

本试卷适应范围
本科 16 级线性
代数期末

南京农业大学试题纸

2017-2018 学年 1 学期 课程类型: 必修 试卷类型: A

课程号 MATH 课程名 线性代数 学分 3

一、单项选择题 (每题 2 分, 共 10 分)

1. 设 A 、 B 是两个 3 阶矩阵, 且 $|A| = -1$, $|B| = 2$, 则 $|2AB^{-1}| = ()$
(A) -1 (B) 1 (C) 4 (D) -4
2. 设 5 阶矩阵 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, 其中 A 是一个二阶矩阵, 那么矩阵 B 的行数 \times 列数为 $()$
(A) 3×3 (B) 3×2 (C) 2×3 (D) 2×2
3. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$, 则以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组有非零解的充要条件是 $()$
(A) $k = 1$ (B) $k = -2$ (C) $k = 1$ 或者 $k = -2$ (D) $k \neq 1$ 并且 $k \neq -2$
4. 设向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与向量组 $B: \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 等价, 那么下列表述中正确的是 $()$
(A) 向量组 B 一定线性相关 (B) 向量组 B 和向量组 A 有相同的线性相关性
(C) 向量组 A 的秩小于向量组 B 的秩 (D) β_4 可以由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示
5. 设 A 、 B 是两个不同的 n 阶正交矩阵, 下列说法中正确的是 $()$
(A) 对任意 n 维实向量 α , 总有 $\|A\alpha\| = \|B\alpha\|$ (B) 当 A 、 B 可交换时, AB 才是正交矩阵
(C) A 、 B 有相同的特征值 (D) $A + B$ 可逆。

二、填空题 (每空 3 分, 共 24 分)

6. 设 $\alpha = (1 \ 1 \ 1)^T$, 那么 $(\alpha^T \alpha)^{10} = \underline{\hspace{2cm}}$, $(\alpha \alpha^T)^{10} = \underline{\hspace{2cm}}$; (注: 写 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{10}$ 的只得 1 分)
7. $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 且 $Ax = 0$ 的基础解系为 $x = (1, 2, 3, 0)^T$, 则 $R(A) = \underline{\hspace{2cm}}$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关;
8. 设向量 $\alpha = (a, 0, -1)^T$ 与向量 $\beta = (1, 0, b)^T$ 正交, 那么参数 a, b 满足 ;
9. 已知三阶矩阵 A 满足: $|A| = 3, Ae = e$, 其中 e 是非零向量, 并且矩阵 $A + 3E$ 不可逆, 那么 A 的三个特征值为 , $|A^2 + E| = \underline{\hspace{2cm}}$;
10. 设 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3$ 是正定二次型, 则参数 a 的取值范围是 。

三、(8 分) 设 $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 都是 4 维列向量, 并且矩阵 $A = (\alpha \ \gamma_1 \ \gamma_2 \ \gamma_3)$, $B = (\beta \ \gamma_1 \ 2\gamma_2 \ 3\gamma_3)$

满足 $|A|=2$, $|B|=1$, 求 $|A+B|$ 。

四、(8分) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, 并且矩阵 X 满足 $AX = B + X$, 求 X 。

五、(14分) 考虑含参数 a, b 的非齐次线性方程组:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

(1) a, b 为何值时该方程组①有唯一解? ②无解? ③有无穷多解? (10分)

(2) 在方程组有无穷多解时求出方程组的通解。(4分)

六、(12分) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 14 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(1) 将矩阵 A 约化到行最简形 (4分); (2) 求矩阵 A 的列向量组的秩和一个最大无关组 (4分);
(3) 把不属于最大无关组的列, 用最大无关组线性表示 (4分)。

七、(12 分) 利用正交变换把二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_2x_3$ 化为标准形, 写出所做的正交变换以及二次型的标准形。

八、(6 分) 设 A, B 都是 n 阶实对称矩阵, 并且 $|A - \lambda E| = |B - \lambda E|$ 。证明: A 与 B 相似。

九、(6 分) 证明: 对任意实矩阵 $A_{m \times n}$, $A^T A$ 总是实对称半正定矩阵, 并且 $A^T A$ 正定的充分必要条件是 A 是列满秩的。

教研室主任 张浩

出卷人 唐中良