本试卷适应范围
本科二年级

南京农业大学试题纸

2013-2014 学年第 II 学期 课程类型：必修 试卷类型： A

课程<u>**概率论与数理统计**</u>　班级__________　学号__________　姓名__________　成绩__________

● 数学用表：　$\Phi(0)=0.5$，$\Phi(1.5)=0.933$，　$\Phi(2.5)=0.994$.

一、单项选择题 （每小题 3 分，共 15 分）

1．设事件 $B\subset A$ ，则下列等式正确的是 （　　　）.

A. $P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A})+P(\overline{B})$　　B. $P(\overline{A}\overline{B})=1-P(A)$

C. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$　　D. $P(B-A)=P(B)-P(A)$

2．设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$ ，则 $P\{X>3\}=$ （　　　）.

A. $1-e^{-3}$　　B. $1-e^{-2}$　　C. 0　　D. e^{-3}

3．设 $X\sim P(\lambda)$，且 $E\left[(X-1)(X-2)\right]=1$，则 $\lambda=$（　　　）.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 0

4．若 $D(X-Y)=D(X+Y)$，则必有（　　　）.

A. X 与 Y 独立　B. $D(X)=D(Y)$　C. $D(XY)=D(X)D(Y)$　D. X 与 Y 不相关

5．设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的样本，则 $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 服从的分布是（　　　）.

A. $N(0,\sigma^2)$　　B. $\chi^2(n)$　　C. $t(n)$　　D. $F(n,1)$

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1．已知 $A\subset B, P(A)=0.2, P(B)=0.3,$ ，则 $P(A|B)=$____________________.

2．一射手对同一目标独立地进行四次射击，若至少命中一次的概率为 $\dfrac{80}{81}$，则该射手的命中率为____________________.

3．设随机变量 X 与 Y 相互独立，其分布律分别为

X	0	1
P	0.4	0.6

Y	0	1
P	0.4	0.6

，

则 $P\{X=Y\}=$___________________.

4．设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ ，且 $P\{X \le 3\}=\dfrac{1}{2}$，则 $\mu=$___________________.

5．设总体 $X \sim B(1,p)(0<p<1)$，$0,1,0,1,1$ 是来自该总体的样本观察值，则 p 的矩估计值为

___________________.

三、（10 分）某人衣袋中有两枚硬币，一枚是合格品，另一枚是次品（两面都是正面）. 如果他随机取一枚抛出，求（1）出现正面的概率；（2）若出现正面，则该枚硬币是合格品的概率.

四、（10 分）随机变量 X 的概率密度为 $f\left(x\right)=\begin{cases} A\cos x, & -\dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{\pi}{4} \\ 0, & 其他 \end{cases}$．试求：

（1）系数 A；（2）X 的分布函数 $F(x)$；（3）概率 $P\{0<X<\dfrac{\pi}{6}\}$．

五、（10 分）设二维连续型随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1+xy}{4}, & -1<x<1,-1<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

（1）求随机变量X和Y的边缘密度函数$f_X(x)$和$f_Y(y)$，并判断X,Y是否相互独立；

（2）设(X,Y)的分布函数为$F(x,y)$，求其在$(0,0)$点处的值$F(0,0)$.

六、（10 分）设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}6x(1-x), & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，求随机变量$Y=2X+1$的概率密度函数$f_Y(y)$.

七、（10 分）设二维离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

$X \backslash Y$	0	1
1	0.4	0.2
2	a	b

并且已知 $E(XY)=0.8$.（1）试求 a 、b 的值；（2）计算 $E(X),E(Y),D(X),D(Y)$；（3）判断 X,Y 是否相关？

八、（10 分）某保险公司多年的资料表明，索赔用户因被盗而向保险公司索赔的概率为 0.2. 现随机抽查 100 个索赔用户，并且假设各索赔用户索赔原因互不影响. 试用中心极限定理计算在这 100 个用户中因被盗而索赔的户数介于 14 到 30 之间的概率.

九、（10 分）设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自总体 X 的一个样本，X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} (\theta+1)x^{\theta}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

其中 $\theta > 0$ 未知. 求 θ 的矩估计量.

试卷 A 答案

一、（每小题 3 分，共 15 分）BDADB

二、（每空 3 分，共 15 分）$\frac{2}{3}$　$\frac{2}{3}$　0.52　3　$\frac{3}{5}$

三、（10 分）设事件 A={该硬币是均匀的}，B={出现正面}. 则

（1）由全概率公式得，

$$P(B)=P(B|A)P(A)+P(B|\overline{A})P(\overline{A})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}.$$ （5 分）

（2）由贝叶斯公式得

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|\overline{A})P(\overline{A})}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}.$$ （10 分）

四、（10 分）（1）$\because\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$，即 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}A\cos xdx=A\sin|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}A=1$

$\therefore\ A=\frac{\sqrt{2}}{2}$. （3 分）

（2）$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt.$

当 $x<-\frac{\pi}{4}$ 时，$F(x)=0$；

当 $|x|\le\frac{\pi}{4}$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{x}\frac{\sqrt{2}}{2}\cos xdx=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x$；

当 $x>\frac{\pi}{4}$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}\cos xdx=1$；

综上所述，$F(x)=\begin{cases}0, & x<-\frac{\pi}{4}\\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x, & -\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}.\\ 1, & x>\frac{\pi}{4}\end{cases}$ （7 分）

（3）$P\{0<X<\frac{\pi}{6}\}=F(\frac{\pi}{6})-F(0)=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}f(x)dx=\frac{\sqrt{2}}{4}.$ （10 分）

五、（10 分）（1） $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-1}^{1}\frac{1+xy}{4}dy, -1<x<1\\ 0, \quad 其他\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}, -1<x<1\\ 0, \quad 其他\end{cases}.$

（4 分）

同理，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\frac{1}{2}, -1<y<1\\ 0, \quad 其他\end{cases}.$

因为 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，故 X,Y 不相互独立. （7 分）

（2） $F(0,0)=\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} f(x,y)dxdy=\int_{-1}^{0}\int_{-1}^{0}\frac{1+xy}{4}dxdy=\frac{5}{16}.$ （10 分）

六、（10 分）

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{2X+1\le y\}=P\{X\le \frac{y-1}{2}\}=F_X(\frac{y-1}{2})$.

所以 $f_Y(y)=F_Y'(y)=f_X(\frac{y-1}{2})\frac{1}{2}.$ （5 分）

更进一步，当 $0<\frac{y-1}{2}<1$ 即 $1<y<3$ 时，

$f_Y(y)=6(\frac{y-1}{2})(1-\frac{y-1}{2})\frac{1}{2}=\frac{3(y-1)(3-y)}{4};$

否则 $f_Y(y)=0.$ 综上所述 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{4}(y-1)(3-y), & 1<y<3\\ 0, & 其他\end{cases}.$ （10 分）

七、（10 分）（1） 由 $E(XY)=1\times0\times0.4+1\times1\times0.2+2\times0\times a+2\times1\times b=0.8$ 得 $b=0.3.$ 又有

$0.4+0.2+a+b=1,$ 故 $a=0.1.$ （3 分）

（2）由（1）知，(X,Y) 的联合分布律及边缘分布律为

$X \backslash Y$	0	1	$P\{X=x_i\}$
1	0.4	0.2	0.6
2	0.1	0.3	0.4
$P\{Y=y_j\}$	0.5	0.5	

于是 $E(X)=1\times0.6+2\times0.4=1.4, E(Y)=0\times0.5+1\times0.5=0.5.$

$E(X^2)=1^2\times0.6+2^2\times0.4=2.2, E(Y^2)=0^2\times0.5+1^2\times0.5=0.5,$

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=2.2-1.96=0.24, D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=0.5-0.25=0.25.$

（8 分）

（3）$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0.8-1.4\times0.5=0.1\neq0$, 故 X,Y 相关.（10 分）

八、（10 分）设 X 为在这 100 个用户中因被盗而索赔的户数，则 $X\sim B(100,0.2),\ E(X)=100\times0.2=20,\quad D(X)=100\times0.2\times(1-0.2)=16$.　（5 分）

所求为 $P\{14\le X\le30\}$．由棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理，

$$P\{14\le X\le30\}=P\{\frac{14-20}{\sqrt{16}}\le\frac{X-20}{\sqrt{16}}\le\frac{30-20}{\sqrt{16}}\}\approx\Phi(2.5)-\Phi(-1.5)=\Phi(2.5)+\Phi(1.5)-1$$

$$=0.994+0.933-1=0.927.$$　（10 分）

九、（10 分）$E(X)=\int_0^1 x\cdot(\theta+1)x^\theta dx=\dfrac{\theta+1}{\theta+2}.$　（5 分）

令 $\dfrac{\theta+1}{\theta+2}=\overline{X}$，得 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\dfrac{1-2\overline{X}}{\overline{X}-1}$.　（10 分）