2014-2015 学年第 2 学期《线性代数》B 卷答案

一、选择题（每题 3 分，共 12 分）

CDBB

二、填空题（每题 3 分，共 18 分）

1. 5; 2. $\frac{1}{2}$; 3. 2; 4. 3; 5. 3; 6. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$。

三、计算题（每题 9 分，共 54 分）

1. 1。

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。

3. $(A,b) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & -5 \\ 3 & 8 & -2 & \lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-13 \end{pmatrix}$

当$R(A,b) = R(A) = 2$时,方程组有解, 此时λ=13.

$(A,b) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & -5 \\ 3 & 8 & -2 & 13 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} x_1 \quad +2x_3 = -1 \\ \quad x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$

对应的齐次线性方程组的基础解系为 $\xi = (-2,1,1)^T$,

原方程组的特解为 $\eta^* = (-1,2,0)^T$,

从而方程组的通解为$x = k\xi + \eta^* \ (k \in R)$.

4. $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & a+1 & 1-a^2 \\ 0 & a+1 & -a-1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & a+1 & -a-1 \\ 0 & 0 & (2-a)(a+1) \end{pmatrix}$

当$a = 2$时$R(A) = 2$;当$a = -1$时$R(A) = 1$,其余情形$R(A) = 3$.

故当$a = 2$或$a = -1$时,向量组线性相关.

5. $c = b - \lambda a = \left(-4,2,3\right)^T - \lambda\left(1,0,-2\right)^T = \left(-4-\lambda,2,3+2\lambda\right)^T$,

$\left(c,a\right) = -4-\lambda-6-4\lambda = -5\lambda-10 = 0,$

因此$\lambda = -2$,进一步$c = \left(-2,2,-1\right)^T$.

6. $\left|A-\lambda E\right| = -\left(\lambda-4\right)^2\left(\lambda+1\right)$,特征值$\lambda_1 = \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -1$.

当$\lambda_1 = \lambda_2 = 4$时,解$\left(A-4E\right)x = 0$,得$\xi_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,

A的对应于$\lambda_1 = \lambda_2 = 4$全部特征向量为$\eta = k_1\xi_1 + k_2\xi_2\left(k_1^2 + k_2^2 \neq 0\right)$.

四．证明题（每题 8 分，共 16 分）

1. 证 设有$x_0, x_1, \cdots, x_{n-r}$使

$$x_0\eta^* + x_1\xi_1 + \cdots + x_{n-r}\xi_{n-r} = 0$$

上式两边同时左乘矩阵A得

$$x_0 A\eta^* + x_1 A\xi_1 + \cdots + x_{n-r} A\xi_{n-r} = 0$$

即$x_0 b = 0$.由$b \neq 0$知$x_0 = 0$,从而

$$x_1\xi_1 + \cdots + x_{n-r}\xi_{n-r} = 0$$

由于$\xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$是基础解系,故有$x_1 = \cdots = x_{n-r} = 0$,

从而$\eta^*, \xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$线性无关.

2. 证 设λ是A的特征值, p是属于λ的特征向量,则

$$Ap = \lambda p$$

因为$A^2 - 3A + 2E = O$,所以

$$0 = Op = \left(A^2 - 3A + 2E\right)p = A^2 p - 3Ap + 2p = \lambda^2 p - 3\lambda p + 2p$$

$$= \left(\lambda^2 - 3\lambda + 2\right)p$$

于是$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$,所以$A$的特征值只能为1或2.