INFORMATICA

Antes:

- Dudas sobre el examen:
  - Ecuación de segundo grado
  - Sumatorios
  - Vectores

- Clase de hoy:
  - Funciones intrínsecas
  - Ejercicio polinomio de Taylor
    - Matemáticas
    - Programación

Operaciones con vectores y matrices

```
program producto_matriz

integer, allocatable      :: A(:,:)
integer  :: i,k

allocate (A(3,5))

A = 0
k = 7
do i = 1, 3
        A(i,i)= 1
enddo

A = k*A

do i = 1,3
        write(*,*) A(i,:)
enddo

end program
```

¡Recordatorio!

```
7 0 0 0 0
0 7 0 0 0
0 0 7 0 0
```

Con esto escribimos una matriz por filas (una fila por cada valor de i)

Funciones intrínsecas.

- Son funciones predefinidas que se pueden utilizar sin declarar previamente.
- Las funciones pueden tener argumentos de tipo:
  - Númerico:
    - Conversión de tipo
    - Truncamiento
    - Redondeo
    - Matemáticas
  - Array
    - Matemáticas
    - Búsqueda
    - Dimensiones
  - Character

Funciones intrínsecas.

- Funciones numéricas. Conversión de tipo

  - **Real**(x[,k]) ⟶ convierte x a real(kind=k)
    - Tipo del argumento (x): integer, real o complex
    - Tipo de la función: real

  - **dble**(x) ⟶ convierte x a real*8
    - Tipo del argumento (x): integer, real o complex
    - Tipo de la función: real*8

(Los corchetes significan opcional)

Funciones intrínsecas.

- Funciones numéricas. Conversión de tipo

```fortran
program prueba_intrinsecas

integer :: a
real(8) :: xd
real :: x

a = 2

x = real(a)

xd = real(a,KIND=8)

print*, "a", a
print*, "x", x
print*, "xd", xd

end program
```

```
a           2
x    2.00000000
xd    2.0000000000000000
```

Funciones intrínsecas.

- Funciones numéricas. Conversión de tipo

  - `aimag(z)`

    Parte imaginaria del número complejo `z`

    - Tipo del argumento: `complex`
    - Tipo de la función: `real`

  - **`cmplx`**`(x[,y][,k])`

    Número complejo de parte real x e imaginaria y y kind=k

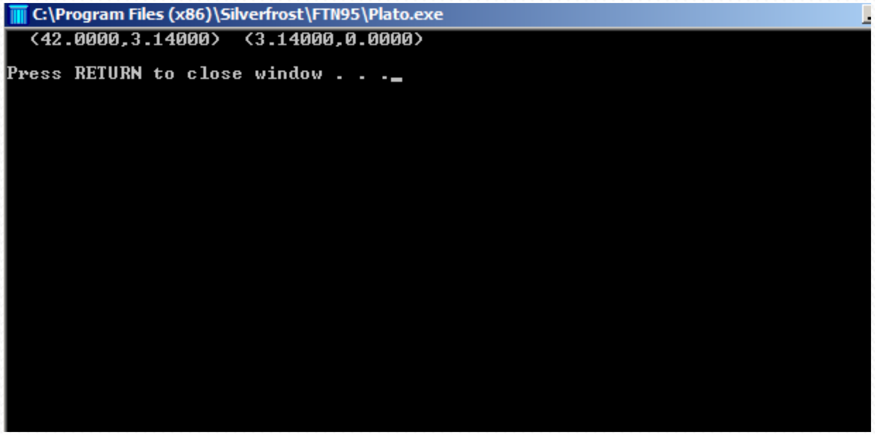
    - Tipo del argumento: `real` o `complex`
    - Tipo de la función: `complex`

Funciones intrínsecas.

- Funciones numéricas. Conversión de tipo

`real`	`:: x`	$\longrightarrow$	`cmplx(x)`	$= x + i0.0$
`real`	`:: x, y`	$\longrightarrow$	`cmplx(x,y)`	$= x + iy$
`complex`	`:: z`	$\longrightarrow$	`cmplx(Z)`	$= Re(z) + iIm(z)$

```
program test_cmplx

 integer :: i = 42
 real :: x = 3.14
 complex :: z

 z = cmplx(i, x)
 write(*,*) z, cmplx(x)

end program test_cmplx
```



Funciones intrínsecas.

- Funciones numéricas. Truncamiento y redondeo

x	aint(x)	anint(x)	int(x)	nint(x)
±5.0	±5.0	±5.0	±5	±5
±5.1	±5.0	±5.0	±5	±5
±5.2	±5.0	±5.0	±5	±5
±5.3	±5.0	±5.0	±5	±5
±5.4	±5.0	±5.0	±5	±5
±5.5	±5.0	±6.0	±5	±6
±5.6	±5.0	±6.0	±5	±6
±5.7	±5.0	±6.0	±5	±6
±5.8	±5.0	±6.0	±5	±6
±5.9	±5.0	±6.0	±5	±6

Funciones intrínsecas.

- Funciones numéricas. Matemáticas

`sqrt(x)`	`log(x)`
`conjg(z)`	`log10(x)`
`max(x1,x2,...)`	`cos(x)`
`min(x1,x2,...)`	`sin(x)`
`exp(x)`	`tan(x)`

`acos(x)`	$0 \leq arccos(\mathrm{x}) \leq \pi$
`asin(x)`	$-\pi/2 \leq arcsen(\mathrm{x}) \leq \pi/2$
`atan(x)`	$-\pi/2 \leq arctg(\mathrm{x}) \leq \pi/2$
`atan2(x,y)`	$-\pi < arctg(\mathrm{y}/\mathrm{x}) \leq \pi$

Funciones intrínsecas.

- Funciones numéricas. Matemáticas
  - `abs(x)`
    - Si x es real `abs(x)=` $\begin{cases} x & \text{si } x>=0 \\ -x & \text{si } x<0 \end{cases}$
    - Si x es complejo `abs(x)=` $\sqrt{x_r^2 + x_i^2}$
  - `mod(x,y)`
    - Ambos x e y pueden ser reales o enteros

    `mod(x,y) = x- int(x/y)•y`

Funciones intrínsecas.

- Funciones numéricas. Matemáticas.

  - epsilon(x)

    - Devuelve un número del mismo tipo y kind que x, que es despreciable frente a la unidad.

      1.d0 ~ 1.d0 ± epsilon(x)

Funciones intrínsecas.

- Funciones para arrays. Búsqueda

  - `size(A,[dim=i])` (Los corchetes significan opcional)

    - Devuelve el tamaño de la dimensión i del array A

    - Ej.- `size(V)` devuelve el numero de elementos del vector V

    - Ej.- `size(Matriz,dim=1)` devuelve el número de filas del array Matriz

    - Ej.- `size(Matriz,dim=2)` devuelve el número de columnas del array Matriz

Funciones intrínsecas.

- Funciones para arrays. Búsqueda

  - `maxval(Array)/minval(Array)`
    - Devuelve el mayor/menor elemento del array.
  - `maxval(Matriz,dim = i)/minval(Matriz,dim = i)`
    - i=1 Devuelve un vector cuyos elementos son el máximo de cada una de las columnas.
    - i=2 Devuelve un vector cuyos elementos son el máximo de cada una de las filas.
    - Ej.-
    - $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ `maxval(A,dim = 2) ! (3,6)`

Funciones intrínsecas.

- Funciones para arrays. Búsqueda

  - `maxloc(Array)/minloc(Array)`

    - `Devuelve la posición (no el índice) del mayor/menor elemento del array.`

    - `Ej.` $V = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ `minloc(V) ! 2`

    - `Ej.` $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ `maxloc(A) ! (2,3)`

    - `Ej.` $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ `minloc(A) ! (2,2)`

Funciones intrínsecas.

- Funciones para arrays. Matemáticas

  - `transpose(A)`

    - Devuelve la matriz transpuesta.

    - Ej.- $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$

    - `B = transpose(A)` $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

Funciones intrínsecas.

- Funciones para arrays. Matemáticas

  - `dot_product(vector_1,vector_2)`
    - Devuelve el producto escalar de los dos vectores.

  - `matmul(A,B)`
    - Devuelve el producto de dos matrices(arrays) con formas compatibles.

Funciones intrínsecas.

```
program producto

integer     :: V(3), U(3)
integer     :: A(3,2), B(2,3), C(3,3)
integer     :: i,j

A = 0
B = 0
do i = 1,2
   A(i,i) = 1
     do j = 1,3
               B(i,j) = j
     enddo
enddo

C = matmul(A,B)
do j = 1,3
    write(*,*) C(j,:)
enddo

end program producto
```

Funciones intrínsecas.

```
program producto

integer     :: V(3), U(3)
integer     :: A(3,2), B(2,3), C(3,3)
integer     :: i,j

A = 0
B = 0
do i = 1,2
   A(i,i) = 1
     do j = 1,3
               B(i,j) = j
     enddo
enddo

C = matmul(A,B)
do j = 1,3
     write(*,*) C(j,:)
enddo

end program producto
```

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Funciones intrínsecas.

```
program producto

integer    :: V(2), U(3)
integer    :: A(3,2)
integer    :: i

do i =1,3
  U(i) = i
enddo

A = 1
V = matmul(U,A)

write(*,*) V

end program producto
```

Funciones intrínsecas.

```
program producto

integer    :: V(2), U(3)
integer    :: A(3,2)
integer    :: i

do i =1,3
  U(i) = i
enddo

A = 1
V = matmul(U,A)

write(*,*) V

end program producto
```

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Funciones intrínsecas.

- Funciones para Character.

  - `len(string)`
    - Devuelve la longitud del string (cadena).
    - Ej.- `len(' Fortran & magic ') = 20`
  - `trim(string)`
    - Devuelve el mismo string quitando los espacios en blanco a la derecha del mismo.
    - Ej.- `trim (' Fortran & magic    ') =`
      `' Fortran & magic'`

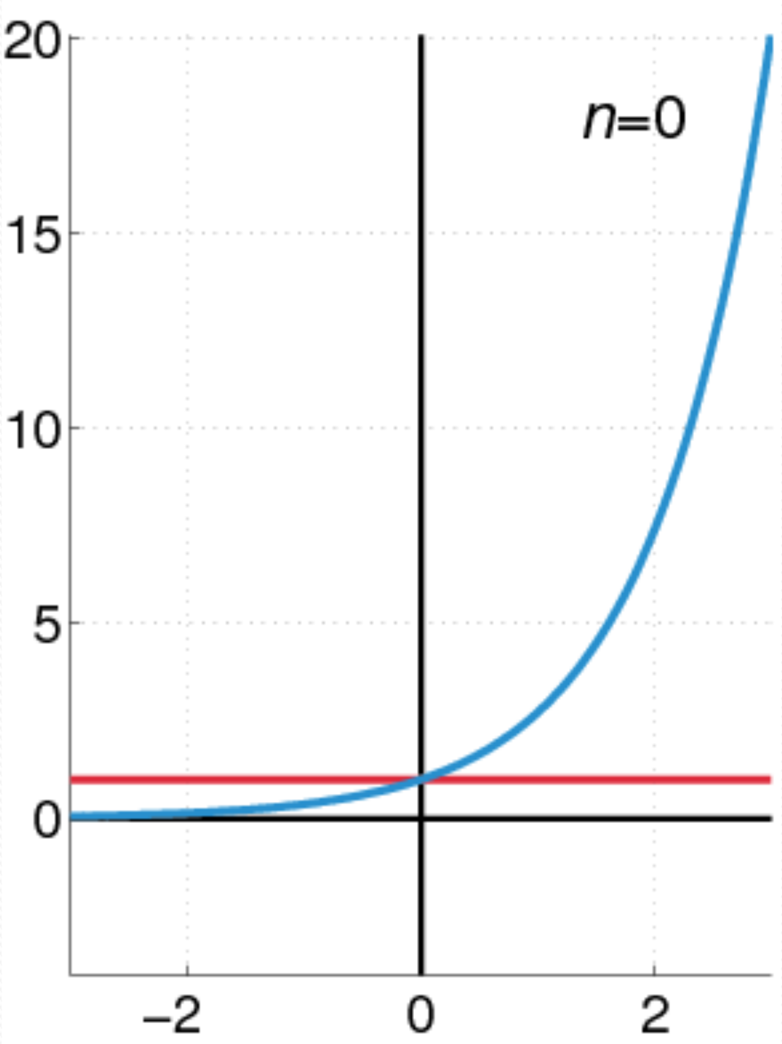
Antes:

- Dudas sobre el examen:
  - Ecuación de segundo grado
  - Sumatorios
  - Vectores

- Clase de hoy:
  - Funciones intrínsecas
  - Ejercicio polinomio de Taylor
    - Matemáticas
    - Programación

Caso de aplicación:

- Serie de Taylor de una función.



Serie de Taylor de una función

Buscamos el polinomio que "más se parece" a una función en el entorno del punto $x = 0$

$$f(x) \approx P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots. + a_N x^N = \sum_{i=0}^{N} a_i x^i$$

Que "se parezcan" implica que al menos su valor sea el mismo en $x = 0$:

$$f(0) = P(0) = a_0 \Rightarrow P(x) = f(0) \text{ Polinomio aproximador de orden 1.}$$

Serie de Taylor de una función

Buscamos el polinomio que "más se parece" a una función en el entorno del punto $x = 0$

$$f(x) \approx P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots. + a_N x^N = \sum_{i=0}^{N} a_i x^i$$

Que "se parezcan" implica que al menos su valor sea el mismo en $x = 0$:

$f(0) = P(0) = a_0 \Rightarrow P(x) = f(0)$ Polinomio aproximador de orden 0.

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \qquad \rightarrow \qquad ¿P(x)?$$

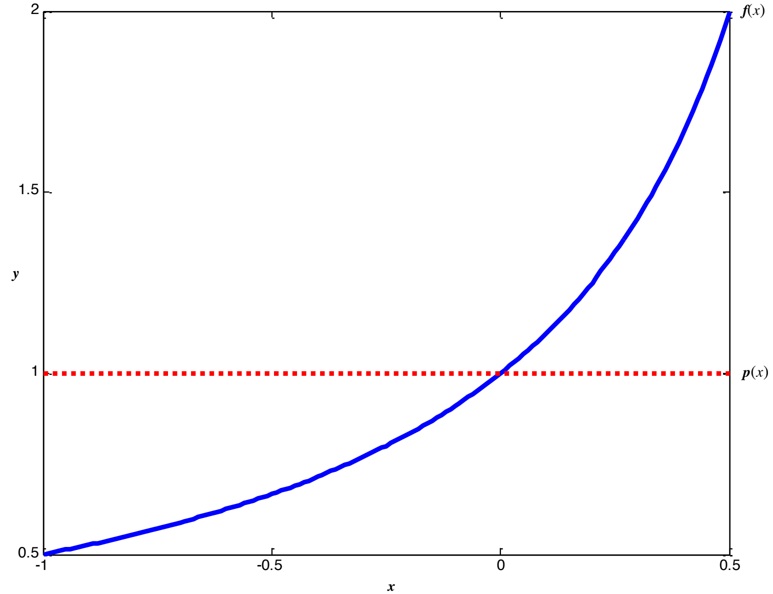
Orden 0: $\boxed{f(0) = 1 \Rightarrow P(x) = 1}$

Serie de Taylor de una función

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \qquad \rightarrow \qquad ¿P(x)?$$

Orden 1: $\boxed{f(0)=1 \Rightarrow \;\; P(x)=1}$



Que "se parezcan" implica que su pendiente (crecimiento) también coincida en $x=0$:

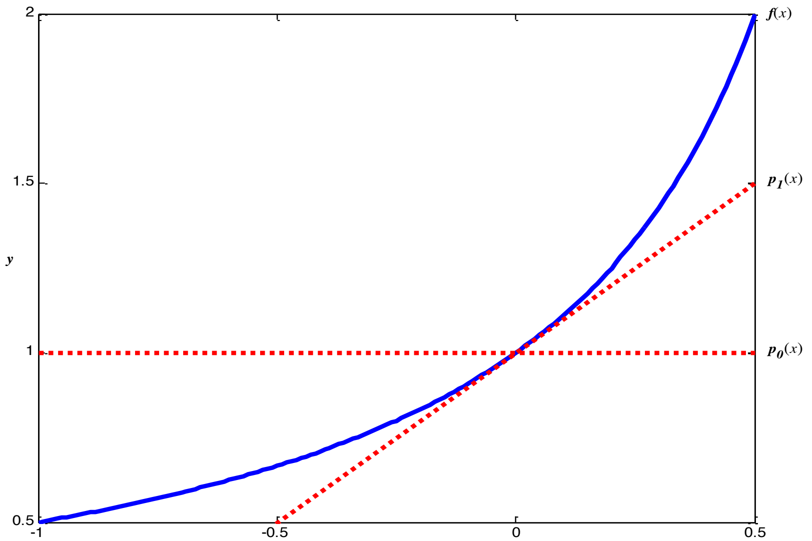
$$f'(0) \;\; = P'(0) = a_1 \Rightarrow (\text{ya sabíamos que } a_0 \;=\; f(0))$$

$$\Rightarrow P(x) = f(0) + f'(0)x$$

Volviendo al ejemplo: $f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2} \qquad \rightarrow \;\; a_1 \;=\; f'(0) = 1$

Orden 1: $\boxed{P(x) = 1 + x}$

Serie de Taylor de una función



Orden 1: $\boxed{P(x) = 1 + x}$

Si seguimos forzando la igualdad en derivadas sucesivas en $x = 0$:

$$f''(0) = P''(0) = 2 \cdot a_2 \rightarrow a_2 = \frac{f''(0)}{2}$$

$$f'''(0) = P'''(0) = 3 \cdot 2 \cdot a_3 \rightarrow a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}$$

$$f''''(0) = P''''(0) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_4 \rightarrow a_4 = \frac{f''''(0)}{4!}$$

....

$$f^n(0) = P^n(0) = n \cdot n-1 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_n \rightarrow a_n = \frac{f^n(0)}{n!}$$

eiae UPM

Serie de Taylor de una función

$$f(x) \approx P(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^N(0)}{N!}x^N = \sum_{i=0}^{N} \frac{f^i(0)}{i!}x^i$$

En nuestro caso particular de $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ en un entorno de $x = 0$

$$f''(x) = \frac{2(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{2}{(1-x)^3} \Rightarrow f''(0) = 2$$

$$f'''(x) = \frac{3\cdot 2\cdot (1-x)^2}{(1-x)^6} = \frac{3\cdot 2}{(1-x)^4} \Rightarrow f'''(0) = 3\cdot 2$$

$$\vdots$$

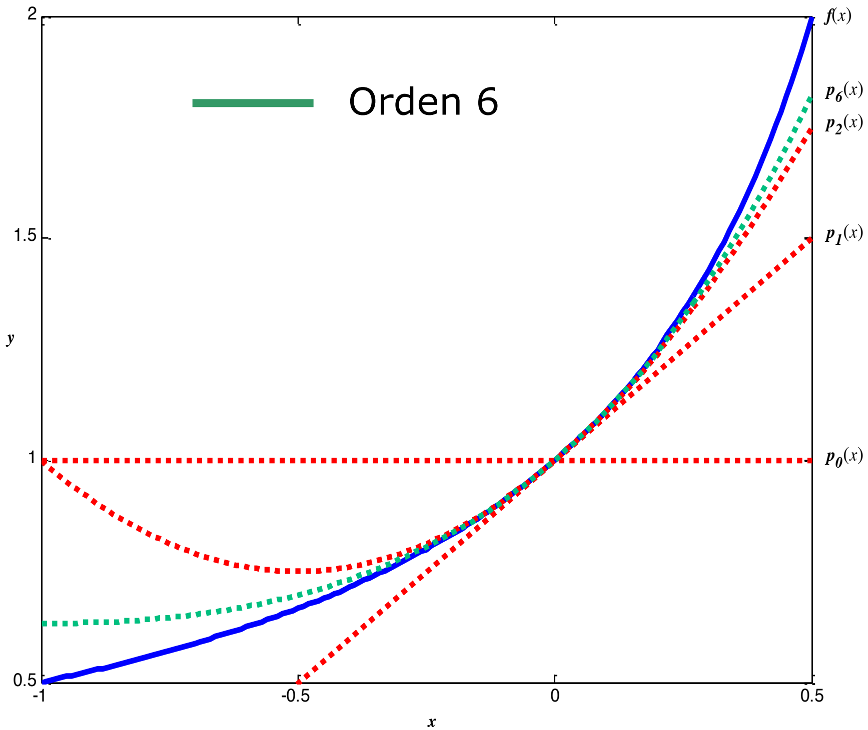
$$f'^n(x) = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{(1-x)^{n+1}} \Rightarrow f'^n(0) = n!$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Serie de Taylor de una función

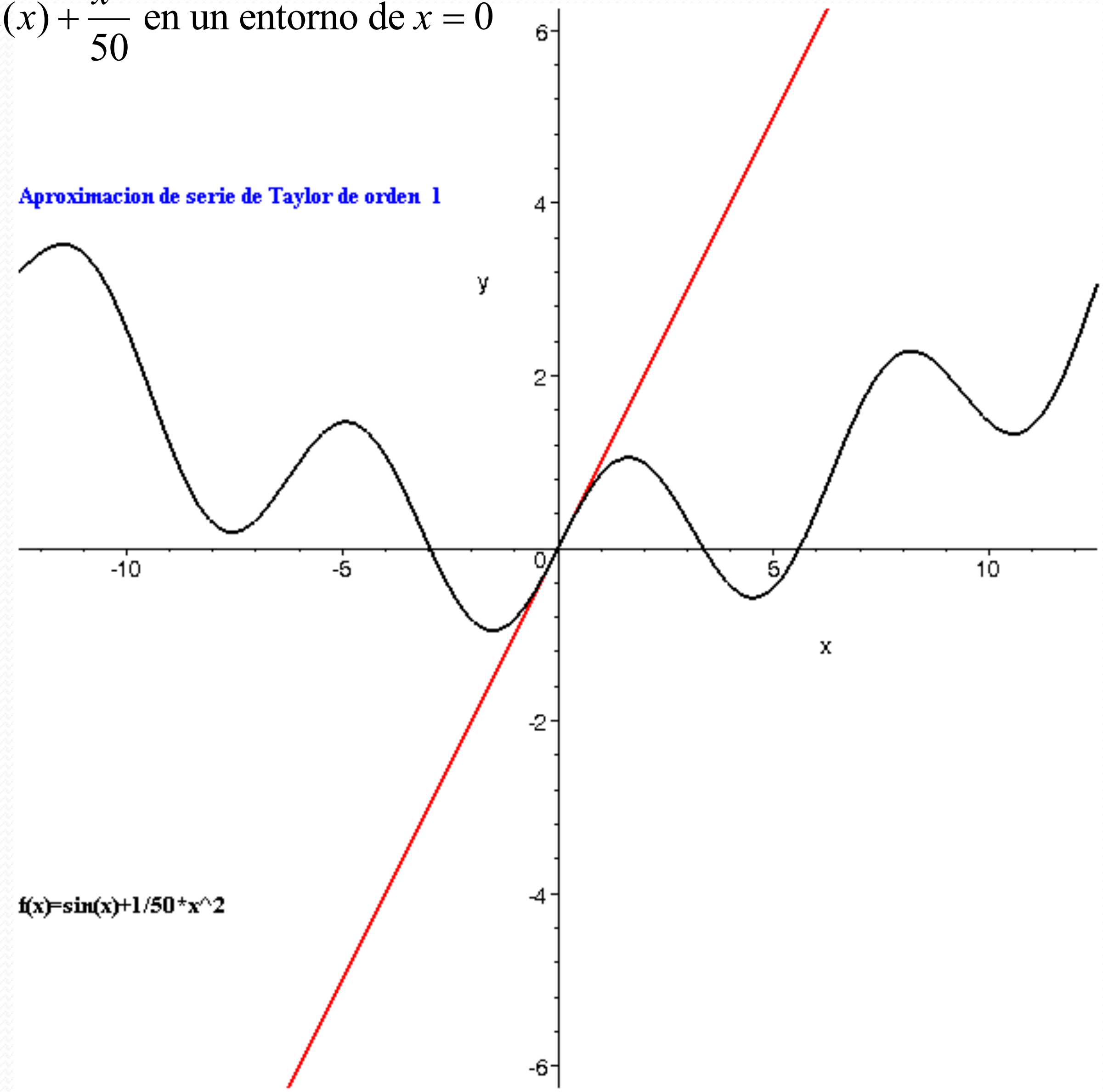
$$f(x) \approx P(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^N(0)}{N!}x^N = \sum_{i=0}^{N} \frac{f^i(0)}{i!}x^i$$

En nuestro caso particular: $f(x) = \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$



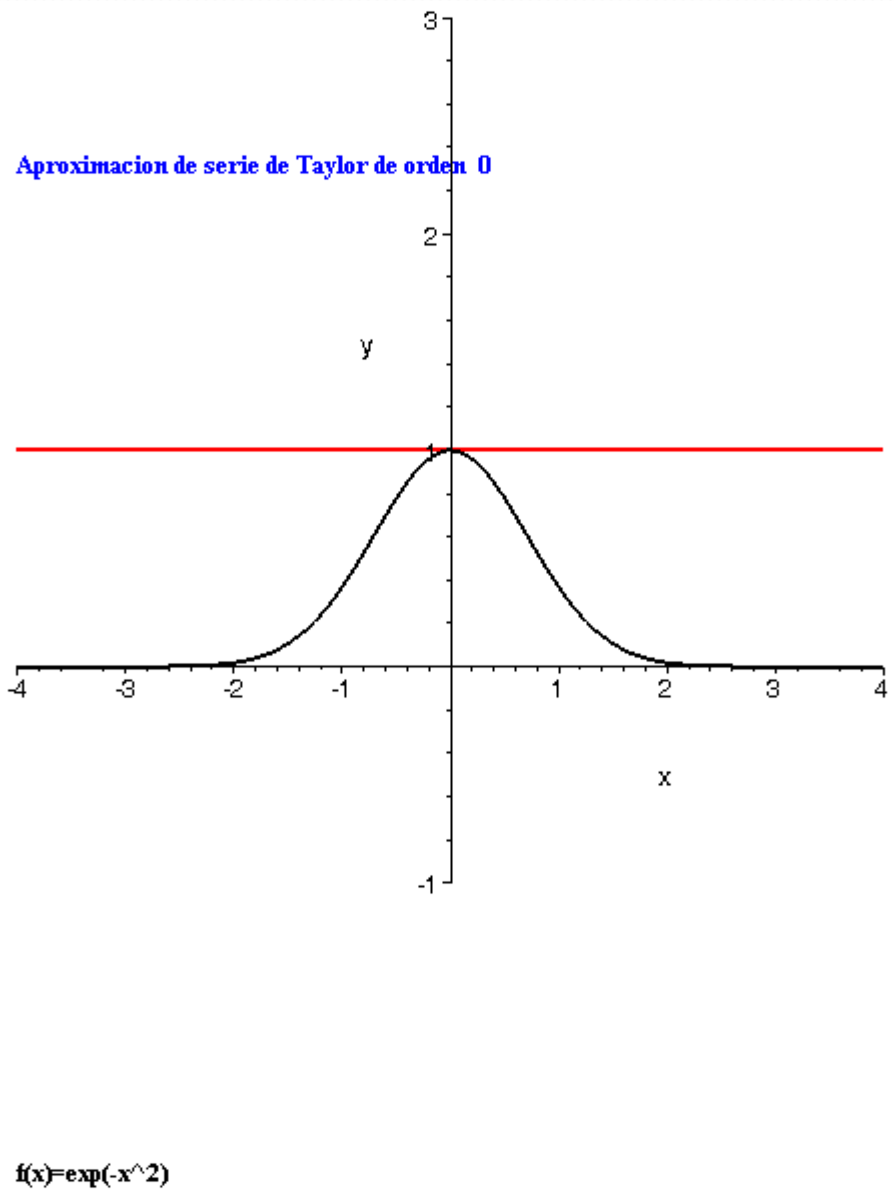
Serie de Taylor de una función

Algunos ejemplos $f(x) = sen(x) + \dfrac{x^2}{50}$ en un entorno de $x = 0$



Serie de Taylor de una función

$f(x) = e^{-x^2}$ en un entorno de $x = 0$



Serie de Taylor: PROGRAMACIÓN

Buscamos el polinomio que "más se parece" a una función en el entorno del punto $x = 0$

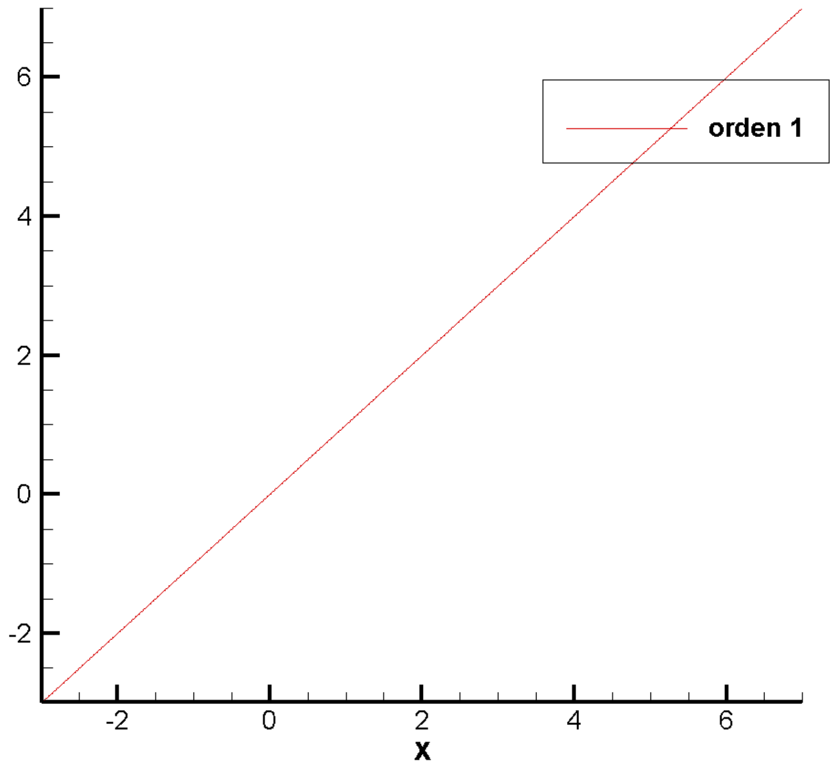
$$f(x) = Ln(1+x) \approx Sn(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} .... + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + ... = \sum_{i=0}^{N} (-1)^{i+1}\frac{x^i}{i}$$

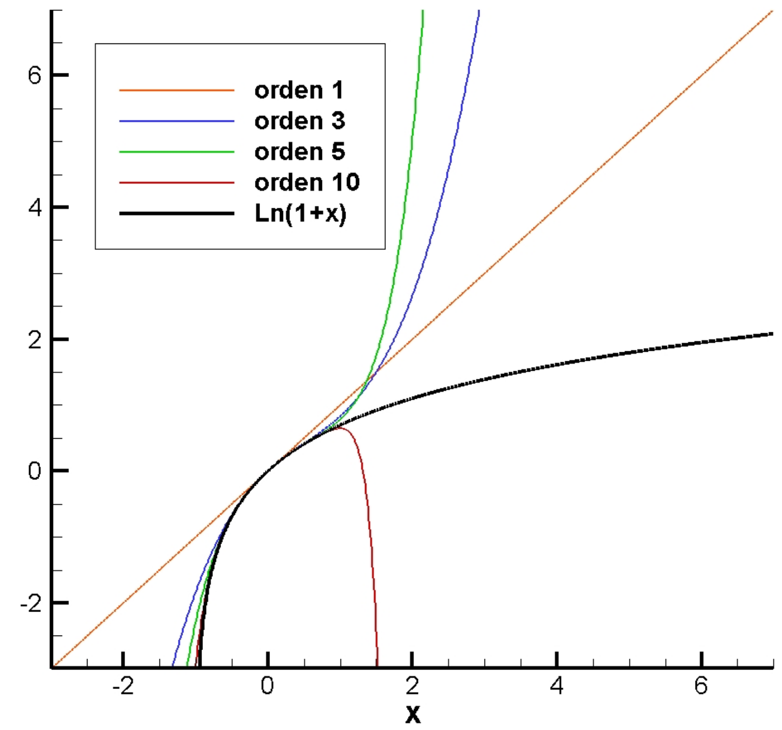
```
Sn = 0.d0
do i = 1,n

        Sn = Sn + ((-1)**(i+1)) * ((x**i)/(1.d0*i))

enddo
!Sn almacena el valor del polinomio de grado n en x

error = abs(log(1.d0+x)-Sn)
```

Serie de Taylor: PROGRAMACION

```
…
do n = 1, 15

    Sn = 0.d0
    do i = 1,n

        Sn = Sn + ((-1)**(i+1)) * ((x**i)/(1.d0*i))

    enddo
    !Sn almacena el valor del polinomio de grado n en x

    error = abs(log(1.d0+x)-Sn)
    write(*,*) 'Orden: ',n, 'error: ',error

enddo
…
```

Serie de Taylor: PROGRAMACION

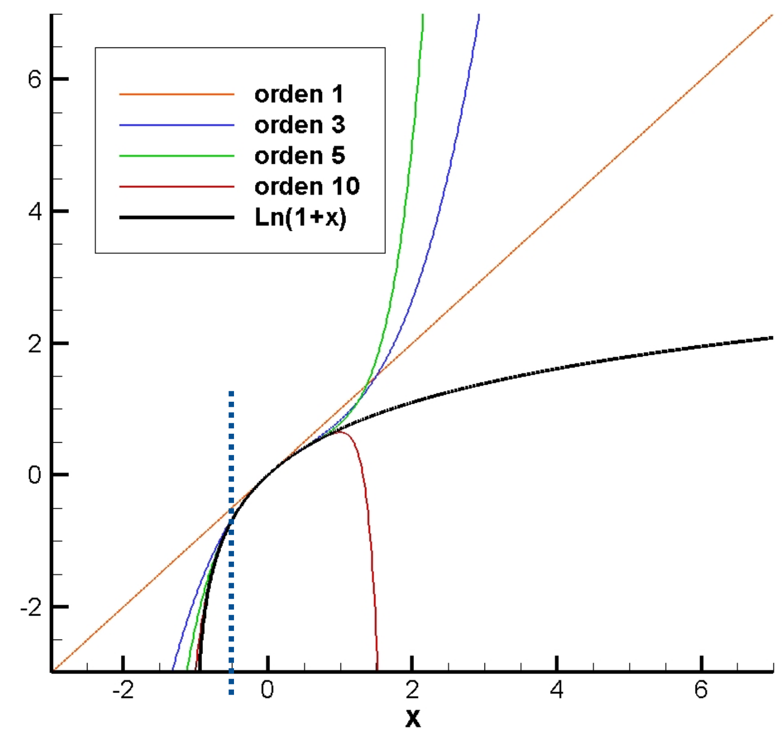




Serie de Taylor: PROGRAMACION

ERROR ENTRE Ln(-0.5) y P(-0.5)

Orden 1	0.193147180560E-00
Orden 2	6.814718055995E-02
Orden 3	2.648051389328E-02
Orden 4	1.085551389328E-02
Orden 5	4.605513893279E-03
Orden 6	2.001347226612E-03
Orden 7	8.852757980407E-04
Orden 8	3.969945480407E-04
Orden 9	1.799806591518E-04
Orden 10	8.232440915181E-05
Orden 11	3.793520460640E-05
Orden 12	1.759015252303E-05
Orden 13	8.200128484593E-06
Orden 14	3.840474466689E-06
Orden 15	1.805969258385E-06
Orden 16	8.522949419786E-07
Orden 17	4.035070283691E-07
Orden 18	1.915794024764E-07
Orden 19	9.119263235757E-08
Orden 20	4.350891649285E-08



Serie de Taylor: PROGRAMACION

Volviendo a la notación compacta:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_k x^k \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Hay funciones cuyos desarrollos pueden escribirse de forma compacta

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots \quad \text{for all } x$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots \quad \text{for all } x$$

eiae UPM

Serie de Taylor: PROGRAMACION

Escribir un programa (versión básica) que:

- Pida por pantalla un entero N y un real x
- Calcule N términos a_n del desarrollo de Taylor de la función sin(x)
- Evalúe el desarrollo de Taylor en el punto x
- Escriba por pantalla:
  - El el valor del desarrollo de Taylor en x.
  - El valor de la función en x.
  - El error cometido|Taylor(x)-sin(x)|

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Serie de Taylor: PROGRAMACION

Escribir un programa (versión avanzada) que:

- Pida por pantalla dos reales: x, tol y un entero: N.
- Calcule N términos a_n del desarrollo de Taylor de la función sin(x)
- Evalúe el desarrollo de Taylor en el punto x, usando el número de términos necesarios para que el error sea menor que tol
- Escriba por pantalla:
  - El el valor del desarrollo de Taylor en x.
  - El valor de la función en x.
  - El error cometido|Taylor(x)-sin(x)|
  - En caso de que el error cometido sea mayor que tol con el máximo número de términos (N), pedirle al usuario que utilice más términos.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Serie de Taylor: PROGRAMACION (Aclaraciones)

Escribir un programa (versión básica) que:

- Pida por pantalla un entero N y un real x
- Evalúe el desarrollo de Taylor (p(x)) de la función sin(x) con N términos en el punto x
- Escriba por pantalla:
  - El valor del desarrollo de Taylor en x: p(x).
  - El valor de la función en x: sin(x).
  - El error cometido: |p(x)-sin(x)|

NOTA: el polinomio de Taylor centrado en x=0 de f(x)=sin(x) es

$$p(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^{2n+1}$$

donde los coeficientes a_n valen:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$$

RESULTADOS:

```
N              1 x    1.00000000
p(x)  0.833333313
sin(x)  0.841470957
error   8.13764334E-03
```

```
N              2 x    1.00000000
p(x)  0.841666639
sin(x)  0.841470957
error   1.95682049E-04
```

```
N              3 x    1.00000000
p(x)  0.841468215
sin(x)  0.841470957
error   2.74181366E-06
```

Serie de Taylor: PROGRAMACION (Aclaraciones)

Escribir un programa (versión avanzada) que:

- Pida por pantalla dos reales: x, tol y un entero: N.
- Calcule N términos a_n del desarrollo de Taylor de la función sin(x) y los almacene en un vector de tamaño N.
- Evalúe el desarrollo de Taylor en el punto x, usando el número de términos necesarios para que el error sea menor que tol
- Escriba por pantalla:
  - El el valor del desarrollo de Taylor en x.
  - El valor de la función en x.
  - El error cometido|Taylor(x)-sin(x)|
  - En caso de que el error cometido sea mayor que tol con el máximo número de términos (N), pedirle al usuario que utilice más términos.

NOTA: el polinomio de Taylor centrado en x=0 de f(x)=sin(x) es

$$p(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^{2n+1}$$

donde los coeficientes a_n valen:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$$

RESULTADOS:

```
N          1 x   1.00000000
p(x)  0.833333313
sin(x)  0.841470957
error   8.13764334E-03
```

```
N          2 x   1.00000000
p(x)  0.841666639
sin(x)  0.841470957
error   1.95682049E-04
```

```
N          3 x   1.00000000
p(x)  0.841468215
sin(x)  0.841470957
error   2.74181366E-06
```

Serie de Taylor: PROGRAMACION (Aclaraciones)

Comentarios adicionales:

- Si el cálculo del factorial os devuelve un número negativo, es posible que estéis teniendo problemas de overflow (no hay memoria suficiente reservada para almacenar un entero tan grande).
- Este problema podéis resolverlo almacenando el resultado del factorial en una variable de tipo real.

- Si queréis precisión adicional, es recomendable utilizar variables de doble precisión [real(8)].

- En el programa final, debería ser sencillo cambiar el desarrollo de Taylor para que calcule el de otra función. Por ejemplo, el desarrollo del coseno centrado en x=0 es:

$$p(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^{2n} \qquad a_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$$