

本试卷使用范围
工学院

南京农业大学试题纸

2016—2017 学年 1 学期 课程类型：必修 试卷类型：A

课程号 MATH2604

课程名 线性代数

学分 3

学号

姓名

班级

题号	一	二	三	四	总分	签名
得分						

备注：（请将解答直接写在本试卷对应试题的空白处，否则无效）

一、单项选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 设 A, B, C 是 n 阶方阵, 若 $AB = AC$, 则必有().

A. $A = O$ B. $B \neq C$ 时 $A = O$ C. $A \neq O$ 时 $B = C$ D. $|A| \neq 0$ 时 $B = C$.

2. 设 A 是 n 阶可逆矩阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, 则().

A. $|A^*| = |A|$ B. $|A^*| = |A|^n$ C. $|A^*| = |A|^{n-1}$ D. $|A^*| = |A^{-1}|$.

3. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, C 与 n 阶单位矩阵等价, $B = AC$, 则().

A. $R(A) > R(B)$ B. $R(A) < R(B)$ C. $R(A) = R(B)$ D. $R(A)$ 与 $R(B)$ 的关系依 C 定.

4. 对任意实 a, b, c , 下列向量组必是线性无关组的是().

A. $(a, 1, 2)^T, (2, b, c)^T, (0, 0, 0)^T$ B. $(1, a, 1, 1)^T, (1, b, 1, 0)^T, (1, c, 0, 0)^T$
C. $(b, 1, 1)^T, (1, a, 3)^T, (a, 0, c)^T$ D. $(1, 1, 1, a)^T, (3, 3, 3, b)^T, (0, c, 0, 0)^T$.

5. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \beta \\ 1 & \beta & 1 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似, 则 α, β 分别为().

A. 0, 0 B. 0, 1 C. 1, 0 D. 1, 1.

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为三维列向量, $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), B = (\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1)$, 且有 $|A + 2B| = 3$, 则 $|A| =$ _____.

2. 设方阵 A 满足 $A^3 = O$, 则 $(E + A + A^2)^{-1} =$ _____.

3. 若线性方程组 $A_{m \times n} x = b$ 的系数矩阵的秩为 m , 则其增广矩阵的秩为 _____.

4. 设 A 是六阶方阵, 且 $R(A) = 3$, 则齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系含有 _____ 个解向量.

5. 设 A 是四阶方阵, 特征值为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, 则行列式 $|A^{-1} - E| =$ _____.

三、计算题（每小题 8 分，共 64 分）

1. 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix}$.

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 且 $AB + E = A^2 + B$, 求 B .

3. 已知 $AP = PB$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 求 A 与 A^5 .

4. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的秩并给出它的一个最高阶非零子式.

5.问 b 为何值时,方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + bx_3 = 4, \\ -x_1 + bx_2 + x_3 = b^2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$$
无解? 有唯一解? 有无穷多解? 并在有无穷多解时求其通解.

6.求矩阵 $A = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -2 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 0 & 14 \end{pmatrix}$ 的列向量组的秩和最大无关组,并把不属于最大无关组的列向量用最大无关组线性表示.

7. 设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为3, 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是它的3个解向量, 其中 $\alpha_1 = (1, 0, 3, -1)^T$, $\alpha_2 + \alpha_3 = (1, 4, 3, 2)^T$, 求该非齐次线性方程组的通解.

8. 求一个正交变换 $x = Py$, 把三元二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 + 2x_1x_3$ 化成标准形.

四、证明题（每小题 8 分，共 16 分）

1. 设 A 是 n 阶方阵,若存在正整数 m 使线性方程组 $A^m x = 0$ 有解向量 α ,且 $A^{m-1}\alpha \neq 0$.证明向量组 $\alpha, A\alpha, \dots, A^{m-1}\alpha$ 是线性无关的.

2. 设 A 为 n 阶方阵,且 $A^T A = E, |A| < 0$.证明 -1 是 A 的一个特征值.