FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS y NATURALES

U.N.C.

Cátedra de Sistemas de Control ll

Año 2024

Informe de Trabajo Práctico N° 4

Alumna: Guadalupe Vega

Docente: Ing. Laboret

Sistema de cuatro variables: Péndulo

Estabilidad

Se desea que el péndulo se estabilice en el ángulo δ, teniendo en cuenta la ecuación:

$$ml^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mglsen(\theta) = T$$

siendo $m = 1,\ b = 0.3,\ g = 10,\ l = 1\ y\ \delta = 90°$.
Entonces, tomando como estados, entrada y salida respectivamente

$$x_1 = \theta - \delta = e$$
$$x_2 = \dot{\theta}$$
$$u = T$$
$$y = e$$

Para hallar el sistema dinámico, se realizan las siguientes asignaciones:

$$x_1 = \theta - \delta = e$$
$$\dot{x_1} = \dot{\theta} = x_2$$
$$x_2 = \dot{\theta}$$
$$\dot{x}_2 = \ddot{\theta}$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{\theta} = \frac{T - b\cdot\dot{\theta} - m\cdot g\cdot l\cdot sen(\theta)}{m\cdot l^2} = \frac{T}{m\cdot l^2} - \frac{b\cdot\dot{\theta}}{m\cdot l^2} - \frac{g\cdot sen(\theta)}{l}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{u}{m\cdot l^2} - \frac{b\cdot x_2}{m\cdot l^2} - \frac{g\cdot sen(x_1 + \delta)}{l}$$

Definiendo:

$$\alpha = \frac{1}{m\cdot l^2}$$

$$\beta = \frac{g}{l}$$

$$\dot{x_1} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \alpha\, u - \alpha\, b\, x_2 - \beta sen(x_1 + \delta)$$

Ahora, para que el sistema tenga como punto de equilibrio el origen, el torque debe tener una componente estática que compense la fuerza de la gravedad. Por lo tanto, la acción de control debe ser:

$$u = T - T_f \Rightarrow T = u + T_f$$

hallando T_f con la ecuación valuada en el origen, es decir con $f(o, u_f) = 0$

$$\dot{x}_2 = f(0, u_f) = \alpha\, u_f - \alpha\, b\, 0 - \beta \cdot sen(0 + \delta) = 0$$

$$u_f = \frac{\beta \cdot sen(\delta)}{\alpha} = \frac{\frac{g}{l} \cdot sen(\delta)}{\frac{1}{m \cdot l^2}}$$

$$u_f = mglsen(\delta) = 1 * 10 * 1 * sen(180) = 0$$

Reemplazando T, se obtiene el sistema con el punto de equilibrio en el origen:

$$\dot{x_1} = f_1(x, u) = \dot{\theta}$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x, u) = \ddot{\theta} = \alpha u - \alpha \cdot b \cdot x_2 - \beta \cdot [sen(x_1 + \delta) - sen(\delta)]$$

Linealización

Para linealizar el sistema mediante la Jacobiana, se valúa el sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

en el punto:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_f \end{bmatrix}$$

y se comienzan a calcular las matrices A, B y C:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cdot \cos(\delta) & -\frac{b}{m \cdot l^2} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m \cdot l^2} \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 0]$$

Obteniendo:

```
Aa =

         0    1.0000
         0   -0.3000


Bb =

     0
     1


Cc =

     1     0
```

Autovalores

Es posible determinar la estabilidad del sistema por el método indirecto de Lyapunov, el cual utiliza los autovalores de la matriz A. Se establece que si los autovalores:

- Resultan todos con parte real negativas, el origen del sistema no lineal es asintóticamente estable.
- Existe al menos uno cuya parte real sea positiva, el origen del sistema no lineal es inestable.
- Sin parte real positiva ni nulos, pero hay al menos uno sobre el eje jw, el método falla y los términos de orden superior deciden la estabilidad.

Considerando lo obtenido:

```
autoval =

         0
   -0.3000
```

entonces, para este caso, se tiene un autovalor positivo y uno negativo, por lo que el origen del sistema no lineal es inestable.

Comparación de resultados con Simulink

```
A =

         0    1.0000
         0   -0.3000


B =

     0
     1


C =

     1     0


D =

     0
```

```
autoval_2 =

         0
   -0.3000

La matriz A es controlable
```

Se puede ver que las matrices obtenidas y los autovalores, coinciden con las anteriormente calculadas, además se calculó la controlabilidad del sistema verificando que la matriz A es controlable. Por lo que se concluye que los resultados son correctos.

Matrices para Sistema Ampliado

Aplicando

$$A_A = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}; \quad B_A = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

se tiene:

```
Aamp =

         0    1.0000         0
         0   -0.3000         0
    1.0000         0         0


Bamp =

     0
     1
     0
```

```
autoval_Aamp =

         0
         0
   -0.3000


ans =

     3

La matriz Aamp es controlable
```

Controlador por Asignación de Polos (Ackerman)

Para diseñar el controlador se debe tener en cuenta que:

$$u = -[k_1 \quad k_2 \quad k_3] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \sigma \end{bmatrix}$$

para poder ubicar el polo p, lo que da una respuesta sin sobrepaso y el tiempo 2% sería:

$$t_{ss} \simeq \frac{7.5}{-p}$$

Entonces, mediante las siguientes líneas de código, fue posible obtener el controlador K.

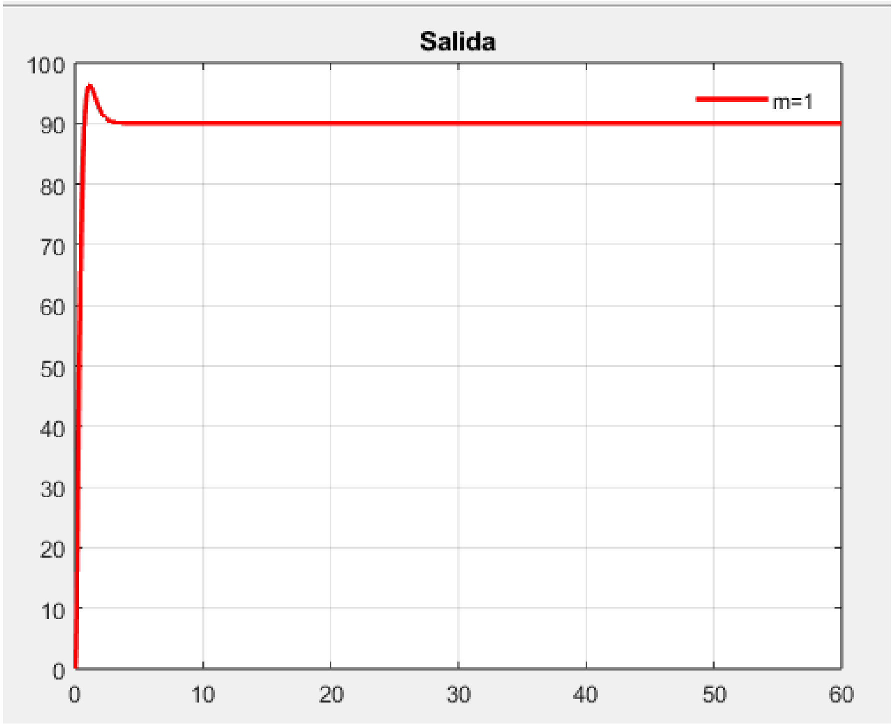
```
% Diseño de controlador por Asignación de Polos

p = -3;                 %polo triple
K = acker(Aamp,Bamp,[p p p])
k1 = K(1)
k2 = K(2)
k3 = K(3)
eig(Aamp-Bamp*K)        %polos lazo cerrado
tscalc = 7.5/(-p)       %tiempo de respuesta calculado
```

```
K =

   27.0000    8.7000   27.0000
```

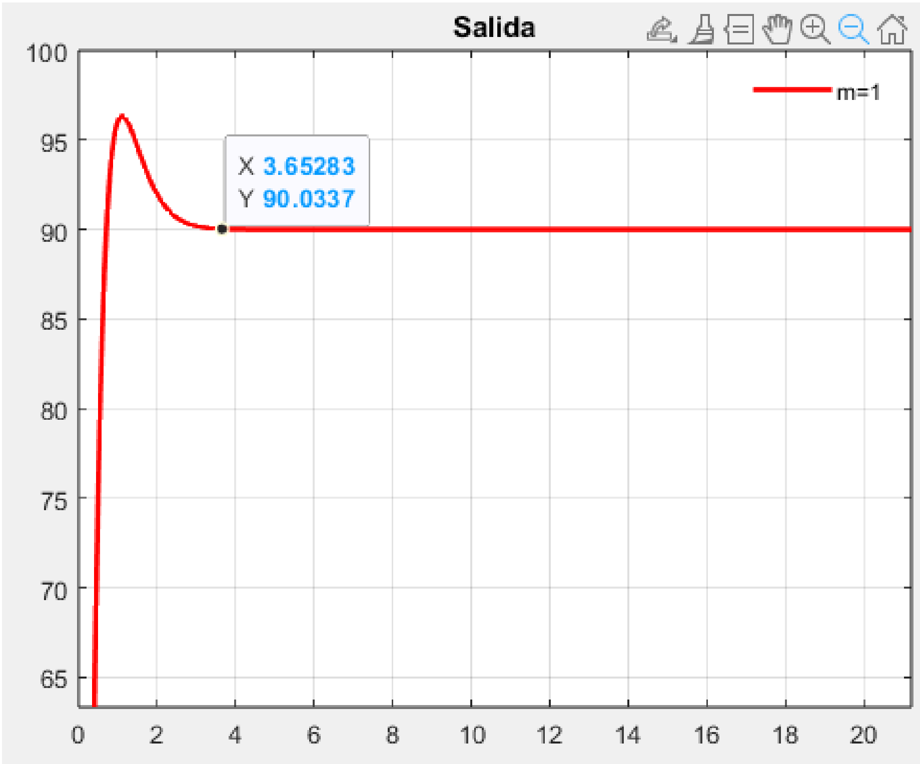
Con el polo en -3, el tiempo de respuesta queda:

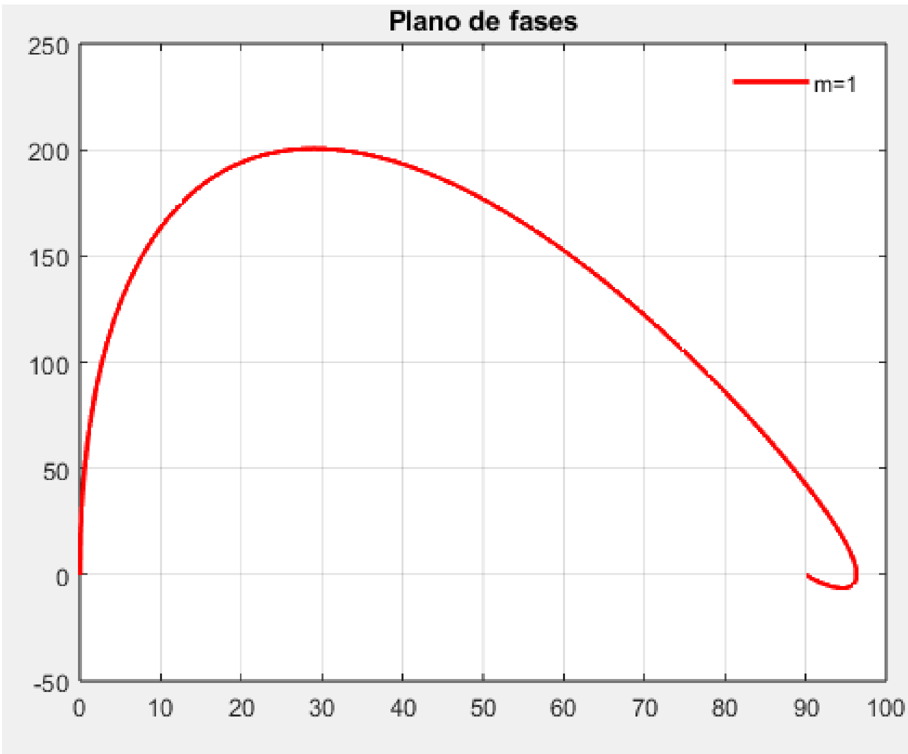
```
ans =

  -3.0000 + 0.0000i
  -3.0000 - 0.0000i
  -3.0000 + 0.0000i


tscalc =

    2.5000
```

Péndulo con PID

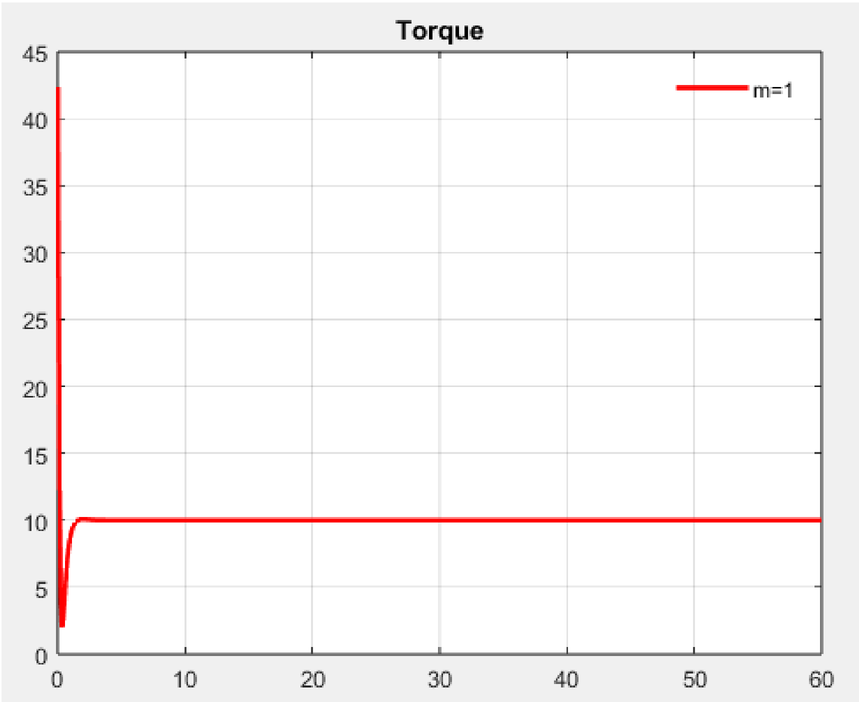


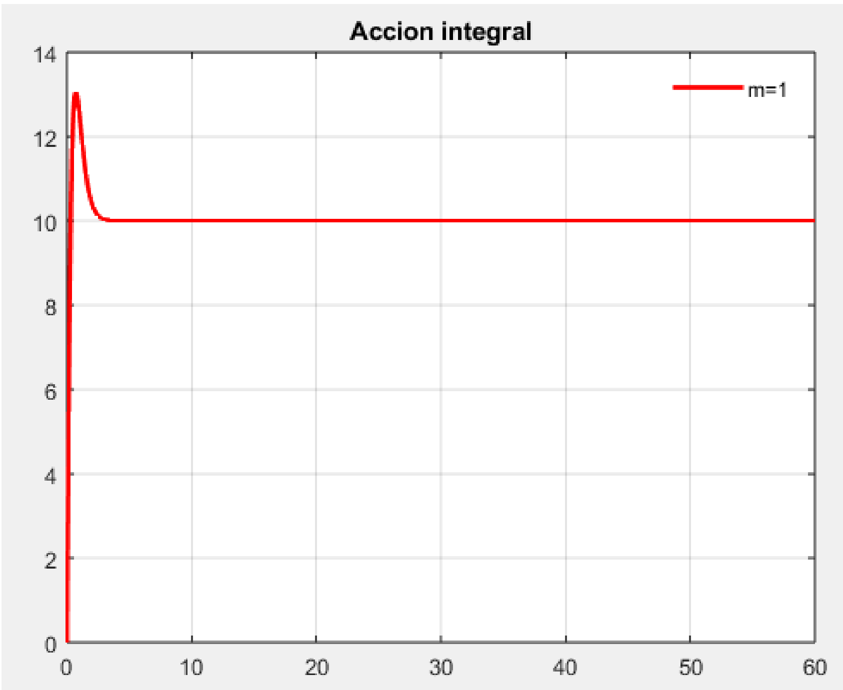
Vemos que se estabiliza a los 3.65 $[seg]$



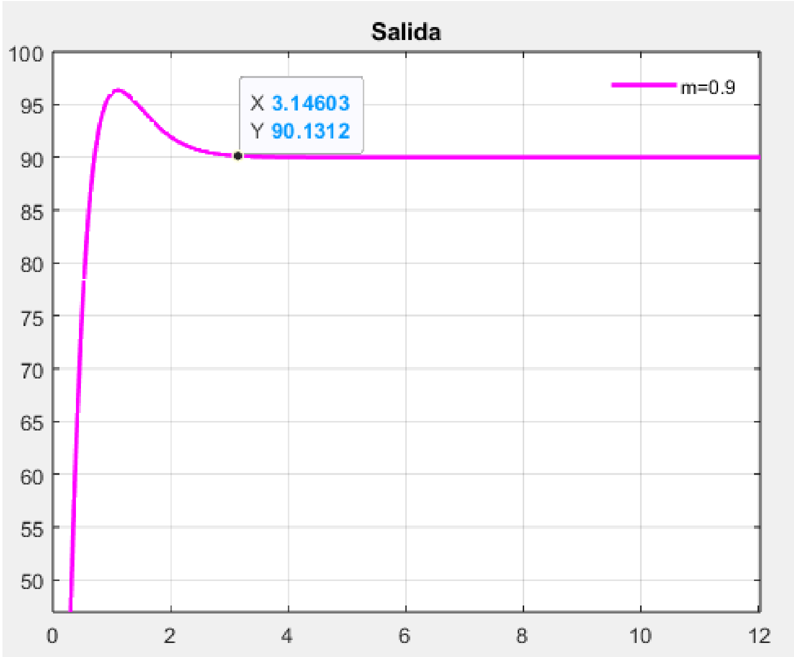


Puede apreciarse que el torque en estado de régimen tiene el mismo valor que el máximo necesario para establecer el sistema en cero, lo cual corrobora la exactitud del cálculo sobre T_f realizado en la sección anterior.

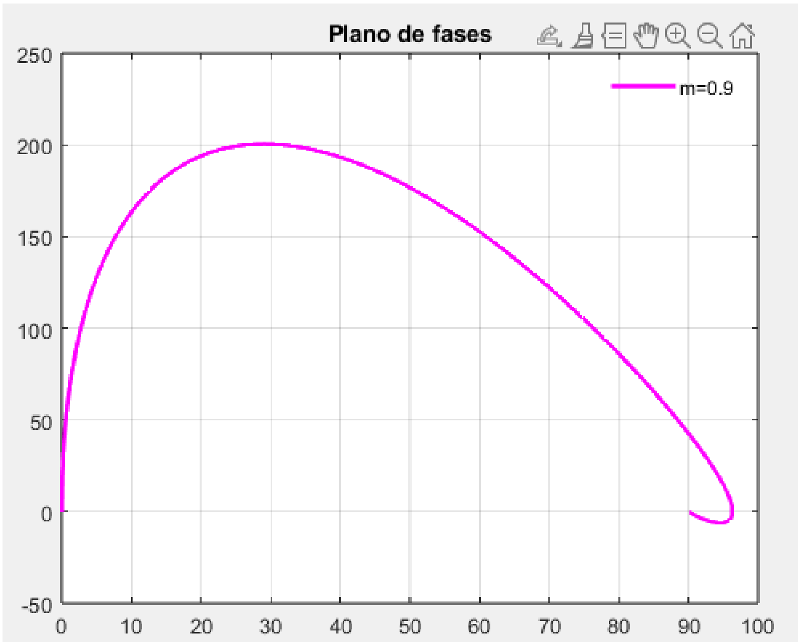




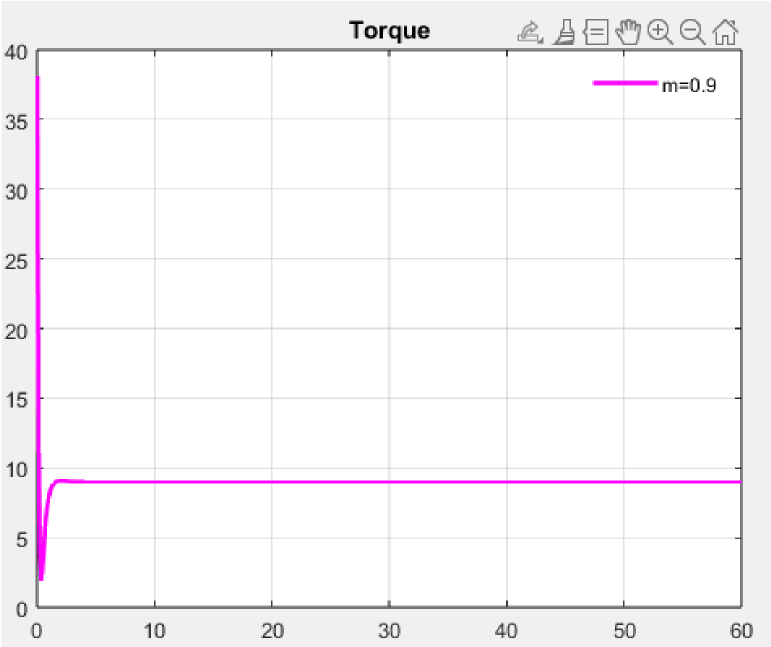
Simulaciones con la masa disminuida(m=0.9)

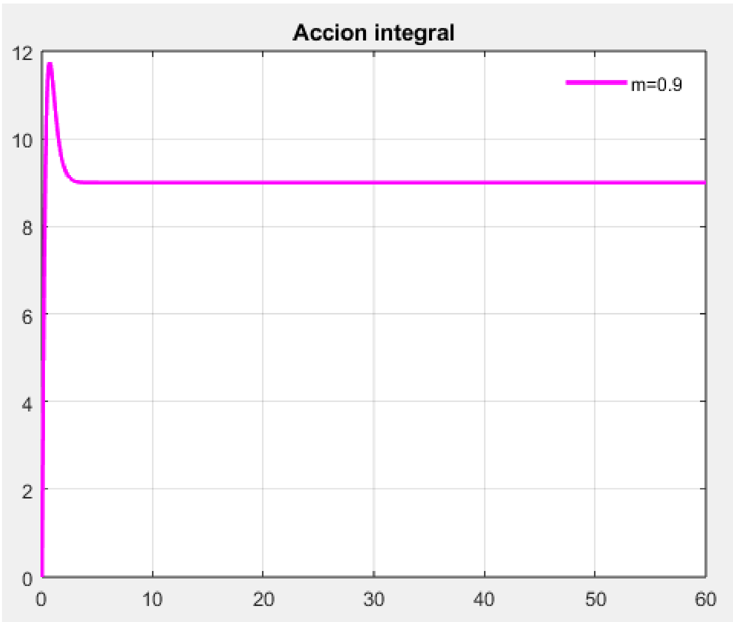


Salida
m=0.9
X 3.14603
Y 90.1312
100
95
90
85
80
75
70
65
60
55
50
0
2
4
6
8
10
12

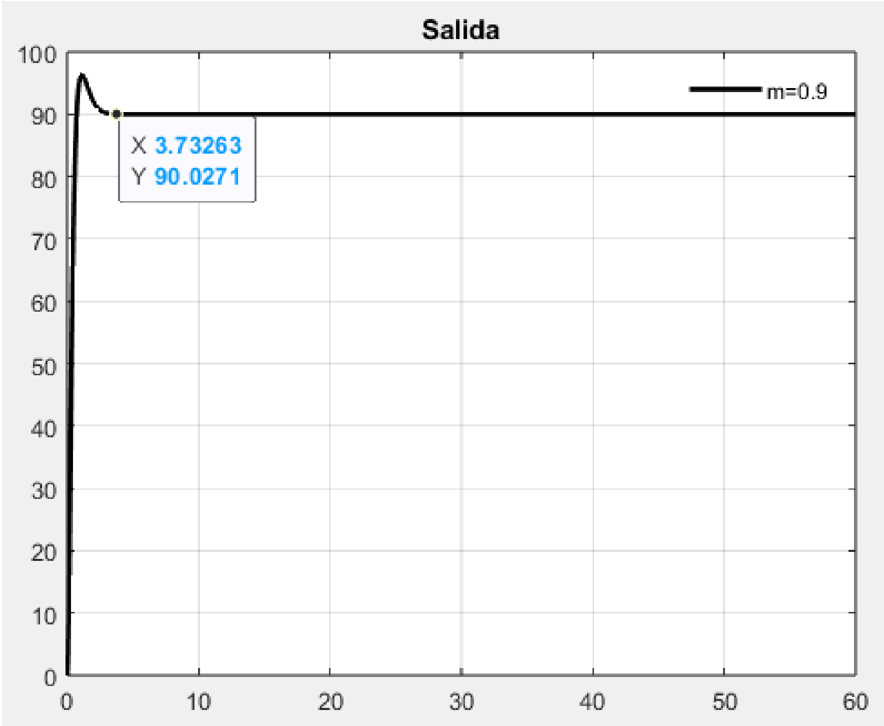


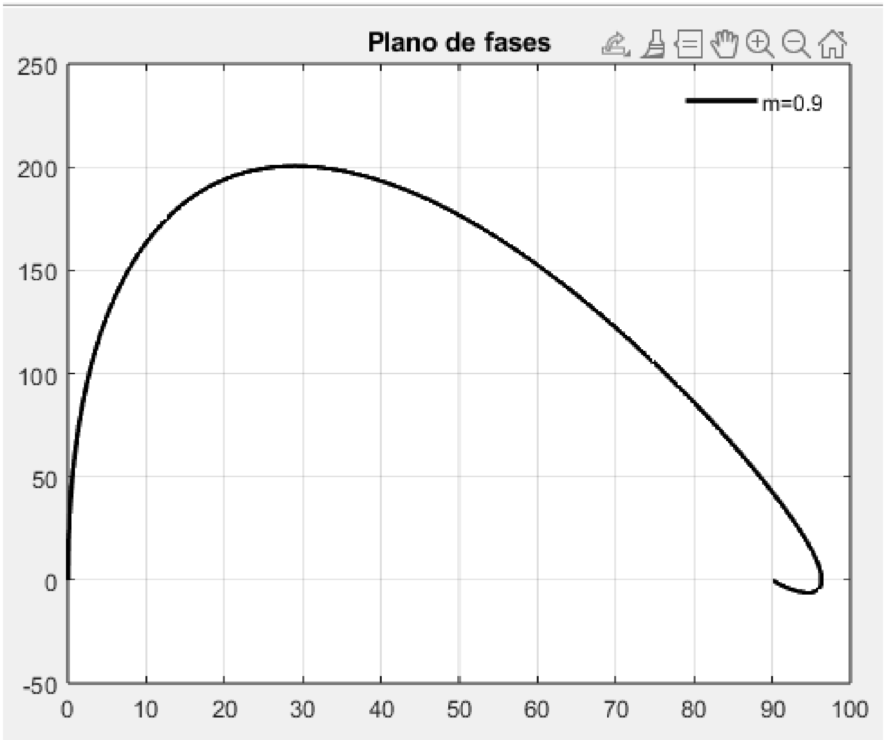
Plano de fases
m=0.9
250
200
150
100
50
0
-50
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

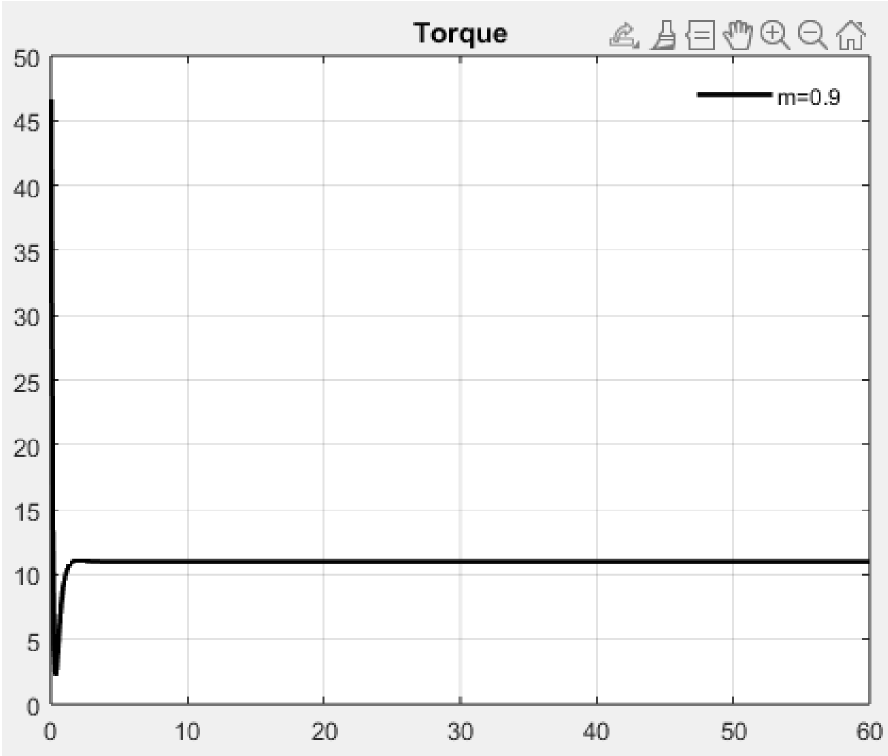


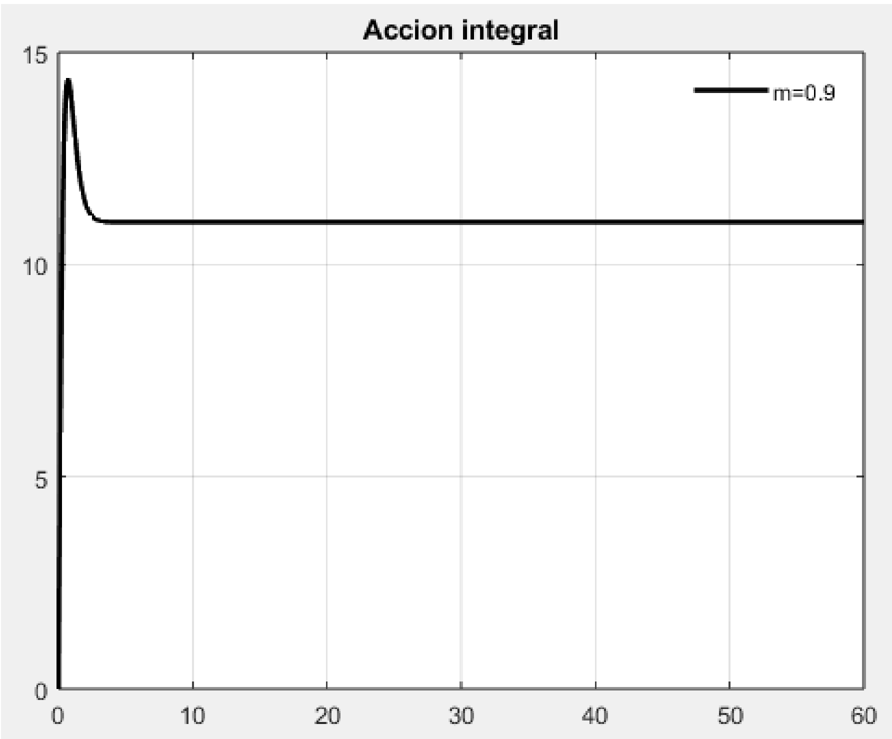


Simulaciones con masa aumentada (m=1.1)


Salida
m=0.9
X 3.73263
Y 90.0271
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0
10
20
30
40
50
60


Plano de fases
m=0.9
250
200
150
100
50
0
-50
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100


Torque
m=0.9
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
0
10
20
30
40
50
60

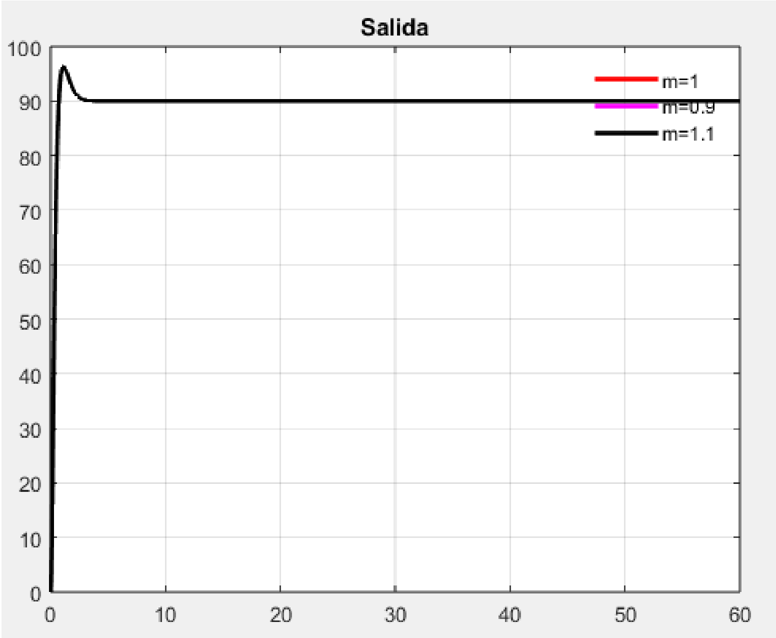

Accion integral
m=0.9
15
10
5
0
0
10
20
30
40
50
60

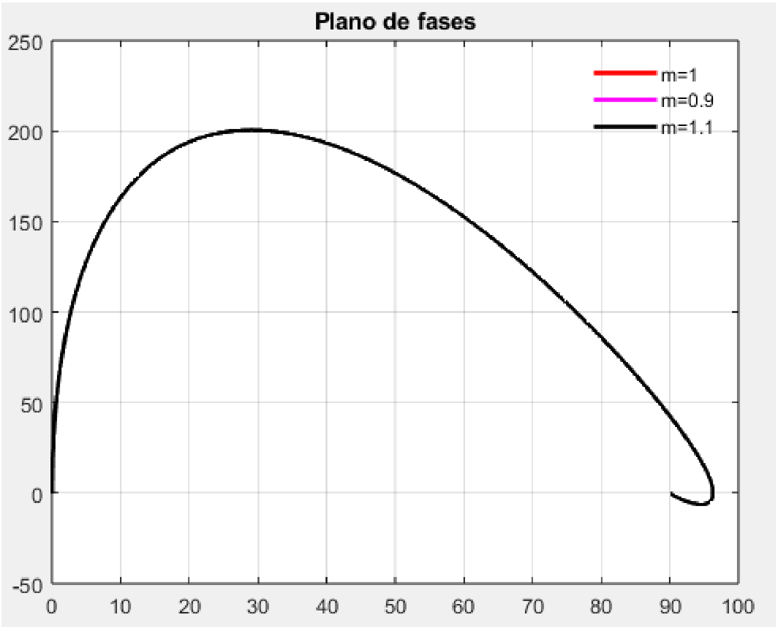
Comparando las tres simulaciones:

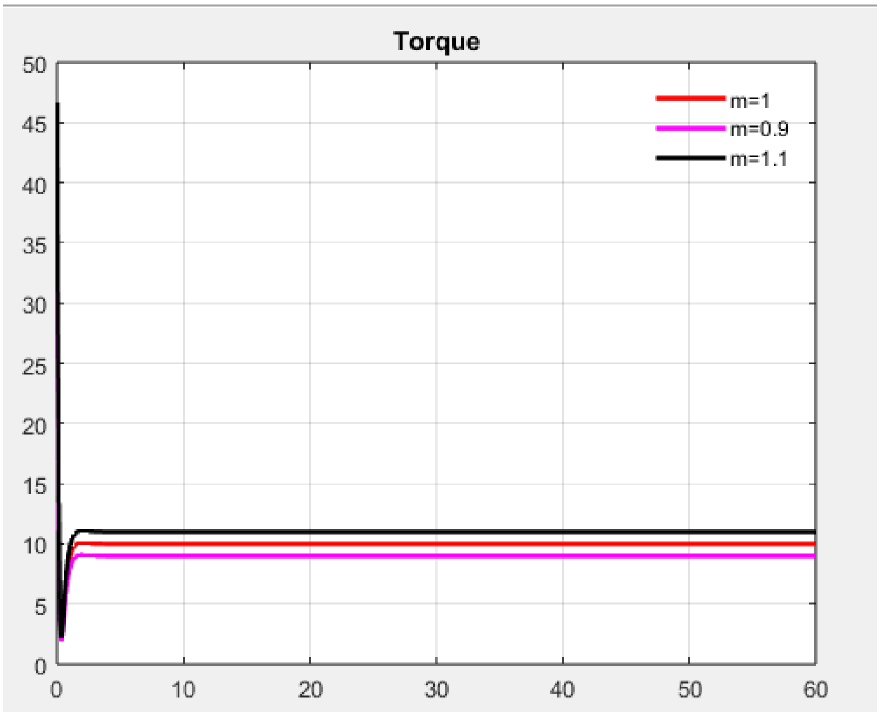
Resultados	**M = 0.9**	**M = 1**	**M= 1.1**
Y_{MAX} **(Max valor de Salida)**	96.3241	96.3241	96.3241
$S[\%]$ **(Sobrepaso)**	7.0268 [%]	7.0268[%]	7.0268[%]
E_f **(Error Final)**	1.6690e-13	1.6690e-13	1.6721e-13
T_{SS} **(Tiempo de Establecimiento)**	2.0408	2.0408	2.0408
Y_{tss} **(Salida al tiempo Tss)**	91.8003	91.8003	91.8003
U_f **(Torque Final)**	9.0000	10.0000	11.0000
Int_f **(Acción Integral Final)**	9.0000	10.0000	11.0000

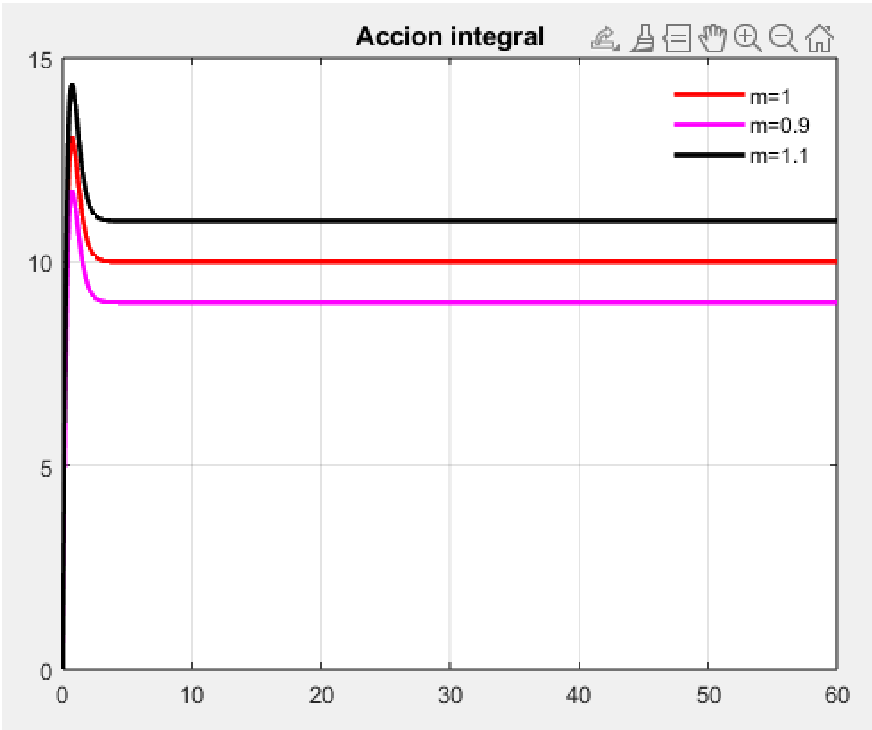
Se observa que los únicos valores que varían de forma apreciable son los de torque y acción integral, por lo que se puede considerar que, a pesar de variar la masa del sistema, el controlador cumple con su objetivo, entonces se puede decir que el controlador es Robusto.

Comparando las gráficas, se puede visualizar lo obtenido en la tabla:






Torque
m=1
m=0.9
m=1.1
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
0
10
20
30
40
50
60


Accion integral
m=1
m=0.9
m=1.1
15
10
5
0
0
10
20
30
40
50
60