本试卷适用范围 工学院 11 级本科一年级各专业

南京农业大学试卷

2011-2012 学年第 1 学期　课程类型：必修

试卷类型：A

课程 **高等数学**　班级 ______________　学号_____________　姓名____________　成绩_____

说明：1．本试卷共 3 页．

2．请将解答写在答题纸上，试卷自己保留．

一．选择题（本题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）：

1．极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x^2+2x-1}{2x^6+x+3}$ 的值为　　（　　）

（A）$\dfrac{7}{2}$．　（B）0．　（C）$-\dfrac{1}{3}$．　（D）∞．

2．设函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$，　则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的　　（　　）

（A）可去间断点．（B）跳跃间断点．（C）第二类间断点．（D）连续点．

3．设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x>0 \\ -x^2, & x\leq 0 \end{cases}$，　则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的　　（　　）

（A）左、右导数都存在．　（B）左导数存在，右导数不存在．

（C）左导数不存在，右导数存在．　（D）左、右导数都不存在．

4．设函数 $f(x)=\sqrt[3]{x}$，则下列叙述正确的是　　（　　）

（A）$f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值．

（B）$f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值．

（C）$(0, f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点．

（D）$(0, f(0))$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点．

5．若 $a_n=\frac{1}{n^4}\left(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3\right)$，则由定积分的定义知，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 等于（　　）

（A）1．　（B）$\frac{1}{2}$．　（C）$\frac{1}{3}$．　（D）$\frac{1}{4}$．

二．填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）：

1．设 $y=f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=1,(n\in N)$，

则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(2n)=$____________．

2．设 $f(x)=x^k$，$g(x)=x^5+x^2$，且当 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为等价无穷小，则 $k=$____________．

3．设 $f(x)$ 是可微函数，则 $\int df(x)=$____________．

4．比较定积分的大小 $\int_3^4 \ln x dx$ ________ $\int_3^4 (\ln x)^2 dx$．

5．设 $f(x)$ 是 R 上的连续函数且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(x)dx$，则 $f(x)=$________．

三．计算题（本题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分）：

1．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}$．

2．求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}$．

3．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x (e^{t^2}-1)\,dt}{x^3}$．

4．已知 $y=e^x\sin x$，求导数 y'．

5．已知 $y=e^{\arctan x}$，求导数 $\frac{dy}{dx}$．

6．设 $e^y+y=\sin(xy)$，求 $\frac{dy}{dx}$．

7．求不定积分 $\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$；

8．求不定积分 $\int x\arctan x\,dx$．

9．求定积分 $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx$．

10．求反常积分 $\int_0^1\frac{u^3}{\sqrt{1-u^2}}du$．

四．应用题（本题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）：

1．计算由曲线 $y=4-x^2$ 和 x 轴所围成的图形绕直线 $x=3$ 旋转一周所得旋转体的体积.

2．设 R 为抛物线 $y=x^2$ 上任一点 $M(x,y)$ 处的曲率半径，S 为该曲线上某一点 M_0 到 M 的弧长，求 $\dfrac{d^2R}{dS^2}$.

五．证明题（本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分）：

1．设 $f'''(x_0)$ 存在，且 $f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)\neq 0$．证明点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

2．设 $a,b\in R, a<b$，$f(x)$ 在 R 上具有二阶导数，且当 $x\in[a,b]$ 时 $|f''(x)|\leq 1$，又 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内取得最大值.

证明：$|f'(a)|+|f'(b)|\leq b-a$.

3．设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且单调减少，$f(x)>0$．证明：对于满足 $0<\alpha<\beta<1$ 的任何 α,β，有 $\beta\int_0^{\alpha} f(x)dx>\alpha\int_0^{\beta} f(x)dx$.

.

出卷人：张新华

高等数学(A)答案:

一. CAACD

二. 1. 1.　　2. 2.　　3. $f(x)$+C.　　4.小于（＜）.　　5. $x-1$.

三. 1. 分子有理化…………………...…4 分

$\frac{1}{2}$ ………………………..……..1 分

2. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x\frac{x+1}{x}}$ …………..……4 分

e ……………………….……1 分

3. 分子求导 $=e^{x^2}-1$ ………...3 分

$\frac{1}{3}$ ……………..…..2 分

4. $e^x(\sin x+\cos x)$……………5 分

5. $\frac{1}{1+x^2}e^{\arctan x}$ ………………..5 分

6. $\frac{y\cos(xy)}{e^y-x\cos(xy)+1}$ …………..5 分

7. 凑微分或换元……………....4 分

$-\csc x+c$ ……….………1 分

8. 分部积分、分拆………………....3 分

$\frac{1}{2}(x^2+1)\arctan x-\frac{1}{2}x+c$ …2 分

9.分部积分………………………3 分

$\frac{1}{3}\ln 2$ ……………………..2 分

10.换元……………………………3 分

$\frac{2}{3}$ …………………………2 分

四．1. $0 \le y \le 4$，

$dV = \pi\left[\left(3+\sqrt{4-y}\right)^2 - \left(3-\sqrt{4-y}\right)^2\right]dy = 12\pi\sqrt{4-y}dy$，…3 分

$V = 12\pi\int_0^4 \sqrt{4-y}dy = 64\pi$ ………………...………………2 分

2. $K = \frac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{3/2}} = \frac{2}{\left(1+4x^2\right)^{3/2}}$,………………………………1 分

$R = \frac{1}{K} = \frac{1}{2}\left(1+4x^2\right)^{3/2}$,…………………………….………1 分

$dR = \sqrt{1+4x^2dx}, \quad dS = \sqrt{1+4x^2}dx$,………………………1 分

$\frac{dR}{dS} = 6x, \quad \frac{d^2R}{dS^2} = \frac{6}{\sqrt{1+4x^2}}$ …………………………………2 分

五．1.不妨设 $f'''(x_0) > 0$，即

$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f''(x)}{x-x_0} > 0$， ....2 分

由极限的保号性，存在 $\overset{0}{U}(x_0, \delta)$，

当 $x \in (x_0-\delta, x_0)$时，$f''(x) < 0$，图像是凹的，

当 $x \in (x_0, x_0+\delta)$时，$f''(x) > 0$，图像是凸的，……….2 分

因此，点$(x_0, f(x_0))$是曲线 $y = f(x)$的拐点．……………1 分

2. 设 $c \in (a, b)$ 是 $f(x)$ 的最大值点，则 $f'(c) = 0$，…………1 分

由 Lagrange 中值定理得，

$$f'(a) = f'(c) + f''(\xi_1)(a - c),\quad 其中\ \xi_1 \in (a, c),$$

$$f'(b) = f'(c) + f''(\xi_2)(b - c),\quad 其中\ \xi_2 \in (c, b),$$ …..3 分

上述两式取绝对值后相加即得。……………………………..1 分

3. 令 $F(x) = x\int_0^\alpha f(t)dt - \alpha\int_0^x f(t)dt \quad (\alpha \le x \le 1)$，……….2 分

则 $F'(x) = \int_0^\alpha f(t)dt - \alpha f(x) = \alpha[f(\xi) - f(x)] > 0$，

这里利用了积分中值定理，$\xi \in (0, \alpha)$，且 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上单调减少。…………………………………………………………...….2 分

故 $F(x)$ 单调递增，

又 $F(\alpha) = 0$，所以 $F(\beta) > 0$，

即 $\beta\int_0^\alpha f(x)dx > \alpha\int_0^\beta f(x)dx$ …………………………….....1 分