1. 将矩阵化成行最简形

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 7 & 0 & -3 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -5 & -6 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & -2 & -5 \end{pmatrix}$

2. 计算行列式 (1) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.　(2) $\begin{vmatrix} 1+a & b & c & d \\ a & 2+b & c & d \\ a & b & 3+c & d \\ a & b & c & 4+d \end{vmatrix}$

3. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，求 $AB-BA$. $=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -6 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

3. 设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.求 (1) $\mathbf{AB}^{\mathrm{T}}$；(2) $|4\mathbf{A}|$　(1) $\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 18 & 10 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$ (2) -128

4. $a=(1,2,-3)^T, b=(2,2,1)^T, A=ab^T$,计算 $A^{2013}=3^{2012}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \\ -6 & -6 & -3 \end{pmatrix}$

5. 设 $\mathbf{A}$ 为三阶矩阵，$\mathbf{A}^*$ 为 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵，且 $|\mathbf{A}|=\frac{1}{2}$，求 $|(3\mathbf{A})^{-1}-2\mathbf{A}^*|$.

注、$A^*=|A|A^{-1}$、$|kA|=k^n|A|$　$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$

$=\left|\frac{1}{3}A^{-1}-2|A|A^{-1}\right|=\left|-\frac{2}{3}A^{-1}\right|=\left(-\frac{2}{3}\right)^3\frac{1}{|A|}$

$=-\frac{16}{27}$

6. 求矩阵的逆 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$　$A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

7. $\begin{cases} x_1+x_3-5x_4=-2 \\ 3x_1+2x_2-x_3-x_4=4 \\ 3x_1+x_2+x_3-8x_4=a \end{cases}$ 有解，求 a，并求方程组的通解

8. 讨论 λ 为何值时，非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda \\ \lambda x_1+x_2+x_3=1 \end{cases}$

① 有唯一解；　②有无穷多解；　③无解。

9. 求下非齐次线性方程组所对应的齐次线性方程组的基础解系和此方程组的通解。

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=2 \\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+2x_3+2x_4=5 \end{cases}$$

10. 已知向量组 $\alpha_1=(1\ \ 0\ \ 2\ \ 3)^T$、$\alpha_2=(1\ \ 1\ \ 3\ \ 5)^T$、$\alpha_3=(1\ \ -1\ \ 3\ \ 1)^T$、$\alpha_4=(1\ \ 2\ \ 4\ \ 9)^T$、$\alpha_5=(1\ \ 1\ \ 2\ \ 5)^T$，求此向量组的一个最大无关组，并把其余向量用该最大无关组线性表示.

11. 求下列向量组的秩和一个最大无关组,并将其余向量用最大无关组线性表示.

$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_4=\begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix}$.

12. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1&2&-1&1&-2\\1&1&-2&1&-4\\-6&4&2&-2&-4\\6&3&-9&7&-9\end{pmatrix}$，求矩阵 A 的列向量组的一个最大无关组，并把其余向量用该最大无关组线性表示.

13. 判定向量组 $\alpha_1=(2,1,-1,-1)^T,\alpha_2=(0,3,-2,0)^T,\alpha_3=(2,4,-3,-1)^T$ 的线性相关性。

秩 $=2<3$. 相关.

14. $a=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ 是 $A=\begin{pmatrix}c&2&-2\\2&d&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量，计算 c,d,λ

$\lambda=10$, $c=2$ $d=5$

15. 求矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量. $\lambda_1=2$, $\lambda_2=\lambda_3=1$

特征向量 = ?

16. 已知 $A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{pmatrix}$，求可逆阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

17. 已知 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，求正交阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

18. $\lambda=3,-1$ 为二阶实对称矩阵 A 的特征值，$p_1=(1,1)^T$ 为 3 的一个特征向量，计算 -1 的特征向量以及 A -1 的一个特征向量 $p_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$

19. 已知矩阵方程 $AX=A+X$，求矩阵 X，其中 $A=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&1&3\\0&1&0\end{pmatrix}$.

$AX-X=A$ $(A-E)X=A$

$X=(A-E)^{-1}A=\begin{pmatrix}-2&2&6\\2&0&-3\\2&-1&-3\end{pmatrix}$

20. 设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$，求矩阵 **B** 使其满足矩阵方程 **BA=A+2B**.

$BA-2B=A$

$B(A-2E)=A$ $\therefore B=A(A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix}3&-8&-6\\2&-9&-6\\-2&12&9\end{pmatrix}$

21. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1&-4&3\\2&0&-1\\1&-2&0\end{pmatrix}$，且满足 $AXB=C$，求矩阵 X.

$X=A^{-1}CB^{-1}=\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$

22. $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$ABA^*=2BA^*+E$，求 B

$B=\frac{1}{3}(A-2E)^{-1}A$

$|A|=3$. $A^*A=|A|E=3E$.

$ABA^*A=2BA^*A+A$

$3AB=6B+A$.

$3AB-6B=A$

$3(A-2E)B=A$.

23. 设n阶方阵A满足$A^2-2A-4E=0$，证明$A-3E$可逆，并求$(A-3E)^{-1}$.

$(A-3E)(A+E)=E$ $\therefore (A-3E)^{-1}=A+E$.

24. 设n阶方阵A满足$A+A^*+E=0, |A|=-3$，证明$A-3E$可逆，并求$(A-3E)^{-1}$.

$A^*A=|A|E=-3E$ $A^2+A^*A+A=0$. $A^2+A-3E=0$. $(A-3E)(A+4E)+9E=0$

$(A-3E)\dfrac{A+4E}{-9}=E$

$\therefore (A-3E)^{-1}=-\dfrac{1}{9}(A+4E)$

25. 已知二次型：$\boldsymbol{f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3}$，

用正交变换化$\boldsymbol{f(x_1,x_2,x_3)}$为标准形，并求出其正交变换矩阵.

26. 试用配方法或坐标变换法化下列二次型为标准形

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-4x_2x_3$，

并写出所用的满秩线性变换。

27. 已知三元二次型$tx_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}+2tx_2x_3$正定，计算参数 t 的范围 $\underline{0<t<1}$.

28. 设$b_1=a_1$，$b_2=a_1+a_2$，$b_3=2a_1-a_2+2a_3$，且向量组a_1,a_2,a_3线性无关，证明向量组b_1,b_2,b_3线性无关.

设 $x_1b_1+x_2b_2+x_3b_3=0$

即：$x_1a_1+x_2(a_1+a_2)+x_3(2a_1-a_2+2a_3)=0$.

$\therefore (x_1+x_2+2x_3)a_1+(x_2-x_3)a_2+2x_3a_3=0$

$\because a_1,a_2,a_3$无关

$\therefore \begin{cases} x_1+x_2+2x_3=0 \\ x_2-x_3=0 \\ 2x_3=0 \end{cases}$

$\therefore x_1=x_2=x_3=0$

$\therefore$ ……

29. 设η$_0$是非齐次线性方程组 **Ax=b** 的一个特解，ξ$_1$，ξ$_2$是其导出组 **Ax=0** 的一个基础解系.试证明

（1）η$_1$=η$_0$+ξ$_1$，η$_2$=η$_0$+ξ$_2$均是 **Ax=b** 的解；

（2）η$_0$，η$_1$，η$_2$线性无关。

30. $A=\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & 1 \end{pmatrix}$的秩为 2，计算参数 a ，$|A|=0$. $\therefore 3a-9=0$ $\underline{a=3}$

31. $f(x)=x^2-3x+2$

（1） 三阶方阵 A 的特征值为 4, 0, -2，计算 tr（A）以及 A 的行列式和$f(A)$的特征值

（2） 已知$f(B)$=0，B 为方阵，计算 B 可能的特征值。

32. 证明如下两个向量组等价

I：$a_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, a_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$；II：$b_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, b_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$

33. 证明$a_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, a_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$为$R^3$的一组基，并求：$b=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$在这组基下的坐标