INFORMÁTICA

2º SEMESTRE: CÁLCULO NUMÉRICO CON FORTRAN.

Javier de Vicente: Despacho Depto Mat Aplic y Estadística 3ºPiso

Tutorías:(oficial) : Lunes 14:30 - 16:30
Miércoles 14:30 - 16:30
Jueves 14:00 - 16:00

Moddle de la asignatura.

fj.devicente@upm.es

Clases: En principio en el aula. Traed portátiles. (1 por grupo al menos)

2º SEMESTRE: CÁLCULO NUMÉRICO CON FORTRAN.

ASIGNATURA: CÁLCULO NUMÉRICO con fortran

TEMARIO: (puede haber cambios)

1. Sistemas lineales
   1. 1. Métodos directos
   1. 2. Métodos iterativos

2. Cálculo de Autovalores
3. Derivación e Integración Numérica.
4. Ecuaciones y Sistemas no Lineales.
5. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

2º SEMESTRE: CÁLCULO NUMÉRICO CON FORTRAN.

Metodología:

Trabajo Colaborativo.

Teoría:

- Conocimientos básicos.
- Complementos propuestos. (Grupos)

Práctica:

- Presentación por grupos ejercicio básico.
- Presentación complementos

2º SEMESTRE: CÁLCULO NUMÉRICO CON FORTRAN.

Metodología:

Trabajo Colaborativo.

Cada grupo tendrá una nota teórica y al menos 2 prácticas a lo largo del cuatrimestre.

Nota teórica: Presentación **10 min** de un complemento teórico por grupo.

Nota práctica: Explicación de la implementación de un algoritmo.(Aula o en mi despacho)

2º SEMESTRE: CÁLCULO NUMÉRICO CON FORTRAN.

Metodología:

Trabajo Colaborativo.

Composición de los grupos.

- Madurez
- 4 personas por grupo (14 grupos)
- Nota de grupo (no individual)
- Criterios
  - Claridad
  - Exposición
  - Capacidad de síntesis

2º SEMESTRE: CÁLCULO NUMÉRICO CON FORTRAN.

A nivel práctico

Todos los programas partirán de un fichero con el código fuente escrito con el editor de texto que prefiráis (Geany)

Será obligatorio utilizar un makefile para compilar el código fuente usando el compilador gfortran

Traducción: Silverfrost/Codeblocks está prohibido.

Este cuatrimestre se estudia cálculo numérico. Doy por hecho que todos manejáis fortran.

2º SEMESTRE: CÁLCULO NUMÉRICO CON FORTRAN.

TEMARIO:

1. **Sistemas lineales**
    - **1. 1. Métodos directos**
    - **1. 2. Métodos iterativos**

2. Cálculo de Autovalores
3. Derivación e Integración Numérica.
4. Ecuaciones y Sistemas no Lineales.
5. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Sistema de m ecuaciones con n incognitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \ddots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad i = 1,\dots n$$

Forma matricial

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix} \quad X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \qquad AX = B$$

Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

¿Cómo despejamos el valor de X en la expresión $AX = B$?

Desde un punto de vista matemático bastará con hallar la inversa de A.

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

El problema ahora consiste en hallar la inversa de una matriz... ¿Existe siempre?

Compatibilidad de un sistema lineal de ecuaciones. Teorema de Rouche.

Rango(A) $\neq$ Rango(AB) $\Leftrightarrow$ el sistema es incompatible

Rango(A)=Rango(AB) $= t$ $\Leftrightarrow$ el sistema es compatible

Rango(A)=Rango(AB) $= t = \mathrm{n}$ $\Leftrightarrow$ el sistema es compatible y determinado (1! solución)

Rango(A)=Rango(AB) $= t < \mathrm{n}$ $\Leftrightarrow$ el sistema es compatible e indeterminado (∞ soluciones)

(n número de incognitas)

SISTEMAS LINEALES

Clasificación de los métodos de resolución:

DIRECTOS

- Gauss
- Gauss-Jordan
- Factorización LU

ITERATIVOS

- Jacobi
- Gauss-Seidel
- Arnoldi

Clasificación de los métodos de resolución:

DIRECTOS

- **Gauss**
- **Gauss-Jordan**
- **Factorización LU**

❑ Métodos **directos.**

Son exactos (no tienen asociado error de truncamiento), y son usados cuando la mayoría de los coeficientes de A son distintos de cero y las matrices no son demasiado grandes.

Suelen ser algoritmos ‘complicados de implementar’

Clasificación de los métodos de resolución:

- Métodos **indirectos o iterativos:**

  Parten de una solución inicial (mala) y van dando «pasos» buscando la solución correcta

  Tienen asociado un error de truncamiento y se usan normalmente para matrices grandes (n>>1000) cuando los coeficientes de A son la mayoría nulos –matrices *sparse*-.

  Algoritmos sencillos de implementar que requieren aproximación inicial y que en general no tienen porqué converger (requieren análisis de convergencia previo).

ITERATIVOS

- **Jacobi**
- **Gauss-Seidel**
- **Arnoldi**

Métodos directos: Gauss

Partiendo de la matriz ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix} \quad X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \qquad AX = B$$

$$AB = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

Consta de dos fases:

- Triangulación (eliminación gaussiana)
- Sustitución

Métodos directos: Gauss

Consta de dos fases:

- Triangulación (eliminación): Mediante **operaciones elementales** se hacen ceros todos los elementos de la matriz por debajo de la diagonal principal.

$$AB = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \qquad \Rightarrow \overline{AB} = \left(\begin{array}{cccc|c} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \dots & \bar{a}_{1n} & \bar{b}_1 \\ 0 & \bar{a}_{22} & \cdots & \bar{a}_{2n} & \bar{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{a}_{nn} & \bar{b}_n \end{array}\right)$$

Operaciones elementales:

- Multiplicar una fila por un número
- Permutar filas o columnas*
- Cambiar una fila por una combinación lineal de filas que la incluya

Métodos directos: Gauss

Consta de dos fases:

- Sustitución: Despejar de modo inverso el valor de las incognitas

$$\overline{AB} = \left(\begin{array}{cccc|c} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \cdots & \bar{a}_{1n} & \bar{b}_1 \\ 0 & \bar{a}_{22} & \cdots & \bar{a}_{2n} & \bar{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{a}_{nn} & \bar{b}_n \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} \bar{a}_{11}x_1 + \bar{a}_{12}x_2 + \ldots \bar{a}_{1n}x_n = \bar{b}_1 \\ \qquad\quad \bar{a}_{22}x_2 + \ldots \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2 \\ \qquad\qquad\qquad \ddots \\ \qquad\qquad\qquad\quad \bar{a}_{nn}x_n = \bar{b}_n \end{cases}$$

$$x_n = \frac{\bar{b}_n}{\bar{a}_{nn}}; \qquad x_{n-1} = \frac{\bar{b}_{n-1} - \bar{a}_{(n-1)n}x_n}{\bar{a}_{n-1n-1}}; \quad \ldots\ldots \quad x_1 = \frac{\bar{b}_1 - \sum_{i=2}^{n} \bar{a}_{1i}x_i}{\bar{a}_{11}}$$

Métodos directos: Gauss implementación

- Triangulación.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 1 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{array}\right)$$

- Sustitución.

$$x_3 = \frac{4}{5}$$

$$x_2 = -\left(2 + \frac{4}{5}\right)$$

$$x_1 = -1 + 2\left(2 + \frac{4}{5}\right)$$

Métodos directos: Gauss implementación

```
program algebra

    use algebra_lineal

    implicit none
    real(8) :: MA(4,4)      !
    real(8) :: Vb(4)        ! Dimensiones definidas
    real(8) :: Vx(4)        !
    integer :: i,j

    ! Dar valores a la matriz MA y al vector Vb
      .........

    call Gauss(MA,Vb,Vx)

    write(*,*)
    write(*,'(10f7.3)') Vx
    write(*,*)
    write(*,'(10f7.3)') Matmul(Ma,Vx)
    write(*,'(10f7.3)') Vb

end program
```

Métodos directos: Gauss implementación

```
module algebra_lineal
implicit none
contains

 subroutine Gauss(A,b,x)

! Argumentos de la subrutina
 real(8), intent(in)    :: A(:,:)     !|
 real(8), intent(in)    :: b(:)       !| Dimensiones asumidas
 real(8), intent(inout) :: x(:)       !|

 ! variables locales
 integer               :: m        ! Dimension del problema A(m,m) b(m) X(m)
 real(8), allocatable :: Ab(:,:) ! Matriz ampliada. Dimension depende de m
 real(8)   :: h
 integer   :: i,j,k

 m = size(A,1)
 allocate(Ab(m,m+1))

 Ab(1:m,1:m)  = A
 Ab(1:m,m+1)  = b

......
```

Métodos directos: Gauss implementación

- Triangulación.

```
module algebra_lineal
implicit none
contains

 subroutine Gauss(A,b,x)

......
 Ab(1:m,1:m) = A
 Ab(1:m,m+1) = b

! Etapa triangulación
 do i = 1, m-1
   if (abs(Ab(i,i))<epsilon(1.d0)) stop "Cero en la diagonal"

   do k = i+1, m                              ! filas por debajo
      h = Ab(k,i)/Ab(i,i)                     ! Factor que multiplica la fila i
      Ab(k,:) = Ab(k,:) - h*Ab(i,:)
  enddo
enddo

! Fin Triangulación
......
```

Métodos directos: Gauss implementación

- Sustitución.

```
module algebra_lineal
implicit none
contains

 subroutine Gauss(A,b,x)

......
! Fin Triangulación
! Etapa sustitución
do i = m,1,-1

  h = Ab(i,m+1)            ! Guardo en h el valor de la columna ampliada

  do j = i+1,m
      h = h-Ab(i,j)*x(j) ! Resto los productos de x's ya calculados
  enddo

  x(i) = h/Ab(i,i)         ! Divido por la diagonal

enddo

end subroutine Gauss

end module
```

Métodos directos: Gauss Ejemplo

```
program algebra

    use algebra_lineal

    implicit none
    real(8) :: MA(4,4)      !
    real(8) :: Vb(4)        ! Dimensiones definidas
    real(8) :: Vx(4)        !
    integer :: i,j

    MA = 1.d0
    do i = 1,3
      MA(i,4-i) = -1.d0
      MA(i,5-i)  = 0
    enddo
    MA(4,1) = 0
    MA(4,4) = -1.d0
    Vb = (/1,1,1,1/)


    call Gauss(MA,Vb,Vx)


end program
```

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_4 &= 1 \\ -x_1 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Métodos directos: Gauss. Ejemplo

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\
x_1 - x_2 + x_4 &= 1 \\
-x_1 + x_3 + x_4 &= 1 \\
x_2 + x_3 - x_4 &= 1
\end{aligned}
$$

Símbolo del sistema - prog

```
C:\Users\uss\Javier\Trabajo\Informatica 16-17\2ºCuatrimestre\
  1.000  1.000 -1.000  0.000        1.000
  1.000 -1.000  0.000  1.000        1.000
 -1.000  0.000  1.000  1.000        1.000
  0.000  1.000  1.000 -1.000        1.000
```

- Triangulación.

Símbolo del sistema - prog

```
C:\Users\uss\Javier\Trabajo\Informatica 16-17\2ºCuatrimestre\
  1.000  1.000 -1.000  0.000        1.000
  1.000 -1.000  0.000  1.000        1.000
 -1.000  0.000  1.000  1.000        1.000
  0.000  1.000  1.000 -1.000        1.000

  1.000  1.000 -1.000  0.000  1.000
  0.000 -2.000  1.000  1.000  0.000
  0.000  0.000  0.500  1.500  2.000
  0.000  0.000  0.000 -5.000 -5.000
```

- Sustitución.

Métodos directos: Gauss. Ejemplo

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\
x_1 - x_2 + x_4 &= 1 \\
-x_1 + x_3 + x_4 &= 1 \\
x_2 + x_3 - x_4 &= 1
\end{aligned}
$$

Símbolo del sistema - prog

```
C:\Users\uss\Javier\Trabajo\Informatica 16-17\2ºCuatrimestre\
  1.000  1.000 -1.000  0.000        1.000
  1.000 -1.000  0.000  1.000        1.000
 -1.000  0.000  1.000  1.000        1.000
  0.000  1.000  1.000 -1.000        1.000
```

- Sustitución.

```
program algebra

…
     call Gauss(MA,Vb,Vx)

     write(*,*) 'Solución'
     write(*,'(10f7.3)') Vx
     write(*,*) 'Comprobación'
     write(*,'(10f7.3)') Matmul(Ma,Vx)
     write(*,'(10f7.3)') Vb

end program
```

Símbolo del sistema

```
C:\Users\uss\Javier\Trabajo\Informatica 16-17\2ºCuatrimestre\
  1.000  1.000 -1.000  0.000        1.000
  1.000 -1.000  0.000  1.000        1.000
 -1.000  0.000  1.000  1.000        1.000
  0.000  1.000  1.000 -1.000        1.000

  1.000  1.000 -1.000  0.000  1.000
  0.000 -2.000  1.000  1.000  0.000
  0.000  0.000  0.500  1.500  2.000
  0.000  0.000  0.000 -5.000 -5.000


 Soluci├│n
  1.000  1.000  1.000  1.000

 Comprobaci├│n
  1.000  1.000  1.000  1.000
  1.000  1.000  1.000  1.000
```

Métodos directos: Gauss. Problemas

- El método de Gauss lleva asociado problemas de redondeo al operar con aritmética no exacta.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{AB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & 1 \end{pmatrix}$$

Métodos directos: Gauss. Problemas

- El método de Gauss lleva asociado problemas de redondeo al operar con aritmética no exacta.

$$\overline{AB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & 1 \end{pmatrix}$$

Simple precisión

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 30.25 & -422.860 & 1689.68 & -2532.58 & 1265.55 \end{pmatrix}$$

Doble precisión

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 30 & -420 & 1680 & -2520 & 1260 \end{pmatrix}$$

Métodos directos: Gauss. Problemas

- Triangularización:

```
! Eliminación Gaussiana
do i = 1, n-1
    if (Ab(i,i) == 0 ) stop "Matriz con ceros en la diagonal en el proceso"

    ! Fila k por debajo de la i
    do k = i+1, n

        ! Cálculo del elemento multiplicador por fila
        h = -Ab(k,i)/Ab(i,i)

        ! Columna j a partir de la diagonal
        do j = i, n+1
            Ab(k,j) = Ab(k,j) + h*Ab(i,j)
        enddo

    enddo
enddo
```

La existencia de ceros en la diagonal se puede solucionar en algunas ocasiones mediante la elección de un pivote.

Métodos directos: Gauss. Problemas

- Triangularización + Pivote:

Pivote parcial: Se intercambia la fila por aquella que cumple:

$$|a_{li}| = \max\left\{|a_{k,i}|, k = i+1, n\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Métodos directos: Gauss. Problemas

- Triangularización + Pivote:

Pivote total: Se intercambia la fila por aquella que contiene:

$$\left|a_{li}\right| = \max\left\{\left|a_{kj}\right|, k, j = i+1, n\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -5 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

- El vector solución tiene componentes: $\vec{X} = \{x_1, x_4, x_3, x_2\}$

Métodos directos: Gauss-Jordan

Una vez conseguida la matriz triangular usando Gauss, se continua hasta convertir la matriz en unidad.

- Diagonalización

$$\overline{AB} = \left(\begin{array}{cccc|c} \overline{a}_{11} & \overline{a}_{12} & \cdots & \overline{a}_{1n} & \overline{b}_1 \\ 0 & \overline{a}_{22} & \cdots & \overline{a}_{2n} & \overline{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \overline{a}_{nn} & \overline{b}_n \end{array} \right) \Rightarrow \overline{\overline{AB}} = \left(\begin{array}{cccc|c} \overline{a}_{11} & 0 & \cdots & 0 & \overline{\overline{b}}_1 \\ 0 & \overline{a}_{22} & \cdots & 0 & \overline{\overline{b}}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \overline{a}_{nn} & \overline{\overline{b}}_n \end{array} \right)$$

```
do i = n,2,-1
      do j=i-1,1,-1

                  m = AB(j,i)/AB(i,i)
                  AB(j,n+1) = AB(j,n+1) - AB(i,n+1)*m
      enddo
enddo
```

Métodos directos: Gauss-Jordan

Una vez conseguida la matriz triangular usando Gauss, se continua hasta convertir la matriz en unidad.

- Unidad

$$\overline{\overline{AB}} = \left(\begin{array}{cccc|c} \bar{a}_{11} & 0 & \dots & 0 & \overline{\overline{b}}_1 \\ 0 & \bar{a}_{22} & \cdots & 0 & \overline{\overline{b}}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{a}_{nn} & \overline{\overline{b}}_n \end{array}\right) \Rightarrow \overline{\overline{\overline{AB}}} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \overline{\overline{\overline{b}}}_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \overline{\overline{\overline{b}}}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \overline{\overline{\overline{b}}}_n \end{array}\right)$$

```
do i = 1,n

      X(i)=  AB(i,n+1)/ AB(i,i)

enddo
```

Métodos directos: Práctica por grupos para presentar en clase

Implementar los métodos explicados en clase en un módulo llamado **algebra_lineal.**

Incluir el pivote parcial para evitar ceros en la diagonal.

Resolved los sistemas $Ax = b_i$ por el método de Gauss

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } b_i = \left(\frac{i}{2}, \frac{i}{3}, \frac{i}{5}, \frac{i}{7}\right) \quad i = 1, \dots, 20$$

Complementos teóricos. Para presentar por un grupo en la próxima clase

1.- Aplicaciones de los métodos de resolución de sistemas lineales

- Cálculo de la matriz inversa:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow ¿A^{-1}?$$

- Cálculo del determinante:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow ¿|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}?$$

1.- Aplicaciones de los métodos de resolución de sistemas lineales

Problema de interpolación: Dados n+1 puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, hallar un polinomio de grado n

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

que pase por estos puntos, esto es que $p_n(x_i) = y_i$, para n=0,1,2, ... ,n

Para probar la existencia de este polinomio se pueden considerar sus coeficientes $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ como incógnitas a determinar en las n+1 ecuaciones $p_n(x_i) = y_i$, para n=0,1,2, ... ,n, ya que los (x_i, y_i) son números ya conocidos como datos del problema. Aparece pues el sistema de n+1 ecuaciones con n+1 incógnitas

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = y_0$$

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = y_1$$

$$\ldots$$

$$a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = y_n$$

Hallad el polinomio de grado 15 que pasa por los siguientes 16 puntos:

(-1.00000, 0.16101) ; (-0.86667 , -0.32502) ; (-0.73333 , -0.65284) ; (-0.60000 , 0.02181) ; (-0.46667 , 0.99687)

(-0.33333 , 0.00692) ; (-0.20000 , -0.75183) ; (-0.06667, -0.23645) ; (0.06667, 0.23645); (0.20000 , 0.75183)

(0.33333 , -0.00692) ; (0.46667 , -0.99687) ; (0.60000 , -0.02181) ; (0.73333 , 0.65284) ; (0.86667 , 0.32502); (1.00000, -0.16101)