线性代数复习总结大全

第一章　行列式

二三阶行列式

N 阶行列式：行列式中所有不同行、不同列的 n 个元素的乘积的和

$$\left|a_{ij}\right|_n=\sum_{j_1j_2j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2..j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}...a_{nj_n}$$

（奇偶）排列、逆序数、对换

行列式的性质：①行列式行列互换，其值不变。（转置行列式 $D=D^T$）

②行列式中某两行（列）互换，行列式变号。

推论：若行列式中某两行（列）对应元素相等，则行列式等于零。

③常数 k 乘以行列式的某一行（列），等于 k 乘以此行列式。

推论：若行列式中两行（列）成比例，则行列式值为零；

推论：行列式中某一行（列）元素全为零，行列式为零。

④行列式具有分行（列）可加性

⑤将行列式某一行（列）的 k 倍加到另一行（列）上，值不变

行列式依行（列）展开：余子式 M_{ij}、代数余子式 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

定理：行列式中某一行的元素与另一行元素对应余子式乘积之和为零。

克莱姆法则：

非齐次线性方程组：当系数行列式 $D\neq 0$ 时，有唯一解：$x_j=\dfrac{D_j}{D}(j=1、2\ldots\ldots n)$

齐次线性方程组：当系数行列式 $D=1\neq 0$ 时，则只有零解

逆否：若方程组存在非零解，则 D 等于零

特殊行列式：

①转置行列式：$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\to\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}\\a_{12}&a_{22}&a_{32}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{vmatrix}$

②对称行列式: $a_{ij}=a_{ji}$

③反对称行列式: $a_{ij}=-a_{ji}$　　奇数阶的反对称行列式值为零

④三线性行列式: $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&0\\a_{31}&0&a_{33}\end{vmatrix}$　　方法：用 k_1a_{22} 把 a_{21} 化为零，。。化为三角形行列式

⑤上（下）三角形行列式:

行列式运算常用方法（主要）

行列式定义法（二三阶或零元素多的）

化零法（比例）

化三角形行列式法、降阶法、升阶法、归纳法、

第二章　矩阵

矩阵的概念：A_{m*n}（零矩阵、负矩阵、行矩阵、列矩阵、n 阶方阵、相等矩阵）

矩阵的运算：加法（同型矩阵）---------交换、结合律

数乘 $kA=(ka_{ij})_{m*n}$---------分配、结合律

乘法 $A*B=(a_{ik})_{m*l}*(b_{kj})_{l*n}=(\sum_{1}^{l}a_{ik}b_{kj})_{m*n}$ 注意什么时候有意义

一般 AB=BA，不满足消去律；由 AB=0，不能得 A=0 或 B=0

转置 $(A^T)^T=A$　　$(A+B)^T=A^T+B^T$

$(kA)^T=kA^T$　　$(AB)^T=B^TA^T$(反序定理)

方幂：$A^{k_1}A^{k_2}=A^{k_1+k_2}$

$(A^{k_1})^{k_2}=A^{k_1+k_2}$

几种特殊的矩阵：**对角矩阵**：若 AB 都是 N 阶对角阵，k 是数，则 kA、A+B、AB 都是 n 阶对角阵

数量矩阵：相当于一个数（若……）

单位矩阵、上（下）三角形矩阵（若……）

对称矩阵

反对称矩阵

阶梯型矩阵：每一非零行左数第一个非零元素所在列的下方都是 0

分块矩阵：加法，数乘，乘法：类似，转置：每块转置并且每个子块也要转置

注：**把分出来的小块矩阵看成是元素**

逆矩阵：设 A 是 N 阶方阵，若存在 N 阶矩阵 B 的 AB=BA=I 则称 A 是可逆的，$A^{-1}=B$(非奇异矩阵、奇异矩阵|A|=0、伴随矩阵)

初等变换 1、交换两行（列）2.、非零 k 乘某一行（列）3、将某行（列）的 K 倍加到另一行（列）**初等变换不改变矩阵的可逆性**　**初等矩阵都可逆**

初等矩阵：单位矩阵经过一次初等变换得到的（对换阵 倍乘阵 倍加阵）

等价标准形矩阵 $D_r=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$

矩阵的秩 r(A)：满秩矩阵 降秩矩阵　**若 A 可逆，则满秩**

若 A 是非奇异矩阵，则 r（AB）=r（B）

初等变换不改变矩阵的秩

求法：1 定义 2 转化为标准式或阶梯形

矩阵与行列式的联系与区别：

都是数表；行列式行数列数一样，矩阵不一样；行列式最终是一个数，只要值相等，就相等，矩阵是一个数表，对应元素相等才相等；矩阵 $(ka_{ij})_n = k(a_{ij})_n$，行列式 $\left|ka_{ij}\right|_n = k^n\left|a_{ij}\right|_n$

逆矩阵注： ①AB=BA=I 则 A 与 B 一定是方阵 ②BA=AB=I 则 A 与 B 一定互逆；

③不是所有的方阵都存在逆矩阵；④若 A 可逆，则其逆矩阵是唯一的。

矩阵的逆矩阵满足的**运算律**：

1、可逆矩阵 A 的逆矩阵也是可逆的，且 $(A^{-1})^{-1} = A$

2、可逆矩阵 A 的数乘矩阵 kA 也是可逆的，且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

3、可逆矩阵 A 的转置 A^T 也是可逆的，且 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

4、两个可逆矩阵 A 与 B 的乘积 AB 也是可逆的，且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

但是两个可逆矩阵 A 与 B 的和 A+B 不一定可逆，即使可逆，但 $(A+B) \neq A^{-1} + B^{-1}$

A 为 N 阶方阵，若|A|=0，则称 A 为**奇异矩阵**，否则为**非奇异矩阵**。

5、若 A 可逆，则 $\left|A^{-1}\right| = \left|A\right|^{-1}$

伴随矩阵：A 为 N 阶方阵，伴随矩阵：$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ （代数余子式）

特殊矩阵的逆矩阵：（对 1 和 2，前提是每个矩阵都可逆）

1、分块矩阵 $D = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$ 则 $D^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{pmatrix}$

2、准对角矩阵 $A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & A_3 & \\ & & & A_4 \end{pmatrix}$， 则 $A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & A_3^{-1} & \\ & & & A_4^{-1} \end{pmatrix}$

3、 $AA^* = A^*A = \left|A\right|I$

4、 $A^* = \left|A\right|A^{-1}$ （A 可逆）

5、 $\left|A^*\right| = \left|A\right|^{n-1}$

6、 $\left(A^*\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^* = \frac{1}{\left|A\right|}A$ （A 可逆）

7、 $\left(A^*\right)^T = \left(A^T\right)^*$

8、 $\underline{\left(AB\right)^* = B^*A^*}$

判断矩阵是否可逆：充要条件是 $\left|A\right| \neq 0$，此时 $A^{-1} = \frac{1}{\left|A\right|}A^*$

求逆矩阵的方法：

定义法 $AA^{-1}=I$

伴随矩阵法 $A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$

初等变换法 $\left(A \mid I_n\right)=\left(I_n \mid A^{-1}\right)$ **只能是行变换**

初等矩阵与矩阵乘法的关系：

设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m*n}$ 是 m*n 阶矩阵，则对 A 的行实行一次初等变换得到的矩阵，等于用同等的 m 阶初等矩阵左乘以 A：对 A 的列实行一次初等变换得到的矩阵，等于用同种 n 阶初等矩阵右乘以 A （**行变左乘，列变右乘**）

第三章 线性方程组

消元法 **非齐次线性方程组**：增广矩阵→简化阶梯型矩阵

r(AB)=r(B)=r 当 r=n 时，有唯一解；当 $r \neq n$ 时，有无穷多解

r(AB)≠r(B)，无解

齐次线性方程组：仅有零解充要 r(A)=n 有非零解充要 r(A)<n

当齐次线性方程组方程个数<未知量个数，一定有非零解

当齐次线性方程组方程个数=未知量个数，有非零解充要|A|=0

齐次线性方程组若有零解，一定是无穷多个

N 维向量：由 n 个实数组成的 n 元有序数组。希腊字母表示（加法数乘）

特殊的向量：行（列）向量，零向量 θ，负向量，相等向量，转置向量

向量间的线性关系: 线性组合或线性表示

向量组间的线性相关（无）：定义 P_{179}

向量组的秩：**极大无关组（定义 P188）**

定理：如果 $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},.....\alpha_{j_r}$ 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,.....\alpha_s$ 的线性无关的部分组，则它是 极大无关组的充要条件是：$\alpha_1,\alpha_2,.....\alpha_s$ 中的每一个向量都可由 $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},.....\alpha_{j_r}$ 线性表出。

秩:极大无关组中所含的向量个数。

定理：设 A 为 m*n 矩阵，则 $r(A)=r$ 的充要条件是：A 的列（行）秩为 r。

现性方程组解的结构：齐次非齐次、基础解系

线性组合或线性表示注：两个向量 αβ，若 $\alpha=k\beta$ 则 α 是 β 线性组合

单位向量组

任意向量都是单位向量组的线性组合

零向量是任意向量组的线性组合

任意向量组中的一个都是他本身的线性组合

向量组间的线性相关（无）注：　n 个 n 维**单位向量组**一定是线性无关

一个非零向量是线性无关，零向量是线性相关

含有零向量的向量组一定是线性相关

若两个向量成比例，则他们一定线性相关

向量 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,..\alpha_n$ 线性表示的充要条件是 $r(\alpha_1{}^T\alpha_2{}^T...\alpha_n{}^T\quad)=r(\alpha_1{}^T\alpha_2{}^T...\alpha_n{}^T\beta^T)$

判断是否为线性相关的方法:

1、定义法：设 $k_1k_2....k_n$，求 $k_1k_2....k_n$（适合维数低的）

2、向量间关系法 P_{183}：部分相关则整体相关，整体无关则部分无关

3、分量法（n 个 m 维向量组）P_{180}：线性相关（充要）$\Rightarrow r(\alpha_1{}^T\alpha_2{}^T....\alpha_n{}^T)<n$

线性无关（充要）$\Rightarrow r(\alpha_1{}^T\alpha_2{}^T....\alpha_n{}^T)=n$

推论①当 m=n 时，相关，则 $\left|\alpha_1{}^T\alpha_2{}^T\alpha_3{}^T\right|=0$；无关，则 $\left|\alpha_1{}^T\alpha_2{}^T\alpha_3{}^T\right|\neq 0$

②当 m<n 时，线性相关

推广：若向量 $\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_s$ 组线性无关，则当 s 为奇数时，向量组 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,...\alpha_s+\alpha_1$ 也线性无关；当 s 为偶数时，向量组也线性相关。

定理：如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_s,\beta$ 线性相关，则向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_s$ 线性表出，且　表示法唯一的充分必要条件是 $\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_s$ 线性无关。

极大无关组注：向量组的极大无关组不是唯一的，但他们所含向量的个数是确定的；

不全为零的向量组的极大无关组一定存在；

无关的向量组的极大无关组是其本身；

向量组与其极大无关组是等价的。

齐次线性方程组（I）解的结构：解为 $\alpha_1,\alpha_2...$

（I）的两个解的和 $\alpha_1+\alpha_2$ 仍是它的解；

（I）解的任意倍数 $k\alpha$ 还是它的解；

（I）解的线性组合 $c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+....+c_s\alpha_s$ 也是它的解，$c_1,c_2,...c_s$ 是任意常数。

非齐次线性方程组（II）解的结构：解为 $\mu_1,\mu_2...$

（II）的两个解的差 $\mu_1-\mu_2$ 仍是它的解；

若 μ 是非齐次线性方程组 AX=B 的一个解，v 是其导出组 AX=O 的一个解，则 u+v 是（II）的一个解。

定理：

如果齐次线性方程组的系数矩阵 A 的秩 $r(A)=r<n$，则该方程组的基础解系存在，且在每个基础解系中，恰含有 n-r 个解。

若 μ 是非齐次线性方程组 AX=B 的一个解，v 是其导出组 AX=O 的全部解，则 u+v 是（II）的全部解。

第四章　向量空间

向量的内积　实向量

定义：（α，β）$=\alpha\beta^T=a_1b_1+a_2b_2+....+a_nb_n$

性质：非负性、对称性、线性性

(α,kβ)=k(α,β);

(kα,kβ)=k^2(α,β);

(α+β, $\gamma+\delta$)=(α, γ)+(α, δ)+(β, γ)+(β, δ);

$$(\sum_{i=1}^{r}k_i\alpha_i,\sum_{j=1}^{s}l_j\ \beta_j)=\sum_{i=1}^{r}k_i\sum_{j=1}^{s}l_j(\alpha_i,\beta_j)\qquad \alpha,\beta,\gamma,\delta\in R^n,$$

向量的长度 $|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$

$|\alpha|=0$ 的充要条件是 α=0；α 是单位向量的充要条件是（α，α）=1

单位化

向量的夹角

正交向量：αβ 是正交向量的充要条件是（α，β）=0

正交的向量组必定线性无关

正交矩阵：n 阶矩阵 A　　$AA^T=A^TA=I$

性质：1、若 A 为正交矩阵，则 A 可逆，且 $A^{-1}=A^T$，且 A^{-1} 也是正交矩阵；

2、若 A 为正交矩阵，则 $|A|=\pm1$；

3、若 A、B 为同阶正交矩阵，则 A B 也是正交矩阵；

4、n 阶矩阵 A＝（a_{ij}）是正交矩阵的充要条件是 A 的列（行）向量组是　　　　标准正交向量；

第五章　矩阵的特征值和特征向量

特征值、特征向量

A 是 N 阶方阵，若数 λ 使 AX=λX，即（λI-A）=0 有非零解，则称 λ 为 A 的一　　　个特征值，此时，非零解称为 A 的属于特征值 λ 的特征向量。

|A|= $\lambda_1 * \lambda_2 * \ldots \lambda_n$

注： 1、AX=λX

2、求特征值、特征向量的方法

$|\lambda I - A| = 0$ 求 λ_i 将 λ_i 代入（λI-A）X=0 求出所有非零解

3、对于不同的矩阵，有重根、单根、复根、实根（主要学习的）

特殊：$(\lambda I)_n$ 的特征向量为任意 N 阶非零向量或 $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_n \end{pmatrix}$ $(c_i$不全为零$)$

4、特征值： 若 $\lambda(\lambda \neq 0)$ 是 A 的特征值

则 A^{-1} -------- $\frac{1}{\lambda}$

则 A^m -------- λ^m

则 kA -------- $k\lambda$

若 A^2=A 则----------- λ=0 或 1

若 A^2=I 则----------- λ=-1 或 1

若 A^k=O 则---------- λ=0

迹 tr(A)：迹（A）= $a_{11} + a_{22} + \ldots\ldots + a_{nn}$

性质：

1、N 阶方阵可逆的充要条件是 A 的特征值全是非零的

2、A 与 A^{-1} 有相同的特征值

3、N 阶方阵 A 的不同特征值所对应的特征向量线性无关

4、5、P281

相似矩阵

定义 P283：A、B 是 N 阶矩阵，若存在可逆矩阵 P，满足 $P^{-1}AP = B$，则矩阵 A 与 B 相似，记作 A~B

性质 1、**自身性：A~A,P=I**

2、**对称性：若 A~B 则 B~A** $P^{-1}AP = B$ $A = PBP^{-1}$ $(P^{-1})^{-1}BP^{-1} = A$

3、**传递性：若 A~B、B~C 则 A~C** $P_1^{-1}AP_1 = B$ $P_2^{-1}BP_2 = C$ ---$(P_1P_2)^{-1}A(P_1P_2) = C$

4、**若 AB，则 A 与 B 同（不）可逆**

5、**若 A~B，则** $A^{-1} \sim B^{-1}$ $P^{-1}AP = B$ 两边同取逆，$P^{-1}A^{-1}P = B^{-1}$

6、若 A~B，则它们有相同的特征值。 （特征值相同的矩阵不一定相似）

7、**若 A~B，则** $r(A)=r(B)$ 初等变换不改变矩阵的秩

例子：$P^{-1}AP=B$ 则 $A^{100}=PB^{100}P^{-1}$

$P^{-1}AP=O$ A=O

$P^{-1}AP=I$ A=I

$P^{-1}AP=\lambda I$ A=λI

矩阵对角化

定理：N 阶矩阵 A 与 N 阶对角形矩阵相似的充要条件是 A 有 N 个线性无关的特征向量

注：1、P 与^中的 x_i与λ_i顺序一致

2、A~^,则^与 P 不是唯一的

推论：若 n 阶方阵 A 有 n 个互异的特征值，则 $A\sim$^ （P281）

定理：n 阶方阵 $A\sim$^ 的充要条件是对于每一个 K_i 重特征根 λ_i，都有 $r(\lambda_i I-A)=n-K_i$

注：三角形矩阵、数量矩阵 λI 的特征值为主对角线。

约当形矩阵

约当块：形如 $J=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda\end{pmatrix}$ 的 n 阶矩阵称为 n 阶约当块；

约当形矩阵：由若干个约当块组成的对角分块矩阵 $J=\begin{pmatrix}J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & J_n\end{pmatrix}$（$J_i$ 是约当块）称为约当形矩阵。

定理：任何矩阵 A 都相似于一个约当形矩阵，即存在 n 阶可逆矩阵 $P^{-1}AP=J$ 。

第六章 二次型

二次型与对称矩阵

只含有二次项的 n 元多项式 f()称为一个 n 元二次型，简称二次型。

标准型：形如 的二次型，称为标准型。

规范型：形如 的二次型，称为规范型。

线性变换

矩阵的合同：设 AB 是 n 阶方阵，若存在一个 n 阶可逆矩阵 C，使得 则称 A 与 B 是合同的，记作 A B。

合同的性质：反身性、对称性、传递性、秩、

化二次型为标准型：配方法、做变换（二次型中不含有平方项）

$$|A|=o \Leftrightarrow \begin{cases} A\text{不可逆} \\ r(A)<n \\ Ax=o\text{有非零解} \\ 0\text{是}A\text{的特征值} \\ A\text{的列（行）向量线性相关} \end{cases}$$

$$|A|\neq o \Leftrightarrow \begin{cases} A\text{可逆} \\ r(A)=n \\ Ax=0\text{只有零解} \\ A\text{的特征值全不为零} \\ A\text{的列（行）向量线性无关} \\ A^T A\text{是正定矩阵} \\ A\text{与同阶单位阵等价} \\ A=p_1p_2\cdots p_s, p_i\text{是初等阵} \\ \forall\beta\in\mathbf{R}^n, Ax=\beta\text{总有唯一解} \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}\text{向量组等价} \\ \text{相似矩阵} \\ \text{矩阵合同}\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{具有}} \text{反身性、对称性、传递性}$$

√ 关于 $e_1,e_2,\cdots,e_n$：

①称为□^{n}的标准基，□^{n}中的自然基，单位坐标向量；

② $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 线性无关；

③ $|e_1,e_2,\cdots,e_n|=1$；

④ $\mathrm{tr}(E)=n$；

⑤任意一个 n 维向量都可以用 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 线性表示.

√ 行列式的计算：

① 若 A与B 都是方阵（不必同阶），则 $\begin{vmatrix} A & * \\ o & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & o \\ * & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & o \\ o & B \end{vmatrix} = |A||B|$

$\begin{vmatrix} * & A \\ B & o \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|$

②上三角、下三角行列式等于主对角线上元素的乘积.

③关于副对角线：$\begin{vmatrix} * & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & o \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} o & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & o \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n}\dots a_{n1}$

√ 逆矩阵的求法：

① $A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}$

② $(A \vdots E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \vdots A^{-1})$

③ $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ $\qquad$ $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{bmatrix}$

④ $\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}$ $\qquad$ $\begin{bmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} & & & \frac{1}{a_n} \\ & & \iddots & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ \frac{1}{a_1} & & & \end{bmatrix}$

⑤ $\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n^{-1} \end{bmatrix}$ $\qquad$ $\begin{bmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \iddots & & \\ A_n & & & \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} & & & A_n^{-1} \\ & & \iddots & \\ & A_2^{-1} & & \\ A_1^{-1} & & & \end{bmatrix}$

√ 方阵的幂的性质：$A^m A^n = A^{m+n}$ $\qquad$ $(A^m)^n = (A)^{mn}$

√ 设 $f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$，对 n 阶矩阵 A 规定：$f(A) = a_m A^m + a_{m-1}A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E$ 为 A 的一个多项式.

√ 设 $A_{m\times n}, B_{n\times s}$，$A$ 的列向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，$B$ 的列向量为 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$， AB 的列向量为 $r_1, r_2, \cdots, r_s$ ，

$$\left.\begin{array}{l}\text{则：} r_i = A\beta_i, i=1,2,\cdots,s, \text{即 } A(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=(A\beta_1,A\beta_2,\cdots,A\beta_s)\\ \quad \text{若}\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T, \text{则 } A\beta=b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+\cdots b_n\alpha_n\\ \text{即：}AB\text{的第}i\text{个列向量}r_i\text{是}A\text{的列向量的线性组合,组合系数就是}\beta_i\text{的各分量；}\\ \quad AB\text{的第}i\text{个行向量}r_i\text{是}B\text{的行向量的线性组合,组合系数就是}\alpha_i\text{的各分量.}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{用}A,B\text{中简}\\ \text{单的一个提}\\ \text{高运算速度}\end{array}$$

√ 用对角矩阵 Λ 左乘一个矩阵，相当于用 Λ 的对角线上的各元素依次乘此矩阵的行向量；

用对角矩阵 Λ 右乘一个矩阵，相当于用 Λ 的对角线上的各元素依次乘此矩阵的列向量.

√ 两个同阶对角矩阵相乘只用把对角线上的对应元素相乘，

与分块对角阵相乘类似，即： $A=\begin{bmatrix} A_{11} & & & o \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ o & & & A_{kk} \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} B_{11} & & & o \\ & B_{22} & & \\ & & \ddots & \\ o & & & B_{kk} \end{bmatrix}$

$$AB=\begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & & & o \\ & A_{22}B_{22} & & \\ & & \ddots & \\ o & & & A_{kk}B_{kk} \end{bmatrix}$$

√ 矩阵方程的解法：设法化成(I) $AX=B$ 或 (II) $XA=B$

当 $|A|\neq 0$ 时，

(I)的解法：构造 $(A \vdots B) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \vdots X)$ （当B为一列时，即为克莱姆法则）

(II)的解法：将等式两边转置化为$A^T X^T = B^T$，
用(I)的方法求出X^T，再转置得X

√ $Ax=o$ 和 $Bx=o$ 同解（ A,B 列向量个数相同），则：

① 它们的极大无关组相对应，从而秩相等；

② 它们对应的部分组有一样的线性相关性；

③ 它们有相同的内在线性关系.

√ 判断 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 是 $Ax=0$ 的基础解系的条件：

① $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 线性无关；

② $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 是 $Ax=0$ 的解；

③ $s = n - r(A) =$ 每个解向量中自由变量的个数.

① 零向量是任何向量的线性组合, 零向量与任何同维实向量正交.

② 单个零向量线性相关；单个非零向量线性无关.

③ 部分相关, 整体必相关；整体无关, 部分必无关.

④ 原向量组无关, 接长向量组无关；接长向量组相关, 原向量组相关.

⑤ 两个向量线性相关 $\Leftrightarrow$ 对应元素成比例；两两正交的非零向量组线性无关.

⑥ 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 中任一向量 $\alpha_i\ (1 \leqslant i \leqslant n)$ 都是此向量组的线性组合.

⑦ 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 向量组中至少有一个向量可由其余 $n-1$ 个向量线性表示.

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 向量组中每一个向量 α_i 都不能由其余 $n-1$ 个向量线性表示.

⑧ m 维列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow r(A) < n$；

m 维列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow r(A) = n$.

⑨ $r(A) = 0 \Leftrightarrow A = o$.

⑩ 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关，而 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta$ 线性相关, 则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示, 且表示法惟一.

⑪ 矩阵的行向量组的秩等于列向量组的秩.

阶梯形矩阵的秩等于它的非零行的个数.

⑫ 矩阵的行初等变换不改变矩阵的秩, 且不改变列向量间的线性关系.

矩阵的列初等变换不改变矩阵的秩, 且不改变行向量间的线性关系.

$\boxed{\text{向量组等价}}$ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 可以相互线性表示.　记作：$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\} \cong \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$

$\boxed{\text{矩阵等价}}$ A 经过有限次初等变换化为 B.　记作：$A \cong B$

⑬ 矩阵 A 与 B 等价 $\Leftrightarrow r(A) = r(B) \not\Rightarrow A, B$ 作为向量组等价, 即：秩相等的向量组不一定等价.

矩阵 A 与 B 作为向量组等价 $\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = r(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) \Rightarrow$ 矩阵 A 与 B 等价.

⑭ 向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示

$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\Rightarrow r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)\leqslant r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$.

⑮ 向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示, 且 $s>n$， 则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性相关.

向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关, 且可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示, 则 $s\leqslant n$.

⑯ 向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示, 且 $r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, 则两向量组等价；

⑰ 任一向量组和它的极大无关组等价.

⑱ 向量组的任意两个极大无关组等价, 且这两个组所含向量的个数相等.

⑲ 若两个线性无关的向量组等价, 则它们包含的向量个数相等.

⑳ 若 A 是 $m\times n$ 矩阵, 则 $r(A)\leq\min\{m,n\}$, 若 $r(A)=m$， A 的行向量线性无关；

若 $r(A)=n$， A 的列向量线性无关, 即：

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

线性方程组的矩阵式 $Ax=\beta$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\beta=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

向量式 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$

$$\alpha_j=\begin{bmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{bmatrix},j=1,2,\cdots,n$$

$$
\beta\text{可由}\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\text{线性表示}\Leftrightarrow Ax=\beta\text{有解}\Leftrightarrow r(A)=r(A\vdots\beta)\begin{cases}<n\left\langle\begin{array}{l}\Leftrightarrow Ax=\beta\text{有无穷多解}\left\langle\begin{array}{c}\Rightarrow\\ <\neq\end{array}\right\rangle Ax=o\text{有非零解}\xrightarrow{\text{当}A\text{为方阵时}}\lvert A\rvert=0\\ \Rightarrow\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\text{线性相关}\end{array}\right.\\ =n\left\langle\begin{array}{l}\Leftrightarrow Ax=\beta\text{有唯一组解}\left\langle\begin{array}{c}\Rightarrow\\ <\neq\end{array}\right\rangle Ax=o\text{只有零解}\xrightarrow{\text{当}A\text{为方阵时}}\lvert A\rvert\neq 0\\ \Rightarrow\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\text{线性无关}\\ \xrightarrow{\text{当}A\text{为方阵时}}\text{克莱姆法则}\end{array}\right.\end{cases}
$$

$$
\beta\text{不可由}\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\text{线性表示}\Leftrightarrow Ax=\beta\text{无解}\begin{cases}\Leftrightarrow r(A)\neq r(A\vdots\beta)\\ \Leftrightarrow r(A)<r(A\vdots\beta)\\ \Leftrightarrow r(A)+1=r(A\vdots\beta)\end{cases}
$$

矩阵转置的性质：	$(A^T)^T=A$	$(AB)^T=B^TA^T$	$(kA)^T=kA^T$	$\lvert A^T\rvert=\lvert A\rvert$	$(A+B)^T=A^T+B^T$		
矩阵可逆的性质：	$(A^{-1})^{-1}=A$	$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$	$(kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1}$	$\lvert A^{-1}\rvert=\lvert A\rvert^{-1}$	$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$	$(A^{-1})^k=(A^k)^{-1}=A^{-k}$	
伴随矩阵的性质：	$(A^*)^*=\lvert A\rvert^{n-2}A$	$(AB)^*=B^*A^*$	$(kA)^*=k^{n-1}A^*$	$\lvert A^*\rvert=\lvert A\rvert^{n-1}$	$(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}=\frac{A}{\lvert A\rvert}$ $(A^T)^*=(A^*)^T$	$(A^*)^k=(A^k)^*$	$AA^*=A^*A=\lvert A\rvert E$

$r(A^*)=\begin{cases} n & 若r(A)=n \\ 1 & 若r(A)=n-1 \\ 0 & 若r(A)<n-1 \end{cases}$	$\lvert AB\rvert=\lvert A\rvert\lvert B\rvert$	$\lvert kA\rvert=k^n\lvert A\rvert$	$\lvert A^k\rvert=\lvert A\rvert^k$

线 性 方 程 组 解 的 性 质 ：

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} &(1)\ \ \eta_1,\eta_2\text{是}Ax=0\text{的解},\eta_1+\eta_2\text{也是它的解} \\ &(2)\ \ \eta\text{是}Ax=0\text{的解},\text{对任意}k,k\eta\text{也是它的解} \\ &(3)\ \ \eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k\text{是}Ax=0\text{的解},\text{对任意}k\text{个常数} \\ &\quad\ \ \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k,\lambda_1\eta_1+\lambda_2\eta_2+\lambda_k\eta_k\text{也是它的解} \end{aligned}\right\}\text{齐次方程组} \\ (4)\ \ \gamma\text{是}Ax=\beta\text{的解},\eta\text{是其导出组}Ax=0\text{的解},\gamma+\eta\text{是}Ax=\beta\text{的解} \\ (5)\ \ \eta_1,\eta_2\text{是}Ax=\beta\text{的两个解},\eta_1-\eta_2\text{是其导出组}Ax=0\text{的解} \\ (6)\ \ \eta_2\text{是}Ax=\beta\text{的解},\text{则}\eta_1\text{也是它的解}\Leftrightarrow\eta_1-\eta_2\text{是其导出组}Ax=0\text{的解} \\ (7)\ \ \eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k\text{是}Ax=\beta\text{的解},\text{则} \\ \qquad\qquad \lambda_1\eta_1+\lambda_2\eta_2+\lambda_k\eta_k\text{也是}Ax=\beta\text{的解}\Leftrightarrow\lambda_1+\lambda_2+\lambda_k=1 \\ \qquad\qquad \lambda_1\eta_1+\lambda_2\eta_2+\lambda_k\eta_k\text{是}Ax=0\text{的解}\Leftrightarrow\lambda_1+\lambda_2+\lambda_k=0 \end{cases}$$

√ 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，若 $r(A)=m$，则 $r(A)=r(A\vdots\beta)$，从而 $Ax=\beta$ 一定有解.

当 $m<n$ 时，一定不是唯一解. $\Rightarrow \dfrac{\text{方程个数}}{\text{向量维数}}<\dfrac{\text{未知数的个数}}{\text{向量个数}}$，则该向量组线性相关.

m 是 $r(A)$和$r(A\vdots\beta)$ 的上限.

√ 矩阵的秩的性质：

① $r(A)=r(A^T)=r(A^TA)$

② $r(A\pm B)\leqslant r(A)+r(B)$

③ $r(AB)\leqslant\min\{r(A),r(B)\}$

④ $r(kA)=\begin{cases} r(A) & \text{若}k\neq 0 \\ 0 & \text{若}k=0 \end{cases}$

⑤ $r\begin{bmatrix} A & o \\ o & B \end{bmatrix}=r(A)+r(B)$

⑥若$A\neq 0$,则$r(A)\geqslant 1$

⑦ 若$A_{m\times n},B_{n\times s}$,且$r(AB)=0$,则$r(A)+r(B)\leqslant n$

⑧ 若P,Q可逆，则$r(PA)=r(AQ)=r(A)$

⑨ 若A可逆,则$r(AB)=r(B)$

若B可逆,则$r(AB)=r(A)$

⑩ 若$r(A)=n$,则$r(AB)=r(B)$,且 A 在矩阵乘法中有左消去律:

$$\begin{cases} AB=0 \Rightarrow B=o \\ AB=AC \Rightarrow B=C \end{cases}$$

$\boxed{\text{标准正交基}}$ n 个 n 维线性无关的向量,两两正交,每个向量长度为 1.

$\boxed{\alpha\text{与}\beta\text{正交}}$ $(\alpha,\beta)=0$.

$\boxed{\alpha\text{ 是单位向量}}$ $\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}=1$.

√ 内积的性质: ① 正定性:$(\alpha,\alpha)\ge 0$,且$(\alpha,\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha=o$

② 对称性:$(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$

③ 双线性:$(\alpha,\beta_1+\beta_2)=(\alpha,\beta_1)+(\alpha,\beta_2)$

$(\alpha_1+\alpha_2,\beta)=(\alpha_1,\beta)+(\alpha_2,\beta)$

$(c\alpha,\beta)=(c\alpha,\beta)=(\alpha,c\beta)$

$\boxed{\text{施密特}}$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关,

$$\text{正交化}\begin{cases} \beta_1=\alpha_1 \\ \beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1\beta_1)}\beta_1 \\ \beta_3=\alpha_3-\dfrac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1\beta_1)}\beta_1-\dfrac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2\beta_2)}\beta_2 \end{cases}$$

$$\text{单位化:}\ \eta_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}\qquad \eta_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}\qquad \eta_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}$$

$\boxed{\text{正交矩阵}}$ $AA^T=E$.

√ A 是正交矩阵的充要条件:A 的 n 个行(列)向量构成$\mathbb{R}^n$的一组标准正交基.

√ 正交矩阵的性质:① $A^T=A^{-1}$;

② $AA^T = A^T A = E$；

③ A 是正交阵, 则 A^T（或 A^{-1}）也是正交阵;

④ 两个正交阵之积仍是正交阵;

⑤ 正交阵的行列式等于 1 或-1.

$\boxed{A\text{的特征矩阵}}$ $\lambda E - A$.

$\boxed{A\text{的特征多项式}}$ $|\lambda E - A| = f(\lambda)$.

$\boxed{A\text{的特征方程}}$ $|\lambda E - A| = 0$.　　　$Ax = \lambda x$ $\rightarrow$ Ax与x线性相关

√ 上三角阵、下三角阵、对角阵的特征值就是主对角线上的 n 各元素.

√ 若 $|A| = 0$, 则 $\lambda = 0$ 为 A 的特征值, 且 $Ax = 0$ 的基础解系即为属于 $\lambda = 0$ 的线性

无关的特征向量.

√ $|A| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$　　　$\sum_1^n \lambda_i = \mathrm{tr} A$

√ 若 $r(A) = 1$, 则 A 一定可分解为 $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} [b_1, \ b_2, \ \cdots, \ b_n]$、

$A^2 = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n) A$，从而 A 的特征值为：

$\lambda_1 = \mathrm{tr} A = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$,　　$\lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0$.

√ 若 A 的全部特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$， $f(x)$ 是多项式, 则:

① $f(A)$ 的全部特征值为 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)$；

② 当 A 可逆时, A^{-1} 的全部特征值为 $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \cdots, \frac{1}{\lambda_n}$,

A^* 的全部特征值为 $\frac{|A|}{\lambda_1}, \frac{|A|}{\lambda_2}, \cdots, \frac{|A|}{\lambda_n}$.

√ λ是A的特征值,则:$\left\{\begin{array}{c} kA \\ aA+bE \\ A^{-1} \\ A^{2} \\ A^{m} \\ A^{*} \end{array}\right.$ 分别有特征值 $\begin{array}{c} k\lambda \\ a\lambda+b \\ \frac{1}{\lambda} \\ \lambda^{2} \\ \lambda^{m} \\ \frac{|A|}{\lambda} \end{array}$.

√ x是A关于λ的特征向量,则x也是$\left\{\begin{array}{c} kA \\ aA+bE \\ A^{-1} \\ A^{2} \\ A^{m} \\ A^{*} \end{array}\right.$ 关于 $\begin{array}{c} k\lambda \\ a\lambda+b \\ \frac{1}{\lambda} \\ \lambda^{2} \\ \lambda^{m} \\ \frac{|A|}{\lambda} \end{array}$ 的特征向量.

$\boxed{A\text{与}B\text{相似}}$ $B=P^{-1}AP$ （P 为可逆阵） 记为：$A \sim B$

√ A 相似于对角阵的充要条件：A 恰有 n 个线性无关的特征向量. 这时，P 为 A 的特征向量拼成的矩阵，$P^{-1}AP$ 为对角阵, 主对角线上的元素为 A 的特征值.

√ A 可对角化的充要条件：$n-r(\lambda_i E-A)=k_i$ k_i 为 λ_i 的重数.

√ 若 n 阶矩阵 A 有 n 个互异的特征值, 则 A 与对角阵相似.

$\boxed{A\text{与}B\text{正交相似}}$ $B=P^{-1}AP$ （P 为正交矩阵）

√ 相似矩阵的性质：① $A^{-1} \sim B^{-1}$ 若 A,B 均可逆

② $A^{T} \sim B^{T}$

③ $A^{k} \sim B^{k}$ （k 为整数）

④ $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$, 从而 A,B 有相同的特征值, 但特征向量不一定相同. 即: x 是 A 关于 λ_0 的特征向量，$P^{-1}x$ 是 B 关于 λ_0 的特征向量.

⑤ $|A|=|B|$ 从而 A,B 同时可逆或不可逆

⑥ $r(A)=r(B)$

⑦ $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B)$

√ 数量矩阵只与自己相似.

√ 对称矩阵的性质：

① 特征值全是实数, 特征向量是实向量；

② 与对角矩阵合同；

③ 不同特征值的特征向量必定正交；

④ k 重特征值必定有 k 个线性无关的特征向量；

⑤ 必可用正交矩阵相似对角化（一定有 n 个线性无关的特征向量, A 可能有重的特征值, 重数=$n-r(\lambda E-A)$）.

A可以相似对角化 A 与对角阵 Λ 相似. 记为：$A\sim\Lambda$ （称 Λ 是 A 的相似标准型）

√ 若 A 为可对角化矩阵, 则其非零特征值的个数（重数重复计算）$=r(A)$.

√ 设 α_i 为对应于 λ_i 的线性无关的特征向量, 则有：

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n)=(\lambda_1\alpha_1,\lambda_2\alpha_2,\cdots,\lambda_n\alpha_n)=\underbrace{[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]}_{P}\underbrace{\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}}_{\Lambda}$$

.

√ 若 $A\sim B$, $C\sim D$, 则：$\begin{bmatrix}A & o\\ o & C\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}B & o\\ o & D\end{bmatrix}$.

√ 若 $A\sim B$, 则 $f(A)\sim f(B)$, $|f(A)|=|f(B)|$.

二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ A 为对称矩阵 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$

A与B合同 $B=C^TAC$. 记作：$A\simeq B$ （A,B为对称阵,C为可逆阵）

√ 两个矩阵合同的充分必要条件是：它们有相同的正负惯性指数.

√ 两个矩阵合同的充分条件是： $A \sim B$

√ 两个矩阵合同的必要条件是： $r(A)=r(B)$

√ $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ 经 过 $\left\langle \begin{array}{l} \text{正交变换} \\ \text{合同变换} \\ \text{可逆线性变换} \end{array} \right.$ $X=CY$ 化 为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_1^n d_i y_i^2$ 标准型.

√ 二次型的标准型不是惟一的, 与所作的正交变换有关, 但系数不为零的个数是由 $\underbrace{r(A)}_{\text{正惯性指数+负惯性指数}}$ 惟一确定的.

√ 当标准型中的系数 d_i 为 1，−1 或 0 时, 则为$\boxed{\text{规范形}}$.

√ 实对称矩阵的正（负）惯性指数等于它的正（负）特征值的个数.

√ 任一实对称矩阵 A 与惟一对角阵 $\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$ 合同.

√ 用正交变换法化二次型为标准形:

① 求出 A 的特征值、特征向量;

② 对 n 个特征向量单位化、正交化;

③ 构造 C（正交矩阵）, $C^{-1}AC=\Lambda$;

④ 作变换 $X=CY$, 新的二次型为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_1^n d_i y_i^2$, Λ 的主对角上的元素 d_i 即为 A 的特征值.

$\boxed{\text{正定二次型}}$ $x_1,x_2,\cdots,x_n$不全为零，$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)>0$.

$\boxed{\text{正定矩阵}}$ 正定二次型对应的矩阵.

√ 合同变换不改变二次型的正定性.

√ 成为正定矩阵的充要条件（之一成立）：

① 正惯性指数为n；

② A的特征值全大于0；

③ A的所有顺序主子式全大于0；

④ A合同于E，即存在可逆矩阵Q使$Q^TAQ=E$；

⑤ 存在可逆矩阵P，使$A=P^TP$ （从而$|A|>0$）；

⑥ 存在正交矩阵，使$C^TAC=C^{-1}AC=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$ （λ_i大于0）.

√ 成为正定矩阵的必要条件：$a_{ii}>0$ ；$|A|>0$.