2º SEMESTRE: CÁLCULO NUMÉRICO CON FORTRAN.

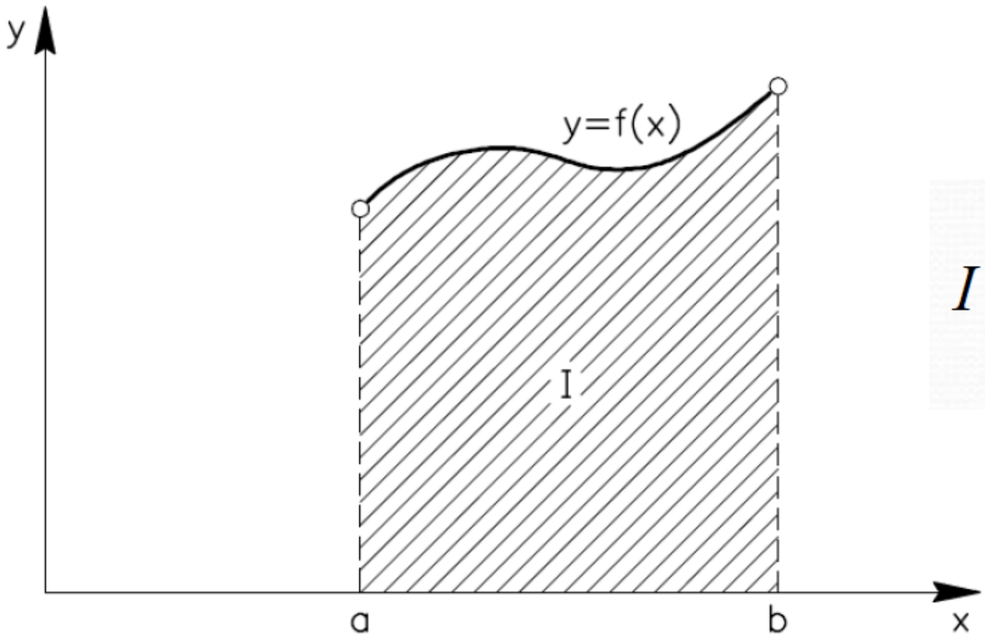
TEMARIO:

1. Sistemas lineales. Directos e iterativos.
2. Cálculo de autovalores.
3. Derivación e integración numérica.
4. Solución de ecuaciones y sistemas no lineales.
5. Solución numérica de ecuaciones diferenciales.

FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Interpretación geométrica:

- Función continua $f(x)$ en un intervalo cerrado $[a,b]$
- Calcular el área entre la curva $y = f(x)$ y el eje OX



$$I = \int_a^b f(x)dx$$

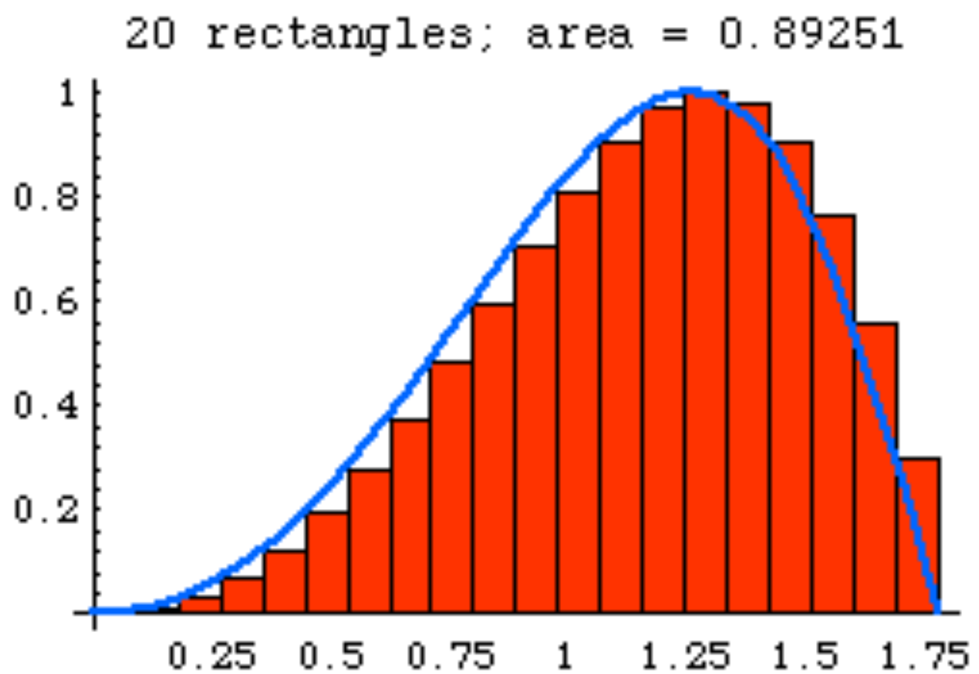
FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Interpretación geométrica:

- Función continua $f(x)$ en un intervalo cerrado $[a,b]$
- Calcular el área entre la curva $y = f(x)$ y el eje OX

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

Integral de Riemann



FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Fórmulas de Newton-Cotes

- Se divide el intervalo de integración en subintervalos. Inicialmente todos tendrán la misma longitud (equiespaciados).

$$[a,b]=[a=x_0,x_1]\cup[x_1,x_2]\cup\ldots\cup[x_{n-1},x_n=b] \qquad x_{i+1}-x_i=h=\frac{b-a}{n}$$

- Se sustituye la función a integrar en cada intervalo por una aproximación de la función fácilmente integrable.
- Aproximación polinómica

$$I=\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p_m(x)\,dx$$

$$p_m(x)=a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$$

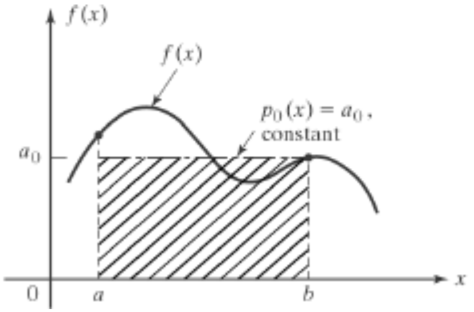
- Se determinan los coeficientes de los polinomios de forma que la función y el polinomio coincidan hasta el orden deseado.

FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Fórmulas de Newton-Cotes

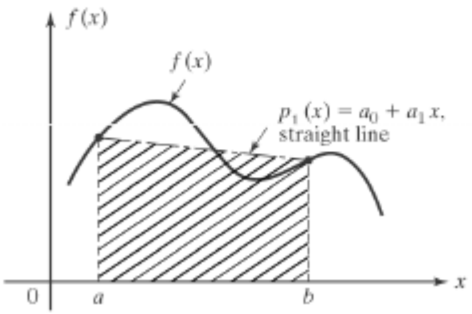
- Orden 0: Se sustituye la función por una constante (Riemann)

$$\int_I f(x)dx = \int_I k\,dx$$



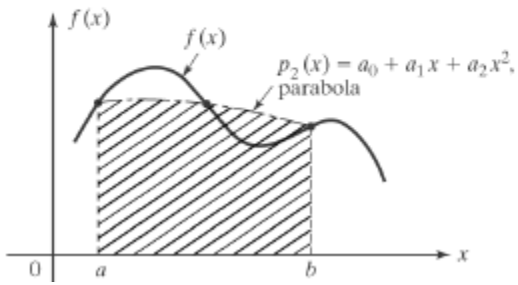
- Orden 1: Lineal. Se usa una recta calculada a partir de los extremos.

$$\int_I f(x)dx = \int_I (ax+b)dx$$



- Orden 2: Parabólica. Se usan tres puntos del intervalo

$$\int_I f(x)dx = \int_I (ax^2+bx+c)dx$$



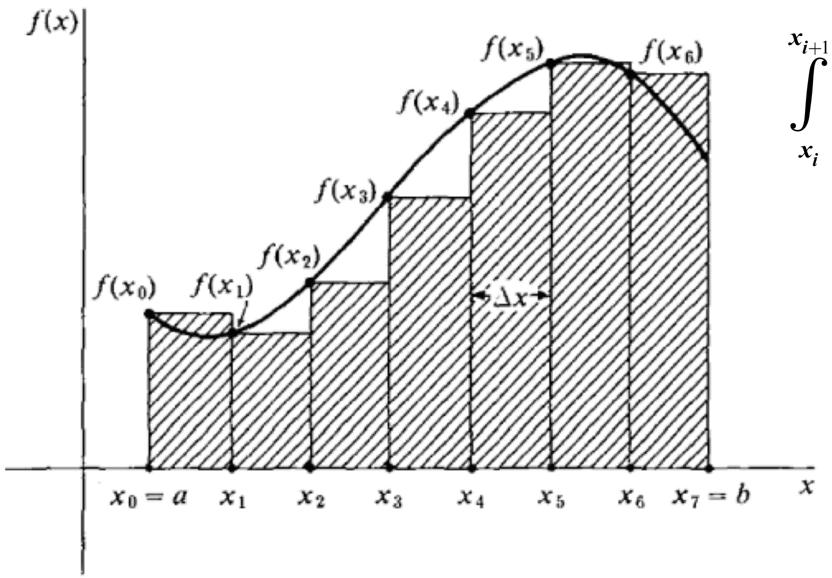
FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Fórmulas de Newton-Cotes: Riemann

- Fórmula de orden 0: Se sustituye la función por una constante.
- n subintervalos de tamaño: $h = \dfrac{b-a}{n}$
- n+1 puntos:

$$Area = \int f(x)\,dx \approx \int k\,dx = \sum_{I} \int_{I_i} k\,dx$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i)dx = (x_{i+1} - x_i) f(x_i) = h \cdot f(x_i)$$



$$Area \approx \sum_{i} Area_i = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} h \cdot f(x_i)$$

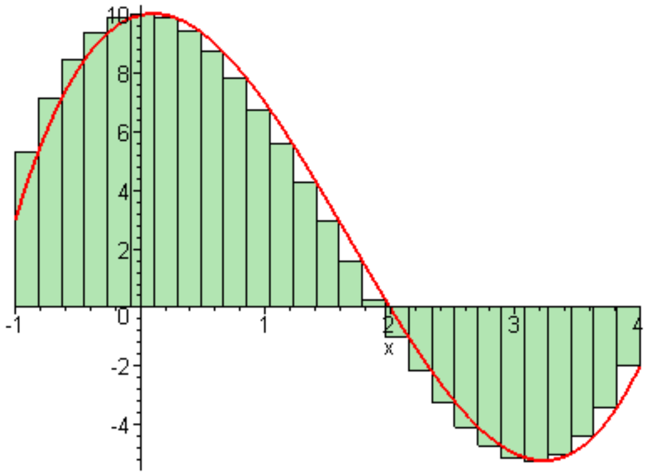
FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Fórmulas de Newton-Cotes: Riemann

- Fórmula de orden 0: Se sustituye la función por una constante.
- n subintervalos de tamaño: $h = \frac{b-a}{n}$
- n+1 puntos:

$$Area = \int f(x)\,dx \approx \int k\,dx = \sum_{I} \int_{I_i} k\,dx$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_{i+1})dx = (x_{i+1} - x_i) f(x_{i+1}) = h \cdot f(x_{i+1})$$



$$Area \approx \sum_{i} Area_i = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_{i+1}) = \sum_{i=0}^{n-1} h \cdot f(x_{i+1})$$

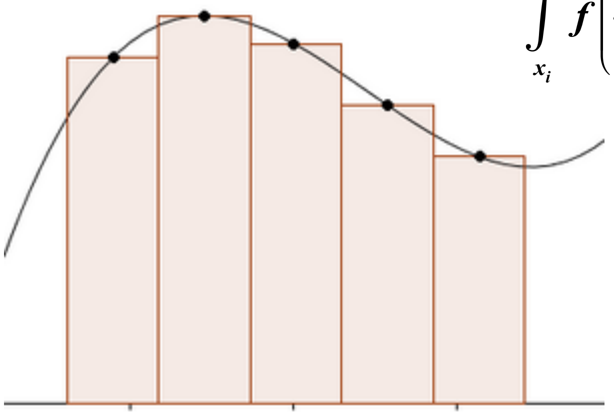
FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Fórmulas de Newton-Cotes: Riemann

- Fórmula de orden 0: Se sustituye la función por una constante.
- n subintervalos de tamaño: $h = \dfrac{b-a}{n}$
- n+1 puntos:

$$Area = \int f(x)\,dx \approx \int k\,dx = \sum_{I} \int_{I_i} k\,dx$$

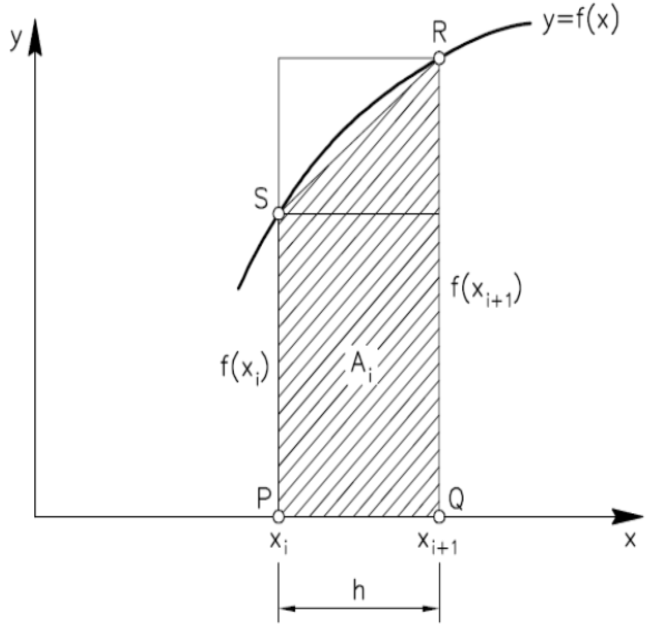
$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right) dx = (x_{i+1}-x_i)\,f\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right) = h \cdot f(x_i + h/2)$$

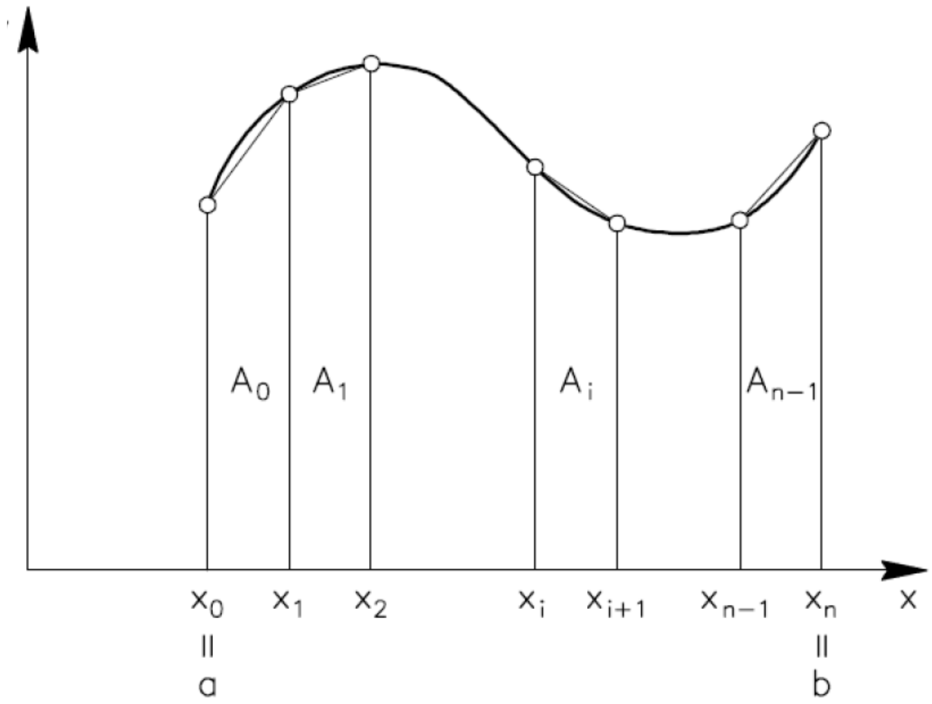


$$Area \approx \sum_{i} Area_i = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1}-x_i)\,f\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} h \cdot f\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)$$

Fórmulas de Newton-Cotes: Trapecio

- Fórmula de orden 1: Se sustituye la función por una aproximación lineal.





$$A_i = \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2}(x_{i+1} - x_i) = \frac{(x_{i+1} - x_i)}{2}\left(f(x_{i+1}) + f(x_i)\right) = \frac{h}{2}\cdot\left(f(x_{i+1}) + f(x_i)\right)$$

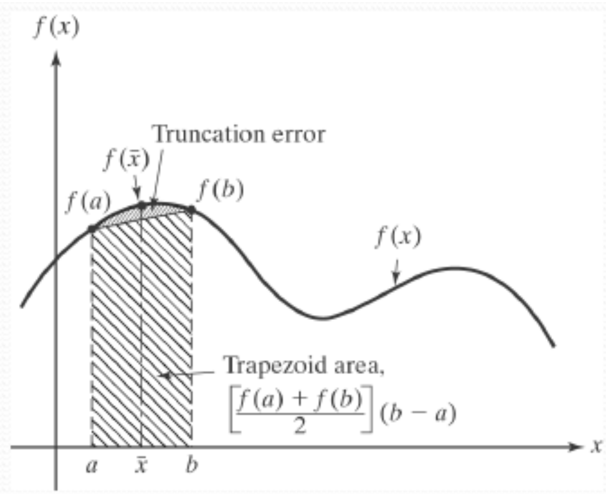
FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Fórmulas de Newton-Cotes: Trapecio

- Fórmula de orden 1: Se sustituye la función por una aproximación lineal.
- n subintervalos de tamaño: $h = \frac{b-a}{n}$
- n+1 puntos: $x_i = a + ih, \quad i = 0, \dots, n$

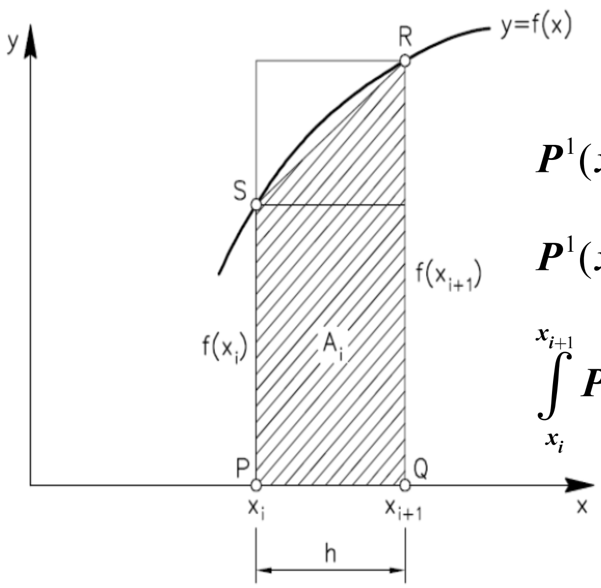
$$\boxed{I \approx \sum_{k=1}^{n} I_i = \frac{h}{2} \sum_{k=1}^{n} (f_{i-1} + f_i) = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{n-1} + f_n) = h\left(\frac{f_0 + f_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f_i\right)}$$

- Error de truncamiento: $O(h^2)$



Fórmulas de Newton-Cotes: Trapecio

- Otra forma de ver el método es pensar que buscamos aproximar el valor exacto de la integral de la función original por la integral de su aproximación de primer orden:



$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} P^1(x)\,dx$$

$P^1(x) =$ Polinomio que pasa por $(x_i, f(x_i))\, y\, (x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ con $x_{i+1} = x_i + h$

$$P^1(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}(x - x_i)$$

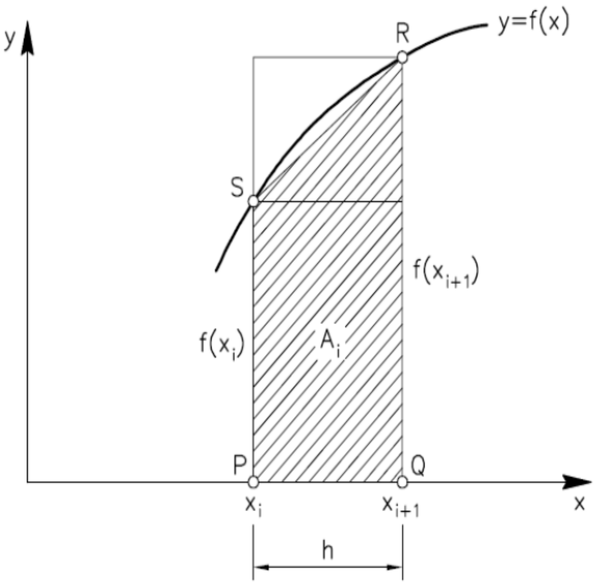
$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} P^1(x)\,dx = f(x_i)h + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}\left[\frac{x_{i+1}^2 - x_i^2}{2} - hx_i\right] = \frac{h}{2}\left(f(x_{i+1}) + f(x_i)\right)$$

$$\boxed{I \approx \sum_{k=1}^{n} I_i = \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(f_{i-1} + f_i\right) = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n\right) = h\left(\frac{f_0 + f_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f_i\right)}$$

FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Fórmulas de Newton-Cotes: Trapecio

- También podemos pensar que buscamos que se verifique:



$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx w_1 f(x_i) + w_2 f(x_{i+1})$$

- Es decir, ya que conocemos el valor de la función en dos puntos podemos exigir que la aproximación de la integral sea exacta para polinomios de orden 0 y 1:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} 1\,dx = w_1 + w_2 \Rightarrow x_{i+1} - x_i = w_1 + w_2 \Rightarrow h = w_1 + w_2 \\ \displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} x\,dx = w_1 x_i + w_2 x_{i+1} \Rightarrow \frac{x_{i+1}^2 - x_i^2}{2} = w_1 x_i + w_2 x_{i+1} \end{array}\right\}$$

FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Fórmulas de Newton-Cotes: Trapecio

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{x_i}^{x_{i+1}} 1\,dx = w_1 + w_2 \Rightarrow x_{i+1} - x_i = w_1 + w_2 \Rightarrow h = w_1 + w_2 \\
&\int_{x_i}^{x_{i+1}} x\,dx = w_1 x_i + w_2 x_{i+1} \Rightarrow \frac{x_{i+1}^2 - x_i^2}{2} = w_1 x_i + w_2 x_{i+1}
\end{aligned}\right\}$$

De la primera $w_1 = h - w_2$

$$\frac{\left(x_{i+1} + x_i\right)}{2}\left(x_{i+1} - x_i\right) = \left(h - w_2\right)x_i + w_2 x_{i+1}$$

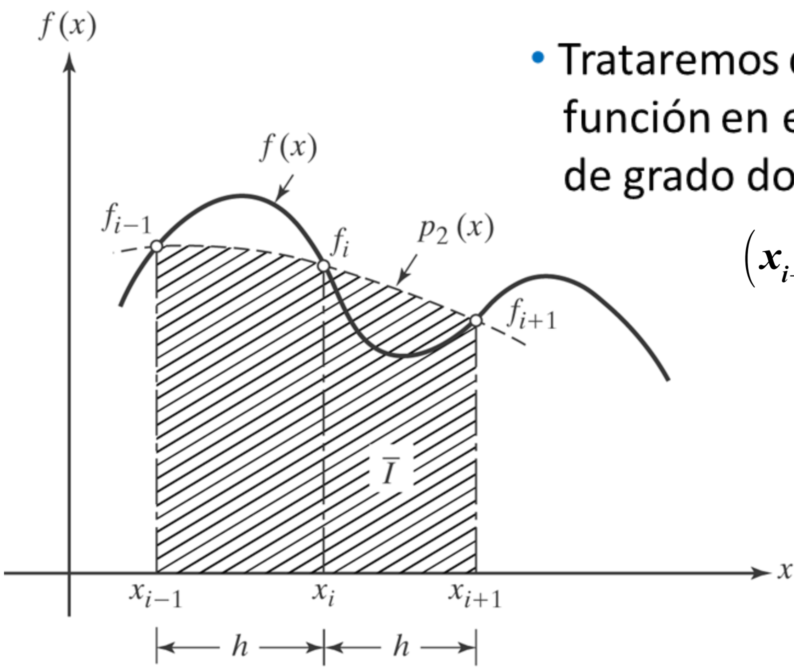
$$\frac{\left(x_{i+1} + x_i\right)}{2} h = h x_i + w_2\left(x_{i+1} - x_i\right) = h x_i + w_2 h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w_2 = \frac{\left(x_{i+1} + x_i\right)}{2} - x_i = \frac{\left(x_{i+1} - x_i\right)}{2} = \frac{h}{2} \rightarrow \boxed{w_1 = w_2 = \frac{h}{2}}$$

$$\Rightarrow \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2} f(x_i) + \frac{h}{2} f(x_{i+1})$$

Fórmulas de Newton-Cotes: Simpson

- Fórmula de orden 2: Se sustituye la función por una aproximación parabólica.
- 2n subintervalos de tamaño: $h = \dfrac{b-a}{n}$
- 2n+1 puntos: $x_i = a + ih, \quad i = 0, \ldots, n$



- Trataremos de aproximar el valor de la integral de la función en el intervalo doble por la integral del polinomio de grado dos que pasa por los puntos:

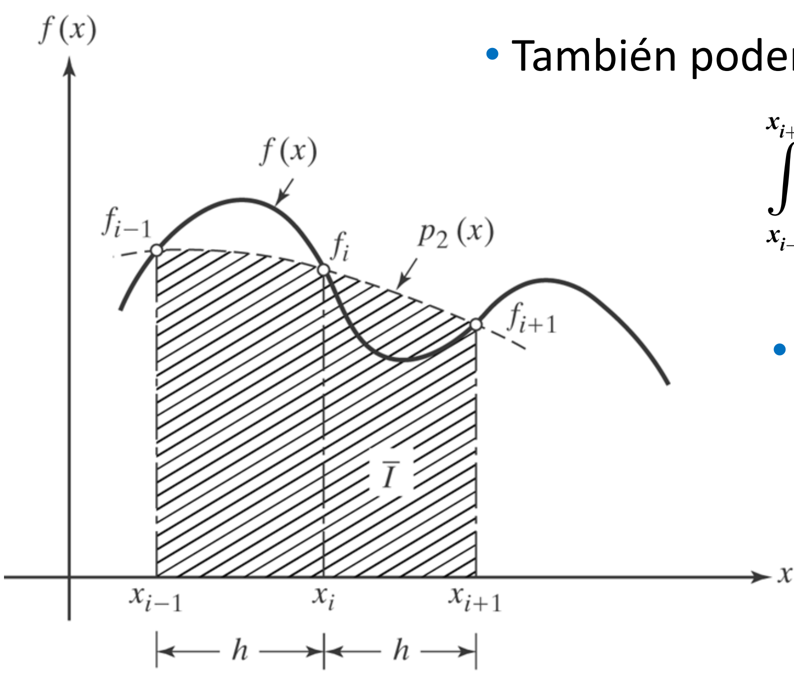
$$\left(x_{i-1}, f(x_{i-1})\right); \left(x_i, f(x_i)\right); \left(x_{i+1}, f(x_{i+1})\right)$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} P^2(x)\,dx$$

FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Fórmulas de Newton-Cotes: Simpson

- Fórmula de orden 2: Se sustituye la función por una aproximación parabólica.
- 2n subintervalos de tamaño: $h = \dfrac{b-a}{n}$
- 2n+1 puntos: $x_i = a + ih, \quad i = 0, \dots, n$



- También podemos pensar que buscamos que se verifique:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx w_1 f(x_{i-1}) + w_2 f(x_i) + w_3 f(x_{i+1})$$

- Ya que conocemos el valor de la función en tres puntos podemos exigir que la aproximación de la integral sea exacta para polinomios de orden 0, 1 y 2:

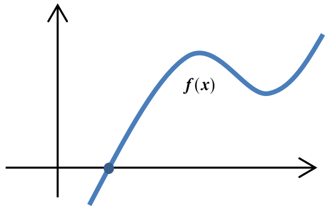
Fórmulas de Newton-Cotes: Simpson

- Fórmula de orden 2: Se sustituye la función por una aproximación parabólica.
- 2n subintervalos de tamaño: $h = \dfrac{b-a}{n}$
- 2n+1 puntos: $x_i = a + ih, \quad i = 0, \dots, n$

$$P_2(x) = f(a)\frac{(x-m)(x-b)}{(a-m)(a-b)} + f(m)\frac{(x-a)(x-b)}{(m-a)(m-b)} + f(b)\frac{(x-a)(x-m)}{(b-a)(b-m)}.$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

FÓRMULAS DE DERIVACIÓN NUMÉRICA



IMPLEMENTAR INTEGRACIÓN NUMÉRICA: Trabajo para casa

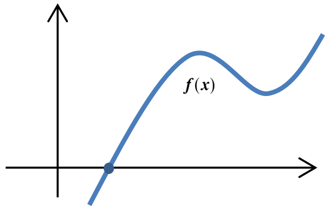
TODOS LOS GRUPOS

Implementar los métodos de integración vistos en clase (Riemann, Trapecio, Simpson)

Calcular el valor de la siguiente integral utilizando los distintos métodos con distinto número de puntos:

$$\int_{-10}^{10} \exp(-x^2)\,dx \approx \sqrt{\pi}$$

FÓRMULAS DE DERIVACIÓN NUMÉRICA



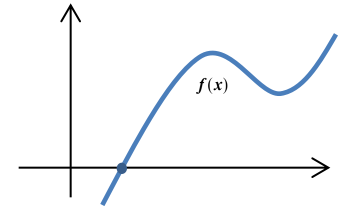
TRABAJO POR GRUPO (1/2)
Próxima semana

Hacer un estudio de los errores cometidos por los distintos métodos.

- **Riemann**
- **Trapecio**
- **Simpson**

Convergencia de los métodos al disminuir el tamaño de los subintervalos. (Explicación teórica + resultados numéricos)
(Pintar con Matplotlib error frente a tamaño de subintervalo)

FÓRMULAS DE DERIVACIÓN NUMÉRICA



TRABAJO POR GRUPO (1/2)
Próxima semana

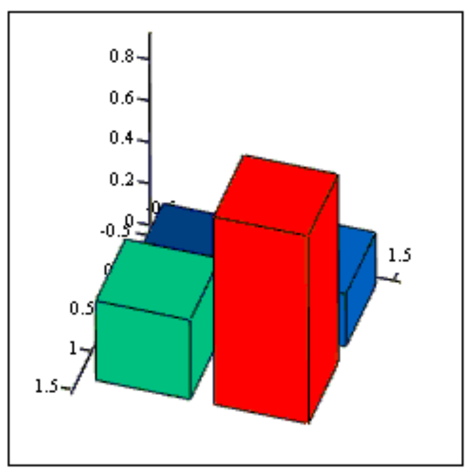
Investigar e implementar el método de Riemann y el método del trapecio (aproximación lineal) a problemas de dos variables.

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(x+y)dxdy$$

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy \approx$$

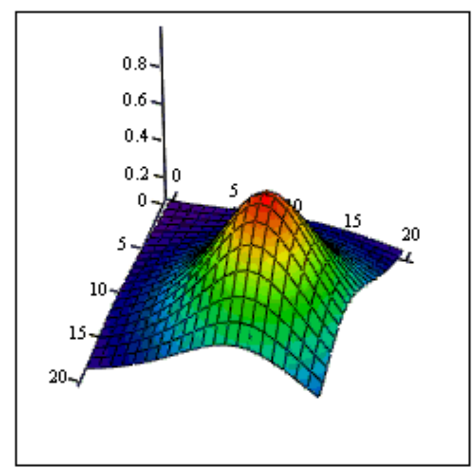
$$\int_a^b\sum_{i=0}^{n-1} h\cdot f(x_i,y)dy \approx$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} h\cdot\sum_{i=0}^{n-1} h\cdot f(x_i,y_j)$$



M
Number of boxes: nx·ny = 4

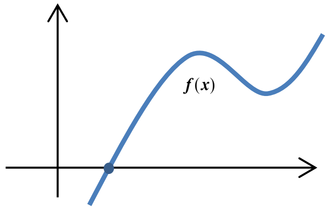
riemannsum = 3.887



N

integral = 3.908

FÓRMULAS DE DERIVACIÓN NUMÉRICA



TRABAJO POR GRUPO

- ESTARÉ DISPONIBLE 22 Y 23 DE MARZO PARA RESOLVER DUDAS.
- CONTACTAR POR EMAIL PARA HORARIO CONCRETO.