

中国科学院研究生院
数学学科 硕转博资格考试综合笔试
考试大纲

二级学科：基础数学

考试科目：分析学、代数学、几何与拓扑

考试时间：180 分钟

考试形式：基础数学专业硕转博资格考试综合笔试试卷涵盖了基础数学专业研究生的所有课程，试卷分为《分析学》（包括实分析、复分析和泛函分析）、《代数学》、《几何与拓扑》（包括代数拓扑、微分流形和微分几何）三门试卷。考试前，考生在导师指导下选定一张试卷，总分为 150 分。

I. 分析学

一、考试内容

（一）复分析（资格考试不含*部分内容）

1. 平面区域上的 Poincare 度量，超双曲度量，Schwarz 引理。
2. 正规族，Montel 定理，黎曼映射定理。
3. 单叶函数偏差定理，单叶函数序列，素端与极限。
4. 多连通区域上的共形映射
5. 调和函数 Poisson 公式，极值原理，调和函数序列，次调和函数，调和测度。
6. 极值长度，环域与拓扑四边形的模，极值环域，极值距离与调和函数。
7. 容量与超限直径。
8. 单值化定理
9. 解析延拓与黎曼曲面*
10. Riemann-Roch 定理*
11. 拟共形映射*
12. 全纯、亚纯函数的构造与逼近*
13. 椭圆函数理论*
14. Teichmüller 空间及模空间*

（二）实分析

1. 测度理论：含 Lebesgue 测度，复测度，测度的绝对连续性；Radon-Nikodym 定理，及抽象测度理论。
2. 微分与积分理论：含 Lebesgue 积分，Fubini 定理，有界变差函数，绝对连续函

数，测度的导数；微积分基本定理；可微变换。

3. L^p 空间与 Fourier 变换： L^p 空间的基本特征，Fourier 变换的一般性质，Fourier 变换的逆定理，Plancherel 定理。

(三) 泛函分析

1. 范数，赋范空间，完备化
2. Hahn-Banach 定理及其应用：分离定理和泛函延拓定理，一致有界定理
3. Banach 空间，对偶空间，自反 Banach 空间， L_p 空间的自反性
4. 局部凸空间，弱拓扑，(Banach 空间中) 凸集的范数闭和弱拓扑闭的等价及应用，单位球的弱拓扑紧性及应用，弱*拓扑
5. Hilbert 空间，平行四边形法则及应用，Riesz 表示定理，Lax-Milgram 定理
6. Hilbert 空间上的有界线性算子，紧算子，Fredholm 算子，自伴算子，酉算子，投影，算子的对偶
7. 谱，谱半径，自伴紧算子的谱分解
8. Fredholm 二择一
9. Sobolev 空间，映射的微分
10. C^* -代数，函数演算，GNS 表示
11. 谱分解定理，极分解定理

二、主要教材与参考书目：

主要教材：

1. Lars V. Ahlfors, *Conformal Invariants—Topics in Geometric Function Theory*, McGraw-Hill Book Company, 1973.
2. W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Book Co., 1987.
3. J.B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, GTM96, Springer-Verlag, 1985

参考书目：

1. 张南岳，陈怀惠，复变函数论选讲（天元研究生数学丛书），北京大学出版社，1995。
2. 李忠，复分析导引（北京大学数学教学系列丛书），北京大学出版社，2004。
3. Otto Forster: *Lectures on Riemannian surfaces*. GTM 81. *Springer-Verlag, New York*, 1991.
4. R. Remmert: *Classical topics in complex function theory*. Translated from the German by Leslie Kay. *Graduate Texts in Mathematics, 172. Springer-Verlag, New York*, 1998.
5. 周民强，实变函数论，北京大学出版社，2004
6. 程民德，邓东皋，龙瑞麟，实分析，高等教育出版社，第二版，2008.
7. 陆善镇，王昆扬，实分析 北京师范大学出版社，1997.
8. Paul R. Halmos, *Measure Theory*, GTM18, Springer-Verlag, New York, 1974.
9. Evans, Lawrence C., Gariepy, Ronald F., *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.
10. 张恭庆，林源渠，泛函分析讲义（上），北京大学出版社，1987
11. 张恭庆，郭懋正，泛函分析讲义（下），北京大学出版社，1990

II. 代数学

一、考试内容：

(一) Galois 理论和域论

1. 基本定理及应用，计算简单方程的 Galois 群
2. 有限域及其 Galois 理论，可分扩张与不可分扩张
3. 超越扩张和 Noether 正规化定理

(二) 模论

1. artinian 模，noetherian 模，Krull-Schmidt 定理，完全可约模
2. 张量积，平坦模，射影模，内射模
3. 主理想整环上的有限生成模

(三) 环与代数

1. 张量代数，外代数，对称代数，李代数的包络代数
2. 代数的结构理论，有限维中心单代数，Brauer 群

(四) 有限群及其表示论

1. Sylow 定理
2. 完全可约性，特征标，正交关系
3. 对称群的不可约表示，诱导表示
4. Frobenius 互反定理，Brauer 定理

(五) 同调代数

1. 范畴与函子的基本概念，自然变换，可表函子，Yoneda 引理
2. 加性与 Abelian 范畴，复形与同调，同调长正合列与同伦
3. 导函子， Ext 与 Tor ，同调维数，群的上同调
4. Koszul 复形与 Hilbert 的 syzygy 定理，谱序列，导出范畴

(六) 交换代数*（资格考试不含这部分内容）

1. 环的素谱，环和模的局部化，局部环上的有限射影模
2. Hilbert 零点定理的几种等价形式，有限扩张与整扩张，上升与下降定理
3. artinian 环和 noetherian 环，准素分解，Krull 相交定理
4. Hilbert 多项式与维数理论，I-adic 拓扑与完备化

二、主要教材与参考书目：

1. S. Lang: Algebra, Springer-Verlag, New York, 2005.
2. N. Jacobson: Basic Algebra I, II, W. H. Freeman and Company, New York, 1974.
3. M. Atiyah, I. Macdonald: Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont. 1969.
4. Hideyuki Matsumura, Commutative algebra. Second edition. Mathematics Lecture Note Series, 56. Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1980.
5. S. I. Gelfand, Y. I. Manin: Methods of Homological Algebra, Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
6. H. Cartan, S. Eilenberg: Homological Algebra, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956.
7. J. P. Serre: Linear Representations of Finite Groups, Graduate Texts in Mathematics, vol. 42, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1977.

III. 几何与拓扑

一、考试内容：

(一) 代数拓扑

1. 链复形与链映射; 拓扑空间的奇异同调; Steenrod-Eilenberg 同调公理; 胞腔复形及同调
2. 上链复形与上同调; Cap 积与 Cup 积; 泛系数定理; Künneth 公式
3. 流形的同调性质(Poincare 对偶定理)
4. 向量丛及其构造; Thom 同构定理及应用; 流形中的相交理论

(二) 微分流形

1. 微分流形; 切空间; 切映射;
2. 向量场, 可积性定理; 流形的嵌入与浸入。
3. 张量代数; 外微分形式
4. 外微分形式的积分; Stokes 定理及其应用

(三) 微分几何

1. 流形上的仿射联络; 挠率和曲率; 黎曼度量; 黎曼联络; 黎曼曲率; 常曲率空间; 黎曼几何基本定理。
2. 测地线; 指数映射; 法坐标; 弧长第一,二变分公式; 完备性; Jacobi 场; 共轭点; 指标引理;
3. 子流形基本方程; 活动标架; 常曲率空间的子流形.

二、主要教材：

1. W. S. Massey, A Basic Course in Algebraic Topology (GTM 127); Springer-Verlag, 2007.
2. Marvin J. Greenberg, John R. Harper, Algebraic Topology: A First Course (Mathematics Lecture Note Series), The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., 1981.
3. Milnor J., Stasheff J., Characteristic classes; Princeton Univ. Press, 1974.
4. Milnor J., 《从微分观点看拓扑》, 熊金城译, 上海科技出版社, 1983.
5. Warner, F.W., Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, GTM Vol.94, Springer-Verlag and China Academic Publishers, Beijing, 1983.
6. 白正国, 沈一兵等, 《黎曼几何初步(修订版)》, 高等教育出版社, 北京, 2004.
7. 陈省身、陈维桓著, 《微分几何讲义》, 北京大学出版社, 北京, 1983.