 样本标准差 $s = 1(\text{cm})$, 则 μ 的置信水平为 0.9 的置信区间是 ()

(A) $\left(20 - \frac{1}{4}t_{0.05}(16), 20 + \frac{1}{4}t_{0.05}(16)\right)$

(B) $\left(20 - \frac{1}{4}t_{0.1}(16), 20 + \frac{1}{4}t_{0.1}(16)\right)$

(C) $\left(20 - \frac{1}{4}t_{0.05}(15), 20 + \frac{1}{4}t_{0.05}(15)\right)$

(D) $\left(20 - \frac{1}{4}t_{0.1}(15), 20 + \frac{1}{4}t_{0.1}(15)\right)$

二. 填空题 (每小题 2 分, 共 12 分):

1. 口袋中有 4 只白球 2 只黑球, 从中随机地取出 3 只球, 则取出 2 只白球 1 只黑球的概率为 _____.

2. 设 $X \sim N(2, 9)$, $\Phi(2) = 0.9772$, 则概率 $P\{X > 8\} =$ _____.

3. 若连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ kx, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x > 1 \end{cases} \quad \text{则 } k = \underline{\hspace{2cm}}.$$

4. 设 $X \sim b(n, p)$, 且 $E(X) = 0.5, D(X) = 0.45$, 则 $p = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 设随机变量 X, Y 独立同分布且 X 的分布函数为 $F(x)$, 则 $Z = \max\{X, Y\}$ 的分布函数 $F_Z(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

6. 设总体 X 的分布函数为 $F(x; \theta)$, 其中 θ 为未知参数, 若 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自该总体的一个样本, 则 $D(X)$ 的矩估计量为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三. (12 分) 某人从南京去武汉, 他乘火车、乘船、乘汽车、乘飞机的概率分别为 0.3, 0.2, 0.1 和 0.4. 已知他乘火车、乘船、乘汽车而迟到的概率分别为 0.25, 0.3, 0.1, 而乘飞机不会迟到. 当这个人赶到武汉时已经迟到了, 问: 他是乘火车去的可能性有多大?

四. (12 分) 设二维随机变量 (X, Y) 的分布律为

| $\begin{matrix} Y \\ \backslash X \end{matrix}$ | -2 | -1 | 1 | 2 |
|---|------|------|------|------|
| 1 | 0 | 0.25 | 0.25 | 0 |
| 4 | 0.25 | 0 | 0 | 0.25 |

(1) 求 X, Y 的相关系数 ρ_{XY} ; (2) 判断 X, Y 是否相互独立. 说明理由;

(3) 求概率 $P\{X + Y < 1\}$.

五. (12 分) 某种型号器件的寿命 X (以小时计) 具有概率密度

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1000}{x^2}, & x > 1000, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

现有一大批此种器件(设各器件损坏与否相互独立), 任取 5 只, 问其中至少有 2 只寿命大于 1500 小时的概率是多少?

六. (8 分) 设 X 与 Y 是两个相互独立的随机变量, $X \sim U(0, 1)$, Y 的密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}}, & y \geq 0, \\ 0, & y < 0, \end{cases}$$

(1) 求 (X, Y) 的密度函数;

(2) 设含有 a 的二次方程为 $a^2 + 2Xa + Y = 0$, 求 a 有实根的概率.

七. (10 分) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 $N(0, 1)$ 的样本, 样本均值 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$,

样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$. 试证明:

$$(1) \quad E(\bar{X}^2 \cdot S^2) = \frac{1}{n}; \quad (2) \quad D(S^2) = \frac{2}{n-1}.$$

八. (12 分) 某商店出售某种贵重商品. 根据经验, 该商品每周销售量服从参数为 $\lambda = 1$ 的泊松分布. 假定各周的销售量是相互独立的, 用中心极限定理计算该商店一年内 (52 周) 售出该商品件数在 50 件到 70 件之间的概率.

九. (10 分) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中参数 λ ($\lambda > 0$) 未知, X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的一个样本, 试求参数 λ 的最大似然估计量.

概率统计（A）卷答案：

一. ACBDBC

二. 1. 0.6 2. 0.0228 3. 1 4. 0.1 5. $F^2(x)$ 6. B_2

三. 记 A,B,C,D 为此人乘火车、乘船、乘汽车、乘飞机, E 为此人迟到, 则

$$P(E) = P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B) + P(E|C)P(C) + P(E|D)P(D) = 0.145, \text{ 6 分}$$

$$P(A|E) = \frac{P(E|A)P(A)}{P(E)} = 0.517 \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

四. (1) $\rho_{XY}=0$: (4 分) (2) X, Y 不相互独立; (4 分)

(3) 概率 $P\{X + Y < 1\} = 0.25$. (4 分)

$$\text{五. } P\{X > 1500\} = \int_{1500}^{+\infty} \frac{1000}{x^2} dx = \frac{2}{3}; \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

以 Y 表示所取 5 只器件中寿命大于是 1500 小时的只数, 则

$$Y \sim b\left(5, \frac{2}{3}\right), \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} \therefore P\{Y \geq 2\} &= 1 - P\{Y = 0\} - P\{Y = 1\} = \frac{232}{243} \\ &= \frac{232}{243} \dots\dots\dots 2 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$\text{六. (1). } f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}}, & 0 < x < 1, y > 0, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$(2) P\{X^2 \geq Y\} = \iint_{x^2 \geq y} f(x, y) dx dy = 0.1445 \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{七. (1) } E(\bar{X}^2 \cdot S^2) = E(\bar{X}^2)E(S^2) = D(\bar{X}) + [E(\bar{X})]^2 = \frac{1}{n}; \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \quad (n-1)S^2 \sim \chi^2(n-1)$$

$$D(S^2) = \frac{2}{n-1} \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

八. 设 $X_i = \{\text{第 } i \text{ 周的销售量}\} (i = 1, 2, \dots, 52)$, 则一年的销售量

$$Y = \sum_{i=1}^{52} X_i, \quad X_i (i = 1, 2, \dots, 52) \text{ 独立同分布, } E(X_i) = 1, D(X_i) = 1, \quad 6 \text{ 分}$$

$$P\{50 < Y < 70\} \approx \Phi\left(\frac{18}{\sqrt{52}}\right) + \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{52}}\right) - 1 = 0.6038 \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

九. 构造似然函数

$$L(\lambda) = \lambda^{2n} \prod_{i=1}^n x_i e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \quad (x_i > 0) \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

取对数求导数, 得 λ 的最大似然估计量为

$$\hat{\lambda} = \frac{2}{\bar{X}} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$