Il Continuum Random Tree

Tesi di Laurea Triennale

Lorenzo Beretta

21 settembre 2018

Premessa

- La tesi tratta la convergenza di alberi aleatori al Brownian CRT
- Presenterò solo un suo sottoinsieme autocontenuto
- Prediligerò un approccio visuale
- Le definizioni rigorose si trovano nell'elaborato originale

Definizione: Albero

Albero

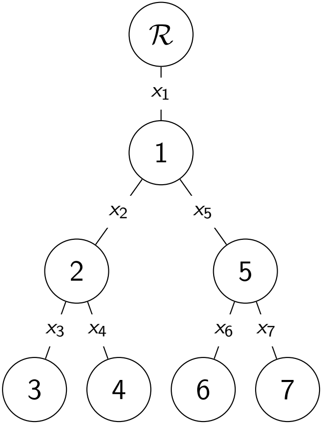
$t = (V_t, E_t) \in T_n = \{\text{grafi connessi, aciclici, } |V| = n\}$

Albero scalabile

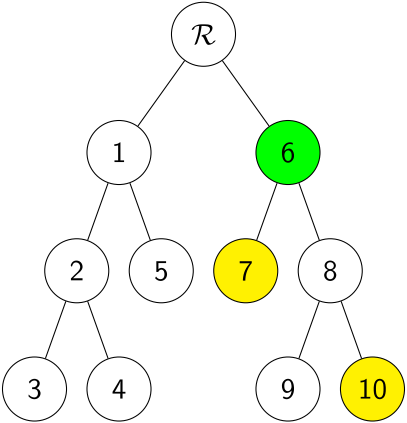
$\hat{t} = (t, x_1, \dots, x_{n-1}) \in T_n \times \mathbb{R}_+^{n-1}$

k-Albero Proprio

- Ha k foglie
- Ogni nodo interno ha 2 figli
- La radice ha 1 figlio



Definizione: Branchpoint $b(v, v^*)$



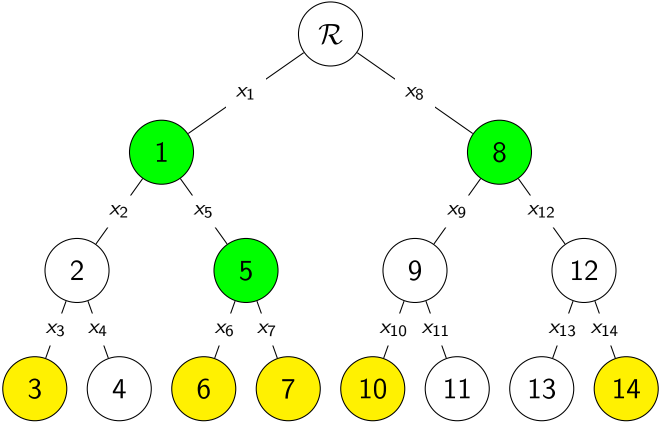
$(\mathcal{R}, v_1, \ldots, v)$ e $(\mathcal{R}, v_1^*, \ldots, v^*)$ cammini dalla radice a v e v^*.

$(\mathcal{R}, \ldots, b(v, v^*))$ il segmento iniziale comune massimale.

$$b(7, 10) = 6$$

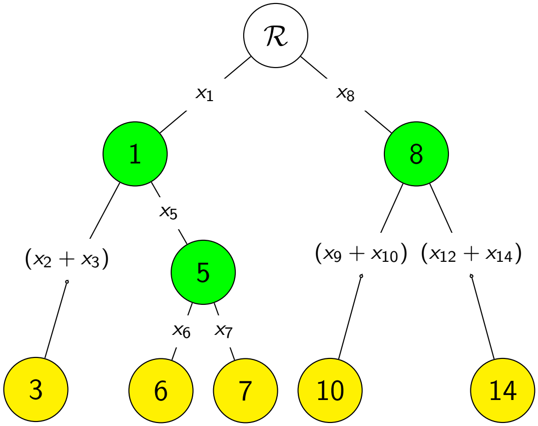
Definizione: Sottoalbero Ridotto $r\left(\hat{t}, B\right)$

$B = \{3, 6, 7, 10, 14\}$



Definizione: Sottoalbero Ridotto $r(\hat{t}, B)$

$B = \{3, 6, 7, 10, 14\}$



Immersione di $\hat{t} \in T_n \times \mathbb{R}_+^{n-1}$ in l_1

$$^* : V_{\hat{t}} \longrightarrow l_1, \quad v_i \longmapsto v_i^* \quad \text{tale che}$$
$$||v_i^* - v_j^*||_{l_1} = d(v_i, v_j) \quad \forall i, j.$$

Immersione di $\hat{t} \in T_n \times \mathbb{R}_+^{n-1}$ in l_1

$$^* : V_{\hat{t}} \longrightarrow l_1, \quad v_i \longmapsto v_i^* \quad \text{tale che}$$
$$||v_i^* - v_j^*||_{l_1} = d(v_i, v_j) \quad \forall i, j.$$

Rappresentazione Insiemistica

L'insieme dei (v_i^*) e degli opportuni cammini lineari:

$$S_{\hat{t}} = \bigcup_{(i,j)\in E_{\hat{t}}} \operatorname{conv}\left(v_i^*, v_j^*\right)$$

Immersione di $\hat{t} \in T_n \times \mathbb{R}_+^{n-1}$ in l_1

$$^* : V_{\hat{t}} \longrightarrow l_1, \quad v_i \longmapsto v_i^* \quad \text{tale che}$$
$$||v_i^* - v_j^*||_{l_1} = d(v_i, v_j) \quad \forall i, j.$$

Rappresentazione Insiemistica

L'insieme dei (v_i^*) e degli opportuni cammini lineari:

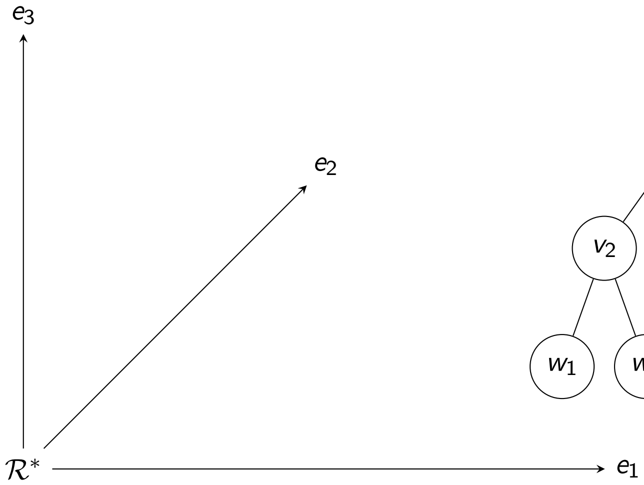
$$S_{\hat{t}} = \bigcup_{(i,j)\in E_{\hat{t}}} \mathrm{conv}\left(v_i^*, v_j^*\right)$$

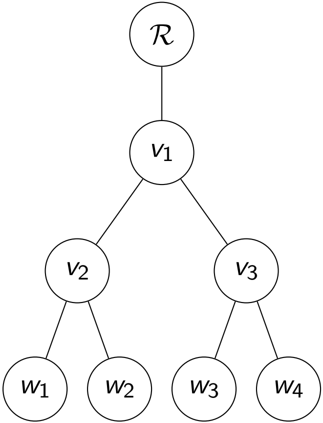
Rappresentazione in Misura

La misura empirica sui (v_i^*):

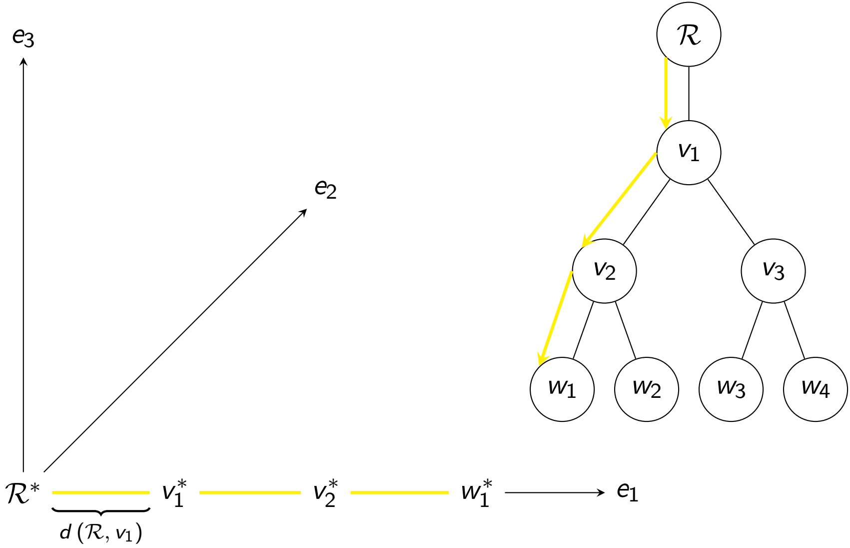
$$\mu_{\hat{t}}(\,\cdot\,) = \frac{1}{n} \sum_i \delta_{v_i^*}(\,\cdot\,)$$

Costruzione Sequenziale: $\hat{t} \hookrightarrow l_1$

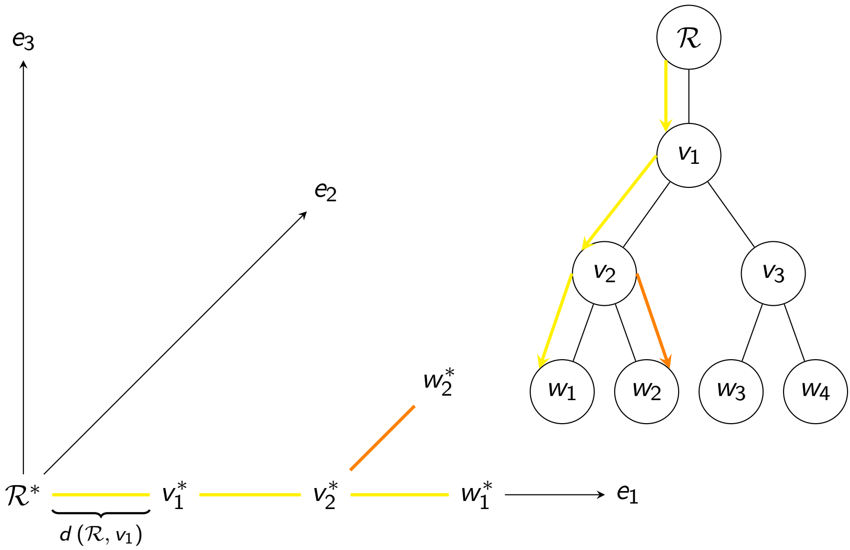




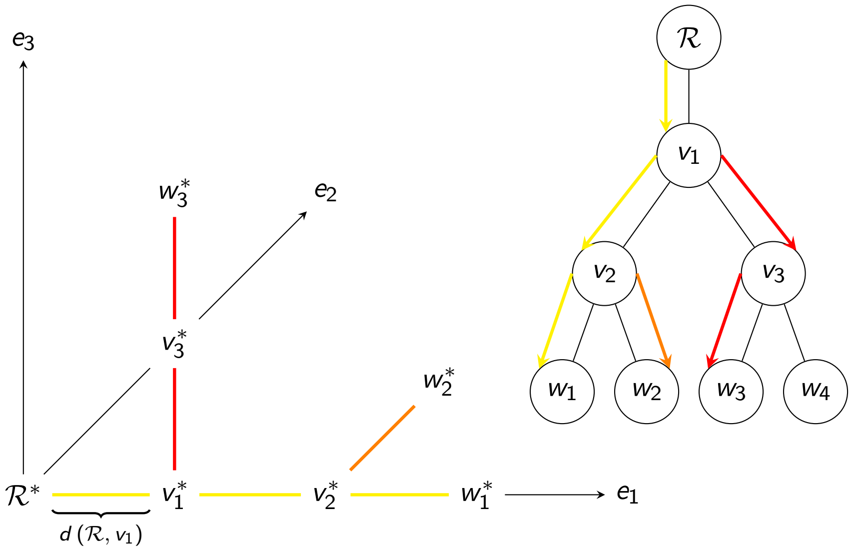
Costruzione Sequenziale: $\hat{t} \hookrightarrow l_1$

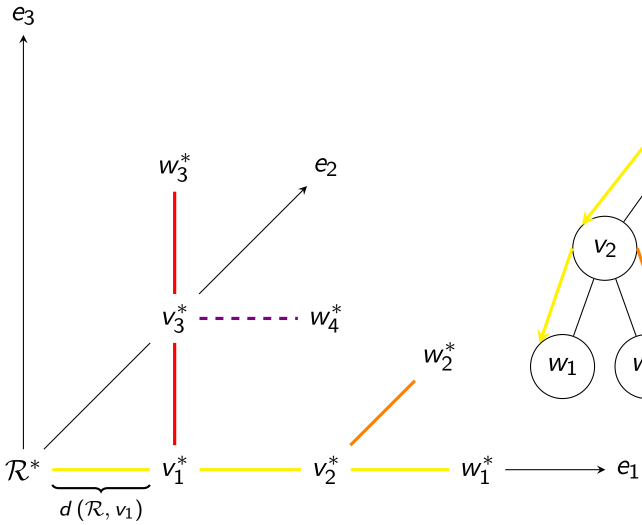


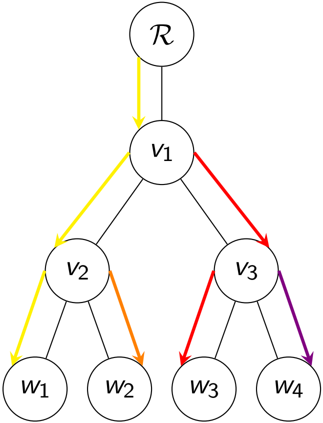
Costruzione Sequenziale: $\hat{t} \hookrightarrow l_1$



Costruzione Sequenziale: $\hat{t} \hookrightarrow l_1$




e_3
w_3^*
e_2
v_3^*
w_4^*
w_2^*
$\mathcal{R}^*$
v_1^*
v_2^*
w_1^*
e_1
$d(\mathcal{R}, v_1)$


$\mathcal{R}$
v_1
v_2
v_3
w_1
w_2
w_3
w_4

Definizione: Continuum Tree (S, μ_0)

Continuum Tree (S, μ_0)

- $0 \in S \subseteq l_1$
- μ_0 probabilitá non atomica su l_1

Definizione: Continuum Tree (S, μ_0)

Continuum Tree (S, μ_0)

- $0 \in S \subseteq l_1$
- μ_0 probabilitá non atomica su l_1
- $\forall\, x, y \in S \quad \exists!$ cammino semplice tra x e y, ed é lungo $||x - y||_{l_1}$

Definizione: Continuum Tree (S, μ_0)

Continuum Tree (S, μ_0)

- $0 \in S \subseteq l_1$
- μ_0 probabilitá non atomica su l_1
- $\forall\, x, y \in S \quad \exists!$ cammino semplice tra x e y, ed é lungo $||x - y||_{l_1}$
- $\forall\, x_1, x_2, x_3 \in S \quad b(x_1, x_2) = b(x_1, x_3) = b(x_2, x_3) = \tilde{b} \implies \exists x_i = \tilde{b}$

Definizione: Continuum Tree (S, μ_0)

Continuum Tree (S, μ_0)

- $0 \in S \subseteq l_1$
- μ_0 probabilitá non atomica su l_1
- $\forall\, x, y \in S \quad \exists!$ cammino semplice tra x e y, ed é lungo $||x - y||_{l_1}$
- $\forall\, x_1, x_2, x_3 \in S \quad b(x_1, x_2) = b(x_1, x_3) = b(x_2, x_3) = \tilde{b} \implies \exists x_i = \tilde{b}$

Scheletro e Foglie

$$sk(S) = \left\{ x \in S \;\middle|\; \exists y \in S \text{ t.c. } x \in [[0, y[[\right\}$$

$$lv(S) = S \setminus sk(S)$$

Definizione: Continuum Tree (S, μ_0)

Continuum Tree (S, μ_0)

- $0 \in S \subseteq l_1$
- μ_0 probabilitá non atomica su l_1
- $\forall\, x, y \in S \quad \exists!$ cammino semplice tra x e y, ed é lungo $||x - y||_{l_1}$
- $\forall\, x_1, x_2, x_3 \in S \quad b(x_1, x_2) = b(x_1, x_3) = b(x_2, x_3) = \tilde{b} \implies \exists x_i = \tilde{b}$

Scheletro e Foglie

$$sk(S) = \left\{ x \in S \;\middle|\; \exists y \in S \text{ t.c. } x \in [[0, y[[\right\}$$

$$lv(S) = S \setminus sk(S)$$

- $\mu_0\,(lv(S)) = 1$

Definizione: Continuum Tree (S, μ_0)

Continuum Tree (S, μ_0)

- $0 \in S \subseteq l_1$
- μ_0 probabilitá non atomica su l_1
- $\forall\, x, y \in S \quad \exists!$ cammino semplice tra x e y, ed é lungo $||x - y||_{l_1}$
- $\forall\, x_1, x_2, x_3 \in S \quad b(x_1, x_2) = b(x_1, x_3) = b(x_2, x_3) = \tilde{b} \implies \exists x_i = \tilde{b}$

Scheletro e Foglie

$$sk(S) = \left\{ x \in S \,\middle|\, \exists y \in S \text{ t.c. } x \in [[0, y[[\right\}$$

$$lv(S) = S \setminus sk(S)$$

- $\mu_0\,(lv(S)) = 1$
- $\mu_0\,\{y \mid x \in [[0, y]]\} > 0 \quad \forall x \in sk(S)$

Definizione: Continuum Random Tree $(\mathscr{S}, \mu)$

Continuum Random Tree $(\mathscr{S}, \mu)$

$\mathscr{S} : \Omega \longrightarrow \{\text{Chiusi di } l_1\}$

$\mu : \Omega \longrightarrow \{\text{Misure su } l_1\}$

$(\mathscr{S}, \mu)$ é un CRT se

$\forall \omega \in \Omega \quad (\mathscr{S}(\omega), \mu(\omega))$ é un *continuum tree*

Definizione: Famiglia Consistente e Leaf-tight

$(\mathscr{R}(k))_{k\in\mathbb{N}}$ famiglia di k-alberi aleatori

$\left(L_1^k, \dots, L_k^k\right)$ permutazione aleatoria uniforme delle foglie

Definizione: Famiglia Consistente e Leaf-tight

$(\mathscr{R}(k))_{k\in\mathbb{N}}$ famiglia di k-alberi aleatori

$\left(L_1^k, \ldots, L_k^k\right)$ permutazione aleatoria uniforme delle foglie

Consistente

$$r\left(\mathscr{R}(k), \left\{L_1^k, \ldots, L_j^k\right\}\right) \stackrel{d}{=} \mathscr{R}(j) \quad \forall j \leq k$$

Definizione: Famiglia Consistente e Leaf-tight

$(\mathscr{R}(k))_{k\in\mathbb{N}}$ famiglia di k-alberi aleatori

$\left(L_1^k, \dots, L_k^k\right)$ permutazione aleatoria uniforme delle foglie

Consistente

$$r\left(\mathscr{R}(k), \left\{L_1^k, \dots, L_j^k\right\}\right) \overset{d}{=} \mathscr{R}(j) \quad \forall j \leq k$$

Leaf-tight

$$\min_{2\leq j\leq k} d\left(L_1^k, L_j^k\right) \xrightarrow{P} 0 \quad \text{per } k \to \infty$$

Campionamenti Finiti del CRT

Campionamento Finito

- $(\mathscr{S}, \mu)$ CRT
- $(Z_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq l_1$ v.a. scambiabili con legge μ

$$r\left(\mathscr{S}, \{Z_1, \ldots, Z_k\}\right) := \bigcup_{i \leq k} [[0, Z_i]]$$

Campionamenti Finiti del CRT

Campionamento Finito

- $(\mathscr{S}, \mu)$ CRT
- $(Z_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq l_1$ v.a. scambiabili con legge μ

$$r(\mathscr{S}, \{Z_1, \dots, Z_k\}) := \bigcup_{i \leq k} [[0, Z_i]]$$

Questi campionamenti, al variare di k, devono essere:

- $(Z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ scambiabili $\implies$ Consistenti
- $(Z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dense in $\mathrm{supp}(\mu)$ $\implies$ Leaf-tight

Teorema di Rappresentazione per Campionamento

Teorema di Rappresentazione per Campionamento

$(\mathscr{R}(k))_{k\in\mathbb{N}}$ famiglia di k-alberi aleatori *consisitente* e *leaf-tight*

$\exists\,(\mathscr{S},\mu)$ CRT t.c. $\forall\,(Z_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq l_1$ v.a. scambiabili con legge μ

$r\,(\mathscr{S},\{Z_1,\ldots,Z_k\})$ é una rappresentazione insiemistica di $\mathscr{R}(k)$

Teorema di Rappresentazione: Idea della Dimostrazione

- Eseguo la costruzione sequenziale sugli $\mathscr{R}(k) \longmapsto S(k) \subseteq l_1$

$$S(k) = \bigcup_{i \leq k} [[0, Y_i^k]], \quad Y_i^k : \Omega \longrightarrow l_1$$

Teorema di Rappresentazione: Idea della Dimostrazione

- Eseguo la costruzione sequenziale sugli $\mathscr{R}(k) \longmapsto S(k) \subseteq l_1$

$$S(k) = \bigcup_{i \leq k} [[0, Y_i^k]], \quad Y_i^k : \Omega \longrightarrow l_1$$

- $(\mathscr{R}(k))_{k \in \mathbb{N}}$ consistenti $\implies \mu_{(Y_1^k, \ldots, Y_k^k)}$ verificano Kolmogorov

Teorema di Rappresentazione: Idea della Dimostrazione

- Eseguo la costruzione sequenziale sugli $\mathscr{R}(k) \longmapsto S(k) \subseteq l_1$

$$S(k) = \bigcup_{i \leq k} [[0, Y_i^k]], \quad Y_i^k : \Omega \longrightarrow l_1$$

- $(\mathscr{R}(k))_{k \in \mathbb{N}}$ consistenti $\implies \mu_{(Y_1^k, \dots, Y_k^k)}$ verificano Kolmogorov

- Scelgo una volta sola il processo $(L_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq l_1$ t.c.

$$S(k) = \bigcup_{i \leq k} [[0, L_i]]$$

Teorema di Rappresentazione: Idea della Dimostrazione

- Eseguo la costruzione sequenziale sugli $\mathscr{R}(k) \longmapsto S(k) \subseteq l_1$

$$S(k) = \bigcup_{i \leq k} [[0, Y_i^k]], \quad Y_i^k : \Omega \longrightarrow l_1$$

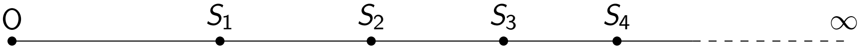
- $(\mathscr{R}(k))_{k \in \mathbb{N}}$ consistenti $\implies \mu_{(Y_1^k, \dots, Y_k^k)}$ verificano Kolmogorov

- Scelgo una volta sola il processo $(L_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq l_1$ t.c.

$$S(k) = \bigcup_{i \leq k} [[0, L_i]]$$

- Definisco $(\mathscr{S}, \mu)$ t.c. $\mathscr{S} = \overline{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} [[0, L_i]]}, \quad \mu_{S(k)} \xrightarrow{d} \mu$

Costruzione del Brownian CRT



Processo di Poisson non omogeneo

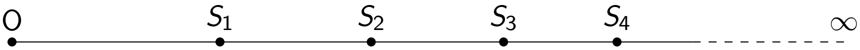
$(N_t)_{t\in[0,\infty)}$ Poisson non omogeneo con rate $\lambda(t) = t$

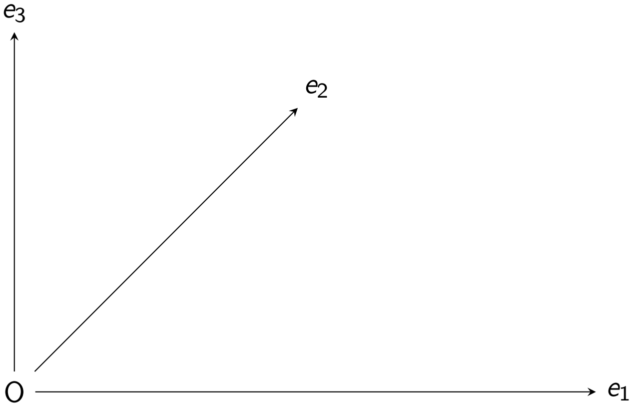
$$P\left\{N_t = n\right\} = \frac{\Lambda(t)^n}{n!} e^{-\Lambda(t)}, \quad \Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$$

(S_i) tempi di arrivo con densitá

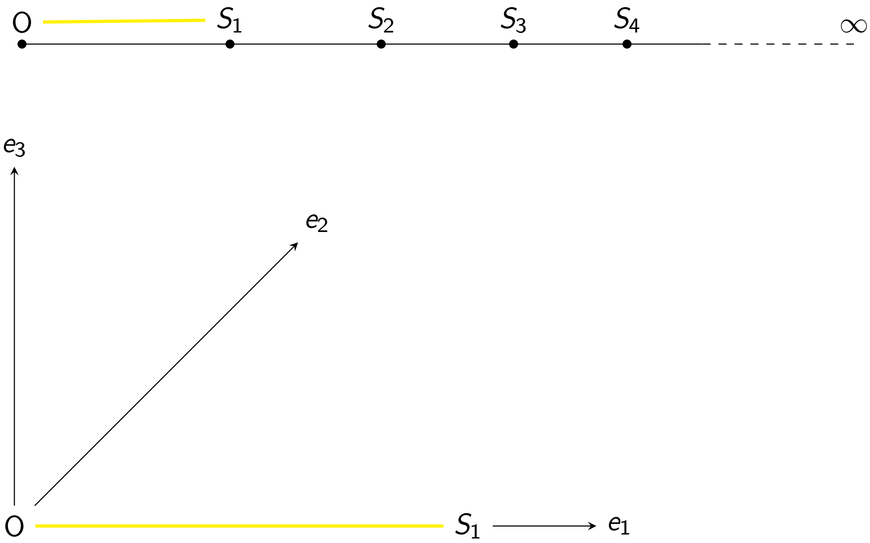
$$f_{S_{i+1}}(t) = t \exp\left(-\frac{1}{2}\left(t^2 - S_i^2\right)\right), \quad \text{per } t \in [S_i, \infty)$$

Costruzione del Brownian CRT

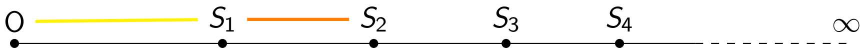


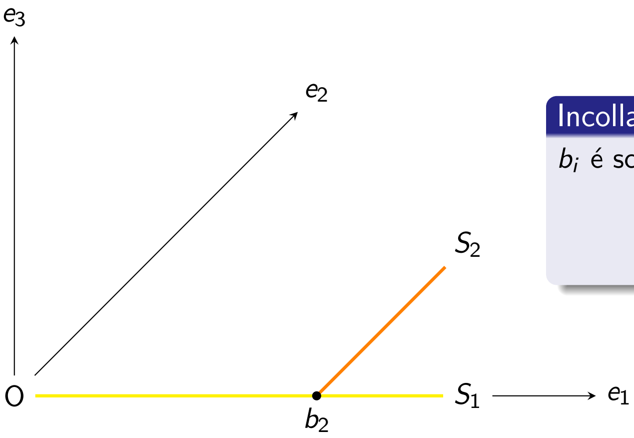


Costruzione del Brownian CRT



Costruzione del Brownian CRT



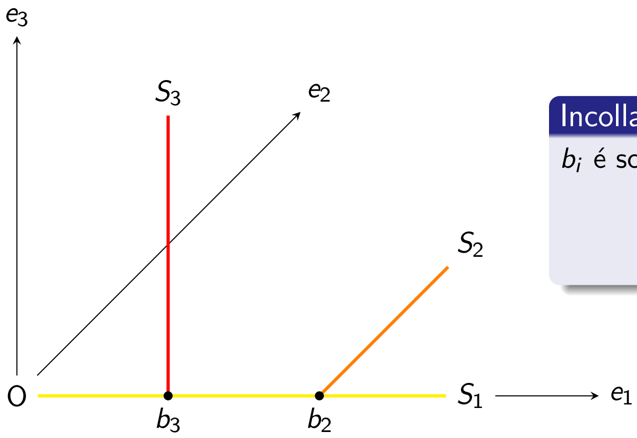


Incollamento

b_i é scelto uniformemente su

$$\bigcup_{j<i} [[O, S_j]]$$

Costruzione del Brownian CRT

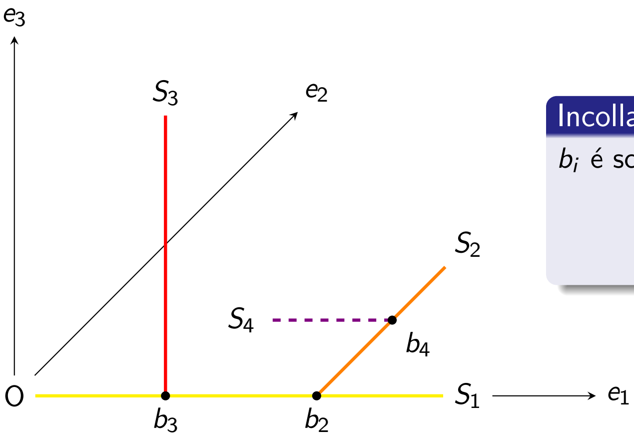


Incollamento

b_i é scelto uniformemente su

$$\bigcup_{j<i} [[O, S_j]]$$

Costruzione del Brownian CRT



Incollamento

b_i é scelto uniformemente su

$$\bigcup_{j<i} [[O, S_j]]$$

Costruzione del Brownian CRT

- T_{2k}^{*} insieme dei k-alberi propri
- $\mathscr{R}_B(k) : \Omega \longrightarrow T_{2k}^{*} \times \mathbb{R}_{+}^{2k-1}$ albero aleatorio ottenuto al passo k

- T^*_{2k} insieme dei k-alberi propri
- $\mathscr{R}_B(k) : \Omega \longrightarrow T^*_{2k} \times \mathbb{R}_+^{2k-1}$ albero aleatorio ottenuto al passo k
- $\mathscr{R}_B(k)$ ha densitá $f\,(t, x_1, \ldots x_{2k-1}) = s\ \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right), \quad s = \sum_{i=1}^{2k-1} x_i$

Costruzione del Brownian CRT

- T^*_{2k} insieme dei k-alberi propri
- $\mathscr{R}_B(k) : \Omega \longrightarrow T^*_{2k} \times \mathbb{R}_+^{2k-1}$ albero aleatorio ottenuto al passo k
- $\mathscr{R}_B(k)$ ha densitá $f\,(t, x_1, \ldots x_{2k-1}) = s \;\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right), \quad s = \sum_{i=1}^{2k-1} x_i$
- (x_i) scambiabili $\implies$ $(\mathscr{R}_B(k))_{k\in\mathbb{N}}$ consistente

Costruzione del Brownian CRT

- T^*_{2k} insieme dei k-alberi propri
- $\mathscr{R}_B(k) : \Omega \longrightarrow T^*_{2k} \times \mathbb{R}_+^{2k-1}$ albero aleatorio ottenuto al passo k
- $\mathscr{R}_B(k)$ ha densitá $f\,(t, x_1, \ldots x_{2k-1}) = s\ \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right), \quad s = \sum_{i=1}^{2k-1} x_i$
- (x_i) scambiabili $\implies (\mathscr{R}_B(k))_{k\in\mathbb{N}}$ consistente
- $|S_{i+1} - S_i| \xrightarrow{P} 0 \implies (\mathscr{R}_B(k))_{k\in\mathbb{N}}$ leaf-tight

Costruzione del Brownian CRT

Ricordando il teorema di Rappresentazione per Campionamento

Definizione: Brownian CRT

$(\mathscr{S}, \mu)$ é un Brownian CRT se

$\forall (Z_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq l_1$ v.a. scambiabili con legge μ

$r(\mathscr{S}, \{Z_1, \ldots, Z_k\})$ rappresentazione insiemistica di $\mathscr{R}_B(k) \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Bibliografia

• Aldous, D. J. *The continuum random tree. I.* 1991, Ann. Probab. 19, 1-28.

• Aldous, D. J. *The continuum random tree II: an overview.* 1991, Proc. Durham Symp. Stochastic Analysis 1990, 23-70. Cambridge Univ. Press.

• Aldous, D. J. *The Continuum Random Tree III.* 1993, Ann. Probab. 21, 248–289.

• Aldous, D. J. *Exchangeability and related topics.* 1985, Lecture Notes in Mathematics, vol 1117. Springer, Berlin, Heidelberg.

• Patrick Billingsley, *Convergence of Probability Measures.* 1968, Wiley Series in Probability and Statistics.