《复变函数与积分变换》总复习

授课教师：郭鹏

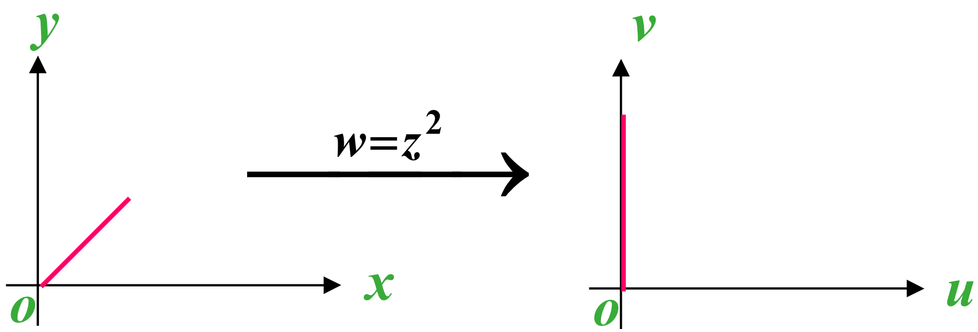
一、映射

例1 在映射 $w=z^2$ 下求下列平面点集在 w 平面上的象：

(1) 线段 $0<r<2,\ \theta=\dfrac{\pi}{4}$;

解 设 $z=re^{i\theta}$,

$$w=\rho e^{i\varphi},$$



则 $\rho=r^2,\quad \varphi=2\theta,$

故线段 $0<r<2,\ \theta=\dfrac{\pi}{4}$ 映射为 $0<\rho<4,\ \varphi=\dfrac{\pi}{2}$,

例1 在映射 $w=z^2$ 下求下列平面点集在 w 平面上的象：

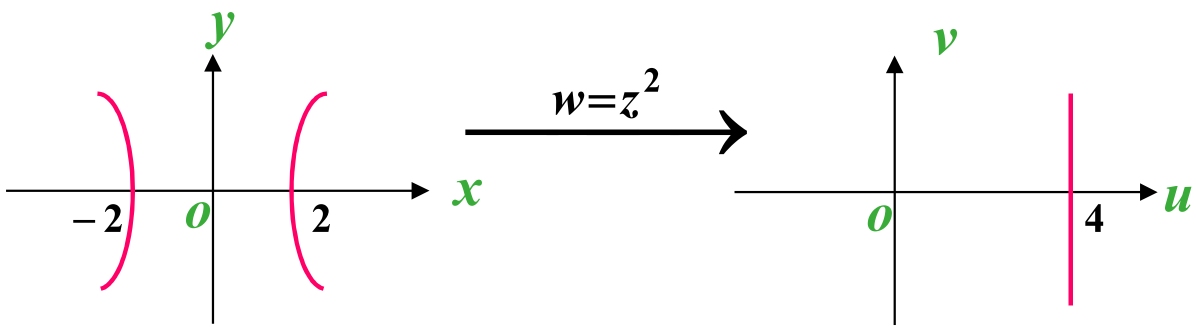
(2) 双曲线 $x^2-y^2=4$;

解 令 $z=x+iy$, $w=u+iv$,

则 $u+iv=x^2-y^2+2xyi$, $\qquad u=x^2-y^2$,

$x^2-y^2=4$

$\Rightarrow u=4$,



平行于 v 轴的直线.

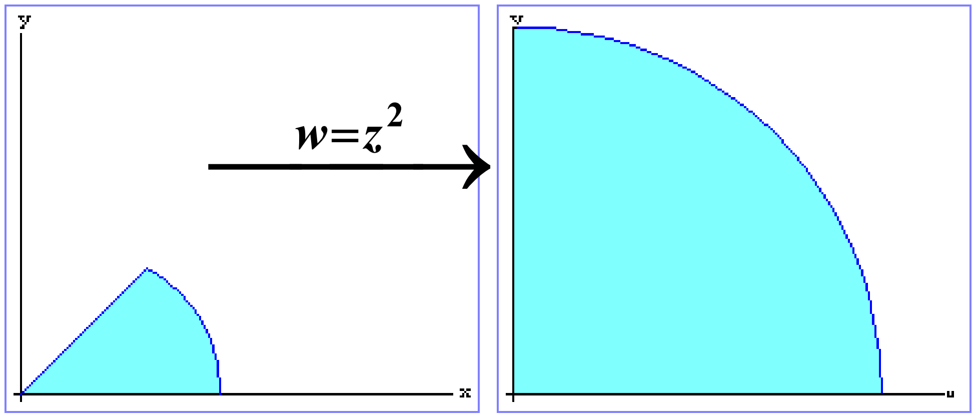
例1 在映射 $w=z^2$ 下求下列平面点集在 w 平面上的象：

(3) 扇形域 $0<\theta<\dfrac{\pi}{4},\ 0<r<2.$

解 设 $z=re^{i\theta}$， $w=\rho e^{i\varphi}$，则 $\rho=r^2$， $\varphi=2\theta$，

故扇形域 $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$，

$0<r<2$映射为



$0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}, 0<\rho<4,$ 仍是扇形域.

例2　对于映射 $w=z+\dfrac{1}{z}$，求圆周 $|z|=2$ 的象.

解　令 $z=x+iy,\ w=u+iv,$

映射 $w=z+\dfrac{1}{z} \Rightarrow u+iv=x+iy+\dfrac{x-iy}{x^2+y^2},$

于是 $u=x+\dfrac{x}{x^2+y^2},\quad v=y-\dfrac{y}{x^2+y^2},$

圆周 $|z|=2$ 的参数方程为：

$$\begin{cases} x=2\cos\theta \\ y=2\sin\theta, \end{cases} \quad 0\le\theta\le 2\pi$$

所以象的参数方程为 $\begin{cases} u = \dfrac{5}{2}\cos\theta \\ v = \dfrac{3}{2}\sin\theta, \end{cases} \quad 0 \le \theta \le 2\pi$

表示 w 平面上的椭圆：$\dfrac{u^2}{\left(\dfrac{5}{2}\right)^2} + \dfrac{v^2}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2} = 1.$

二、可导与解析

例1 证明函数$f(z)=x^3-y^3i$仅在原点有导数.

证 $$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z}=\lim_{(x,y)\to 0}\frac{x^3-y^3i}{x+iy}=\lim_{(x,y)\to 0}\frac{x^3+(yi)^3}{x+iy}$$

$$=\lim_{(x,y)\to 0}(x^2-xyi-y^2)=0$$ 用柯西黎曼方程

故 $f(z)$ 在$z=0$处的导数为0.

再证其他处的导数不存在.

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{x^3+iy^3-x_0^3-iy_0^3}{(x+iy)-(x_0+iy_0)}$$

若z沿路径 $y=y_0$, 则

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{x^3-x_0^3}{x-x_0}\to 3x_0^2 \quad (当x\to x_0)$$

若z沿路径 $x=x_0$, 则

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{-iy^3+iy_0^3}{i(y-y_0)}\to -3y_0^2 \quad (当y\to y_0)$$

故除非$x_0=y_0=0$, 否则$f(z)$的导数不存在.

例2 函数$f(z)=(x^2-y^2-x)+i(2xy-y^2)$在何处可导，何处解析.

例2 函数$f(z)=(x^2-y^2-x)+i(2xy-y^2)$在何处可导，何处解析.

解 $u(x,y)=x^2-y^2-x$， $u_x=2x-1$， $u_y=-2y$;

$v(x,y)=2xy-y^2$， $v_x=2y$ ，$v_y=2x-2y$;

当且仅当$y=\dfrac{1}{2}$时， $u_x=v_y$， $u_y=-v_x$.

故 $f(z)$ 仅在直线 $y=\dfrac{1}{2}$ 上可导.

由解析函数的定义知，$f(z)$ 在直线 $y=\dfrac{1}{2}$ 上处处不解析，故 $f(z)$ 在复平面上处处不解析.

例3 设 $ay^3+bx^2y+i(x^3+cxy^2)$ 为解析函数，求 a,b,c 的值.

解 设 $f(z)=(ay^3+bx^2y)+i(x^3+cxy^2)=u+iv$

故 $$u=ay^3+bx^2y,\quad v=x^3+cxy^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2bxy,\ \frac{\partial v}{\partial y}=2cxy,\ \frac{\partial v}{\partial x}=3x^2+cy^2,\ \frac{\partial u}{\partial y}=3ay^2+bx^2,$$

由于$f(z)$ 解析，所以 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$

即 $2bxy=2cxy\Rightarrow b=c,$

$$3ay^2+bx^2=-3x^2-cy^2\Rightarrow 3a=-c,b=-3$$

故 $$a=1,\quad b=-3,\quad c=-3.$$

例4 讨论函数 $f(z)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{z^2}}, & z\neq 0 \\ 0, & z=0 \end{cases}$ 在原点的可导性.

解 函数沿 $z=x$ 趋于0时,

$$f'(0)=\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x^2}}=0$$

当 z 沿正虚轴 $z=iy$ 趋于0时，有

$$\lim_{z\to 0}\left|\frac{f(z)-f(0)}{z-0}\right|=\lim_{y\to 0}\left|\frac{1}{yi}e^{\frac{1}{y^2}}\right|=+\infty$$

$\Rightarrow \lim\limits_{z\to 0}\dfrac{f(z)-f(0)}{z-0}=\infty$，故 $f(z)$ 在原点不可导.

三、共轭调和

例1 已知调和函数$u(x,y)=x^2-y^2+xy$.求其共轭调和函数$v(x,y)$及解析函数

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y).$$

解法一 不定积分法. 利用柯西—黎曼方程,

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-(-2y+x)=2y-x,$$

得 $$v=\int(2y-x)\mathrm{d}x=2xy-\frac{x^2}{2}+g(y),$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=2x+g'(y).$$

又 $$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=2x+y.$$

比较两式可得 : $2x+g'(y)=2x+y,$ 故 $g'(y)=y.$

即 $$g(y)=\int y\mathrm{d}y=\frac{y^2}{2}+C.$$

因此 $$v=2xy-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+C \quad (C\text{为任意常数})$$

因而得到解析函数

$$\begin{aligned}
f(z)&=u(x,y)+i(x,y)\\
&=(x^2-y^2+xy)+i\left(2xy-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)+iC\\
&=(x^2+2ixy-y^2)-\frac{i}{2}(x^2+2ixy-y^2)+iC\\
&=\frac{z^2}{2}\cdot(2-i)+iC.
\end{aligned}$$

解法二　　线积分法.

因为 $$v(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}\mathrm{d}v(x,y)+C=\int_{(0,0)}^{(x,y)}\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y+C$$

$$=\int_{(0,0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y+C,$$

所以 $$v(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(2y-x)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y+C$$

$$=\int_{(0,0)}^{(x,0)}(2y-x)\mathrm{d}x+\int_{(0,0)}^{(x,0)}(2x+y)\mathrm{d}y$$

$$+\int_{(x,0)}^{(x,y)}(2y-x)\mathrm{d}x+\int_{(x,0)}^{(x,y)}(2x+y)\mathrm{d}y+C$$

$$= [\int_0^x (2y - x)\mathrm{d}x]_{y=0} + [\int_0^y (2x + y)\mathrm{d}y]_{x=x} + C$$

$$= \int_0^x (0 - x)\mathrm{d}x + \int_0^y (2x + y)\mathrm{d}y + C$$

$$= -\frac{x^2}{2} + 2xy + \frac{y^2}{2} + C \quad (C\text{为任意常数}),$$

因而得到解析函数

$$f(z) = u(x, y) + i(x, y)$$

$$= \frac{z^2(2 - i)}{2} + iC.$$

解法三　　全微分法

因为 $\mathrm{d}v=\dfrac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y=-\dfrac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y$

$$=(2y-x)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y$$

$$=2(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)+(y\mathrm{d}y-x\mathrm{d}x)$$

$$=2\mathrm{d}(xy)+\mathrm{d}\left(\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}\right)=\mathrm{d}\left(2xy+\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}\right),$$

所以 $v(x,y)=2xy+\dfrac{y^2}{2}-\dfrac{x^2}{2}+C$　(C为任意常数)

代入 $f(z)=u+iv$ 得　$f(z)=\dfrac{z^2}{2}\cdot(2-i)+iC.$

例2　已知 $u(x,y)=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3$

求解析函数 $f(z)=u+iv$，使符合条件 $f(0)=0$.

例2 已知 $u(x,y)=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3$ 求解析函数 $f(z)=u+iv$,使符合条件 $f(0)=0$.

解 因为 $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=3x^2+12xy-3y^2,$

所以 $v(x,y)=\int(3x^2+12xy-3y^2)\mathrm{d}y$

$$=3x^2y+6xy^2-y^3+g(x),$$

因为 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y},$

所以 $6xy+6y^2+g'(x)=-(6x^2-6xy-6y^2)$

$$g'(x)=-6x^2 \Rightarrow g(x)=\int -6x^2\mathrm{d}x \Rightarrow -2x^3+C,$$

且 $v(x,y)=3x^2y+6xy^2-y^3-2x^3+C$

$$f(z)=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3$$
$$+i(3x^2y+6xy^2-y^3-2x^3+C)$$

$$=(1-2i)z^3+iC$$

$$f(0)=0 \Rightarrow C=0,$$

故 $f(z)=(1-2i)z^3.$

四、一般路径积分

例1 计算 $\int_c \bar{z}\mathrm{d}z$ 的值，其中C为

1）沿从 $(0,0)$ 到$(1,1)$ 的线段: $x=t, y=t, 0\le t\le 1$;

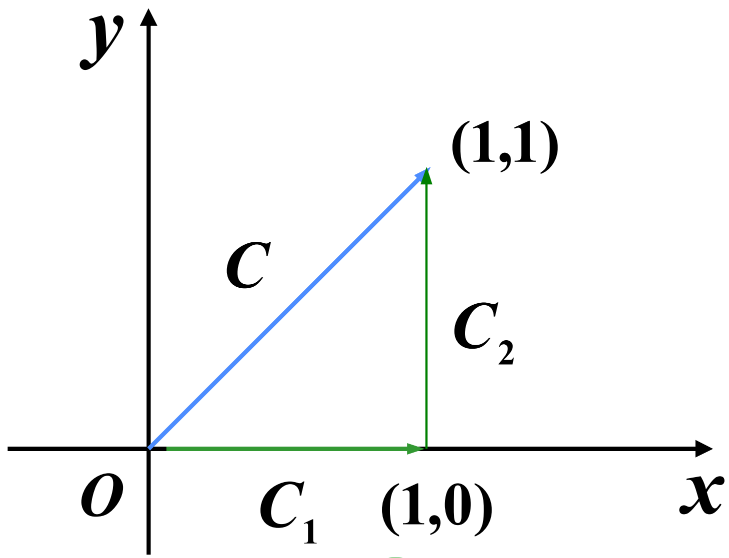
2）沿从 $(0,0)$ 到 $(1,0)$ 的线段:$C_1: x=t, y=0, 0\le t\le 1$,
与从 $(1,0)$ 到 $(1,1)$ 的线段 $C_2: x=1, y=t, 0\le t\le 1$
所接成的折线.

例1　计算 $\int_c \bar{z}\mathrm{d}z$ 的值，其中C为

1）沿从 $(0,0)$ 到$(1,1)$ 的线段：$x=t, y=t, 0\le t\le 1$;

2）沿从 $(0,0)$ 到 $(1,0)$ 的线段：$C_1: x=t, y=0, 0\le t\le 1$,
与从 $(1,0)$ 到 $(1,1)$ 的线段 $C_2: x=1, y=t, 0\le t\le 1$
所接成的折线.

解　$$\int_c \bar{z}\mathrm{d}z = \int_0^1 (t-it)\mathrm{d}(t+it)$$
$$= \int_0^1 (t-it)(1+i)\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 2t\mathrm{d}t$$
$$= 1;$$



$$2)\ \int_c \bar{z}\,dz = \int_{c_1} \bar{z}\,dz + \int_{c_2} \bar{z}\,dz$$

$$= \int_0^1 t\,dt + \int_0^1 (1 - it) i\,dt$$

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + i\right) = 1 + i.$$

说明　同一函数沿不同路径所得积分值不同.

五、复变函数积分的重要定理

例1 计算 $\oint_{|z|=1}\frac{\cos(z^{100}+z+1)}{z^2+2z+4}\mathrm{d}z.$

解 当 $|z|\le 1$时,

$$\left|z^2+2z+4\right|\ge 4-|2z|-|z|^2\ge 4-2-1=1,$$

故由柯西积分定理得

$$\oint_{|z|=1}\frac{\cos(z^{100}+z+1)}{z^2+2z+4}\mathrm{d}z=0.$$

例2 沿指定路径$C:|z-i|=\dfrac{3}{2}$计算以下积分

$$(1)\oint_C \frac{1}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z; \qquad (2)\oint_C \frac{e^z}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z.$$

解 (1) $\dfrac{1}{z(z^2+1)}$在C内有两个奇点$z=0$及$z=i$分别以$z=0$及$z=i$为圆心,以$1/4$为半径作圆C_1及C_2,则由复合闭路定理有

$$\oint_C \frac{1}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z=\oint_{C_1} \frac{1}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z+\oint_{C_2} \frac{1}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z$$

解法一　　利用柯西-古萨基本定理及重要公式

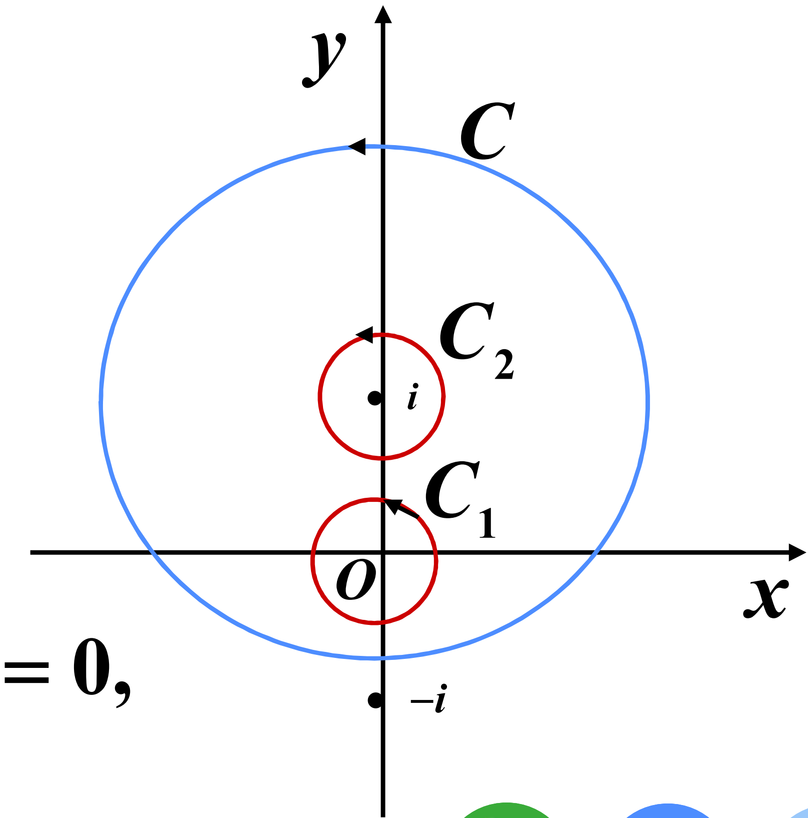
$$\frac{1}{z(z^2+1)}=\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-i}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+i}$$

由柯西-古萨基本定理有

$$\oint_{C_1}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-i}\mathrm{d}z=0,$$

$$\oint_{C_1}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+i}\mathrm{d}z=0,$$

$$\oint_{C_2}\frac{1}{z}\mathrm{d}z=0,\quad \oint_{C_2}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+i}\mathrm{d}z=0,$$



$$\oint_C \frac{1}{z(z^2+1)} \mathrm{d}z = \oint_{C_1} \frac{1}{z} \mathrm{d}z - \oint_{C_2} \frac{1}{2(z-i)} \mathrm{d}z$$

$$= 2\pi i - \frac{1}{2} \cdot 2\pi i$$

$$= \pi i.$$

解法二　利用柯西积分公式

$f_1(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$在C_1内解析，$f_2(z)=\dfrac{1}{z(z+i)}$在C_2内解析，

$$\oint_C \frac{1}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z=\oint_{C_1}\frac{1}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{1}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z$$

$$=\oint_{C_1}\frac{1/(z^2+1)}{z}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{1/[z(z+i)]}{z-i}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi i\cdot f_1(0)+2\pi i f_2(i)$$

$$=2\pi i+2\pi i\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi i.$$

(2) $\dfrac{e^z}{z(z^2+1)}$在C内有两个奇点$z=0$及$z=i$分别以$z=0$及$z=i$为圆心,以$1/4$为半径作圆C_1及C_2,则由复合闭路定理有

$$\oint_C \frac{e^z}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z=\oint_{C_1}\frac{e^z}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{e^z}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z$$

$f_1(z)=\dfrac{e^z}{z^2+1}$在$C_1$内解析,$f_2(z)=\dfrac{e^z}{z(z+i)}$在$C_2$内解析,

因此由柯西积分公式得

$$\oint_C \frac{e^z}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z = \oint_{C_1} \frac{e^z}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{e^z}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z$$

$$= \oint_{C_1} \frac{e^z/(z^2+1)}{z}\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{e^z/[z(z+i)]}{z-i}\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi i \cdot f_1(0) + 2\pi i f_2(i)$$

$$= 2\pi i + 2\pi i\left(-\frac{e^i}{2}\right) = \pi i(2-e^i)$$

$$= \pi[\sin 1 + i(2-\cos 1)].$$

例3 计算 $\int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}\mathrm{d}z$,其中 C 是不经过0与1的闭光滑曲线.

解 分以下四种情况讨论:

1)若封闭曲线 C 既不包含0也不包含1,则

$$f(z)=\frac{e^z}{z(1-z)^3}$$ 在 C 内解析,

由柯西–古萨基本定理得 $$\int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}\mathrm{d}z=0.$$

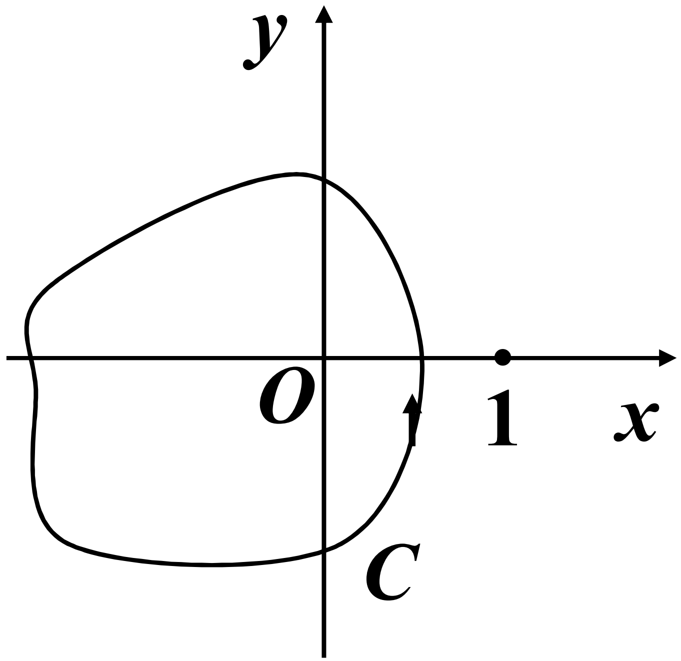
2)若封闭曲线C包含0而不包含1,则

$$f(z)=\frac{e^z}{(1-z)^3}$$ 在C内解析,由柯西积分公式得

$$\int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}\mathrm{d}z=\int_C \frac{e^z/(1-z)^3}{z}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi i\cdot \left.\frac{e^z}{(1-z)^3}\right|_{z=0}$$

$$=2\pi i.$$



3)若封闭曲线C包含1而不包含0,则

$f(z)=\dfrac{e^z}{z}$在C内解析,　　由高阶导数公式得

$$\int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}\mathrm{d}z=\int_C \frac{e^z/z}{(1-z)^3}\mathrm{d}z=\int_C \frac{-e^z/z}{(z-1)^3}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{2\pi i}{2!}[-f''(1)]$$

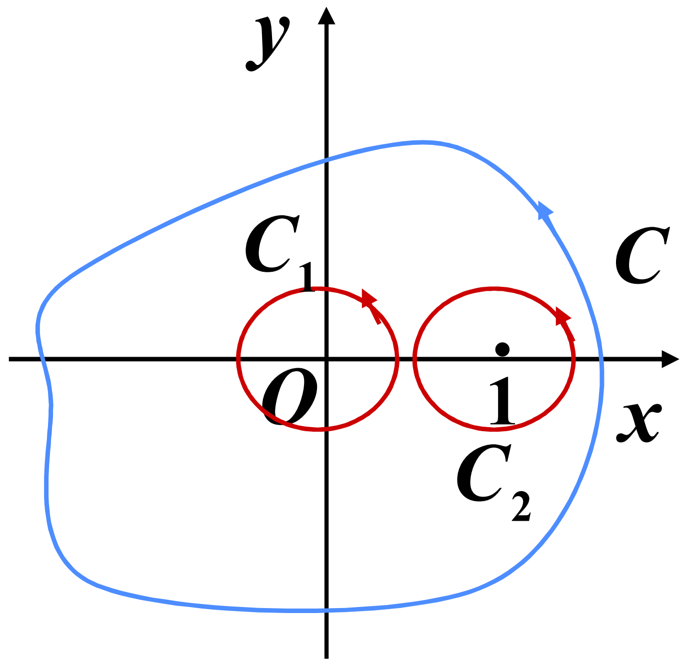
$$=\pi i\left.\frac{(z^2-2z+2)e^z}{-z^3}\right|_{z=1}=-e\pi i.$$

4)若封闭曲线C既包含1又包含0,

则分别以0,1为圆心,以$\rho > 0$为半径作圆C_1, C_2,

使C_1和C_2也在C内,且C_1与C_2互不相交,互不包含,

据复合闭路定理有



$$\int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}\mathrm{d}z$$

$$= \int_{C_1} \frac{e^z}{z(1-z)^3}\mathrm{d}z + \int_{C_2} \frac{e^z}{z(1-z)^3}\mathrm{d}z$$

而积分$\int_{C_1} \frac{e^z}{z(1-z)^3} \mathrm{d}z$即为2)的结果$2\pi i$,

而积分$\int_{C_2} \frac{e^z}{z(1-z)^3} \mathrm{d}z$ 即为3)的结果 $-e\pi i$,

所以 $\int_{C} \frac{e^z}{z(1-z)^3} \mathrm{d}z = (2-e)\pi i.$

例4 计算下列积分，其中C为正向圆周：$|z| = r > 1$.

$$(1) \oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5} dz; \qquad (2) \oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz.$$

解 (1) 函数 $\dfrac{\cos \pi z}{(z-1)^5}$ 在 C 内 $z=1$ 处不解析，

但 $\cos \pi z$ 在 C 内处处解析，

根据公式 $f^{(n)}(z_0) = \dfrac{n!}{2\pi i} \oint_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$

$$\oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5} dz = \frac{2\pi i}{(5-1)!} (\cos \pi z)^{(4)} \Big|_{z=1} = -\frac{\pi^5 i}{12};$$

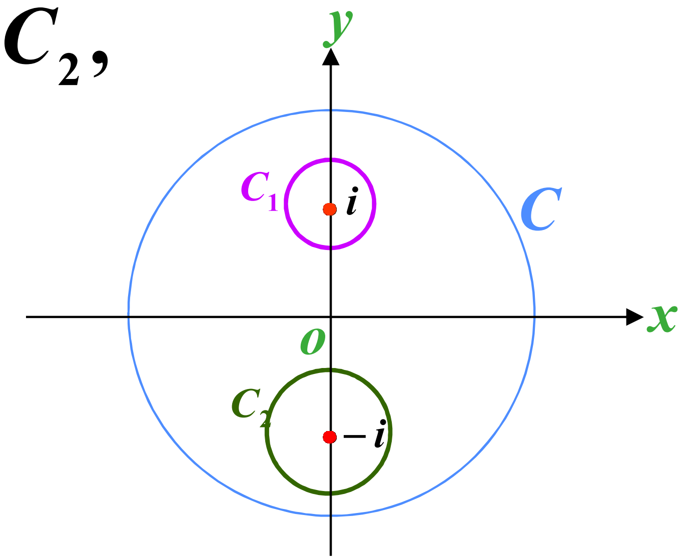
(2) 函数 $\dfrac{e^z}{(z^2+1)^2}$ 在 C 内的 $z=\pm i$ 处不解析,

在 C 内以 i 为中心作一个正向圆周 C_1,

以 $-i$ 为中心作一个正向圆周 C_2,

则函数 $\dfrac{e^z}{(z^2+1)^2}$ 在由 C, C_1, C_2

围成的区域内解析,

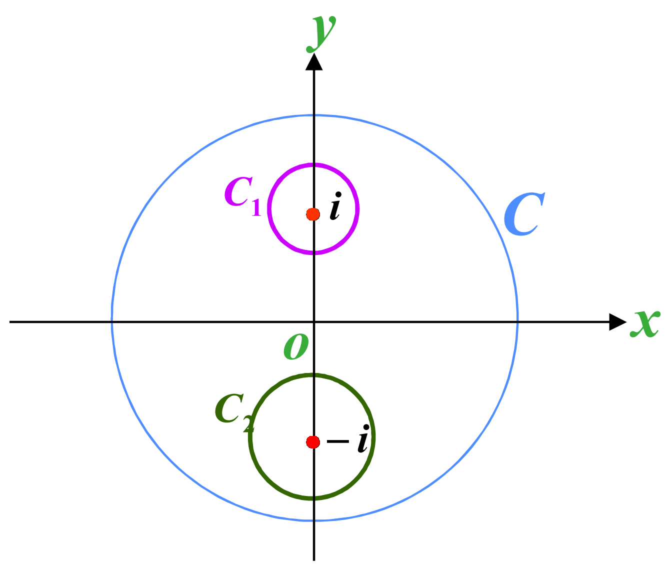


根据复合闭路定理

$$\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z = \oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z$$

$$\oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z = \oint_{C_1} \frac{\dfrac{e^z}{(z+i)^2}}{(z-i)^2}\mathrm{d}z$$

$$= \frac{2\pi i}{(2-1)!}\left[\frac{e^z}{(z+i)^2}\right]'\Bigg|_{z=i} = \frac{(1-i)e^i}{2}\pi,$$



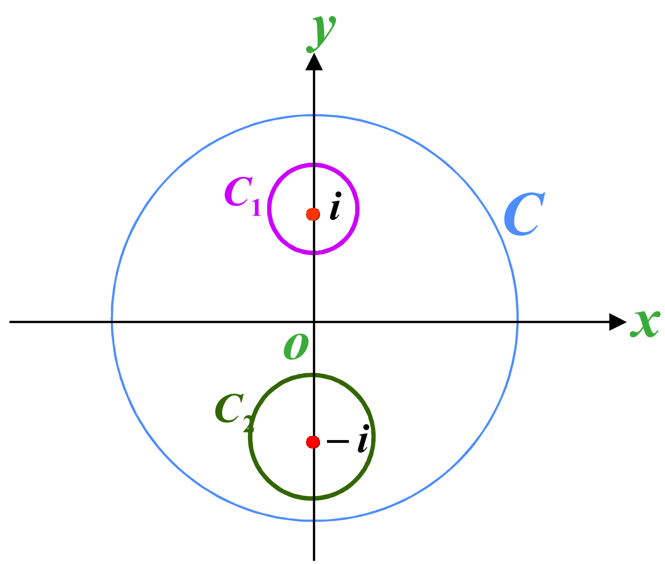
同理可得 $\oint_{C_2}\frac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z=\frac{-(1+i)e^{-i}}{2}\pi,$

于是 $\oint_{C}\frac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z=\frac{(1-i)e^{i}}{2}\pi+\frac{-(1+i)e^{-i}}{2}\pi$

$$=\frac{\pi}{2}(1-i)(e^{i}-ie^{-i})$$

$$=\frac{\pi}{2}(1-i)^2(\cos 1-\sin 1)$$

$$=i\pi\sqrt{2}\sin\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$$



例5 求积分 (1) $\oint\limits_{|z|=2}\frac{z^3+1}{(z+1)^4}\mathrm{d}z$; (2) $\oint\limits_{|z|=1}\frac{e^{-z}\cos z}{z^2}\mathrm{d}z$.

例5 求积分 (1) $\oint_{|z|=2}\dfrac{z^3+1}{(z+1)^4}\mathrm{d}z$; (2) $\oint_{|z|=1}\dfrac{e^{-z}\cos z}{z^2}\mathrm{d}z$.

解 (1) 函数 z^3+1 在复平面内解析,

$$z_0=-1 \text{ 在 } |z|\le 2 \text{ 内}, \quad n=3,$$

根据公式 $f^{(n)}(z_0)=\dfrac{n!}{2\pi i}\oint_C\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$

$$\oint_{|z|=2}\frac{z^3+1}{(z+1)^4}\mathrm{d}z=\frac{2\pi i}{3!}[z^3+1]'''\Big|_{z=-1}=2\pi i;$$

(2) $\oint_{|z|=1} \frac{e^{-z}\cos z}{z^2}\mathrm{d}z$

函数 $e^{-z}\cos z$ 在复平面内解析,

$z_0 = 0$ 在 $|z| \le 1$ 内, $n = 1$,

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^{-z}\cos z}{z^2}\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{1!}(e^{-z}\cos z)'\Big|_{z=0}$$

$$= 2\pi i[-e^{-z}\cos z - e^{-z}\sin z]\Big|_{z=0} = -2\pi i.$$

例6　求积分 $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{e^z}{z^n}\mathrm{d}z.$ （n 为整数)

解　(1) $n \le 0$, $\dfrac{e^z}{z^n}$ 在 $|z| \le 1$ 上解析,

由柯西—古萨基本定理得 $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{e^z}{z^n}\mathrm{d}z = 0;$

(2) $n = 1$, 由柯西积分公式得

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n}\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot (e^z)\Big|_{z=0} = 2\pi i;$$

(3) $n > 1$,

根据公式 $f^{(n)}(z_0) = \dfrac{n!}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n}\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{(n-1)!}(e^z)^{(n-1)}\Big|_{z=0}$$

$$= \frac{2\pi i}{(n-1)!}.$$

六、级数展开

例1 把函数$f(z)=\dfrac{1}{3z-2}$展开成z的幂级数.

例1　把函数 $f(z)=\dfrac{1}{3z-2}$ 展开成z的幂级数.

解　$$\frac{1}{3z-2}=\frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{3z}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\left[1+\frac{3z}{2}+\left(\frac{3z}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{3z}{2}\right)^n+\cdots\right]$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{3z}{2^2}-\frac{3^2z^2}{2^3}-\cdots-\frac{3^nz^n}{2^{n+1}}-\cdots$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^nz^n}{2^{n+1}},\qquad \left|\frac{3z}{2}\right|<1,\text{即}|z|<\frac{2}{3}.$$

例2 求函数 $\dfrac{1}{(1-z)^3}$ 在 $|z|<1$ 内的泰勒展开式.

分析：利用逐项求导、逐项积分法.

解 因为 $\dfrac{1}{(1-z)^3}=\dfrac{1}{2}[(1-z)^{-1}]''$ $\quad (|z|<1)$

所以 $$\frac{1}{(1-z)^3}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)''=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)z^{n-2}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)z^m. \quad (|z|<1)$$

例3 求 $f(z)=\dfrac{z^4+z^3-5z^2-8z-7}{(z-3)(z+1)^2}$ 在点 $z=0$ 的泰勒展开式.

分析:利用部分分式与几何级数结合法. 即把函数分成部分分式后, 应用等比级数求和公式.

解 $$f(z)=z+2+\frac{2}{z-3}+\frac{1}{(z+1)^2}$$

$$\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{3}\left(1-\frac{z}{3}\right)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3^{n+1}}\right)z^n \qquad (|z|<3)$$

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{1-(-z)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n \qquad (|z|<1)$$

两端求导得

$$-\frac{1}{(1+z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}n(-1)^n z^{n-1}, \quad (|z|<1)$$

即 $$\frac{1}{(1+z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nz^{n-1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^n \quad (|z|<1)$$

故 $$f(z)=z+2+\frac{2}{z-3}+\frac{1}{(z+1)^2}$$

$$= z + 2 + 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3^{n+1}}\right)z^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^n$$

$$= 2 + z - \frac{2}{3} - \frac{2}{9}z + 2\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{-1}{3^{n+1}}\right)z^n + 1 - 2z + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^n$$

$$= 2\frac{1}{3} - 1\frac{2}{9}z + \sum_{n=2}^{\infty}\left[(-1)^n(n+1) - \frac{2}{3^{n+1}}\right]z^n \qquad (|z| < 1)$$

例4 求 $f(z)=\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$ 在以下圆环域：

(1) $1<|z|<2$； (2) $0<|z-2|<\sqrt{5}$ 内的洛朗展开式.

解 $$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{2}{z^2+1}$$

1) 当 $1<|z|<2$ 时，$f(z)=\dfrac{1}{2\left(\dfrac{z}{2}-1\right)}-\dfrac{2}{z^2\left(1+\dfrac{1}{z^2}\right)}$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z}{2}}-\frac{2}{z^2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\dfrac{1}{z^2}\right)}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{n} - \frac{2}{z^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z^2}\right)^{n}$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{z^{2n}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

2) 在 $0 < |z-2| < \sqrt{5}$ 内,

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{2}{z^2+1} = \frac{1}{z-2} - i\left(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i}\right)$$

$$= \frac{1}{z-2} - i\left[\frac{1}{(z-2)+(i+2)} - \frac{1}{(z-2)+(2-i)}\right]$$

$$=\frac{1}{z-2}+i\left[\frac{1}{(2-i)\left(1+\frac{z-2}{2-i}\right)}-\frac{1}{(2+i)\left(1+\frac{z-2}{2+i}\right)}\right]$$

$$=\frac{1}{z-2}+i\left[\frac{1}{2-i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{2-i}\right)^n-\frac{1}{2+i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{2+i}\right)^n\right]$$

$$=\frac{1}{z-2}+i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n\left[\frac{1}{(2-i)^{n+1}}-\frac{1}{(2+i)^{n+1}}\right]$$

$$=\frac{1}{z-2}+i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot[(2+i)^{n+1}-(2-i)^{n+1}]\cdot\frac{(z-2)^n}{5^{n+1}}.$$

七、留数基本定理

例1　计算积分 $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{\sin(z+i)}{z(z+i)^8}\mathrm{d}z.$

解　　$z=0$ 为一级极点，$z=-i$ 为七级极点.

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0} zf(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\sin(z+i)}{(z+i)^8}=\sin i;$$

$$f(z)=\frac{\sin(z+i)}{(z+i)^8}\cdot\frac{1}{(z+i)-i}=\frac{\sin(z+i)}{(z+i)^8}\cdot i\frac{1}{1-\dfrac{z+i}{i}}$$

$$=\left\{\frac{1}{(z+i)^7}-\frac{1}{3!(z+i)^5}+\frac{1}{5!(z+i)^3}-\frac{1}{7!(z+i)}+\cdots\right\}$$

$$\cdot i\left\{1+\frac{1}{i}(z+i)+\frac{1}{i^2}(z+i)^2+\cdots\right\}$$

$$= \cdots + i\left(\frac{-1}{7!}+\frac{-1}{5!}+\frac{-1}{3!}+\frac{-1}{1!}\right)\frac{1}{z+i}+\cdots$$

所以 $\mathrm{Res}[f(z),-i] = -i\left(1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}\right)$

由留数定理得

$$\oint_{|z|=2}\frac{\sin(z+i)}{z(z+i)^8}\mathrm{d}z = 2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),0]+\mathrm{Res}[f(z),-i]\}$$

$$= 2\pi i\left\{\sin i - i\left(1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}\right)\right\}.$$

例2 $\displaystyle\oint_{|z|=3}\frac{z^{13}}{(z^2+5)^3(z^4+1)^2}\mathrm{d}z.$

解　在 $3<|z|<+\infty$ 内,

$$f(z)=\frac{z^{13}}{z^6\left(1+\frac{5}{z^2}\right)^3\cdot z^8\left(1+\frac{1}{z^4}\right)^2}=\frac{1}{z}\left[\frac{1}{1+\frac{5}{z^2}}\right]^3\left[\frac{1}{1+\frac{1}{z^4}}\right]^2$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\left(1-\frac{5}{z^2}+\frac{25}{z^4}-\cdots\right)^3\left(1-\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^8}-\cdots\right)^2$$

$$=\frac{1}{z}\left(1-\frac{15}{z^2}+\cdots\right)\left(1-\frac{2}{z^4}+\cdots\right)=\frac{1}{z}+\cdots,$$

所以$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-C_{-1}=-1,$

故$$\oint_{|z|=3}\frac{z^{13}}{(z^2+5)^3(z^4+1)^2}\mathrm{d}z=2\pi i[-(-1)]$$

$$=2\pi i.$$

例3　计算 $\oint_{|z|=\frac{5}{2}} \frac{1}{(z-3)(z^5-1)}\mathrm{d}z.$

解　$$\oint_{|z|=\frac{5}{2}} \frac{1}{(z-3)(z^5-1)}\mathrm{d}z = 2\pi i\sum_{k=1}^{5}\mathrm{Res}[f(z), z_k]$$

$$\sum_{k=1}^{5}\mathrm{Res}[f(z), z_k] = -\left\{\mathrm{Res}[f(z),3] + \mathrm{Res}[f(z),\infty]\right\}$$

$$\mathrm{Res}[f(z),3] = \lim_{z\to 3}(z-3)\cdot\frac{1}{(z-3)(z^5-1)} = \frac{1}{242},$$

$$\frac{1}{(z-3)(z^5-1)}=\frac{1}{z\left(1-\frac{3}{z}\right)\cdot z^5\left(1-\frac{1}{z^5}\right)}$$

$$=\frac{1}{z^6}\left(1+\frac{3}{z}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{z^5}+\cdots\right),$$

所以$\text{Res}[f(z),\infty]=0,$

$$\oint_{|z|=\frac{5}{2}}\frac{1}{(z-3)(z^5-1)}\mathrm{d}z=2\pi i\sum_{k=1}^{5}\text{Res}[f(z),z_k]$$

$$=-2\pi i\cdot\frac{1}{242}=-\frac{\pi i}{121}.$$

例4 计算 $\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{a+\sin^2 x} \quad (a>0).$

解 $$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{a+\sin^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{a+\frac{1-\cos 2x}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}(2x)}{a+\frac{1-\cos 2x}{2}}$$

令 $2x = t,$

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{a+\sin^2 x} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a+\frac{1-\cos t}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\oint_{|z|=1} \frac{1}{a + \frac{1-(z^2+1)/2z}{2}} \cdot \frac{dz}{iz}$$

$$= 2i\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 - 2(2a+1)z + 1},$$

极点为: $z_1 = 2a+1-\sqrt{(2a+1)^2-1}, \quad |z_1| < 1,$

$$z_2 = 2a+1+\sqrt{(2a+1)^2-1}, \quad |z_2| > 1$$

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{a+\sin^2 x} = 2\pi i \cdot 2i\operatorname{Res}[f(z),(2a+1-\sqrt{(2a+1)^2-1})]$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{(2a+1)^2-1}}.$$

例5 计算积分 $\int_0^{2\pi} \dfrac{\mathrm{d}x}{(2+\sqrt{3}\cos x)^2}$.

解 $$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{(2+\sqrt{3}\cos x)^2} = \oint_{|z|=1} \frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\cdot\dfrac{z^2+1}{2z}\right)^2}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{iz}$$

$$= \frac{4}{3i}\oint_{|z|=1} \frac{z\mathrm{d}z}{\left(z^2+\dfrac{4}{\sqrt{3}}z+1\right)^2},$$

极点为 $z_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ z_2 = -\sqrt{3},$ 其中 $|z_1| < 1, |z_2| > 1;$

由留数定理，有

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{(2+\sqrt{3}\cos x)^2}=\frac{4}{3i}\cdot 2\pi i\lim_{z\to z_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{z}{(z-z_2)^2}$$

$$=\frac{8\pi}{3}\cdot\lim_{z\to z_1}\frac{(z-z_2)^2-2z(z-z_2)}{(z-z_2)^4}$$

$$=\frac{8\pi}{3}\cdot\frac{-(z_1+z_2)}{(z_1-z_2)^3}$$

$$=\frac{8\pi}{3}\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}\Big/\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3=4\pi.$$

例6　计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x.$

解　$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$$

因为 $R(z)=\frac{z^2}{(z^4+1)}$ 在实轴上解析，

在上半平面内有一级极点 $z_1=e^{\pi i/4}$，　$z_2=e^{3\pi i/4}$.

所以 $$\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\cdot\sum\mathrm{Res}[R(z),z_k]$$

$$\operatorname{Res}[R(z), e^{\frac{\pi i}{4}}] = \lim_{z \to e^{\frac{\pi i}{4}}} \left(z - e^{\frac{\pi i}{4}} \right) \frac{z^2}{1+z^4} = \frac{\sqrt{2}}{8}(1-i),$$

$$\operatorname{Res}[R(z), e^{\frac{3\pi i}{4}}] = \lim_{z \to e^{\frac{3\pi i}{4}}} \left(z - e^{\frac{3\pi i}{4}} \right) \frac{z^2}{1+z^4} = -\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i).$$

故 $$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1} \mathrm{d}x = \frac{2\pi i}{2} \left[\frac{\sqrt{2}}{8}(1-i) - \frac{\sqrt{2}}{8}(1+i) \right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\pi.$$

例7　计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin mx}{(x^2+a^2)^2} \mathrm{d}x$，$(m>0, a>0)$.

解　$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin mx}{(x^2+a^2)} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin mx}{(x^2+a^2)^2} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+a^2)^2} e^{imx} \mathrm{d}x\right]$$

又　$$f(z) = \frac{z}{(z^2+a^2)^2} e^{imx},$$

在上半平面只有二级极点 $z = ai$,

$$\mathrm{Res}(f(z),ai)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{z}{(z+ai)^2}e^{imz}\right]_{z=ai}=\frac{m}{4a}e^{-ma},$$

则 $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{(x^2+a^2)^2}e^{imx}\mathrm{d}x=2\pi i\mathrm{Res}\left[\frac{z}{(z^2+a^2)^2}e^{imz},ai\right]$$

所以 $$\int_{0}^{+\infty}\frac{x\sin mx}{(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{Im}[2\pi i\mathrm{Res}(f(z),ai)]$$

$$=\frac{m\pi}{4a}e^{-ma}.$$

注意 以上两型积分中被积函数中的$R(x)$在实轴上无孤立奇点.

注意！补充定理

八、积分变换

例1 求函数$f(t)=\begin{cases} e^{-t}\sin 2t, t\geq 0 \\ 0, \quad t<0 \end{cases}$的Fourier积分.

解 因函数$f(t)$满足傅氏积分定理的条件，则

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{+\infty} e^{-t}\sin 2t \bullet e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_0^{+\infty} e^{-(1+j\omega)t}\sin 2t dt=\frac{2\left(5-\omega^2-2\omega j\right)}{25-6\omega^2+\omega^4}$$

$$f\left(t\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\left(5-\omega^2-2\omega j\right)}{25-6\omega^2+\omega^4}e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\left(5-\omega^2\right)\cos\omega t+2\omega\sin\omega t}{25-6\omega^2+\omega^4}d\omega$$

则 $$\int_0^{+\infty}\frac{\left(5-\omega^2\right)\cos\omega t+2\omega\sin\omega t}{25-6\omega^2+\omega^4}d\omega=\frac{\pi}{2}f\left(t\right)$$

例2 求函数 $f(t)=\begin{cases}1 & |t|<c \\ 0 & |t|>c\end{cases}(c>0)$ **的傅氏变换**

解 $F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$

$$=\int_{-c}^{+c} e^{-j\omega t}dt=2\int_{0}^{+c} e^{-j\omega t}dt$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2\sin\omega c}{\omega} & \omega\neq 0 \\ 2c & \omega=0\end{cases}$$

$1 \xleftrightarrow{\text{傅氏变换对}} 2\pi\delta(\omega)$

例3　求下列函数的拉氏变换.

(1)　$f(t)=t^2+3t+2$

解　$\mathscr{L}[f(t)]=\mathscr{L}[t^2+3t+2]$

$$=\mathscr{L}[t^2]+\mathscr{L}[3t]+\mathscr{L}[2]$$

$$=\frac{2}{S^3}+\frac{3}{S^2}+\frac{2}{S}$$

(2) $f(t)=\sin^2 t.$

解 $\mathscr{L}\left[\sin^2 t\right]=\mathscr{L}\left[\dfrac{1-\cos 2t}{2}\right]$

$$=\frac{1}{2}\mathscr{L}[1-\cos 2t]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}\right)=\frac{2}{s\left(s^2+4\right)}$$

例4　　求下列函数的拉氏逆变换.

(1) $F(s)=\dfrac{1}{s^2+4}$

解

$$f(t)=\frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{2}{s^2+2^2}\right]=\frac{1}{2}\sin 2t$$

(2) $F(s)=\dfrac{1}{s^4}$

解

$$f(t)=\frac{1}{3!}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{3!}{s^{3+1}}\right]=\frac{1}{6}t^3$$

第一章、复数

复球面

扩充复平面

曲线与区域

极限的计算

复数

复变函数

极限

连续性

代数运算

乘幂与方根

复数表示法

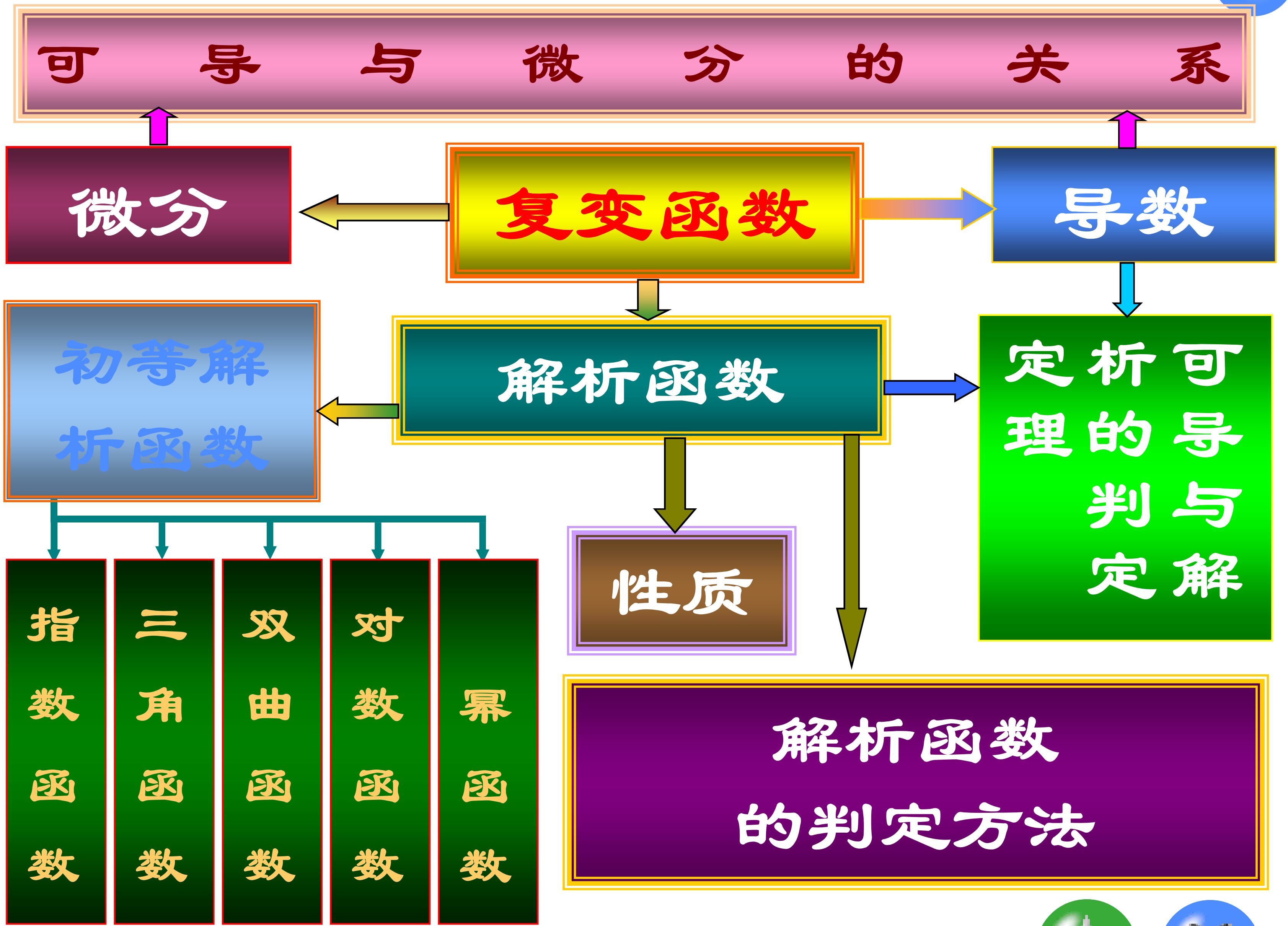
几何表示法

向量表示法

三角及指数表示法

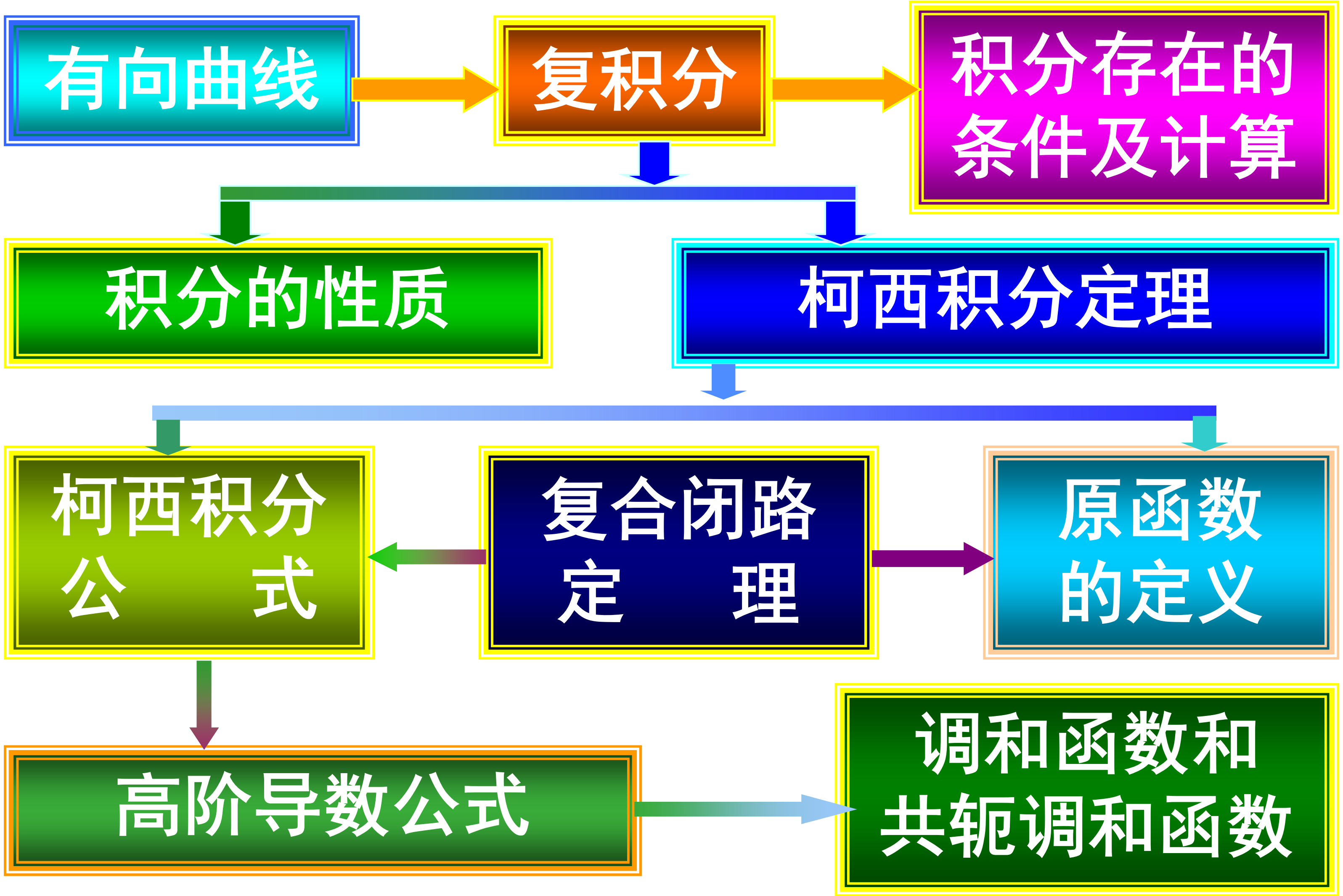
判别定理

第二章、解析

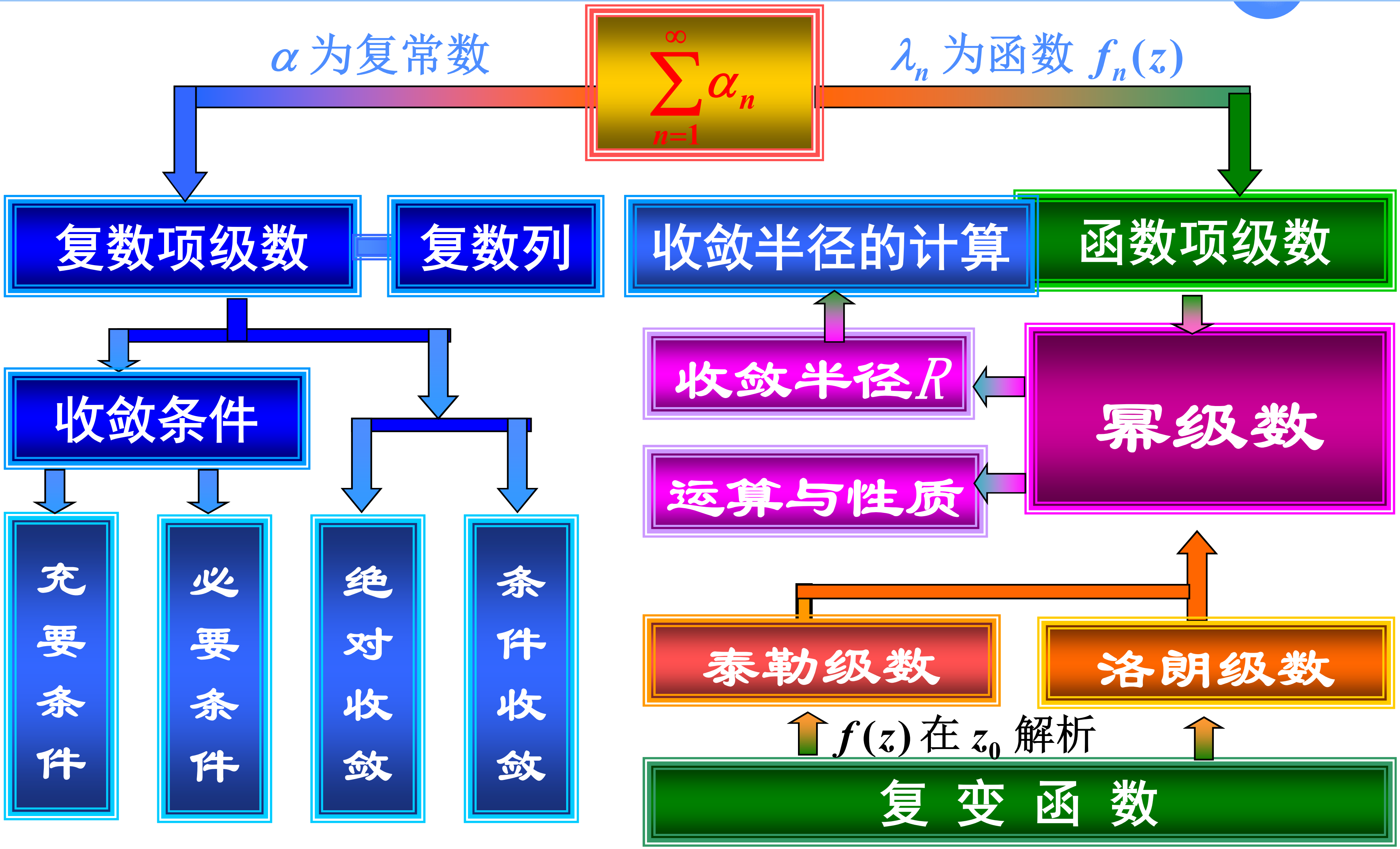


可导与微分的关系
微分
复变函数
导数
初等解析函数
解析函数
定理可导的判与定解
指数函数
三角函数
双曲函数
对数函数
幂函数
性质
解析函数的判定方法

第三章、积分

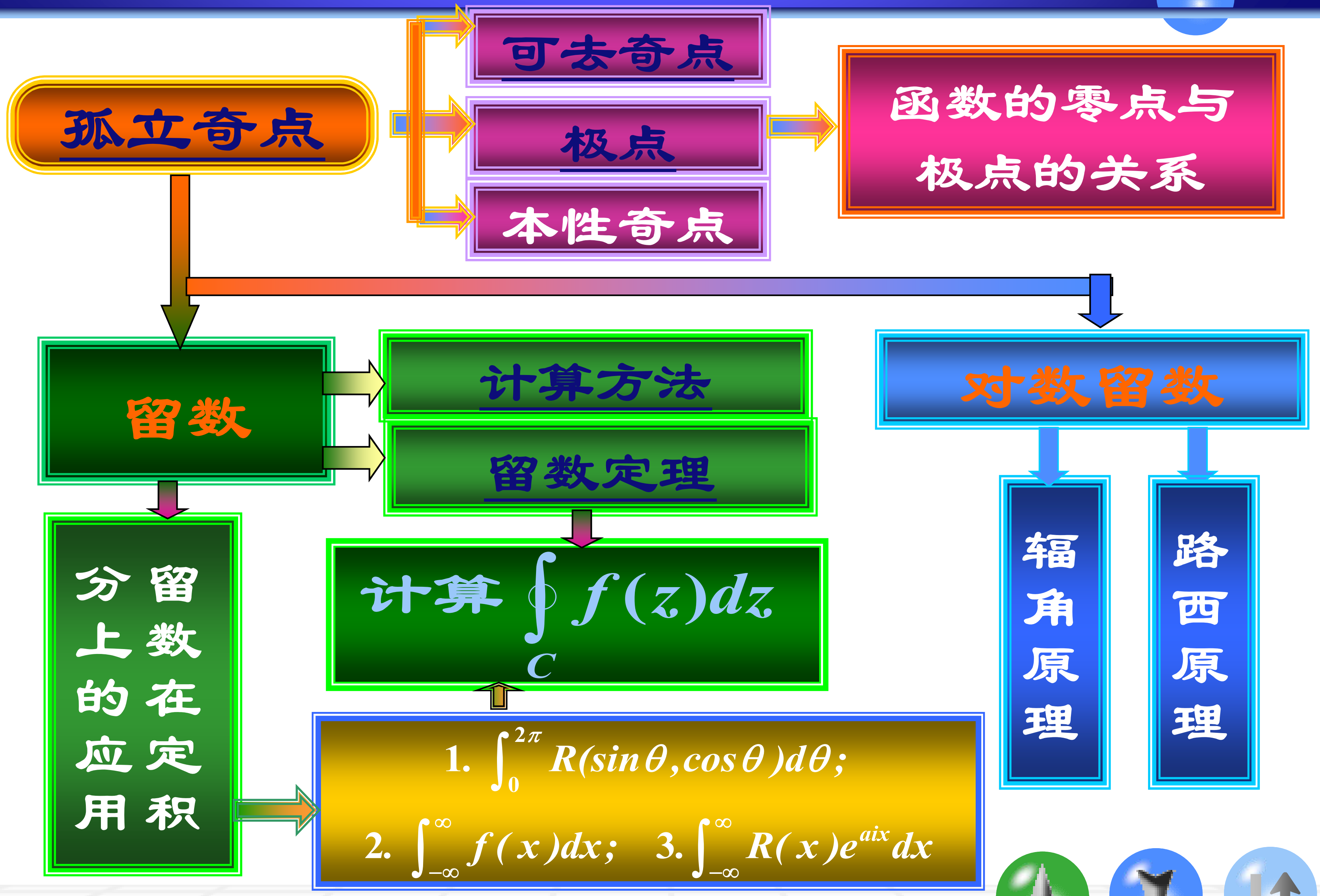

有向曲线
复积分
积分存在的条件及计算
积分的性质
柯西积分定理
柯西积分公　　式
复合闭路定　　理
原函数的定义
高阶导数公式
调和函数和共轭调和函数

第四章、级数



α 为复常数
$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$
λ_n 为函数 $f_n(z)$
复数项级数
复数列
收敛半径的计算
函数项级数
收敛条件
收敛半径 R
幂级数
运算与性质
充要条件
必要条件
绝对收敛
条件收敛
泰勒级数
洛朗级数
$f(z)$ 在 z_0 解析
复变函数

第五章、留数


孤立奇点
可去奇点
极点
本性奇点
函数的零点与极点的关系
留数
计算方法
留数定理
对数留数
计算 $\oint_C f(z)dz$
留数在定积分上的应用
1. $\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)d\theta;$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx;$ 3. $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{aix}dx$
辐角原理
路西原理

第七章、傅氏

Fourier积分公式

Fourier变换及逆变换

Fourier变换的性质

Fourier变换的应用

线性性质

位移性质

微分性质

积分性质

相似性质

对称性质

卷积定理

相关函数能量谱密度

解微分积分方程

解偏微分方程

第八章、拉氏

拉氏变换的概念

变换存在定理

拉氏变换性质

- 线性性质
- 微分性质
- 位移性质
- 延迟性质

拉氏逆变换

卷积定理

拉氏变换的应用

- 微分方程
- 偏微分方程

第13周周五

2017年11月24日

晚上18：30-20：30

良乡1-202

祝大家考试顺利！

合影～啦啦啦～～～

Thank You!

再见!