本试卷适应范围
本科二年级

南京农业大学试题纸

2012-2013 学年第 II 学期 课程类型：必修 试卷类型： A

课程<u>**概率论与数理统计**</u> 班级_________ 学号_________ 姓名_________ 成绩__________

特别说明： ● 考试不准携带使用计算器

● 所有解答必须填写在本试卷对应试题的空白处，否则无效

一、单项选择题 （每小题 3 分，共 15 分）

1．设事件 A,B 相互独立，$P(A)=0.4, P(A\cup B)=0.7$,则 $P(B)=$ （ ）.

A．0.2 B. 0.3 C. 0.4 D. 0.5

2．设 $f(x)$ 为连续型随机变量 X 的概率密度函数，则有 （ ）.

A. $0\le f(x)\le 1$ B. $P\{X=x\}=f(x)$ C. $f(x)\ge 0$ D. $\int_0^{+\infty} f(x)dx=1$

3．设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{\frac{-(x+2)^2}{4}},\quad -\infty<x<+\infty,$$

且 $Y=aX+b\sim N(0,1)$，则 a,b 的值分别为 （ ）.

A. $\frac{1}{2},1$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}$ C. $\frac{1}{2},-1$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2}$

4．设 X 为随机变量， $E(X)=10, E(X^2)=109,$ 则利用切比雪夫不等式估计概率

$P\{|X-10|\ge 6\}\le$ （ ）.

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{5}{18}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{109}{36}$

5．设 X_1,X_2 是来自总体 X 的一个样本，则下列是 $E(X)$ 的无偏估计量的是 （ ）.

A. $\frac{2}{3}X_1+\frac{4}{3}X_2$ B. $\frac{1}{4}X_1+\frac{3}{4}X_2$ C. $\frac{1}{5}X_1+\frac{3}{5}X_2$ D. $\frac{1}{2}X_1+\frac{3}{2}X_2$

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1．袋中有 a 只白球，b 只红球，现不放回抽取两次，每次取球一只，则第二次取球为白球的概率是 ____________________.

2．设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{8}x^2, & 0\le x\le C\\ 0, & 其它\end{cases}$ ，则常数 $C=$ __________.

3．设离散型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ \frac{1}{3}, & -1\le x<2,\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$$

则 $P\{X=2\}=$ ____________________.

4．设 $X,Y\sim N(1,4,2,9,0.5)$ ，则 $\operatorname{cov}(X,Y)=$ ____________________.

5．设 X, Y 相互独立，且都服从标准正态分布，则 $Z=\dfrac{X}{\sqrt{Y^2}}$ 服从____________________分布（同时要写出分布的自由度）.

三、（10 分）由统计资料知某地区进行化验的病人中患甲种病者占 35%，患乙种病者占 60%，患丙种病者占 5%，又知患甲、乙、丙三种病的病人化验结果为阳性的可能性分别为 80%，35%和 85%. 假定每个病人只可能患其中的一种病. 现从该地区随机抽一个病人，问化验结果为阳性的概率.

四、（10 分）设二维随机变量(X,Y)的联合分布律是

X \ Y	1	2	4	5
0	0.05	0.12	0.15	0.07
1	0.03	0.10	0.08	0.11
2	0.07	0.01	0.11	0.10

（1）问X与Y是否相互独立?

（2）求$U=XY$的分布律.

五、（10 分）设二维随机变量(X,Y)在圆域$D: x^2+y^2\le 1$上服从均匀分布.

（1）写出(X,Y)的联合密度函数$f(x,y)$；（2）求Y的边缘密度函数$f_Y(y)$；

（3）求条件密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$.

六、（10 分）设随机变量$X\sim N(0,1)$，求随机变量$Y=e^X$的概率密度函数.

七、（10 分）设 X 的密度函数为 $f(x)=\dfrac{1}{2}e^{-|x|}, x\in(-\infty,+\infty)$，

（1）求 X 的数学期望和方差；

（2）判断 X 与 $|X|$ 是否相关？

八、（10 分）对于一个学生而言，来参加家长会的家长人数是一个随机变量. 设一个学生无家长、有 1 名家长、有 2 名家长来参加会议的概率分别为 0.05，0.8，0.15. 若学校共有 400 名学生，设各学生参加会议的家长数独立同分布，利用中心极限定理求有一名家长来参加会议的学生数不大于 340 的概率.（注：$\Phi(2.5)=0.9938$）

九、（10 分）设总体 X 有分布律

X	-1	0	1
概率	3θ	θ	$1-4\theta$

其中 $\theta\left(0\le\theta<\dfrac{1}{4}\right)$ 是未知参数，已知取得样本值 $x_1=-1, x_2=0, x_3=-1$. 试求 θ 的矩估计值.

试卷 A 答案

一、（每小题 3 分，共 15 分）DCBAB

二、（每空 3 分，共 15 分） $\dfrac{a}{a+b}$　　2　　$\dfrac{2}{3}$　　$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　　$t(1)$

三、（10 分）设事件 A、B、C 分别为患甲、乙、丙三种病，D 为化验结果成阳性，则由已知，

$P(A)=0.35, P(B)=0.6, P(C)=0.05$, $P(D|A)=0.8, P(D|B)=0.35, P(D|C)=0.85$.

……………………………………………………………………………4 分

由全概率公式得，

$P(D)=P(D|A)P(A)+P(D|B)P(B)+P(D|C)P(C)=0.28+0.21+0.0425=0.5325.$ ……

……………………………………………………………………………10 分

四、（10 分）（1） X的边缘分布率为

X	0	1	2
概率	0.39	0.32	0.29

Y的边缘分布率为

Y	1	2	4	5
概率	0.15	0.23	0.34	0.28

……………………………………………………………………………3 分

因 $P\{X=0,Y=1\}=0.05\neq P\{X=0\}P\{Y=1\}$，故 X 与 Y 不相互独立.

……………………………………………………………………………4 分

（2） U的值域为 0，1，2，4，5，8，10. ……………………………………6 分

$P\{U=0\}=P\{X=0\}=0.39$， $P\{U=1\}=P\{X=1,Y=1\}=0.03$，

$P\{U=2\}=P\{X=1,Y=2\}+P\{X=2,Y=1\}=0.10+0.07=0.17$，同理可求得其他概率. 于是 U 的分布率为

U	0	1	2	4	5	8	10
概率	0.39	0.03	0.17	0.09	0.11	0.11	0.10

……………………………………………………………………………10 分

五、（10 分）（1）圆域的面积 $S_D=\pi$，故 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & (x,y)\in D\\ 0, & 其它\end{cases}$. …………3 分

（2）$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}dx, & -1\le y\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}=\begin{cases}\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}, & -1\le y\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$.

…………………………………………………………………………………7 分

（3）当 $-1<y<1$ 时，$f_Y(y)\neq 0$，此时

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}, & -\sqrt{1-y^2}\le x\le\sqrt{1-y^2}\\ 0, & 其它\end{cases}.$$ ……………………10 分

六、（10 分）$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{e^X\le y\}$ ……………………………………2 分

当 $y\le 0$ 时，$F_Y(y)=0$，从而 $f_Y(y)=F_Y'(y)=0$.

当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P\{X\le\ln y\}=\Phi(\ln y)$，……………………………………6 分

于是

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\varphi(\ln y)(\ln y)'=\frac{1}{\sqrt{2\pi}y}e^{\frac{-(\ln y)^2}{2}}.$$

综上所述，Y 的概率密度函数.

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}y}e^{\frac{-(\ln y)^2}{2}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}.$$ ……………………10 分

七、（10 分）（1）$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=0.$ ……………………3 分

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx=2, D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=2.$

…………………………………………………………………………………7 分

（2）$E(X|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}x|x|f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x|x|\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=0,$

$\operatorname{cov}(X,|X|)=E(X|X|)-E(X)E(|X|)=0-0=0,$

所以 X 与 $|X|$ 不相关. ……………………………………………………10 分

八、（10 分）设 X 为有一名家长来参加会议的学生数，则 $X\sim B(400,0.8)$，所求为 $P\{X\le 340\}$. ……………………………………………………4 分

由棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理，

$$P\{X\le 340\}=P\{\frac{X-400\times 0.8}{\sqrt{400\times 0.8\times 0.2}}\le \frac{340-400\times 0.8}{\sqrt{400\times 0.8\times 0.2}}\}\approx \Phi(2.5)=0.9938.$$ ………10 分

九、（10 分）$E(X)=-1\times 3\theta+1-4\theta=1-7\theta$，……………………………4 分

故 $\theta=\dfrac{1-E(X)}{7}$，……………………………………………………7 分

取 $\hat{E}(X)=\overline{X}$，得 θ 的矩估计为 $\hat{\theta}=\dfrac{1-\overline{X}}{7}$，代入样本值得 θ 的矩估计值为 $\hat{\theta}=\dfrac{1-\overline{x}}{7}=\dfrac{5}{21}$. ……………………………………………………10 分