试卷 A 答案

一、选择题（每题 2 分，共 10 分）ACDAA

二、填空题（每题 2 分，共 10 分）

$(0,-1)$ (或者写成 $-i$)　　2　　$\dfrac{1}{5}$　　$\dfrac{5}{2}$　　$2+3\delta(t)$

三、计算题（每题 6 分，共 42 分）

1. $(e^z+2)(e^z+i)=0, e^z=-2 或 e^z=-i.$ （2 分）

$e^z=-2, 则 z=\mathrm{Ln}(-2)=\ln|-2|+i\arg(-2)+2k\pi i=\ln 2+(2k+1)\pi i, k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$（4 分）

$e^z=-i, 则 z=\mathrm{Ln}(-i)=\ln|-i|+i\arg(-i)+2k\pi i=(2k-\dfrac{1}{2})\pi i, k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$

$\therefore$ 方程的解为 $z=\ln 2+(2k+1)\pi i, 或 z=(2k-\dfrac{1}{2})\pi i，k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$ （6 分）

2. 方法一：$u_x=2x, u_y=-2y-2. f'(z)=u_x-iu_y=2x+2i(y+1)=2z+2i.$ （2 分）

$\therefore\ f(z)=\int f'(z)\,\mathrm{d}z=z^2+2iz+C.$ （5 分）

又 $f(0)=1, \therefore C=-1, f(z)=z^2+2iz-1.$ （6 分）

方法二：$v_y=u_x=2x, \therefore v(x,y)=\int v_y\,\mathrm{d}y=2xy+g(x),$

又 $v_x=2y+g'(x)=-u_y=2y+2, \therefore g'(x)=2, g(x)=2x+C, v(x,y)=2xy+2x+C,$

（4 分）

$\therefore f(z)=x^2-y^2-2y-2+i(2xy+2x+C).$

又 $f(0)=1, \therefore C=0, f(z)=x^2-y^2-2y-1+i(2xy+2x).$ （6 分）

3. $f(z)=\dfrac{1}{z}\left(\dfrac{1}{z+1}-\dfrac{1}{z+2}\right)=\dfrac{1}{z}\left(\dfrac{1}{1+z}-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+\dfrac{z}{2}}\right)$ （2 分）

$$=\frac{1}{z}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{z}{2})^n\right]=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^{n-1}, 0<|z|<1.$$ （6 分）

4. $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{e^{2z}+6}{z^3}\,\mathrm{d}z=\oint_{|z|=1}\frac{e^{2z}}{z^3}\,\mathrm{d}z+6\oint_{|z|=1}\frac{1}{z^3}\,\mathrm{d}z=\frac{2\pi i}{2!}(e^{2z})''\Big|_{z=0}+6\times 0$ （4 分）

$$=\pi i\cdot 4e^{2z}\Big|_{z=0}=4\pi i.$$ （6 分）

5. $\oint_{|z|=2}\frac{e^z}{\cos z}\,\mathrm{d}z=2\pi i\left\{\mathrm{Res}\left[\frac{e^z}{\cos z},-\frac{\pi}{2}\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{e^z}{\cos z},\frac{\pi}{2}\right]\right\}$ （2 分）

$$=2\pi i\left[\left.\frac{e^z}{(\cos z)'}\right|_{z=-\frac{\pi}{2}}+\left.\frac{e^z}{(\cos z)'}\right|_{z=\frac{\pi}{2}}\right]$$

$$=2\pi i\left(e^{-\frac{\pi}{2}}-e^{\frac{\pi}{2}}\right).$$ （6 分）

6. $\oint_{|z|=4}\frac{6z^{13}}{(z^2+5)^3(z^4+1)^2}\,\mathrm{d}z$

$$=-2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{6z^{13}}{(z^2+5)^3(z^4+1)^2},\infty\right]=2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{6\frac{1}{z^{13}}}{\left(\frac{1}{z^2}+5\right)^3\left(\frac{1}{z^4}+1\right)^2}\cdot\frac{1}{z^2},0\right]$$ （3 分）

$$=2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{6}{z\left(1+5z^2\right)^3\left(1+z^4\right)^2},0\right]=2\pi i\cdot z\cdot\left.\frac{6}{z\left(1+5z^2\right)^3\left(1+z^4\right)^2}\right|_{z=0}=12\pi i.$$ （6 分）

7.函数 $f(z)=\frac{1}{z^4+16}$ 有四个一级极点 $z_k=2\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right),k=0,1,2,3.$

$\mathrm{Res}\left[f(z),z_k\right]=\frac{1}{4z_k^3}=\frac{z_k}{4z_k^4}=-\frac{z_k}{64}$. $f(z)$ 在上半平面的奇点是 z_0,z_1. （3 分）

$$\therefore\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+16}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+16}=\frac{1}{2}\cdot2\pi i\left\{\mathrm{Res}\left[f(z),z_0\right]+\mathrm{Res}\left[f(z),z_1\right]\right\}=\pi i\left(-\frac{z_0}{64}-\frac{z_1}{64}\right)$$

$$=-\frac{\pi i}{64}\times2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\frac{\sqrt{2}\pi}{32}.$$ （6 分）

四、综合题（每题 8 分，共 32 分）

1. （1）$\mathcal{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}e^{-kt}e^{-i\omega t}\mathrm{d}t=\frac{-1}{k+i\omega}e^{-(k+i\omega)t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{k+i\omega}.$

（4 分）

（2）$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{2}{(3+i\omega)(5+i\omega)}\right]=\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{3+i\omega}-\frac{1}{5+i\omega}\right]=\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{3+i\omega}\right]-\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{5+i\omega}\right]$

$$=\begin{cases}0 & t<0\\ e^{-3t} & t\ge0\end{cases}-\begin{cases}0 & t<0\\ e^{-5t} & t\ge0\end{cases}=\begin{cases}0 & t<0\\ e^{-3t}-e^{-5t} & t\ge0\end{cases}.$$ （8 分）

2. $f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]e^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$

（3 分）

$=\dfrac{1}{2}(e^{\mathrm{i}\omega_0 t}+e^{-\mathrm{i}\omega_0 t})=\cos\omega_0 t.$（8 分）

3. $£[t\cos 3t]=-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}£[\cos 3t]=-\left(\dfrac{s}{s^2+9}\right)'=\dfrac{s^2-9}{(s^2+9)^2},$ （3 分）

$£[e^{-2t}\sin 4t]=\dfrac{4}{(s+2)^2+16}.$ （6 分）

$£[f(t)]=£[t\cos 3t]+£[e^{-2t}\sin 4t]=\dfrac{s^2-9}{(s^2+9)^2}+\dfrac{4}{(s+2)^2+16}.$ （8 分）

4. 记$£[y(t)]=Y(s)$，对方程两边取 Laplace 变换，并代入初值条件，得

$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+2[sY(s)-y(0)]+Y(s)=\dfrac{9}{s-2},$

$(s+1)^2Y(s)=\dfrac{3(s^2-1)}{s-2},Y(s)=\dfrac{3(s-1)}{(s+1)(s-2)}=\dfrac{1}{s-2}+\dfrac{2}{s+1}.$ （4 分）

方法一：

$\mathrm{Res}\left[Y(s)e^{st},2\right]=\dfrac{3(s-1)}{s+1}e^{st}\Big|_{s=2}=e^{2t},\mathrm{Res}\left[Y(s)e^{st},-1\right]=\dfrac{3(s-1)}{s-2}e^{st}\Big|_{s=-1}=2e^{-t},$

$\therefore y(t)=£^{-1}[Y(s)]=\mathrm{Res}\left[Y(s)e^{st},2\right]+\mathrm{Res}\left[Y(s)e^{st},-1\right]=e^{2t}+2e^{-t}.$ （8 分）

方法二：

$y(t)=£^{-1}[Y(s)]=£^{-1}\left[\dfrac{1}{s-2}\right]+2£^{-1}\left[\dfrac{1}{s+1}\right]=e^{2t}+2e^{-t}.$ （8 分）

五、证明题（6 分）

$\oint_{|z|=1}\dfrac{e^z}{z}\,\mathrm{d}z=2\pi i e^z\big|_{z=0}=2\pi i.$ （2 分）

令$z=e^{i\theta}$，则$\oint_{|z|=1}\dfrac{e^z}{z}\,\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\dfrac{e^{e^{i\theta}}}{e^{i\theta}}ie^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}ie^{e^{i\theta}}\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}ie^{(\cos\theta+i\sin\theta)}\,\mathrm{d}\theta$

$$=\int_0^{2\pi}ie^{\cos\theta}\left[\cos(\sin\theta)+i\sin(\sin\theta)\right]\mathrm{d}\theta$$

$$=-\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta+i\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta=2\pi i.$$

$\therefore\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta=0,\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta=2\pi.$ （6 分）