

国科大 2006 年基础数学专业硕博连读考试题

望梦阁的小梦友

2018 年 11 月 23 日

注记 本试卷分为试卷 1(公共基础部分) 和试卷 2(专业综合部分), 总时间为 180 分钟, 满分为 140 分. 试卷 1 满分 80 分, 数学学科五个二级学科的硕士研究生必须完成该卷. 试卷 2 为专业部分, 满分为 60 分, 根据二级学科, 分为基础数学、应用数学、计算数学、概率统计、运筹学与控制论五类, 相应的二级学科的硕士研究生选择相应的试卷. 目前公共基础 9 月入学就会考, 不及格的话第二年入学时还可以申请再考一次, 专业综合部分第二年入学时考.

1 公共基础部分

注记 本试卷六道题任选四题, 每题 20 分, 满分 80 分.

题 1. 设 A 是 n 阶实矩阵. 证明: A 具有 n 不同的特征值当且仅当 A 与任何非零的幂零矩阵不交换.

题 2. 设 V 为 n 维复向量空间, 具有基 v_1, v_2, \dots, v_n . 设 σ 为 v_1, v_2, \dots, v_n 的一个置换, 它诱导 V 的一个线性变换 T . 证明 T 的矩阵可对角化.

题 3. 假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, 令

$$c_n = \frac{\sum_{k=1}^n a_k b_{n+1-k}}{n}$$

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = ab$.

题 4. 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个 2 次可微函数. 给定实数 a 以及正实数 h . 证明: 存在实数 c 使得

$$f(a) - 2f(a+h) + f(a+2h) = h^2 f''(c).$$

题 5. 设 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个连续函数. 证明:

$$\lim_{t \rightarrow 1} [(1-t) \sum_{k=0}^{\infty} t^k f(t^k)] = \int_0^1 f(x) dx.$$

题 6. 对哪些些实数 a 的值来说, 无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \tan \frac{1}{n} \right)^a$$

收敛?

2 专业综合部分 (基础数学专业)

注记 本试卷五道题任选三题, 每题 20 分, 满分 60 分.

题 7. 设 S^2 是 \mathbb{R}^3 中的单位球面, $i: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 为包含映射. 设 $g = \sum_{\alpha=1}^3 dx^\alpha \otimes dx^\alpha$ 为 \mathbb{R}^3 上的欧氏度量, 求 S^2 上的诱导度量 i^*g 在 S^2 的球极投影给出的局部坐标系下的表达式以及在此度量下的高斯曲率.

题 8. 试求螺面 $\vec{r}_1 = \{u \cos v, u \sin v, u + v\}$ 和旋转曲面 $\vec{r}_2 = \{t \cos \theta, t \sin \theta, \sqrt{t^2 - 1}\}$ 之间的一个等距对应.

题 9. 设 X 是无限维的赋范线性空间, 则 X 中的单位球 $\{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$ 非紧.

题 10. 证明: 阶为 $2006 = 2 \times 17 \times 59$ 的有限群不是单群, 给出全部阶为 2006 的群.

题 11. 假设 α 是首项系数为 1 的 9 次不可约的有理系数多项式 $f(x)$ 的一个根, 这时 $Q[x]/(f(x))$ 是 Q 的一个 9 次扩域并且同构于 $Q(\alpha) = K$.

1) 假设 α 是实数而 $f(x)$ 的其余根全为非实复数, 解释为什么 K 没有非平凡的自同构.

2) 设 L 是 $f(x)$ 在复数内的分裂域, 并且 $Gal(L/Q) = S_9$, 那么 K 与 Q 之间是否有中间域, 并说明理由.