国科大硕转博试题 (公共基础部分) 及解答

望梦阁的小梦友

2018 年 8 月 25 日

1 分析

题 1. 求：

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{a+\cos\theta}d\theta,\quad a>1$$

Proof. 此题主要考的是用留数计算实积分. 令 $z=e^{i\theta}$, 则 $dz=izd\theta,\cos\theta=\frac{z+z^{-1}}{2}$,

$$\begin{aligned}\int_{|z|=1}\frac{1}{a+\dfrac{z+z^{-1}}{2}}\frac{1}{iz}\,\mathrm{d}\,z&=\frac{2}{i}\int_{|z|=1}\frac{1}{z^2+2az+1}\,\mathrm{d}\,z\\&=\frac{2}{i}2\mathrm{i}Res(\frac{1}{z^2+2az+1},-a+\sqrt{a^2-1})=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}\end{aligned}$$

□

题 2. 设复变函数 $f(x)$ 为整函数，且存在正整数 n 以及常数 $R>0,M>0$，使得当 $|z|>R$ 时，有 $|f(x)|\le M|z|^n$. 试证明：$f(x)$ 是一个至多 n 次多项式或一常数.

Proof. 由 $f(z)$ 为整函数，可设 $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kz^k$，则

$$\frac{f(z)}{z^n}\le M\Rightarrow\infty\text{为}\frac{f(z)}{z^n}\text{的可去奇点}\Rightarrow\frac{f(z)}{z^n}=\sum_{k=0}^{n}a_kz^{k-n}\Rightarrow f(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$$

□

题 3. 陈述 *Lebesgue* 控制收敛定理并证明：

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\infty}\frac{\ln(x+n)}{n}e^{-x}\cos xdx=0$$

Proof. *Lebesgue* 控制收敛定理的叙述省略. 因

$$|\ln(x+n)|\le x+n\Rightarrow|\frac{\ln(x+n)}{n}e^{-x}\cos x|\le(\frac{x}{n}+1)e^{-x}\le(x+1)e^{-x}\in\mathcal{L}^1(0,+\infty)$$

故由 *Lebesgue* 控制收敛定理得

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\infty}\frac{\ln(x+n)}{n}e^{-x}\cos xdx=\int_0^{\infty}\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(x+n)}{n}e^{-x}\cos xdx=0$$

□

题 4. 陈述开映射定理，并证明：设 $(X,\|\cdot\|_1),(X,\|\cdot\|_2)$ 都是 *Banach* 空间，若存在常数 $a>0$ 使得 $\forall x\in X,\|x\|_2\le a\|x\|_1$，则一定存在常数 $b>0$，使得 $\forall x\in X,\|x\|_1\le b\|x\|_2$.

Proof. 开映射定理叙述省略. 考虑恒同映射 $id:(X,\|\cdot\|_1),(X,\|\cdot\|_2)$, 由 $\forall x\in X,\|x\|_2\le a\|x\|_1$，知 id 是有界的. 由显然 id 为线性双射. 故由开映射定理知常数 $b>0$，使得 $\forall x\in X,\|x\|_1\le b\|x\|_2$. □

2 代数

题 5. 设 a,b 是群 G 的元素，阶数分别为 m,n，$(m,n)=1$ 且 $ab=ba$，证明：ab 的阶为 mn.

Proof. 设 $o(ab)=r$. 因 $ab=ba$ 知 $(ab)^{mn}=a^mb^n=1$，则 $r|mn$. 另一方面

$$(ab)^{nr}=a^{nr}b^{nr}=1\Rightarrow a^{nr}=1\Rightarrow m|nr\xrightarrow{(m,n)=1}m|r$$

同理也有 $n|r$. 由 $(m,n)=1$ 知 $mn|r$，故 $r=mn$. □

题 6. 设群 S_n 为 n 次对称群，证明：
1）$S=\{\sigma|\sigma\in S_n,\sigma(1)=1\}$ 是 S_n 的子群；
2）$\{(1),(1,2),(1,3),\cdots,(1,n)\}$ 组成 S 在 S_n 的一个左陪集代表元素.

Proof. 1）由 S 的构造显然有 $S\cong S_{n-1}$, 故 S 是 S_n 的子群.

2）因 $\forall m,k\ne 1,(1,m)(1,k)^{-1}=(1,k,m)\notin S$. 又由 *Lagrange* 定理知 $|S_n:S|=n$. 故 $\{(1),(1,2),(1,3),\cdots,(1,n)\}$ 组成 S 在 S_n 的一个左陪集代表元素. □

题 7. 设群 G 作用在集合 X 上. 记 n 为 X 上 G 作用下的轨道个数，对任意 $a\in X$，记 $\Omega_a=\{ga|g\in G\}$ 是 a 所在的轨道，$Ga=\{g\in G|ga=a\}$ 为 a 的固定子群，对任意 $g\in G$，记 $f(g)$ 为 X 在 g 作用下的不动点的个数，证明：
1）$b\in\Omega_a\Leftrightarrow\Omega_a=\Omega_b$；
2）对任意 $g\in G$，有 $G_{ga}=gG_ag^{-1}$；
3）$\sum\limits_{g\in G}f(g)=n|G|$.

Proof. 1）因轨道是等价类，故显然成立.

2）$\forall x\in G_{ga}$，则有

$$xga=ga\Rightarrow g^{-1}xga=g^{-1}ga=a\Rightarrow g^{-1}xg\in G_a\Rightarrow x\in gG_ag^{-1}\Rightarrow G_{ga}\subset gG_ag^{-1}$$

同理 $\forall x\in gG_ag^{-1}$，则 $\exists h\in G_a,s.t.x=ghg^{-1}$, 且$ha=a$，故

$$xga=ghg^{-1}ga=gha=ga\Rightarrow x\in G_{ga}\Rightarrow gG_ag^{-1}\subset G_{ga}$$

即 $g\in G$，有 $G_{ga}=gG_ag^{-1}$.

3）令 $A=\{(g,x)|g作用在x不动\}$,则 $\#A=\sum\limits_{g\in G}f(g)$, 且$\#A=\sum\limits_{x\in X}\#G_x$,考虑 $\sum\limits_{x属于某个轨道}\#G_x$，

由于 $|G:G_x| = \#orb(x)$，故 $\sum\limits_{x\text{属于某个轨道}} \#G_x = |G|$. 又因为共有 n 个轨道，故 $\#A = n$，因此 $\sum\limits_{g\in G} f(g) = n|G|$. □

题 8. 设 R, S 是环，$f: R\to S$ 是环同态，证明同态核 $\ker f$ 是环 R 的理想，并且映射

$$\begin{aligned} F: R/\ker f &\to S \\ \overline{r} &\mapsto f(r) \end{aligned}$$

是环的单同态，特别地，$F: R/\ker f \to \mathrm{Im} f$ 是环同构.

Proof. $\forall r_1, r_2 \in \ker f, f(r_1 - r_2) = f(r_1) - f(r_2) = 0 \Rightarrow r_1 - r_2 \in \ker f$. $\forall r \in \ker f, a \in R, f(ar) = f(a)f(r) = 0 \Rightarrow ar \in \ker f$. 故 $\ker f$ 为 R 的理想.

下证映射 F 是定义合理的. 事实上若 $\overline{r}_1 = \overline{r}_2$, 则存在 $r_0 \in \ker f, s.t. r_1 = r_2 + r_0$，因此 $F(\overline{r}_1) = f(r_1) = f(r_2) + f(r_0) = f(r_2) = F(\overline{r}_2)$.

又 $\forall r_1, r_2 \in R/\ker f$, 有

$$\begin{aligned} F(\overline{r}_1 + \overline{r}_2) = F(\overline{r_1 + r_2}) = f(r_1 + r_2) = f(r_1) + f(r_2) = F(\overline{r}_1) + F(\overline{r}_2) \\ F((\overline{r_1})(\overline{r_2})) = F(\overline{r_1 r_2}) = f(r_1 r_2) = f(r_1)f(r_2) = F(\overline{r}_1)F(\overline{r}_2) \end{aligned}$$

故 F 是环同态.

最后若 $F(\overline{r}_1) = f(r_1) = f(r_2) = F(\overline{r}_2)$，则

$$f(r_1 - r_2) = f(r_1) - f(r_2) = 0 \Rightarrow r_1 - r_2 \in \ker f \Rightarrow \overline{r}_1 = \overline{r}_2$$

故 F 是单同态，特别地 $F: R/\ker f \to \mathrm{Im} f$ 是环同构. □

题 9. 证明多项式 $x^2 + x + 1$ 与 $x^3 + x + 1$ 在 $\mathbb{Z}_2$ 上不可约，并求出有限域 $\mathbb{Z}_2$ 上全部三次不可约多项式.

Proof. 当 $x = [0]$ 时，$x^2 + x + 1 = x^3 + x + 1 = [1]$；当 $x = [1]$ 时，$x^2 + x + 1 = x^3 + x + 1 = [1]$. 多项式 $x^2 + x + 1$ 与 $x^3 + x + 1$ 在 $\mathbb{Z}_2$ 上均无根，因此不可约.

另一方面 $\mathbb{Z}_2$上不可约 $\Leftrightarrow f([0]) = f([1]) = [1]$，故有限域 $\mathbb{Z}_2$ 上全部三次不可约多项式只能为 $x^2 + x + 1$ 和 $x^3 + x + 1$. □

3 几何拓扑

题 10. 在实数集 $\mathbb{R}$ 上定义一个拓扑，使其包含 $(0,2)$,$(1,3)$ 且尽可能少的开集

Proof. 此题考查的是用子集族生成拓扑，只需将子集族中的元素先做有限交，然后进行可数并即可. 故由集合 $(0,2)$,$(1,3)$ 生成的拓扑为 $\{(0,2), (1,3), (1,2), (0,3), \emptyset, R\}$. □

题 11. 设 X 是一个拓扑空间，$A, B \subset X$，$\overline{A}, \overline{B}$ 分别是 A, B 的闭包，证明若 $A \subset B$，则 $\overline{A} \subset \overline{B}$.

Proof. $A \subset B \Rightarrow A \subset \overline{B}$，又 $\overline{A} = \bigcap\limits_{A\subset F, F闭} F$，故 $\overline{A} \subset \overline{B}$. □

题 12. 设 $\{x_n\}$ 是具有标准拓扑的实数集 $\mathbb{R}$ 上的数列，其中 $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$，求证：
1）每个含 0 的领域都包含某个开区间 $(-a, a)$；
2）对任意的 $a > 0$，存在 $N \in \mathbb{Z}^+$，使得当 $n \geq N$ 时有，$x_n \in (-a, a)$.

Proof. 1）设 G 是包含 0 的任意领域，由 $\mathbb{R}$ 为具有标准拓扑，故 $\exists a > 0, s.t., 0 \in U_\delta(0) \subset G$，即有 $(-a, a) \subset G.$.

2）因 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$，故 0 是 $\{x_n\}$ 的聚点，因此对任意的 $a > 0$，存在 $N \in \mathbb{Z}^+$，使得当 $n \geq N$ 时有，$x_n \in (-a, a)$. □

题 13. 求 E^3 中曲线 $r(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ 的曲率和挠率，其中 $a, b \neq 0$ 为常数.

Proof. 令 $v = \sqrt{a^2 + b^2}$，$s = vt$ 为弧长参数. 则 $r = (a\cos\frac{s}{v}, a\sin\frac{s}{v}, b\frac{s}{v})$，故

$$r''(s) = \frac{-a}{v^2}(\cos\frac{s}{v}, \sin\frac{s}{v}, 0)$$
$$r'''(s) = \frac{a}{v^3}(\sin\frac{s}{v}, -\cos\frac{s}{v}, 0)$$

因此曲率 $K = |r''(s)| = \frac{a}{v^2} = \frac{a}{a^2+b^2}$，且挠率 $\tau = \frac{(\dot{r}, \ddot{r}, \dddot{r})}{K^2} = \frac{b}{a^2+b^2}$. □

题 14. 求 E^3 中曲面 $r(u, v) = (u\cos v, u\sin v, v)$ 的高斯曲率和平均曲率.

Proof. 由 $r(u, v) = (u\cos v, u\sin v, v)$ 可知

$$r_u = (\cos v, \sin v, 0), r_v = (-u\sin v, u\cos v, 1)$$
$$r_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0), r_{uu} = 0, r_{vv} = (-u\cos v, -u\sin v, 0)$$

则 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2+1 \end{pmatrix}$，由法向量 $n = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(\sin v, -\cos v, u)$，故 $\mathbb{I} = \frac{-1}{\sqrt{u^2+1}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. 因此高斯映照 N 的微分 dN 在 (r_u, r_v) 下的矩阵为 $-I^{-1}\mathbb{I} = \frac{1}{(u^2+1)^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. 故高斯曲率 $H = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(-I^{-1}\mathbb{I}) = 0$，平均曲率 $K = \det(-I^{-1}\mathbb{I}) = \frac{-1}{(u^2+1)^{\frac{3}{2}}}$. □