2º SEMESTRE: CÁLCULO NUMÉRICO CON FORTRAN.

TEMARIO:

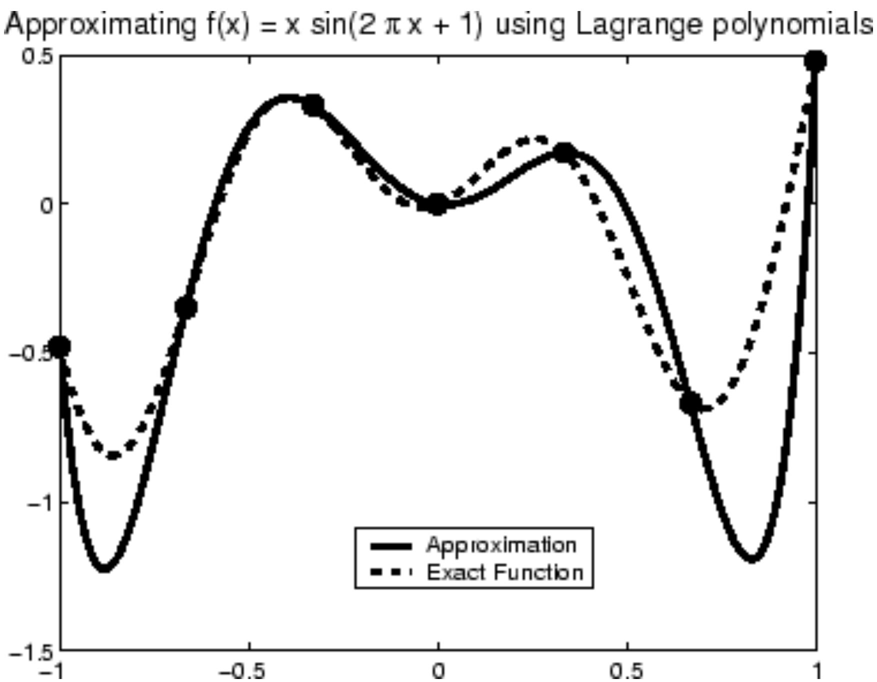
1. Sistemas lineales. Directos e iterativos.
2. Cálculo de autovalores.
3. Derivación e integración numérica.
4. Solución de ecuaciones y sistemas no lineales.
5. Solución numérica de ecuaciones diferenciales.

APROXIMACIÓN E INTERPOLACIÓN

Problema a resolver:

- Aproximar una función ‘compleja’ por otra más sencilla: polinómica, trigonométrica.
- Reconstruir una función a partir del valor que toma en ciertos puntos.

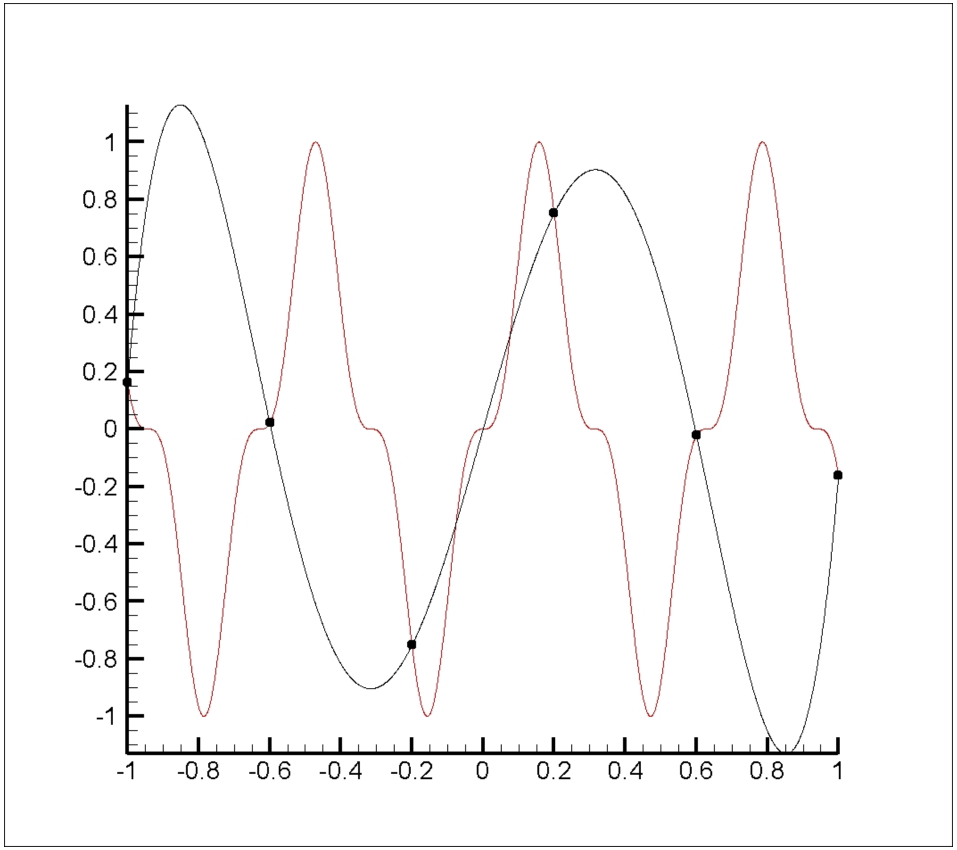
Estos puntos pueden venir dados con un patrón determinado o no



APROXIMACIÓN E INTERPOLACIÓN

Aproximación Polinómica:

Dados los valores de una función $f(x)$ en un conjunto de puntos $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ trataremos de calcular el polinomio $p(x)$ que cumple $f(x_i) = p(x_i)$

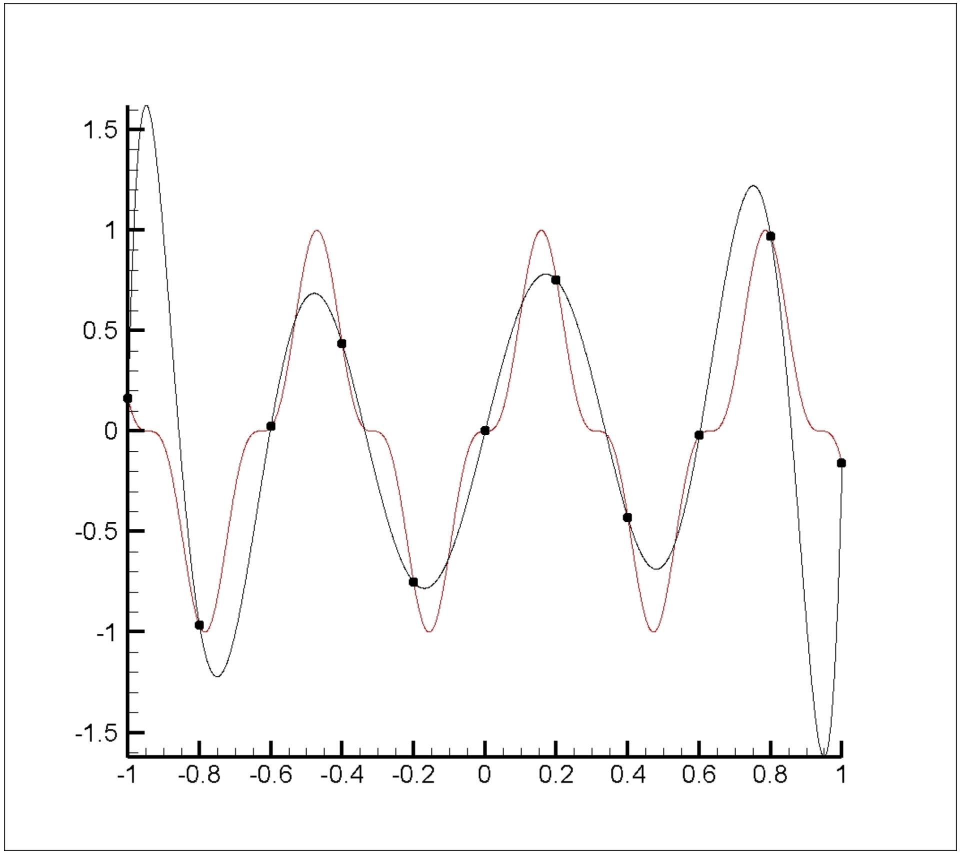


$$f(x) = sen^3(10x)$$

APROXIMACIÓN E INTERPOLACIÓN

Aproximación Polinómica:

Dados los valores de una función $f(x)$ en un conjunto de puntos $(x_1, x_2, ..., x_N)$ trataremos de calcular el polinomio $p(x)$ que cumple $f(x_i) = p(x_i)$

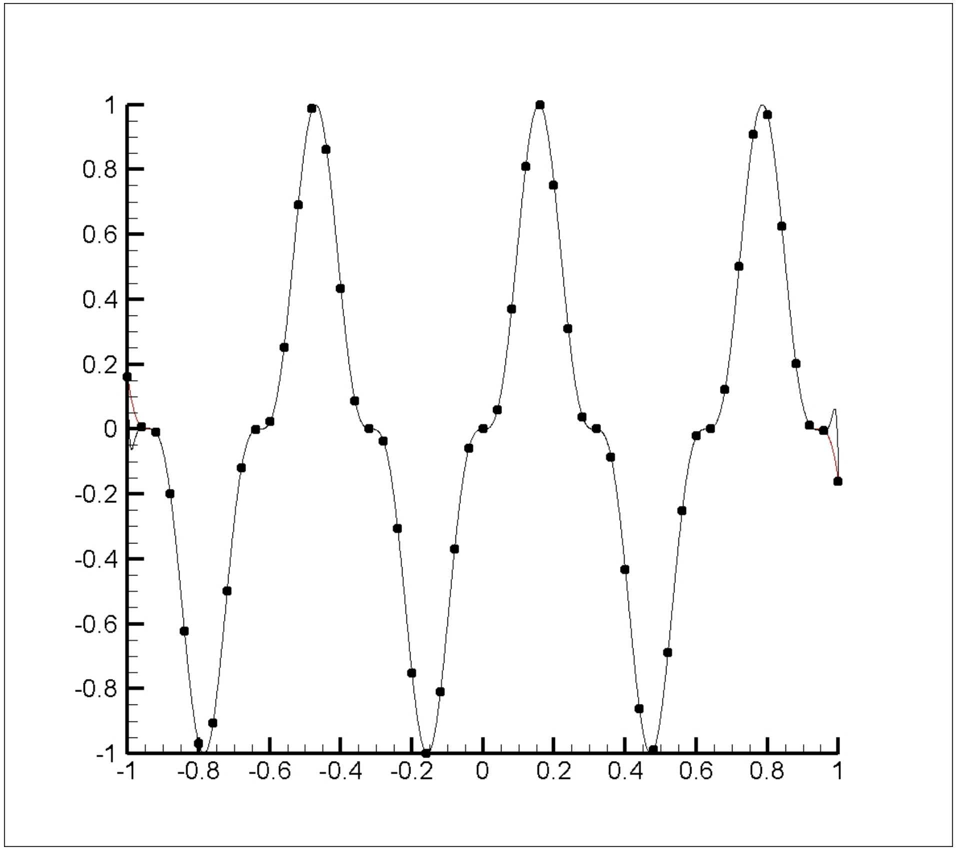


$$f(x) = sen^3(10x)$$

APROXIMACIÓN E INTERPOLACIÓN

Aproximación Polinómica:

Dados los valores de una función $f(x)$ en un conjunto de puntos $(x_1, x_2, ..., x_N)$ trataremos de calcular el polinomio $p(x)$ que cumple $f(x_i) = p(x_i)$



$$f(x) = sen^3(10x)$$

APROXIMACIÓN E INTERPOLACIÓN

Aproximación Polinómica:

Vamos a trabajar con dos enfoques diferentes:

- Buscar el polinomio de orden máximo a partir del número de puntos dado.
    - Método algebraico
    - Método de Lagrange
- Fijar el orden del polinomio y hallar los coeficientes de modo que el error sea mínimo.
    - Aproximación por mínimos cuadrados

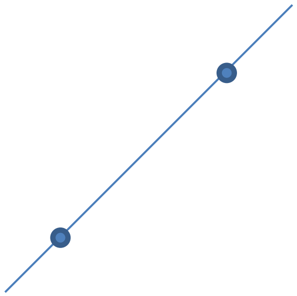
APROXIMACIÓN E INTERPOLACIÓN

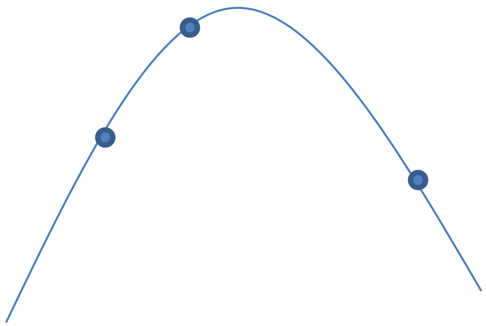
Aproximación Polinómica:

- Buscar el polinomio de orden máximo a partir del número de puntos dado.

Teorema: Dados n puntos distintos $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_N, y_N)\}$ existe un único polinomio $p(x)$ de grado menor o igual que n-1 que cumpla $p(x_i) = y_i\,; \quad i = 1, ..., N$

Por dos puntos pasa una sola recta, por tres puntos una sola parábola…





Aproximación Polinómica:

- Método algebraico

Dados $\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_N,y_N)\}$ el polinomio $p(x)$ interpolador de grado $n-1$ es:

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+....+a_{n-1}x^{n-1}$$

En cada punto se cumple:

$$p(x_i)=y_i=a_0+a_1x_i+a_2x_i^2+....+a_{n-1}x_i^{n-1}$$

de forma matricial:

$$Y=(X)A \quad \text{con} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}}_{\textbf{DATO}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}}_{\textbf{¿?}} = \underbrace{\begin{pmatrix} p(x_1) \\ p(x_2) \\ \vdots \\ p(x_n) \end{pmatrix}}_{\textbf{DATO}}$$

APROXIMACIÓN E INTERPOLACIÓN

Aproximación Polinómica:

- Método algebraico:

La matriz $X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$ se conoce como matriz de Vandermonde

y cumple que es invertible si $x_i \neq x_j \quad i \neq j$

Si alguno de los puntos se repite lo quitamos y obtenemos el polinomio de grado más bajo.

El problema de encontrar el polinomio interpolador se ha reducido a resolver un sistema lineal:

$$Ax = b$$

Aproximación Polinómica:

- Método algebraico:

1.- Construir la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$

2.- Resolver el sistema $Ax = b$ con $x = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$ e $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \\ y_n \end{pmatrix}$ usando:

Métodos directos: Gauss, LU,...

Métodos indirectos: Gauss-Seidel, Jacobi,...

APROXIMACIÓN E INTERPOLACIÓN

Aproximación Polinómica:

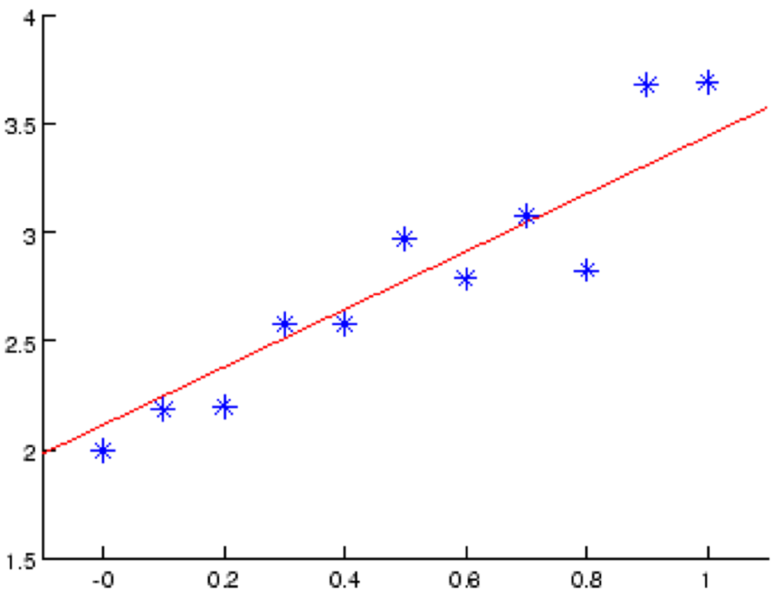
Vamos a trabajar con dos enfoques diferentes:

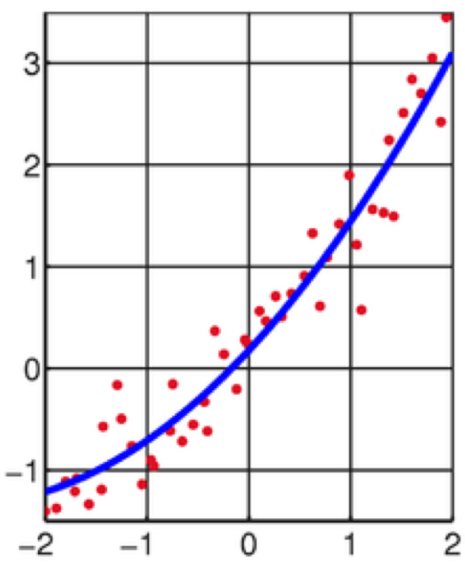
- Buscar el polinomio de orden máximo a partir del número de puntos dado.
    - Método algebraico
    - Método de Lagrange
- Fijar el orden del polinomio y hallar los coeficientes de modo que el error sea mínimo.
    - Aproximación por mínimos cuadrados

Aproximación Polinómica:

Sean $\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_N,y_N)\}$ con $y_i = f(x_i)$ buscamos un polinomio

$p(x)=\sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ tal que minimice el error $E(x) = f(x) - p(x)$





Aproximación Polinómica:

- No buscamos un polinomio que pase por los puntos.

- Se usa en estadística. Recta de regresión lineal.

- El orden del polinomio es independiente del número de puntos. (salvo $m<n$)

- La aproximación se hace en todo el intervalo.

- Dependiendo la definición del error tendremos distintos métodos

Aproximación Polinómica:

Mínimos cuadrados:

El error se define como:

$$E = \sum_{i=1}^{N}\left[f(x_i) - p(x_i) \right]^2 = \sum_{i=1}^{N}\left[f(x_i) - \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \ldots + a_m x_i^m \right) \right]^2$$

$\left\{ x_i \right\}$ son datos del problema, las incognitas son los valores de los coeficientes $\left\{ a_j ;\ j = 0, \ldots, m \right\}$

$$\xrightarrow{MATEMÁTICAS\ II} \left\{ \frac{\partial E}{\partial a_j} = 0 \quad m \text{ ecuaciones, } m \text{ incognitas} \right.$$

Aproximación Polinómica:

Mínimos cuadrados:

$Ej:$ Dados 3 puntos $\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)\}$, buscamos el polinomio de orden 2

Error: $$E=\sum_{i=1}^{3}\left[f(x_i)-p(x_i)\right]^2=$$

$$=\underbrace{\left[f(x_1)-\left(a_0+a_1x_1+a_2x_1^2\right)\right]^2}_{}+\underbrace{\left[f(x_2)-\left(a_0+a_1x_2+a_2x_2^2\right)\right]^2}_{}+\underbrace{\left[f(x_3)-\left(a_0+a_1x_3+a_2x_3^2\right)\right]^2}_{}$$

Minimizando: $$\nabla E(a_0,a_1,a_2)=\left(\frac{\partial E}{\partial a_0},\frac{\partial E}{\partial a_1},\frac{\partial E}{\partial a_2}\right)=(0,0,0)$$

$$\begin{cases}-2\left[f(x_1)-\left(a_0+a_1x_1+a_2x_1^2\right)\right]-2\left[f(x_2)-\left(a_0+a_1x_2+a_2x_2^2\right)\right]-2\left[f(x_3)-\left(a_0+a_1x_3+a_2x_3^2\right)\right]=0\\ \left[f(x_1)-\left(a_0+a_1x_1+a_2x_1^2\right)\right]\cdot x_1+\left[f(x_2)-\left(a_0+a_1x_2+a_2x_2^2\right)\right]\cdot x_2+\left[f(x_3)-\left(a_0+a_1x_3+a_2x_3^2\right)\right]\cdot x_3=0\\ \left[f(x_1)-\left(a_0+a_1x_1+a_2x_1^2\right)\right]\cdot x_1^2+\left[f(x_2)-\left(a_0+a_1x_2+a_2x_2^2\right)\right]\cdot x_2^2+\left[f(x_3)-\left(a_0+a_1x_3+a_2x_3^2\right)\right]\cdot x_3^2=0\end{cases}$$

Aproximación Polinómica:

$$\begin{cases} \left[f(x_1)-\left(a_0+a_1x_1+a_2x_1^2\right)\right] + \left[f(x_2)-\left(a_0+a_1x_2+a_2x_2^2\right)\right] + \left[f(x_3)-\left(a_0+a_1x_3+a_2x_3^2\right)\right] = 0 \\ \left[f(x_1)-\left(a_0+a_1x_1+a_2x_1^2\right)\right]\cdot x_1 + \left[f(x_2)-\left(a_0+a_1x_2+a_2x_2^2\right)\right]\cdot x_2 + \left[f(x_3)-\left(a_0+a_1x_3+a_2x_3^2\right)\right]\cdot x_3 = 0 \\ \left[f(x_1)-\left(a_0+a_1x_1+a_2x_1^2\right)\right]\cdot x_1^2 + \left[f(x_2)-\left(a_0+a_1x_2+a_2x_2^2\right)\right]\cdot x_2^2 + \left[f(x_3)-\left(a_0+a_1x_3+a_2x_3^2\right)\right]\cdot x_3^2 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{3} 1\cdot 1\right)\cdot a_0 + \left(\sum_{i=1}^{3} 1\cdot x_i\right)\cdot a_1 + \left(\sum_{i=1}^{3} 1\cdot x_i^2\right)\cdot a_2 = \sum_{i=1}^{3} 1\cdot f\left(x_i\right)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{3} x_i\cdot 1\right)\cdot a_0 + \left(\sum_{i=1}^{3} x_i\cdot x_i\right)\cdot a_1 + \left(\sum_{i=1}^{3} x_i\cdot x_i^2\right)\cdot a_2 = \sum_{i=1}^{3} x_i\cdot f\left(x_i\right)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{3} x_i^2\cdot 1\right)\cdot a_0 + \left(\sum_{i=1}^{3} x_i^2\cdot x_i\right)\cdot a_1 + \left(\sum_{i=1}^{3} x_i^2\cdot x_i^2\right)\cdot a_2 = \sum_{i=1}^{3} x_i^2\cdot f\left(x_i\right)$$

Aproximación Polinómica:

$$\text{Matricialmente: } \begin{pmatrix} & & \\ & M_{lk} & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ b_l \\ \\ \end{pmatrix} \text{ FÁCIL}$$

$$M_{lk} = \sum_{i=1}^{3} x_i^l \cdot x_i^k; \qquad l,k = 0,..,2$$

$$b_l = \sum_{i=1}^{3} x_i^l \cdot f(x_i); \qquad l = 0,..,2$$

Aproximación Polinómica:

Mínimos cuadrados: *GENERALIZANDO*

Ej : Dados n puntos $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)\}$, buscamos el polinomio de orden p

Error: $$E = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - p(x_i) \right]^2 \text{ con } p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_p x^p = \sum_{l=0}^{p} a_l x^l$$

Matricialmente: $$\begin{pmatrix} & & \\ & M_{lk} & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \\ b_p \end{pmatrix}$$

$$M_{lk} = \sum_{i=1}^{n} x_i^l \cdot x_i^k; \qquad l, k = 0,.., p$$

$$b_l = \sum_{i=1}^{n} x_i^l \cdot y_i; \qquad l = 0,.., p$$