概率统计17-18（II）试卷A答案及评分标准

一、填空题（每空2分，共20分）

$\frac{4}{7}$　　减小　　$\frac{5}{16}$　　$\frac{2}{3}$　　$\frac{1}{2}$　　②③④　　$\chi^2(8)$　　$\chi^2(9)$　　$1-\frac{\alpha}{2}$　　$(0.924,1.316)$

二、计算题（每题8分，共64分）

1．设B={该保险人在一年中没出事故}，　$A_i=$ {保险人为第i类人}，　$i=1,2,3.$

由贝叶斯公式 $P(A_1|B)=\dfrac{P(B|A_1)P(A_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(B|A_i)P(A_i)}$　（4分）

$$=\frac{0.95\times0.2}{0.95\times0.2+0.85\times0.5+0.7\times0.3}=\frac{38}{165}.$$（8分）

2．（1）$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a\frac{2x}{\pi^2}\mathrm{d}x=\frac{a^2}{\pi^2}$，　$\therefore a=\pi.$　（4分）

（2）$P\{-0.5<X<0.5\}=\int_{-0.5}^{0.5}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{0.5}\frac{2x}{\pi^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4\pi^2}.$　（8分）

3．由题意知X的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}.$

先求Y的分布函数$F_Y(y)$.

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{-2\ln X\le y\}=P\{X\ge \mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}\}=1-P\{X<\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}\}=1-F_X(\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}),$（4分）

$\therefore f_Y(y)=F_Y'(y)=-f_X(\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}})(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}).$

进一步，当$0<\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}<1$，即$y>0$时，$\therefore f_Y(y)=-1\times(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}})=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}.$

当$y\le 0$时，　$f_Y(y)=0.$

综上，$\therefore f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}, & y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}.$　（8分）

4．由题意知X的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}, & -\pi<x<\pi\\ 0, & \text{其它}\end{cases}.$

$\therefore E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,f(x)\mathrm{d}x$　（3分）

$$=\int_{-\pi}^{\pi}|x|\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\pi}\frac{x}{2\pi}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$ （8 分）

5． X,Y 的边缘分布律为

X	-1	0	1
概率	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$

Y	-1	0	1
概率	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$

（2 分）

$$E(X)=E(Y)=(-1)\times\frac{3}{8}+1\times\frac{3}{8}=0,$$

$$E(XY)=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}x_iy_jp_{ij}=(-1)\times(-1)\times\frac{1}{8}+(-1)\times1\times\frac{1}{8}+1\times(-1)\times\frac{1}{8}+1\times1\times\frac{1}{8}=0.$$

$E(XY)-E(X)E(Y)=0,$ 故 X,Y 不相关. （5 分）

$P\{X=-1,Y=-1\}=\frac{1}{8}\neq P\{X=-1\}P\{Y=-1\},$ 故 X,Y 不相互独立. （8 分）

6．设 $X_i\ (i=1,2,\cdots,50)$ 为第 i 周的销售量，则 $X_i\sim\pi(9).$ 由中心极限定理知，

$X=\sum_{i=1}^{50}X_i\overset{\text{近似}}{\sim}N(450,450).$ 要求 $P\{400<X<500\}.$ （3 分）

$$P\{400<X<500\}=P\left\{\frac{-50}{\sqrt{450}}<\frac{X-450}{\sqrt{450}}<\frac{50}{\sqrt{450}}\right\}=\Phi(\frac{\sqrt{50}}{3})-\Phi(-\frac{\sqrt{50}}{3})$$

$$=2\Phi(\frac{\sqrt{50}}{3})-1=2\times0.9909-1=0.9818.$$ （8 分）

7．由题意知 $\overline{X}\sim N(62,\frac{25}{9}),$ （3 分）

故

$$P\{\left|\overline{X}-62\right|\le2\}=P\{-2\le\overline{X}-62\le2\}=P\left\{-\frac{2}{5/3}\le\frac{\overline{X}-62}{5/3}\le\frac{2}{5/3}\right\}=\Phi(1.2)-\Phi(-1.2)$$

$$=2\Phi(1.2)-1=2\times0.8849-1=0.7698.$$ （8 分）

8．样本似然函数为 $L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\lambda)=2^n\lambda^n\prod_{i=1}^{n}x_i\mathrm{e}^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i^2},x_1,\cdots,x_n>0.$ （3 分）

取对数 $\ln L(\lambda)=n\ln2+n\ln\lambda+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i^2,$

求导数 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}=\dfrac{n}{\lambda}-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2$, 并令其等于 0，解得 λ 的最大似然估计值为 $\hat{\lambda}=\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}$.

（8 分）

三、综合计算题（10 分）

（1） $P\{X\ge Y^2\}=\iint\limits_{x\ge y^2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 6(1-y)\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y}\mathrm{d}x=\int_0^1 6(y-2y^2+y^3)\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2}$.

（4 分）

（2） $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_x^1 6(1-y)\mathrm{d}y, 0<x<1\\ 0, \qquad 其它\end{cases}=\begin{cases}3x^2-6x+3, 0<x<1\\ 0, \qquad 其它\end{cases}$.

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^y 6(1-y)\mathrm{d}x, 0<y<1\\ 0, \qquad 其它\end{cases}=\begin{cases}6y-6y^2, 0<y<1\\ 0, \qquad 其它\end{cases}$. （8 分）

（3） $f_X(\frac{1}{2})=\dfrac{3}{4}, f(\frac{1}{2},y)=\begin{cases}6(1-y), \frac{1}{2}<y<1\\ 0, \qquad 其它\end{cases}$,

$\therefore f_{Y|X}(y|\frac{1}{2})=\dfrac{f(\frac{1}{2},y)}{f_X(\frac{1}{2})}=\begin{cases}8(1-y), \frac{1}{2}<y<1\\ 0, \qquad 其它\end{cases}$. （10 分）

四、应用题（6 分）

$H_0:\sigma^2=0.03,\quad H_1:\sigma^2\ne 0.03$. 拒绝域为 $\left\{\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\le\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}\cup\left\{\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\ge\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}$,

（3 分）

即 $\left\{\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\le 2.700\right\}\cup\left\{\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\ge 19.022\right\}$, 代入观察值 $s^2=0.0$ 得 $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=11.25$, 未落入拒绝域中，故应接受 H_0，即可相信这批铁水的碳含量与正常情况下的方差无显著差异.

（6 分）