本试卷适应范围 本科 16 级线性 代数期末

南 京 农 业 大 学 试 题 纸

2017-2018 学年 1 学期 课程类型：必修 试卷类型：A

课程号 MATH 课程名 线性代数 学分 3

参考解答与评分参考

一、单项选择题（每题 2 分，共 10 分）

1. 设 A、B 是两个 3 阶矩阵，且 $|A|=-1$，$|B|=2$，则 $|2AB^{-1}|=$(D)

(A) -1 (B) 1 (C) 4 (D) -4

2. 设 5 阶矩阵 $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$，其中 A 是一个二阶矩阵，那么矩阵 B 的行数×列数为（ C ）

(A) 3×3 (B) 3×2 (C) 2×3 (D) 2×2

3. 矩阵 $A=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$，则以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组有非零解的充要条件是(C)

(A) $k=1$ (B) $k=-2$ (C) $k=1$ 或者 $k=-2$ (D) $k\neq1$ 并且 $k\neq-2$

4. 设向量组 A：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与向量组 B：$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 等价，那么下列表述中正确的是（ A ）

(A) 向量组 B 一定线性相关 (B) 向量组 B 和向量组 A 有相同的线性相关性

(C) 向量组 A 的秩小于向量组 B 的秩 (D) β_4 可以由 β_1,β_2,β_3 线性表示

5. 设 A、B 是两个不同的 n 阶正交矩阵，下列说法中正确的是（ A ）

(A) 对任意 n 维实向量 α，总有 $\|A\alpha\|=\|B\alpha\|$ (B) 当 A、B 可交换时，AB 才是正交矩阵

(C) A、B 有相同的特征值 (D) $A+B$ 可逆。

二、填空题（每空 3 分，共 24 分）

6．设 $\alpha=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T$，那么 $(\alpha^T\alpha)^{10}=\underline{3^{10}}$，$(\alpha\alpha^T)^{10}=\underline{3^9\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$；（注：写 $\underline{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{10}}$ 的只得 1 分）

7. $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 且 $Ax=0$ 的基础解系为 $x=(1,2,3,0)^T$，则 $R(A)=\underline{3}$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性<u>相</u>关；

8.设向量 $\alpha=(a,0,-1)^T$ 与向量 $\beta=(1,0,b)^T$ 正交，那么参数 a,b 满足 $\underline{a=b}$；

9. 已知三阶矩阵 A 满足：$|A|=3, Ae=e$，其中 e 是非零向量，并且矩阵 $A+3E$ 不可逆，那么 A 的三个特征值为 $\underline{-3,1,-1}$，$|A^2+E|=\underline{40}$；

10. 设 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3$ 是正定二次型，则参数 a 的取值范围是 $\underline{-1<a<1}$。

三、（8 分）设$\boldsymbol{\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$都是 4 维列向量，并且矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\alpha & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\beta & \gamma_1 & 2\gamma_2 & 3\gamma_3\end{pmatrix}$

满足$|\boldsymbol{A}|=\boldsymbol{2}$，$|\boldsymbol{B}|=\boldsymbol{1}$，求$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$。

解：

$$
\begin{aligned}
|A+B| &= 24|\alpha+\beta,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3|\cdots(3')\\
&= 24|A|+4|B|\cdots(3')\\
&= 52\cdots(2')
\end{aligned}
$$

四、（8 分）已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 3 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$，并且矩阵 X 满足$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{X}$，求$\boldsymbol{X}$。

解：法一：原方程等价于$\boldsymbol{(A-E)X=B}$ (2’)，根据$\boldsymbol{(A-E,B)}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 11/6 & 1/2\\ 0 & 1 & 0 & -1/6 & -1/2\\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 1\end{pmatrix}$ (4’)

可得：$\boldsymbol{A-E}$可逆，并且$\boldsymbol{X=(A-E)^{-1}B}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}11 & 3\\ -1 & -3\\ 4 & 6\end{pmatrix}$(2’)

法二：原方程等价于$\boldsymbol{(A-E)X=B}$ (2’)，又因为$|\boldsymbol{A-E}|=\boldsymbol{6}$，所以$\boldsymbol{A-E}$可逆 (2’)

并且$\boldsymbol{(A-E)^{-1}}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 2 & 1 & -2\\ -2 & 2 & 2\end{pmatrix}$(2’)，所以$\boldsymbol{X=(A-E)^{-1}B}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}11 & 3\\ -1 & -3\\ 4 & 6\end{pmatrix}$（2’）

五、（14 分）考虑含参数$\boldsymbol{a,b}$的非齐次线性方程组：$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\ x_2+2x_3+2x_4=1\\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b\\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1\end{cases}$

（1）$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$为何值时该方程组①有唯一解？②无解？③有无穷多解？（10 分）

（2）在方程组有无穷多解时求出方程组的通解。（4 分）

解：（1）由$[A,\beta]\overset{r}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & a-1 & 0 & 1+b\\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0\end{bmatrix}$(4’)，

所以当$\boldsymbol{a\neq 1}$时，$\boldsymbol{Ax=\beta}$都有唯一解（2’）；

当$\boldsymbol{a=1}$，$\boldsymbol{b\neq -1}$时，方程组无解(2’)；

当$\boldsymbol{a=1}$，$\boldsymbol{b=-1}$时，方程组有无穷多解(2’)

（2）此时 $a=1, b=-1$，增广矩阵的行最简形为：$[A,\beta]\overset{r}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&-1&-1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$ (2')

所以方程组的通解为：$x=c_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ （2'）。

六、（12 分）设 $A=\begin{bmatrix}1&7&2&5&2\\3&0&-1&1&-1\\2&14&0&6&4\\0&3&1&2&1\end{bmatrix}$

（1）将矩阵 A 约化到行最简形（4 分）;（2）求矩阵 A 的列向量组的秩和一个最大无关组（4 分）;
（3）把不属于最大无关组的列，用最大无关组线性表示（4 分）。

解：（1）$A=\begin{bmatrix}1&7&2&5&2\\3&0&-1&1&-1\\2&14&0&6&4\\0&3&1&2&1\end{bmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&0&2/3&-1/3\\0&1&0&1/3&1/3\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$（4'）;

（2）$R(A)=3$（2'）；并且矩阵 A 的前三列就是 A 的列向量组的一个最大无关组（2'）;

（3）$\alpha_4=\frac{2}{3}\alpha_1+\frac{1}{3}\alpha_2+\alpha_3$（2'）；$\alpha_4=-\frac{1}{3}\alpha_1+\frac{1}{3}\alpha_2$（2'）。

七、（12 分）利用正交变换把二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$ 化为标准形，写出所做的正交变换以及二次型的标准形。

解：该二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$ (2')

令 $|A-\lambda E|=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-5)=0$，解得 A 有三个互异特征值：$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$ (2')

分别考察齐次线性方程组：$(A-\lambda_i E)x=0, i=1,2,3$，得到各自的基础解系（各特征值对应的特征向量）:

$p_1=(0,-1,1)^T, p_2=(1,0,0)^T, p_3=(0,1,1)^T$ (3')

将它们单位化得到：$q_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)^T, q_2=(1,0,0)^T, q_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^T$，并令 $Q=[q_1,q_2,q_3]$，就有 Q 是正交矩阵。(3')并且令 $x=Qy$，原二次型就化为标准形：$f(y)=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$ (2')。

八、（6 分）设 $\boldsymbol{A,B}$ 都是 n 阶实对称矩阵，并且$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E}|$。证明：$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似。

证明：因为 A，B 都是 n 阶实对称矩阵，所以存在 n 阶正交矩阵 P，Q 以及对角阵 $\boldsymbol{D_1,D_2}$ 使得：

$\boldsymbol{P^T AP=D_1,Q^T BQ=D_2}$ (2’)。又因为$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E}|$，所以 $\boldsymbol{D_1=D_2}$ (2’)。从而有：

$$\boldsymbol{A=PQ^T BQP^T=\left(QP^T\right)^T B\left(QP^T\right)}\ （2’）。$$

又因为 P，Q 都是正交矩阵，所以 $\boldsymbol{QP^T}$ 也是正交阵，从而 A 与 B 相似。

九、（6 分）证明：对任意实矩阵 $\boldsymbol{A_{m\times n}}$， $\boldsymbol{A^T A}$ 总是实对称半正定矩阵，并且 $\boldsymbol{A^T A}$ 正定的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 是列满秩的。

证明：因为$\left(A^T A\right)^T=A^T\left(A^T\right)^T=A^T A$，所以 $\boldsymbol{A^T A}$ 是对称矩阵（2’）

任意 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$， $\boldsymbol{f(x)=x^T A^T Ax=(Ax)^T(Ax)\geq 0}$ 恒成立。从而 $\boldsymbol{A^T A}$ 半正定。（2’）；

又因为对任意非零向量 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$： $\boldsymbol{f(x)>0}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{Ax\neq 0}$，即 $\boldsymbol{Ax=0}$ 只有零解，这等价于 A 列满秩。（2’）

教研室主任 张浩　　　　　　　　　出卷人 唐中良