本试卷适应范围:
本科二年级

南京农业大学试题纸

2014-2015 学年第 I 学期 课程类型：必修 试卷类型：A

课程<u>概率论与数理统计</u> 班级________ 学号__________ 姓名__________ 成绩_____

- 考试不准携带使用计算器；
- 所有解答必须填写在本试卷对应试题的空白处，否则无效；
- 可能用到的数值：

$$\Phi(1.5)=0.933, \Phi(2.32)=0.9898, \Phi(2.33)=0.9901, \Phi(2)=0.977, \Phi(2.5)=0.994.$$

一、填空题（每小题 2 分，共 20 分）

1．设 $P(A)=0.4, P(B)=0.3, P(A\cup B)=0.6$，则 $P(A\overline{B})=$______________.

．将 C,C,E,E,I,N,S 这 7 个字母随机的排成一行，恰好排成英文单词 $SCIENCE$ 的概率为______________

3．若随机变量 ξ 服从在 $(1,6)$ 上的均匀分布，则方程 $x^2+\xi x+1=0$ 有实根的概率为______________.

4．设 $D(X)=25, D\left(Y\right)=36, \rho_{xy}=0.4$，则 $D(X+Y)=$______________.

5．设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，那么当 σ 增大时，$P\{\left|X-\mu\right|<\sigma\}$______________.（填“增大”、“减小”或者“不变”）

6．设随机变量 $X\sim B(200,0.5)$，用切比雪夫不等式估计 $P\{80<X<120\}\geq$________________.

7．设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且 μ 已知、σ^2 未知，设 X_1,X_2,X_3 是来自该总体的一个样本，则以下四个函数① $\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)+\sigma^2$，② $X_1+2\mu X_2+3\sigma X_3$，③ ${X_1}^2+{X_2}^2+{X_3}^2-\mu$，④ $X_1+2E(X)$ 中是统计量的有__________________.(须将所有统计量的标号写出，多写、少写、错写均不得分）

8．设 $\widehat{\theta}_1,\widehat{\theta}_2$ 都是参数 θ 的无偏估计，如果有__________________成立，则称 $\widehat{\theta}_1$ 比 $\widehat{\theta}_2$ 更有效.

9．设 $t_\alpha(n)$ 为 t 分布 $t(n)$ 的 α 分位数，若 $t_{0.95}(5)=2.015$，则 $t_{0.05}(5)=$________.

10．若 $X\sim t(n)$，则 $X^2\sim$ __________________. （须写出分布的自由度）

二、（10 分）一箱产品，甲、乙两厂生产的比例分别为 60%、40%，其次品率分别为 1%、2%. 现在从中任取一件产品，发现为次品，试通过计算说明该产品是哪个厂生产的可能性大？

三、（10 分）设随机变量 X 与 Y 相互独立，下表列出了二维随机变量 (X,Y) 联合分布律及关于 X 和关于 Y 的边缘分布律中的部分数值，试将其余数值填入表中的空白处，并计算 $E(X),E(Y),E(XY)$.

X \ Y	0	1	2	$P\{X=x_i\}$
0		$\frac{1}{8}$		
1	$\frac{1}{8}$			
$P\{Y=y_j\}$	$\frac{1}{6}$			1

四、（10 分）已知公共汽车车门的高度是按成年男子与车门碰头的概率在 0.01 以下来设计的，设成年男子的身高为随机变量 X（单位：cm），且 $X\sim N(168,7^2)$，试通过计算说明车门的高度 h（单位：cm）至少应为多少？

五、（10 分）设二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}Ay(1-x), & 0\le x\le 1, 0\le y\le x\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

（1）求系数 A；

（2）求随机变量 X 和 Y 的边缘密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$；

（3）判断 X 与 Y 是否相互独立.

六、（10 分）设随机变量 $X\sim N(1,4)$，求随机变量 $Y=|X|$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

七、（10 分）某人参加一种射击游戏，他有 4 次机会射击一个目标， 每射击一次须付费 10 元. 若他射中目标，则得奖金 100 元，且游戏停止. 若 4 次都未射中目标，则游戏停止且他要付罚款 100 元. 若他每次击中目标的概率为 0.5，求他在此游戏中的收益的期望.

八、（10 分）某种型号元件的寿命 X （单位：年）服从指数分布，其参数 $\lambda=\ln 2$.

（1）求单个元件在使用 1 年后仍然有效的概率；

（2）现购买这种元件 400 个，利用中心极限定理计算使用 1 年后有效的元件数在 180 到 220 之间的概率.

九、（10 分）设总体 X 的概率密度函数为

$$f\left(x\right)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, & x\geq\theta \\ 0, & x<\theta\end{cases},$$

其中 $\theta(\theta>0)$ 是未知参数. 设 $X_1,\ldots,X_n$ 为来自该总体的一个样本.

（1）求 θ 的矩估计量 $\widehat{\theta}$；

（2）判断 $\widehat{\theta}$ 是否为 θ 的无偏估计量.

答案:

一、（每空 2 分，共 20 分）1. 0.3；2. $\frac{4}{7!}$或$\frac{1}{1260}$ ；3. $\frac{4}{5}$.；4. 85；5. 不变；

6. $\frac{7}{8}$；7. ③，④；8. $D(\hat{\theta}_1)<D(\hat{\theta}_2)$；9. -2.015；10. $F(1,n)$.

二、（10 分）设事件 A_1={产品由甲场生产}，A_2={产品由乙场生产}，B={取到次品}.

则$P(A_1)=0.6, P(A_2)=0.4, P(B|A_1)=0.01, P(B|A_2)=0.02$. 由贝叶斯公式得

$$P(A_1|B)=\frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)}=\frac{0.01\times0.6}{0.01\times0.6+0.02\times0.4}=\frac{3}{7},$$

$$P(A_2|B)=\frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)}=\frac{0.02\times0.4}{0.01\times0.6+0.02\times0.4}=\frac{4}{7},$$ （8 分）

因 $P(A_1|B)<P(A_2|B)$，故该产品是乙厂生产的可能性大. （10 分）

三、（10 分）

$X \backslash Y$	0	1	2	$P\{X=x_i\}$
0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$P\{Y=y_j\}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1

（8 分）

$$E(X)=\frac{3}{4}, E(Y)=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{7}{6}, E(XY)=E(X)E(Y)=\frac{7}{8}.$$ （10 分）

四、（10 分）由题意知需满足 $P\{X\ge h\}\le 0.01$, 即 $P\{X<h\}\ge 0.99$, （3 分）

而 $P\{X<h\}=\Phi\left(\frac{h-168}{7}\right)$, 又查表知 $\Phi(2.32)=0.9898, \Phi(2.33)=0.9901$,

故 $\dfrac{h-168}{7} \ge 2.33$，$h \ge 184.31$（cm）.　　　　（10 分）

五、（10 分）（1）$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^x Ay(1-x)dydx=A\int_0^1 \dfrac{x^2-x^3}{2}dx=\dfrac{A}{24}$,

得 $A=24$.　　　　（4 分）

（2）　$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^x 24y(1-x)dy, 0\le x\le 1\\ 0, \quad 其他\end{cases}=\begin{cases}12x^2(1-x), 0\le x\le 1\\ 0, \quad 其他\end{cases}$.

同理，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^1 24y(1-x)dx, 0\le y\le 1\\ 0, \quad 其他\end{cases}=\begin{cases}12y(1-y)^2, 0\le y\le 1\\ 0, \quad 其他\end{cases}$.

（8 分）

（3）因为 $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，故 X,Y 不相互独立.　　　　（10 分）

六、（10 分）先求分布函数 $F_Y(y)$.　$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{|X|\le y\}$.　　　　（4 分）

当 $y\le 0$ 时，$F_Y(y)=0$，从而 $f_Y(y)=F_Y'(y)=0$.

当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P\{-y\le X\le y\}=F_X(y)-F_X(-y)$，

所以 $f_Y=F_Y'(y)=f_X(y)\cdot 1-f_X(-y)\cdot(-1)$

$$=f_X(y)+f_X(-y)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-1)^2}{8}}+\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y+1)^2}{8}}.$$

综上所述，$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-1)^2}{8}}+\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y+1)^2}{8}}, y\le 0\\ 0, \quad y>0\end{cases}$.　　　　（10 分）

七、（10 分）设此人第 X 次射中目标，$X=0,1,2,3,4$，其中 $X=0$ 表示 4 次均未射中，令 Y 表示他在此游戏中的收益. 则

$$Y=\begin{cases}-140, & X=0\\ 90, & X=1\\ 80, & X=2\\ 70, & X=3\\ 60, & X=4\end{cases}.$$

（4 分）

于是

$$\begin{aligned}E(Y)&=(-140)\times P\{X=0\}+90\times P\{X=1\}+80\times P\{X=2\}+70\times P\{X=3\}+60\times P\{X=4\}\\ &=(-140)\times(1-0.5)^4+90\times 0.5+80\times(1-0.5)\times 0.5+70\times(1-0.5)^2\times 0.5+60\times(1-0.5)^3\times 0.5\\ &=68.75(\text{元}).\end{aligned}$$

（10 分）

八、（10 分）（1） X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\ln 2e^{-\ln 2x}, x\ge 0\\ 0, \quad x<0\end{cases}$. 所求概率为

$$P\{X>1\}=\int_1^{+\infty}f(x)dx=\ln 2\int_1^{+\infty}e^{-\ln 2x}dx=e^{-\ln 2}=\frac{1}{2}.$$ （4 分）

（2）令 Y 表示购买的 400 个元件使用 1 年后有效的元件数，则 $Y\sim B(400,0.5)$.

由棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理知，近似的有 $Y\sim N(200,100)$. 于是所求为

$$P\{180\le Y\le 220\}\approx\Phi\left(\frac{220-200}{10}\right)-\Phi\left(\frac{180-200}{10}\right)=2\Phi(2)-1=2\times 0.977-1=0.954.$$

（10 分）

九、（10 分）（1）

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{\theta}^{+\infty}x\cdot 2e^{-2(x-\theta)}dx=-xe^{-2(x-\theta)}\Big|_{\theta}^{+\infty}+\int_{\theta}^{+\infty}e^{-2(x-\theta)}dx=\theta+\frac{1}{2}.$$ (4 分)

令 $\theta+\frac{1}{2}=\bar{X}$，得 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\bar{X}-\frac{1}{2}$，其中 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$. （8 分）

（2）因 $E(\hat{\theta})=E\left(\bar{X}-\frac{1}{2}\right)=E\left(\bar{X}\right)-\frac{1}{2}=E\left(X\right)-\frac{1}{2}=\theta$，

故 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量. （10 分）