2016-2017 学年第 1 学期《线性代数》课程 A 卷参考答案及评分标准

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

D C C B A

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. $\underline{-1/3}$; 2. $\underline{E-A}$; 3. $\underline{m}$; 4. $\underline{3}$; 5. $\underline{24}$.

三、计算题（每小题 8 分，共 64 分）

1. $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&-1&4\\2&-3&-1&-5\\3&1&2&11\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&-2&3\\0&-5&-3&-7\\0&-2&-1&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&-2&3\\0&0&-13&8\\0&0&-5&14\end{vmatrix}=-142.$

（2 分）（2 分）（4 分）

2.由题意可知,$(A-E)B=A^2-E$,

而$A-E=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$,即$|A-E|=-1$,所以$A-E$ 可逆 $(4分)$

所以$B=A+E=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$$(4分)$

3.因为$|P|=-1\neq 0$,所以P 可逆.

由$AP=PB$ 可知,$A=PBP^{-1}, A^2=PB^2P^{-1},\cdots,A^5=PB^5P^{-1}$.$(2分)$

又$B^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, B^3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=B$,所以$B^5=B$.

所以$A^5=PB^5P^{-1}=PBP^{-1}=A$. $(2分)$

又$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}$,所以$A^5=A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{pmatrix}$. $(4分)$

4. $A=\begin{pmatrix}1&1&2&-1\\2&1&1&-1\\2&2&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&-1\\0&-1&-3&1\\0&0&-3&4\end{pmatrix}$, $(4分)$

所以$R(A)=3$,且最高阶非零子式为$\begin{vmatrix}1&1&2\\2&1&1\\2&2&1\end{vmatrix}$. $(4分)$

5.因为$\begin{vmatrix}1&1&b\\-1&b&1\\1&-1&2\end{vmatrix}=-b^2+3b+4=-(b-4)(b+1)$,

当$b\neq 4$且$b\neq -1$时,方程组有唯一解. $(2分)$

当$b=-1$时,$\begin{pmatrix}1&1&-1&4\\-1&-1&1&1\\1&-1&2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&4\\0&-2&3&-8\\0&0&0&5\end{pmatrix}$,方程组无解. $(2分)$

当$\lambda=4$时,$\begin{pmatrix}1&1&4&4\\-1&4&1&16\\1&-1&2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&1&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,$\begin{cases}x_1\quad +3x_3=0,\\ \quad x_2+\ \ x_3=4,\end{cases}$

通解为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}(c\in R)$. $(4分)$

6.$A\to\begin{pmatrix}1&2&1&1&3\\0&3&3&0&3\\0&5&5&-2&7\\0&-2&-2&-4&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&1&3\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$,$(4分)$

所以$R(A)=3$,矩阵A的列向量组的秩为3,a_1,a_2,a_4为列向量组的一个最大无关组,

且$a_3=-a_1+a_2, a_5=2a_1+a_2-a_4$. $(4分)$

7.因为未知量的个数$n=4$, $R(A)=3$,所以对应的齐次线性方程组的基础解系

只含1个解向量. $(2分)$

而$A[2\alpha_1-(\alpha_2+\alpha_3)]=2A\alpha_1-A\alpha_2-A\alpha_3=0$,

所以$2\alpha_1-(\alpha_2+\alpha_3)=\begin{pmatrix}2\\0\\6\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\4\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-4\\3\\-4\end{pmatrix}$是$Ax=0$的基础解系. $(2分)$

故$Ax=b$的通解为$x=\begin{pmatrix}1\\0\\3\\-1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\-4\\3\\-4\end{pmatrix}(c\in R)$.　　(4分)

8.二次型的矩阵为$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.

$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda&0&1\\0&1-\lambda&0\\1&0&-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+1)$, A的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-1$.(2分)

当$\lambda_1=1$时,解齐次线性方程组$(A-\lambda E)x=0$,

$\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0, x_1-x_3=0, \xi_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

单位化得$p_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $p_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.　　(2分)

当$\lambda_2=-1$时,解齐次线性方程组$(A-\lambda E)x=0$,

$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0,, \begin{cases}x_1+x_3=0,\\x_2=0,\end{cases} p_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

单位化得$p_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.　　(2分)

故正交变换$x=(p_1,p_2,p_3)y$ 将二次型化为$f(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2-y_3^2$.　(2分)

四、证明题（每小题 8 分，共 16 分）

1. 设有一组数$k_1,k_2,\cdots,k_m$,使得

$$k_1\alpha+k_2A\alpha+\cdots+k_mA^{m-1}\alpha=0,$$

两边左乘A^{m-1},可得　$k_1A\alpha+k_2A^m\alpha+\cdots+k_mA^{2m-2}\alpha=0$.　(2分)

由于$A^m\alpha=0$, 从而$A^{m+l}\alpha=0\ (l=1,2,\cdots,m-2)$,从而$k_1A^{m-1}\alpha=0$,

因$A^{m-1}\alpha\neq0$,所以$k_1=0$.　　(4分)

类似可得 $k_2=k_3=\cdots=k_m=0$,因此向量组$\alpha,A\alpha,\cdots,A^{m-1}\alpha$ 线性无关.(2分)

2.由$A^T A = E$,可得$\left|A^T\right||A| = |E| = 1$,即$|A|^2 = 1$.

根据$|A| < 1$知$|A| = -1$. $(2分)$

又因为$|A+E| = \left|A + A^T A\right| = \left|\left(E + A^T\right)A\right| = \left|E + A^T\right||A|$

$$= -\left|E + A^T\right|$$

$$= -\left|(A+E)^T\right|$$

$$= -|A+E|,$$

所以$|A+E| = 0$. $(4分)$

故-1是A的一个特征值. $(2分)$