2º SEMESTRE: CÁLCULO NUMÉRICO CON FORTRAN.

TEMARIO:

1. **Sistemas lineales**
   - **1. 1. Métodos directos**
   - **1. 2. Métodos iterativos**

2. Derivación e integración numérica.
3. Solución de ecuaciones no lineales.
4. Solución de sistemas no lineales.
5. Aproximación e interpolación.
6. Calculo de Autovalores.
7. Solución numérica de Ecuaciones Diferenciales.

Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Sistema de m ecuaciones con n incognitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \dots & a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \dots & a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1}x_1 + & a_{n2}x_2 + & \dots & a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad i = 1, \dots n$$

Forma matricial

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix} \quad X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \quad AX = B$$

SISTEMAS LINEALES

Clasificación de los métodos de resolución:

DIRECTOS

- Gauss
- Gauss-Jordan
- Factorización LU

ITERATIVOS

- Jacobi
- Gauss-Seidel
- Arnoldi

Clasificación de los métodos de resolución:

DIRECTOS

- **Gauss**
- **Gauss-Jordan**
- **Factorización LU**

- Métodos **directos.**

  Son exactos (no tienen asociado error de truncamiento), y son usados cuando la mayoría de los coeficientes de A son distintos de cero y las matrices no son demasiado grandes.

  Suelen ser algoritmos ‘complicados de implementar’

Métodos directos: Factorización LU

Partiendo de la matriz de incognitas

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Se buscan dos matrices triangulares que verifiquen:

$$A = LU = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Siendo L triangular inferior (Lower) y U triangular superior (Upper)

Métodos directos: Factorización LU

Una vez obtenida la descomposición, la solución se obtiene mediante sustitución:

$$Ax = b \Rightarrow LUx = b \Rightarrow L(Ux) = b$$

Para resolverlo llamamos

$$Ux = y$$

y hallamos

$$Ly = b$$

Una vez obtenida y completamos la solución

$$Ux = y$$

Métodos directos: Factorización LU

¿Cómo calculamos la descomposición?

$$A = LU = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Sin pérdida de generalidad consideramos que la diagonal de U está formada por unos, y hallamos el resto de elementos resolviendo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = LU$$

Métodos directos: Factorización LU

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{l_{11} \quad 0 \quad \ldots \quad 0} \\ l_{21} \quad l_{22} \quad \cdots \quad 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ l_{n1} \quad l_{n2} \quad \cdots \quad l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = LU$$

Paso 1

$$\boxed{l_{11} \cdot 1 = a_{11}}$$

$$l_{11} \cdot u_{12} = a_{12}$$

$$l_{11} \cdot u_{13} = a_{13}$$

...

$$l_{11} \cdot u_{1n} = a_{1n}$$

Métodos directos: Factorización LU

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = LU$$

Paso 1

$l_{11} \cdot 1 = a_{11}$

$\boxed{l_{11} \cdot u_{12} = a_{12}}$

$l_{11} \cdot u_{13} = a_{13}$

...

$l_{11} \cdot u_{1n} = a_{1n}$

Métodos directos: Factorización LU

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = LU$$

Paso 1

$l_{11} \cdot 1 = a_{11}$

$l_{11} \cdot u_{12} = a_{12}$

$l_{11} \cdot u_{13} = a_{13}$

...

$\boxed{l_{11} \cdot u_{1n} = a_{1n}}$

Métodos directos: Factorización LU

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boxed{l_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \boxed{u_{12} \quad \cdots \quad u_{1n}} \\ 0 & 1 \quad \cdots \quad u_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ 0 & 0 \quad \cdots \quad 1 \end{pmatrix}=LU$$

Paso 1

$$l_{11}\cdot 1=a_{11}$$

$$l_{11}\cdot u_{12}=a_{12}$$

$$l_{11}\cdot u_{13}=a_{13}$$

...

$$l_{11}\cdot u_{1n}=a_{1n}$$

Métodos directos: Factorización LU

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \boxed{l_{21} \quad l_{22} \quad \cdots \quad 0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = LU$$

Paso 1	Paso 2
$l_{11} \cdot 1 = a_{11}$	$\boxed{l_{21} \cdot 1 + l_{22} \cdot 0 = a_{21}}$
$l_{11} \cdot u_{12} = a_{12}$	$l_{21} \cdot u_{12} + l_{22} \cdot 1 = a_{22}$
$l_{11} \cdot u_{13} = a_{13}$	$l_{21} \cdot u_{13} + l_{22} \cdot u_{23} = a_{23}$
...	...
$l_{11} \cdot u_{1n} = a_{1n}$	$l_{21} \cdot u_{1n} + l_{22} \cdot u_{2n} = a_{2n}$

Métodos directos: Factorización LU

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = LU$$

Paso 1	Paso 2
$l_{11} \cdot 1 = a_{11}$	$l_{21} \cdot 1 + l_{22} \cdot 0 = a_{21}$
$l_{11} \cdot u_{12} = a_{12}$	$\boxed{l_{21} \cdot u_{12} + l_{22} \cdot 1 = a_{22}}$
$l_{11} \cdot u_{13} = a_{13}$	$l_{21} \cdot u_{13} + l_{22} \cdot u_{23} = a_{23}$
...	...
$l_{11} \cdot u_{1n} = a_{1n}$	$l_{21} \cdot u_{1n} + l_{22} \cdot u_{2n} = a_{2n}$

Métodos directos: Factorización LU

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}=LU$$

Paso 1	Paso 2
$l_{11}\cdot 1=a_{11}$	$l_{21}\cdot 1+l_{22}\cdot 0=a_{21}$
$l_{11}\cdot u_{12}=a_{12}$	$l_{21}\cdot u_{12}+l_{22}\cdot 1=a_{22}$
$l_{11}\cdot u_{13}=a_{13}$	$\boxed{l_{21}\cdot u_{13}+l_{22}\cdot u_{23}=a_{23}}$
...	...
$l_{11}\cdot u_{1n}=a_{1n}$	$l_{21}\cdot u_{1n}+l_{22}\cdot u_{2n}=a_{2n}$

Métodos directos: Factorización LU

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}=LU$$

Paso 1	Paso 2
$l_{11}\cdot 1=a_{11}$	$l_{21}\cdot 1+l_{22}\cdot 0=a_{21}$
$l_{11}\cdot u_{12}=a_{12}$	$l_{21}\cdot u_{12}+l_{22}\cdot 1=a_{22}$
$l_{11}\cdot u_{13}=a_{13}$	$l_{21}\cdot u_{13}+l_{22}\cdot u_{23}=a_{23}$
...	...
$l_{11}\cdot u_{1n}=a_{1n}$	$\boxed{l_{21}\cdot u_{1n}+l_{22}\cdot u_{2n}=a_{2n}}$

Métodos directos: Factorización LU

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}=LU$$

Paso 1	Paso 2
$l_{11}\cdot 1=a_{11}$	$l_{21}\cdot 1+l_{22}\cdot 0=a_{21}$
$l_{11}\cdot u_{12}=a_{12}$	$l_{21}\cdot u_{12}+l_{22}\cdot 1=a_{22}$
$l_{11}\cdot u_{13}=a_{13}$	$l_{21}\cdot u_{13}+l_{22}\cdot u_{23}=a_{23}$
...	...
$l_{11}\cdot u_{1n}=a_{1n}$	$l_{21}\cdot u_{1n}+l_{22}\cdot u_{2n}=a_{2n}$

Métodos directos: Factorización LU

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}=LU$$

Paso 1	Paso 2
$l_{11}\cdot 1=a_{11}$	$l_{21}\cdot 1+l_{22}\cdot 0=a_{21}$
$l_{11}\cdot u_{12}=a_{12}$	$l_{21}\cdot u_{12}+l_{22}\cdot 1=a_{22}$
$l_{11}\cdot u_{13}=a_{13}$	$l_{21}\cdot u_{13}+l_{22}\cdot u_{23}=a_{23}$
...	...
$l_{11}\cdot u_{1n}=a_{1n}$	$l_{21}\cdot u_{1n}+l_{22}\cdot u_{2n}=a_{2n}$

...

Métodos directos: Factorización LU

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}=LU$$

Paso 1

$$l_{11}\cdot 1=a_{11}$$
$$l_{11}\cdot u_{12}=a_{12}$$
$$l_{11}\cdot u_{13}=a_{13}$$
$$\ldots$$
$$l_{11}\cdot u_{1n}=a_{1n}$$

Paso 2

$$l_{21}\cdot 1+l_{22}\cdot 0=a_{21}$$
$$l_{21}\cdot u_{12}+l_{22}\cdot 1=a_{22}$$
$$l_{21}\cdot u_{13}+l_{22}\cdot u_{23}=a_{23}$$
$$\ldots$$
$$l_{21}\cdot u_{1n}+l_{22}\cdot u_{2n}=a_{2n}$$

Paso n

$$\boxed{l_{n1}\cdot 1+l_{n2}\cdot 0+l_{n3}\cdot 0+\ldots=a_{n1}}$$
$$l_{n1}\cdot u_{12}+l_{n2}\cdot 1+l_{n3}\cdot 0+\ldots=a_{n2}$$
$$\ldots$$
$$\ldots$$
$$l_{n1}\cdot u_{1n}+l_{n2}\cdot u_{2n}+\ldots+l_{nn}\cdot 1=a_{nn}$$

Métodos directos: Factorización LU

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}=LU$$

Paso 1

$l_{11}\cdot 1=a_{11}$

$l_{11}\cdot u_{12}=a_{12}$

$l_{11}\cdot u_{13}=a_{13}$

...

$l_{11}\cdot u_{1n}=a_{1n}$

Paso 2

$l_{21}\cdot 1+l_{22}\cdot 0=a_{21}$

$l_{21}\cdot u_{12}+l_{22}\cdot 1=a_{22}$

$l_{21}\cdot u_{13}+l_{22}\cdot u_{23}=a_{23}$

...

$l_{21}\cdot u_{1n}+l_{22}\cdot u_{2n}=a_{2n}$

Paso n

$l_{n1}\cdot 1\quad +l_{n2}\cdot 0+l_{n3}\cdot 0+...=a_{n1}$

$\boxed{l_{n1}\cdot u_{12}+l_{n2}\cdot 1+l_{n3}\cdot 0+...=a_{n2}}$

...

...

$l_{n1}\cdot u_{1n}+l_{n2}\cdot u_{2n}\ +...+l_{nn}\cdot 1=a_{nn}$

Métodos directos: Factorización LU

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}=LU$$

Paso 1

$l_{11}\cdot 1=a_{11}$

$l_{11}\cdot u_{12}=a_{12}$

$l_{11}\cdot u_{13}=a_{13}$

...

$l_{11}\cdot u_{1n}=a_{1n}$

Paso 2

$l_{21}\cdot 1+l_{22}\cdot 0=a_{21}$

$l_{21}\cdot u_{12}+l_{22}\cdot 1=a_{22}$

$l_{21}\cdot u_{13}+l_{22}\cdot u_{23}=a_{23}$

...

$l_{21}\cdot u_{1n}+l_{22}\cdot u_{2n}=a_{2n}$

Paso n

$l_{n1}\cdot 1\quad +l_{n2}\cdot 0+l_{n3}\cdot 0+...=a_{n1}$

$l_{n1}\cdot u_{12}+l_{n2}\cdot 1+l_{n3}\cdot 0+...=a_{n2}$

...

...

$\boxed{l_{n1}\cdot u_{1n}+l_{n2}\cdot u_{2n}\ +...+l_{nn}\cdot 1=a_{nn}}$

Métodos directos: Factorización LU: Algoritmo

$$l_{11} = a_{11} \qquad\qquad u_{11} = 1$$

$$k = 1, \ldots, n-1$$

$$\begin{cases} u_{1,k+1} & = a_{1,k+1} \;/\; l_{11} \\ u_{i,k+1} & = \left(a_{i,k+1} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\, u_{j,k+1} \right) \;/\; l_{ii} \qquad\qquad i = 2, \ldots, k \\ l_{k+1,1} & = a_{k+1,1} \\ l_{k+1,i} & = a_{k+1,i} - \sum_{j=1}^{i-1} u_{ji}\, l_{k+1,j} \qquad\qquad i = 2, \ldots, k \\ u_{k+1,k+1} & = 1 \\ l_{k+1,k+1} & = a_{k+1,k+1} - \sum_{i=1}^{k} l_{k+1,i}\, u_{i,k+1} \end{cases}$$

Métodos directos: Factorización LU

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 12 \\ 0 & 2 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & L & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & U & \\ & & \end{pmatrix}$$

Métodos directos: Factorización LU

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 12 \\ 0 & 2 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Métodos directos: Factorización LU: Implementación

- Factorización de la matriz:

$$A = LU$$

- Paso de sustitución 1:

$$Ly = b$$

- Paso de sustitución 2:

$$Ux = y$$

Métodos directos: Factorización LU

$$Ax = b \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 12 \\ 0 & 2 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -15 \\ 12 \end{pmatrix}$$

- Factorización de la matriz:

$$LUx = b \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -15 \\ 12 \end{pmatrix}$$

- Paso de sustitución 1:

$$Ly = b \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -15 \\ 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Métodos directos: Factorización LU

- Paso de sustitución 2:

$$Ux = y \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Comprobación

$$Ax = b \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 12 \\ 0 & 2 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -15 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Métodos directos: Factorización LU

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 10 \\ 2 & -5 & 12 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & L & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & U & \\ & & \end{pmatrix}$$

Métodos directos: Factorización LU+Pivote parcial

- Def: Matriz de Permutación:

$P \in M^{nxn}$ es una matriz de permutación si solo un elemento de cada fila y cada columna es 1 siendo el resto 0

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Métodos directos: Factorización LU+Pivote parcial

Al multiplicar una matriz de permutación P por una matriz A el resultado es una matriz con los mismos elementos de A pero con las filas intercambiadas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow PA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow PA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Métodos directos: Factorización LU+Pivote parcial

Si una matriz A es no singular entonces existe una matriz de permutación P tal que la matriz PA se puede factorizar mediante la descomposicion LU.

El algoritmo que hemos visto no determina cual es la matriz de permutación que permite la factorización. De momento como paso previo al algoritmo modificaremos las filas de la matriz de modo que en la diagonal se situe el mayor elemento posible.

$$A(i,:) = A(j,:) \text{ tal que } A(j,i) = \max\left\{\left|A(k,i)\right|\right\};\ k = i,..,n$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 10 \\ 2 & -5 & 12 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -5 & 12 \\ 0 & 2 & 10 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 10 \\ 2 & -5 & 12 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = PA$$

Métodos directos: Factorización LU+Pivote parcial

$$PA=\begin{pmatrix} 2 & -5 & 12 \\ 0 & 2 & 10 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1/2 & -11/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -5/2 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=LU$$

Métodos directos: Práctica por grupos para presentar en clase

Implementar los métodos explicados en clase en un módulo llamado **algebra_lineal.**

Incluir el pivote parcial para evitar ceros en la diagonal.

Resolved los sistemas $Ax = b_i$ por el método de Gauss y mediante descomposición LU siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } b_i = \left(\frac{i}{2}, \frac{i}{3}, \frac{i}{5}, \frac{i}{7}\right) \quad i = 1, \dots, 20$$

Complementos teóricos. Para presentar por un grupo en la próxima clase

1.- Método de Pivote Parcial en la Factorización LU

- Estudiar el algoritmo de pivote parcial para la descomposición LU:
  - *http://www4.ncsu.edu/~kksivara/ma505/handouts/lu-pivot.pdf*
  - *J.M. Sanz-Serna Diez lecciones de cálculo numérico. Universidad de Valladolid*
- Implementar el método

Complementos teóricos. Para presentar por un grupo en la próxima clase

2.- Coste computacional de los métodos explicados

- Hacer un estudio del número de operaciones necesario para resolver un sistema usando Gauss y LU:

  http://ceee.rice.edu/Books/CS/chapter5/cost1.html

- Presentar gráficas con el tiempo empleado dependiendo del tamaño de la matriz y el método empleado.

- Buscar información sobre ventajas e inconvenientes de cada uno de estos métodos.

Complementos teóricos. Para presentar por un grupo en la próxima clase

3.- Uso de librerías externas. (2 semanas)

• Buscar información sobre librerías de funciones y subrutinas en Fortran que ya tengan implementados métodos de resolución de sistemas lineales.

http://www.mathtools.net/Fortran/Libraries/

• Instalar y compilar la librería LAPACK

http://www.netlib.org/lapack/

• Comparar el tiempo empleado por nuestra subrutina y la proporcionada tiene LAPACK.