国科大 2007 年基础数学专业硕博连读考试题

望梦阁的小梦友

2018 年 12 月 6 日

注记 本试卷分为试卷 1(公共基础部分) 和试卷 2(专业综合部分), 总时间为 180 分钟, 满分为 140 分. 试卷 1 满分 80 分, 数学学科的五个二级学科的硕士研究生必须完成该卷. 试卷 2 为专业部分, 满分为 60 分, 根据二级学科, 分为基础数学、应用数学、计算数学、概率统计、运筹学与控制论五类, 相应的二级学科的硕士研究生选择相应的试卷. 目前公共基础 9 月入学就会考, 不及格的话第二年入学时还可以申请再考一次, 专业综合部分第二年入学时考.

1 公共基础部分

注记 前 4 题为必答题, 每题 15 分; 第 5,6 题最终任选 1 题, 每题 10 分.

题 1. 设 $A_{n\times n}$ 是 n 阶分块实矩阵,$A=(B_{n\times k},C_{n\times(n-k)})$, 证明:

$$(\det A)^2\le \det(B'B)\det(C'C)$$

其中 B' 为 B 的转置.

题 2. 试确定所有可能数组 $(rankA,rankB,rankC)$, 其中 A,B,C 是 2×2 实矩阵, 并且满足 $A+B+C=0$.

题 3. 设 f 为 $\mathbb{R}$ 上非负的连续实函数, 并且 $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx<\infty$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^n xf(x)dx=0$$

题 4. 设 $\{a_m\}_{m\ge 1}$ 是满足 $a_{m+n}\le a_m+a_n$ 的正数列, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\inf_n\{\frac{a_n}{n}\}$$

题 5. 设 A 与 B 是 n 阶实方阵,$AB=BA=0$，且 $rankA^2=rankA$，证明:

$$rank(A+B)=rankA+rankB$$

题 6. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是可微函数,$f(0)=0$，并且 $\forall x\in\mathbb{R}$ 都有 $|f'(x)|\le|f(x)|$, 证明:$f\equiv 0$.

2　专业综合部分 (基础数学专业)

注记　本试卷 6 道题任选 4 题，每题 20 分，满分 80 分，多做不加分.

题 7.　设 $S^n(r)$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的半径为 r 的超球面，用 $i: S^n(r) \to \mathbb{R}^{n+1}$ 为包含映射. 设 $g = \sum_{A=1}^{n+1} di^A di^A$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的欧氏度量.

(1) 试求 $S^n(r)$ 上的诱导度量 i^*g 在 $S^n(r)$ 上的球极投影给出的局部坐标系下的表达式;

(2) 证明:$(S^n(r), i^*g)$ 为常曲率黎曼流形;

题 8.　设 (M,g) 是一个 m 维光滑黎曼流形,$\psi = \psi^i_j \dfrac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j$ 是 M 的 $(1,1)$ 型张量场，证明 *Ricci* 恒等式:

$$\psi^i_{j,kl} - \psi^i_{j,lk} = \psi^i_h R^h_{jkl} - \psi^h_j R^i_{hkl}$$

题 9.　设 X 是自反的 *Banach* 空间，试证明对任一 $f \in X^*$，泛函 $|f(x)|$ 在单位球面上可取到最大值.

题 10.　设 X 是 *Banach* 空间,$T: X \to Y$ 是线性算子，试证明 $\sigma(T)\backslash\{0\} \subset \sigma_p(T)$

题 11.　设 G 是一个有限 $p-$ 群 (p 为素数)，令 $A \subset G$ 是一个阶为 p 的正规子群，证明:A 包含在 G 的中心之中.

题 12.　设 E 是域 F 的可离代数扩张. 假设存在正整数 n 使得 E 中每个元在 F 上的次数均小于等于 n. 证明:E 在 F 上是有限的并且 $[E:F] \leq n$.