本试卷适用范围
本科二年级

南京农业大学试题（2010.1.）

学年 2009-2010 第 1 学期 课程类型：必修

试 卷 类 型：（A）

课程 <u>概率论与数理统计</u> 班级 ________ 学号________ 姓名____________ 成绩__________

特别说明： • 考试不准携带使用计算器

• 所有解答必须填写在本试卷对应试题的空白处，否则无效

• 数学用表：$\sqrt{2\pi}=2.5066$，$\Phi(1)=0.8413$，$\frac{1}{\sqrt{13}}=0.277$，

$\Phi(0.277)=0.6100$，$\Phi(2.493)=0.9938$，$\Phi(3)=0.9987$.

一．选择题（每小题 2 分，共 12 分）：

1．设 $P(A)=0.8, P(B)=0.7, P(A|B)=0.8$，则下列结论正确的是（　　）

(A)　A 与 B 相互独立　　(B)　A 与 B 互不相容

(C)　$B\supset A$　　(D)　$P(A+B)=P(A)+P(B)$

2．若函数 $y=f(x)$ 是一随机变量 X 的密度函数，则一定成立的是　（　　）

(A)　$f(x)$ 的定义域为 $[\,0,\ \ 1\,]$；　(B)　$f(x)$ 的值域为 $[\,0,\ \ 1\,]$；

(C)　$f(x)$ 为非负；　(D)　$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

3．若随机变量 X 与 Y 不相关，则与之等价的条件是　（　　）

(A)　$D(X+Y)=D(X)D(Y)$；　(B)　$D(X+Y)=D(X-Y)$；

(C)　$D(X+Y)\neq D(X)D(Y)$；　(D)　$D(X+Y)\neq D(X-Y)$.

4．记随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x+3)^2}{4}}$　$(x\in(-\infty,+\infty))$，则服从

$N(0,\ 1)$的随机变量为 （　　）

(A) $\dfrac{X+3}{2}$； (B) $\dfrac{X-3}{\sqrt{2}}$； (C) $\dfrac{X-3}{2}$； (D) $\dfrac{X+3}{\sqrt{2}}$.

5．设随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$独立同分布，并且$E(X_i)=1, D(X_i)=8$，

$(i=1, 2, \cdots, n)$，则用切比雪夫不等式可估计$P\left\{\left|\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-1\right|<4\right\}\geq$ （　　）

(A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $1-\dfrac{1}{2n}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{1}{2n}$

6．设一批零件的长度服从正态分布$N(\mu,\ \sigma^2)$，其中μ, σ^2均未知。现从中随机抽取 16 个零件，测得样本均值$\overline{x}=20(cm)$，样本标准差$s=1(cm)$，则μ的置信水平为 0.9 的置信区间是 （　　）

(A) $\left(20-\dfrac{1}{4}t_{0.05}(16),\ \ 20+\dfrac{1}{4}t_{0.05}(16)\right)$

(B) $\left(20-\dfrac{1}{4}t_{0.1}(16),\ \ 20+\dfrac{1}{4}t_{0.1}(16)\right)$

(C) $\left(20-\dfrac{1}{4}t_{0.05}(15),\ \ 20+\dfrac{1}{4}t_{0.05}(15)\right)$

(D) $\left(20-\dfrac{1}{4}t_{0.1}(15),\ \ 20+\dfrac{1}{4}t_{0.1}(15)\right)$

二．填空题（每小题 2 分，共 12 分）：

1．口袋中有 4 只白球 2 只黑球，从中随机地取出 3 只球，则取出 2 只白球 1 只黑球的概率为＿＿＿＿＿＿＿．

2．设$X\sim N(2,\ 9)$，$\Phi(2)=0.9772$，则概率$P\{X>8\}=$＿＿＿＿＿＿＿．

3．若连续型随机变量X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ kx, & 0\le x\le 1,\\ 1, & x>1\end{cases}\qquad \text{则 } k=\_\_\_\_\_\_\_\_\_ .$$

4．设 $X\sim b(n,\ p)$，且 $E(X)=0.5, D(X)=0.45$，则 $p=$ ________ .

5．设随机变量 X，Y 独立同分布且 X 的分布函数为 $F(x)$，则 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数 $F_Z(x)=$ ____________ .

6．设总体 X 的分布函数为 $F(x;\theta)$，其中 θ 为未知参数，若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自该总体的一个样本，则 $D(X)$ 的矩估计量为 ___________ .

三．(12 分)某人从南京去武汉，他乘火车、乘船、乘汽车、乘飞机的概率分别为 0.3，0.2，0.1 和 0.4．已知他乘火车、乘船、乘汽车而迟到的概率分别为 0.25，0.3，0.1，而乘飞机不会迟到．当这个人赶到武汉时已经迟到了，问：他是乘火车去的可能性有多大?

四．(12 分)设二维随机变量 $(X,\ Y)$ 的分布律为

Y \ X	-2	-1	1	2
1	0	0.25	0.25	0
4	0.25	0	0	0.25

(1) 求 X，Y 的相关系数 ρ_{XY}；　(2) 判断 X，Y 是否相互独立．说明理由；

(3) 求概率 $P\{X+Y<1\}$.

五．(12 分)某种型号器件的寿命 X (以小时计)具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1000}{x^2}, & x>1000,\\ 0, & otherwise.\end{cases}$$

现有一大批此种器件(设各器件损坏与否相互独立)，任取 5 只，问其中至少有 2 只寿命大于 1500 小时的概率是多少?

六．(8 分) 设 X 与 Y 是两个相互独立的随机变量，$X \sim U(0,1)$，Y 的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & y \ge 0,\\ 0, & y<0,\end{cases}$$

(1) 求 (X, Y) 的密度函数；

(2) 设含有 a 的二次方程为 $a^2+2Xa+Y=0$，求 a 有实根的概率.

七．(10 分)设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $N(0,\ 1)$ 的样本，样本均值 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，

样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$．试证明：

(1) $E\left(\overline{X}^2\cdot S^2\right)=\frac{1}{n}$；　(2) $D\left(S^2\right)=\frac{2}{n-1}$．

八．(12 分)某商店出售某种贵重商品．根据经验，该商品每周销售量服从参数为 $\lambda=1$ 的泊松分布．假定各周的销售量是相互独立的，用中心极限定理计算该商店一年内(52周)售出该商品件数在 50 件到 70 件之间的概率．

九．(10 分)设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda^2 x e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & otherwise,\end{cases}$$

其中参数 $\lambda\ (\lambda>0)$ 未知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，试求参数 λ 的最大似然估计量．

概率统计（A）卷答案：

一．ACBDBC

二．1．0.6　　2．0.0228　　3．1　　4．0.1　　5．$F^2(x)$　　6．B_2

三．记 A,B,C,D 为此人乘火车、乘船、乘汽车、乘飞机，E 为此人迟到,则

$P(E)=P(E|A)P(A)+P(E|B)P(B)+P(E|C)P(C)+P(E|D)P(BD)=0.145$，6 分

$$P(A|E)=\frac{P(E|A)P(A)}{P(E)}=0.517 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ 6 分}$$

四．(1) ρ_{XY}=0：(4 分)　(2) X, Y 不相互独立；(4 分)

(3) 概率 $P\{X+Y<1\}$=0.25．(4 分)

五．$P\{X>1500\}=\int_{1500}^{+\infty}\frac{1000}{x^2}dx=\frac{2}{3}$；……………………………… 5 分

以 Y 表示所取 5 只器件中寿命大于是 1500 小时的只数，则

$$Y\sim b\left(5,\ \frac{2}{3}\right), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ 5 分}$$

$$\therefore\quad P\{Y\geq 2\}=1-P\{Y=0\}-P\{Y=1\}=\frac{232}{243}$$

$$=\frac{232}{243}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ 2 分}$$

六．(1)．$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & 0<x<1,\ y>0,\\ 0, & otherwise,\end{cases}$ …………………… 4 分

(2) $P\{X^2\geq Y\}=\iint\limits_{x^2\geq y} f(x,y)dxdy=0.1445$ …………………… 4 分

七．　(1) $E(\overline{X}^2\cdot S^2)=E(\overline{X}^2)E(S^2)=D(\overline{X})+[E(\overline{X})]^2=\frac{1}{n}$；….. ….. 5 分

(2) $(n-1)S^2 \sim \chi^2(n-1)$

$D(S^2) = \dfrac{2}{n-1}$ .... 5 分

八．设 $X_i = \{$第 i 周的销售量$\}$ $(i = 1, 2, \cdots, 52)$，则一年的销售量

$Y = \sum_{i=1}^{52} X_i$，X_i $(i = 1, 2, \cdots, 52)$独立同分布，$E(X_i) = 1,\ D(X_i) = 1$，6 分

$P\{50 < Y < 70\} \approx \Phi\left(\dfrac{18}{\sqrt{52}}\right) + \Phi\left(\dfrac{2}{\sqrt{52}}\right) - 1 = 0.6038$ .... 6 分

九．构造似然函数

$L(\lambda) = \lambda^{2n} \prod_{i=1}^{n} x_i e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i} \quad (x_i > 0)$ .... 6 分

取对数求导数，得 λ 的最大似然估计量为

$\hat{\lambda} = \dfrac{2}{\overline{X}}$ .... 4 分