

1 tau-leaping 原理

考虑搅拌均匀的化学反应系统，包含 n 种反应物种 $\{S_i\}_{i=1}^n$ ，具有 M 条反应通道。系统状态记为

$$X(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t)) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n,$$

其中 $X_i(t)$ 表示时刻 t 物种 S_i 的分子数。第 j 条反应通道由倾向函数 $a_j(x)$ 与状态改变量（化学计量向量）

$$\nu_j = (\nu_{1j}, \dots, \nu_{nj})^\top$$

描述：对给定状态 $X(t) = x$ ，在小时间段 $[t, t + dt)$ 内第 j 条反应发生的概率近似为 $a_j(x) dt$ ；当该反应发生时，系统状态变化为 $x \mapsto x + \nu_j$ 。

系统动力学满足化学主方程（CME）：

$$\frac{d}{dt}P(x, t | x_0, t_0) = \sum_{j=1}^M \left[a_j(x - \nu_j) P(x - \nu_j, t | x_0, t_0) - a_j(x) P(x, t | x_0, t_0) \right]. \quad (1.1)$$

除少数简单系统外，直接求解 (1.1) 代价很高，因此常用随机模拟算法（SSA）近似轨道。令

$$a_0(x) = \sum_{j=1}^M a_j(x).$$

在状态 x 处，下一个反应发生等待时间 T 服从参数为 $a_0(x)$ 的指数分布，反应通道 j 被触发的概率为 $a_j(x)/a_0(x)$ 。SSA 通过两个独立的均匀随机数 $r_1, r_2 \sim U(0, 1)$ 生成：

$$\tau = \frac{1}{a_0(x)} \ln\left(\frac{1}{r_1}\right), \quad (2.13)$$

并选择满足

$$\sum_{j=1}^{\mu-1} a_j(x) < r_2 a_0(x) \leq \sum_{j=1}^{\mu} a_j(x) \quad (2.14)$$

的通道 μ ，随后更新

$$X(t + \tau) = X(t) + \nu_\mu.$$

SSA 对每一次反应都逐事件推进，计算量很大。Gillespie 提出 *tau-leaping* 思想：将时间轴划分为连续小区间，在每个区间内倾向函数变化不大，则可放弃反应精确发生时刻，直接从一个区间跳到下一个区间。设 $K_j(\tau, x)$ 表示在固定区间 $[t, t + \tau)$ 内第 j 条反应的真实发生次数。若在该区间内满足 *leap condition*（倾向函数近似常数），则有近似

$$K_j(\tau, X(t)) \approx \text{Poisson}(a_j(X(t)) \tau), \quad j = 1, \dots, M, \quad (2.15)$$

并可一次性更新状态

$$X(t + \tau) = X(t) + \sum_{j=1}^M \nu_j K_j(\tau, X(t)). \quad (2.16)$$

常用的一种跳跃条件写为：存在给定阈值 $\varepsilon \in (0, 1)$ ，使得对所有 j ，

$$|a_j(X(t + \tau)) - a_j(X(t))| \leq \varepsilon a_0(X(t)). \quad (2.17)$$

1.1 基于空间离散格式的 tau-leaping 算法

考虑一维随机微分方程

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma dW_t, \quad (1.2)$$

其生成元为

$$\mathcal{L}f(x) = b(x)f'(x) + \frac{\sigma^2}{2}f''(x).$$

在区间 $\Omega = [x_{\min}, x_{\max}]$ 上取均匀网格 $x_i = x_{\min} + ih$ 。离散生成元 Q 的基本思想是：构造一个在离散状态空间上跳跃的连续时间马尔可夫链，使其无穷小生成元矩阵 Q 近似 \mathcal{L} 。

(1) 中心差分生成元 Q_c (两点跳跃) 令 $D = \sigma^2/2$ ，在节点 x_i 处定义向右、向左跳跃速率

$$q_{i,i+1}^c = \frac{D}{h^2} + \frac{b(x_i)}{2h}, \quad q_{i,i-1}^c = \frac{D}{h^2} - \frac{b(x_i)}{2h}, \quad (1.3)$$

并令

$$q_{i,i}^c = -(q_{i,i+1}^c + q_{i,i-1}^c).$$

当漂移较大时，(1.3) 可能导致非负性问题（某些速率为负）。

(2) 迎风生成元 Q_u (保证非负性) 典型的迎风构造可写为（按 $b(x_i)$ 符号分段）：

$$\begin{aligned} \text{若 } b(x_i) \geq 0: \quad & q_{i,i+1}^u = \frac{D}{h^2} + \frac{b(x_i)}{h}, \quad q_{i,i-1}^u = \frac{D}{h^2}, \\ \text{若 } b(x_i) < 0: \quad & q_{i,i+1}^u = \frac{D}{h^2}, \quad q_{i,i-1}^u = \frac{D}{h^2} - \frac{b(x_i)}{h}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

并同样设 $q_{i,i}^u = -(q_{i,i+1}^u + q_{i,i-1}^u)$ 。

(3) 在 Q -跳过程上的 tau-leaping 更新 将离散跳过程理解为“两个反应通道”：向右跳、向左跳。在当前位置 x_i ，取时间步长 τ ，生成独立泊松随机数

$$K_+ \sim \text{Poisson}(q_{i,i+1}\tau), \quad K_- \sim \text{Poisson}(q_{i,i-1}\tau),$$

则一次跳跃步更新为

$$i \leftarrow i + K_+ - K_-, \quad \text{即} \quad X \leftarrow x_{i+K_+-K_-}. \quad (3.2)$$

多维情形对应为 $2d$ 个方向的泊松计数与向量更新（例如二维为四个方向）。

1.2 中点格式的 tau-leaping 算法

为提高精度，可借鉴中点思想：先构造“中点状态”，再在中点处计算速率并采样泊松次数。设当前离散状态为 x （或索引为 i ），令速率向量记为 $q(x)$ （包含各方向/各通道速率）。记跳跃方向向量为 $\{\nu_j\}$ （一维情形 $\nu_+ = +h, \nu_- = -h$ ）。定义中点预测（用期望漂移近似）：

$$x_{\text{mid}} = x + \frac{\tau}{2} \sum_j \nu_j q_j(x), \quad (1.5)$$

然后在 x_{mid} 处计算速率 $q_j(x_{\text{mid}})$ 并生成

$$K_j \sim \text{Poisson}(q_j(x_{\text{mid}})\tau),$$

最后更新

$$x \leftarrow x + \sum_j \nu_j K_j. \quad (1.6)$$

1.3 带拒绝机制的 tau-leaping 算法

在实际模拟中可能出现泊松跳跃次数过大，使得 leap condition 不满足，或者使粒子跳出计算区域 Ω ，从而导致该步无效。因此可引入拒绝机制 (rejection-based)：

给定当前状态 x 与步长 τ ，先生成

$$K_j \sim \text{Poisson}(q_j(x)\tau),$$

得到候选更新

$$x^* = x + \sum_j \nu_j K_j.$$

若发生以下任一情形，则拒绝该步：

- $x^* \notin \Omega$ (越界)；
- leap condition 不满足，例如

$$|q_j(x^*) - q_j(x)| \leq \varepsilon q_0(x) \quad (j = 1, \dots, \text{通道数}), \quad q_0(x) = \sum_j q_j(x), \quad (1.7)$$

不成立 (这里 $\varepsilon \in (0, 1)$ 为阈值)。

拒绝后令步长缩小 (常用 $\tau \leftarrow \tau/2$) 并重新采样；若通过检查则接受：

$$x \leftarrow x^*, \quad t \leftarrow t + \tau.$$

2 随机Canard慢快系统的平稳密度计算

2.1 模型、参数与Canard爆炸背景

本节将前述基于空间离散生成元 Q 的 tau-leaping 方法应用于随机慢快 Canard 系统，用于计算其二维平稳密度并讨论其与 Canard 爆炸现象的联系。考虑如下带加性噪声的慢快系统：

$$\begin{cases} \delta dX_t = (Y_t - \frac{X_t^3}{3} + X_t) dt + \sigma_x dW_t^{(1)}, \\ dY_t = (a - X_t) dt + \sigma_y dW_t^{(2)}, \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 $0 < \delta \ll 1$ 为慢快参数, a 为控制参数, $W_t^{(1)}, W_t^{(2)}$ 为相互独立的标准布朗运动。将其写成标准形式:

$$\begin{aligned} dX_t &= b_x(X_t, Y_t) dt + \tilde{\sigma}_x dW_t^{(1)}, & b_x(x, y) &= \frac{1}{\delta} \left(y - \frac{x^3}{3} + x \right), & \tilde{\sigma}_x &= \frac{\sigma_x}{\delta}, \\ dY_t &= b_y(X_t, Y_t) dt + \sigma_y dW_t^{(2)}, & b_y(x, y) &= a - x. \end{aligned} \quad (2.2)$$

在确定性情形 ($\sigma_x = \sigma_y = 0$) 下, 该系统存在典型的慢流形/临界流形结构。当 a 穿越一个窄参数区间时, 轨道振幅会从小振幅迅速过渡到大振幅回转 (即 Canard 爆炸)。为使系统处于接近爆炸阈值的区域, 本文采用与慢快渐近展开一致的参数选取 (示例):

$$\delta = 0.1, \quad a = 1 - \frac{\delta}{8} - \frac{3\delta^2}{32} - \frac{173\delta^3}{1024} - \eta, \quad (2.3)$$

其中 $\eta > 0$ 为人为偏移量 (用于将系统放置在“接近但略偏离”爆炸临界区域)。随机扰动加入后, 轨道会在吸引/排斥慢流形附近产生随机偏移, 并在长时间尺度上呈现稳定的统计占据结构, 从而诱导出二维平稳密度 $p_\infty(x, y)$ 。

2.2 生成元与空间离散: 四方向跳跃速率 q_1, \dots, q_4

对足够光滑的测试函数 f , (2.2) 的生成元为

$$\mathcal{L}f = b_x \partial_x f + b_y \partial_y f + D_x \partial_{xx} f + D_y \partial_{yy} f, \quad D_x = \frac{\tilde{\sigma}_x^2}{2} = \frac{\sigma_x^2}{2\delta^2}, \quad D_y = \frac{\sigma_y^2}{2}. \quad (2.4)$$

在矩形区域 $\Omega = [x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}]$ 上取均匀网格步长 h_x, h_y , 对 \mathcal{L} 做空间离散得到离散生成元 Q 。本文采用“每次向四个相邻方向跳一步”的 CTRW/SSA 结构:

$$(x_i, y_j) \rightarrow (x_{i\pm 1}, y_j), \quad (x_i, y_j) \rightarrow (x_i, y_{j\pm 1}).$$

记四个方向的跳跃速率分别为

$$q_1 = q_x^+, \quad q_2 = q_x^-, \quad q_3 = q_y^+, \quad q_4 = q_y^-.$$

为在漂移占优与扩散占优区域均保持数值鲁棒性, 可采用指数拟合 (exponential fitting) 形式的速率构造 (示例写法):

$$\begin{aligned} q_x^\pm(x, y) &= \frac{D_x}{h_x^2} \exp\left(\pm \frac{h_x b_x(x, y)}{2D_x}\right) = \frac{D_x}{h_x^2} \exp\left(\pm \frac{h_x b_x(x, y)}{\tilde{\sigma}_x^2}\right), \\ q_y^\pm(x, y) &= \frac{D_y}{h_y^2} \exp\left(\pm \frac{h_y b_y(x, y)}{2D_y}\right) = \frac{D_y}{h_y^2} \exp\left(\pm \frac{h_y b_y(x, y)}{\sigma_y^2}\right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

于是 Q 过程可解释为连续时间马尔可夫跳过程, 其总速率为

$$\lambda(x, y) = q_1 + q_2 + q_3 + q_4.$$

边界处理: 若跳跃会越出 Ω , 可采用反射边界 (将越界跳跃映射回边界点) 或直接置零相应越界通道速率。为避免边界截断影响平稳密度, Ω 需足够覆盖轨道的主要占据区域。

2.3 *tau-leaping*在随机Canard中的实现要点

在 SSA 中逐事件推进会非常耗时。本节直接使用前文已给出的 *tau-leaping* 主算法（保持不变），在本算例中需要强调以下实现要点：

(1) 步长 τ 的自适应控制 由于 b_x 含有 $1/\delta$ 因子，慢快结构导致在某些区域局部速率变化显著。因此采用简单的上界控制原则（示例）：

$$\tau(x, y) = \min\left\{\tau_{\max}, \frac{\Lambda}{\max\{q_1, q_2, q_3, q_4\}}\right\}, \quad (2.6)$$

其中 $\Lambda \in (0, 1)$ 控制单步内期望跳跃次数上限， τ_{\max} 给出最大步长。当进入快区（速率变大）时 τ 自动缩小，以满足 leap condition 的要求。

(2) 拒绝机制与越界控制 一次 *tau-leaping* 可能产生较大泊松计数导致越界或 leap condition 失效。可使用前文的拒绝机制：若出现越界或 $\max_j K_j$ 超过阈值，则拒绝该步并令 $\tau \leftarrow \tau/2$ 重试。

(3) 平稳密度统计：burn-in 与占据时间加权 设总模拟时间为 T ，丢弃前 T_{burn} 段作为 burn-in，在 $[T_{\text{burn}}, T]$ 上统计直方图。对连续时间跳过程，更推荐以“停留时间”加权：每一步推进 $t \leftarrow t + \tau$ 时，将 τ 累加到当前箱体的占据时间上，最后归一化得到 $\hat{p}_{\infty}(x, y)$ 。

2.4 数值设置与结果展示

本节给出一组可复现实验设置（你可按实际计算替换具体数值）：

- 参数： $\delta = 0.1$ ， a 由 (2.3) 给出（例如取 $\eta = 0.01$ ），噪声强度 σ_x, σ_y 取 $10^{-2} \sim 10^{-1}$ 量级；
- 区域与网格： $\Omega = [x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}]$ ，网格步长 $h_x = h_y = h$ ；
- *tau-leaping*： τ 由 (2.6) 自适应选取，启用拒绝机制；
- 统计：总时长 T ，burn-in 为 T_{burn} ，箱体数 $N_x \times N_y$ 。

(1) 平稳密度的几何形状与慢快结构 数值平稳密度 $\hat{p}_{\infty}(x, y)$ 往往沿慢流形附近呈现“带状集中”，并在靠近转折区域出现明显的概率聚集。当 a 位于 Canard 爆炸临界附近时，随机扰动会使轨道在“小振幅振荡区域”与“大振幅回转区域”之间产生随机切换，从密度角度通常表现为：

- 在相图中出现两类高概率区域（或一条高概率通道）；
- 当 σ 增大时，密度从尖锐集中逐渐变得更弥散；
- 当 η 逐渐减小（更接近临界）时，密度沿大回转方向的尾部显著增强，体现“爆炸”概率增加。

(2) 与时间离散方法的对比（可选，用于投稿时强调优势） 为突出本文方法在长时间统计上的优势，可增加一组对照：使用 Euler–Maruyama（或 tamed/truncated EM）在相同总物理时间 T 下统计密度，并报告：

$$\text{CPU 时间}, \quad \|\hat{p}_{\text{TL}} - \hat{p}_{\text{ref}}\|_{L^1}, \quad \|\hat{p}_{\text{EM}} - \hat{p}_{\text{ref}}\|_{L^1},$$

其中 \hat{p}_{ref} 可由更细网格/更小步长或更长时间 SSA 得到。在慢快 Canard 系统中，通常可观察到：*tau-leaping* 在保持可接受密度误差的同时显著减少事件推进次数，尤其在需要极长时间采样以稳定直方图时更为明显。

图 2.1 随机 Canard 系统的样本轨道与平稳密度示意图（左：相平面轨道；右：二维平稳密度热力图）。图由程序生成。

2.5 小结：平稳密度与 Canard 爆炸的联系

从统计角度看，Canard 爆炸可理解为在极窄参数区间内，系统对轨道振幅的“选择”发生突变。加入噪声后，这种突变被随机化为“概率分配”的快速改变：当参数靠近临界时，平稳密度在大振幅回转区域的占据概率迅速上升。因此， $\hat{p}_{\infty}(x, y)$ 提供了一种定量刻画 Canard 爆炸随机化效应的手段：不仅能观察轨道几何结构，还能比较不同参数/噪声强度下“大回转事件”的发生概率与占据时间。

3 模型与快慢分解

考虑二维快慢系统（ $\varepsilon = \delta \in (0, 1)$ 很小）：

$$\varepsilon \dot{x} = y - f(x), \quad \dot{y} = a - x, \quad f(x) = \frac{x^3}{3} - x. \quad (3.1)$$

3.1 快时间与层系统（layer problem）

引入快时间 $\tau = t/\varepsilon$ ，记 $\frac{d}{d\tau}(\cdot) = (\cdot)'$ ，则

$$x' = y - f(x), \quad y' = 0. \quad (3.2)$$

因此在快时间尺度上 y 可视为参数； x 很快被吸引/排斥到快子系统的平衡点集合。

3.2 临界流形（critical manifold）与稳定性

层系统平衡点满足 $y = f(x)$ ，得到临界流形

$$C_0 = \{(x, y) : y = f(x)\}. \quad (3.3)$$

线性化： $\partial_x(y - f(x)) = -f'(x) = -(x^2 - 1)$ 。因此

$$|x| > 1 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \partial_x(y - f(x)) < 0 \text{（吸引支）}, \quad |x| < 1 \Rightarrow \partial_x(y - f(x)) > 0 \text{（排斥支）}.$$

折点 (saddle-node/ fold) 由 $f'(x) = 0$ 给出:

$$x = \pm 1, \quad y = f(\pm 1) = \mp \frac{2}{3}. \quad (3.4)$$

4 慢系统 (reduced problem) 与 Fenichel 慢流形

4.1 慢极限 ($\varepsilon \rightarrow 0$) 上的约化方程

在慢时间 t 下, 令 $\varepsilon = 0$, 得到代数约束 $y = f(x)$, 并且

$$\dot{y} = f'(x)\dot{x}.$$

由 $\dot{y} = a - x$ 得到约化慢方程 (在 \mathcal{C}_0 上):

$$\dot{x} = \frac{a - x}{f'(x)} = \frac{a - x}{x^2 - 1}, \quad y = f(x). \quad (4.1)$$

注意在折点 $x = \pm 1$ 处分母为 0, 意味着慢流在折点处“失效”, 轨道会发生快跳。

4.2 Fenichel 理论给出的 $\mathcal{C}_\varepsilon^{a/r}$

当 $\varepsilon > 0$ 足够小, 远离折点的吸引支与排斥支会分别扰动为

$$\mathcal{C}_\varepsilon^a, \mathcal{C}_\varepsilon^r,$$

并保持与 \mathcal{C}_0 同胚 (光滑) 且具有指数吸引/排斥性质 (这就是 Canard 理论的几何骨架)。(Sowers 用一般三次型 f 将 \mathcal{C}_0 分成稳定支 S_L, S_R 与不稳定支 U : 稳定与不稳定的划分思想与此一致。)

5 确定性动力学: 平衡点、松弛振荡、鸭解 (regular duck / headless duck)

5.1 平衡点与线性稳定性

由 (3.1) 得平衡点

$$x^* = a, \quad y^* = f(a) = \frac{a^3}{3} - a.$$

Jacobi 矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon}(1 - a^2) & \frac{1}{\varepsilon} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{tr}(J) = \frac{1 - a^2}{\varepsilon}, \quad \det(J) = \frac{1}{\varepsilon} > 0.$$

故当 $|a| > 1$ 时 $\text{tr}(J) < 0$, 平衡点稳定; 当 $|a| < 1$ 时平衡点不稳定。特别地, $a = \pm 1$ 是临界 (“Hopf 型临界”) 位置, 并且在本快慢问题中它恰好与折点重合 ($a = 1$ 对应 $(1, -2/3)$, $a = -1$ 对应 $(-1, 2/3)$), 这正是 Canard 爆炸发生的典型几何情形。

5.2 为什么会出现松弛振荡 (relaxation oscillation)?

当 $|a| < 1$ 时, 平衡点落在排斥区 (因为 $|x^*| = |a| < 1$), 轨道不能收敛到平衡点。在 $\varepsilon \ll 1$ 时, 典型轨道呈现“两段慢爬 + 两次快跳”的结构:

- 在吸引慢流形 C_ε^a 上按 (4.1) 慢慢移动;
- 接近折点 $x = 1$ (或 $x = -1$) 时, 吸引慢流形终止, 轨道在快时间尺度上沿层系统 (3.2) 快速跳到另一条吸引支附近;
- 重复上述过程形成闭合周期轨道 (松弛振荡)。

奇异极限下的“跳跃落点”可以显式写出。例如到达右折点 $(1, -2/3)$ 时, y 近似保持 $y = -2/3$ 不变, 快方程把 x 拉到 $y = f(x)$ 的稳定根。解 $f(x) = -2/3$:

$$\frac{x^3}{3} - x = -\frac{2}{3} \iff x^3 - 3x + 2 = 0 \iff (x-1)^2(x+2) = 0.$$

因此从 $x = 1$ 会快跳到另一稳定根 $x = -2$ (而不是停留在重根 $x = 1$)。同理, 在左折点 $(-1, 2/3)$ 处解 $f(x) = 2/3$:

$$x^3 - 3x - 2 = 0 \iff (x+1)^2(x-2) = 0,$$

故从 $x = -1$ 会快跳到 $x = 2$ 。

周期的慢段可由积分近似。在右吸引支上 x 从 2 慢走到 1; 在左吸引支上 x 从 -2 慢走到 -1 。由 (4.1) 得慢段时间近似

$$T \approx \int_1^2 \frac{x^2 - 1}{x - a} dx + \int_{-2}^{-1} \frac{x^2 - 1}{a - x} dx, \quad (|a| < 1, \varepsilon \ll 1). \quad (5.1)$$

这体现了松弛振荡的“长时间慢漂移 + 短时间快跳”。

5.3 为什么会出现 regular duck 与 headless duck? (Canard 几何机制)

核心几何: 排斥慢流形附近的“指数放大”。当参数 a 接近临界值 (尤其在 $a \approx 1$ 且 $\varepsilon \ll 1$) 时, 轨道可能在排斥慢流形 C_ε^r 附近停留一段时间。在排斥支上, 快方向的线性化增长率约为

$$\dot{\xi} \approx \frac{1}{\varepsilon}(1 - x^2)\xi,$$

而在 $|x| < 1$ 时 $1 - x^2 > 0$, 因此任何微小偏差 ξ 会以 $e^{c/\varepsilon}$ 的量级被放大。这导致一个著名现象: a 只需发生极微小 (常常是指数小窗口) 的变化, 周期轨道的幅值就会从“小振幅”突然跃迁到“松弛大振幅” (Canard explosion)。

regular duck vs headless duck (用“跳回哪条稳定支”区分)。沿排斥支走一段后, 轨道终究会“跑不动”并从排斥区脱离, 回到某条吸引支。如果它回到左吸引支, 就得到 **regular duck**; 若回到右吸引支, 就得到 **headless duck**。Sowers 在一般三次型快慢系统中用图像语言明确指出: 轨道在排斥慢流形 U 上“绕行”后, 最终回到稳定慢流形 S ; 回到 S_L 是 **regular duck**, 回到 S_R 是 **headless duck**。

与参数 a, ε 的关系（定性结论）。

- 当 $|a| > 1$ ：平衡点稳定，轨道通常收敛到平衡点（不振荡）。
- 当 $|a| < 1$ 且远离临界：存在稳定松弛振荡（大振幅）。
- 当 a 位于靠近 1（或 -1 ）的极窄窗口：出现 Canard 轨道；窗口内随 a 变化会出现 headless duck \leftrightarrow regular duck \leftrightarrow relaxation oscillation 的快速切换（Canard 爆炸）。

（可用于写作的具体参数展开） 经典 van der Pol/Canard 理论给出“canard 点”参数 $a = a_c(\varepsilon)$ 的渐近展开（你的代码里使用过）：

$$a_c(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon}{8} - \frac{3\varepsilon^2}{32} - \frac{173\varepsilon^3}{1024} + \cdots,$$

在 a 穿过 $a_c(\varepsilon)$ 的极窄区间时，轨道从 headless 转向 regular，并迅速爆炸到松弛振荡。（该展开的严格推导通常用 blow-up/匹配渐近或正则形化方法完成，见参考文献中的 Krupa-Szmolyan 等。）

6 加入噪声后的 Canard：慢变量噪声 \Rightarrow 随机选择；快变量噪声 \Rightarrow 随机共振

6.1 两种加噪方式

对 (3.1) 常见的两种加性白噪声版本为：

(A) 噪声加在慢变量 (y) 上：

$$dx_t = \frac{1}{\varepsilon}(y_t - f(x_t)) dt, \quad dy_t = (a - x_t) dt + \sigma dW_t. \quad (6.1)$$

(B) 噪声加在快变量 (x) 上：

$$dx_t = \frac{1}{\varepsilon}(y_t - f(x_t)) dt + \frac{\sigma}{\varepsilon} dW_t, \quad dy_t = (a - x_t) dt. \quad (6.2)$$

Sowers 明确说明：本文主要研究噪声进入慢变量时导致“regular vs headless”的随机选择；而把噪声放进快变量会出现随机共振等不同现象，并引用相关工作。

6.2 慢变量噪声为什么会导致“随机选择”？

6.2.1 机制 1：排斥慢流形上的指数放大把噪声“放大成选择”

在 canard 瓶颈区域，轨道必须贴着排斥慢流形 C_ε^r 走一段。设与排斥慢流形的快向偏差为 ξ ，其主导项满足（见上一节）

$$\dot{\xi} \approx \frac{\lambda(t)}{\varepsilon} \xi, \quad \lambda(t) > 0.$$

因此任何由噪声引入的、哪怕极微小的随机偏差，在时间推进中都会被放大为 $O(1)$ 的差异，从而决定轨道最终回到哪条吸引支 (S_L 或 S_R)，即决定 **regular duck** 或 **headless duck**。这就是“随机选择”的本质：确定性系统中由参数决定的极其敏感的分界，被噪声模糊成概率分界。

6.2.2 机制 2: Sowers 的极限定理——分界量的符号趋于高斯分布

Sowers 构造了刻画“靠近慢流形时偏离量”的量 $D_\varepsilon(\cdot)$ ，并在合适缩放下证明它的极限分布含有高斯项，因而轨道以某个概率趋向 $+\infty$ 或 $-\infty$ ，对应“落到左支/右支”的随机选择概率（高斯分布函数 Φ 给出）。例如在其结论之一中，极限概率写成 $\int_{-\infty}^m e^{-z^2/2} dz$ 的形式。这正是“随机选择 (random decision/selection)”的严格概率论版本：在 **canard** 分界附近，轨道去 **regular** 或 **headless** 不再由参数单独决定，而是由噪声驱动的随机变量决定。

6.2.3 机制 3: 折点附近的局部正则形 (Berglund–Gentz 的样本路径推导)

Berglund–Gentz 在 van der Pol 型系统中研究了慢变量加噪：

$$dx_t = \frac{1}{\varepsilon} \left(y_t + x_t - \frac{x_t^3}{3} \right) dt, \quad dy_t = -x_t dt + \sigma dW_t. \quad (6.3)$$

它的关键动力学发生在折点（鞍结分岔点）附近。以右折点 $(x_c, y_c) = (1, -2/3)$ 为例，作局部变换（其符号选择使正则形更标准）：

$$(\tilde{x}_t, \tilde{y}_t) = (x_t - x_c, -(y_t - y_c)).$$

在折点邻域可化为正则形的小扰动：

$$d\tilde{x}_t = \frac{1}{\varepsilon} (-\tilde{y}_t - \tilde{x}_t^2) dt, \quad d\tilde{y}_t = dt + \sigma dW_t. \quad (6.4)$$

“贴慢流形的绝热解”与偏差方程。确定性情形 $\sigma = 0$ 存在绝热解 $\bar{x}(\tilde{y}, \varepsilon)$ 追踪慢流形 $x^*(y) = |y|^{1/2}$ ，并且当 $\tilde{y} \lesssim -\varepsilon^{2/3}$ 时偏离量随 $|\tilde{y}|$ 变化具有可控估计。定义噪声诱导偏差

$$\xi_t = \tilde{x}_t - \bar{x}(\tilde{y}_t, \varepsilon),$$

则其满足（含漂移、非线性项与有效噪声强度）：

$$d\xi_t = \frac{1}{\varepsilon} \left(a(\tilde{y}_t)\xi_t - \xi_t^2 - \frac{1}{2}\sigma^2\varepsilon \partial_{yy}\bar{x}(\tilde{y}_t, \varepsilon) \right) dt + \sigma g(\tilde{y}_t) dW_t, \quad (6.5)$$

其中

$$a(y) = -2\bar{x}(y, \varepsilon), \quad g(y) = -\partial_y \bar{x}(y, \varepsilon). \quad (6.6)$$

并且在 $y \lesssim -\varepsilon^{2/3}$ 时

$$a(y) \sim -|y|^{1/2}, \quad g(y) \sim |y|^{-1/2}.$$

线性近似下的方差增长：解释“为何折点附近噪声影响被放大”。取线性近似

$$d\xi_t^0 = \frac{1}{\varepsilon} a(\tilde{y}_t^{\text{det}})\xi_t^0 dt + \sigma g(\tilde{y}_t^{\text{det}}) dW_t, \quad (6.7)$$

其方差增长满足

$$\text{Var}(\xi_t^0) \sim \frac{\sigma^2 \varepsilon}{|\tilde{y}_t^{\text{det}}|^{3/2}}, \quad \text{典型扩散尺度 } |\xi| \sim \frac{\sigma \varepsilon^{1/2}}{|\tilde{y}|^{3/4}}.$$

这条公式直接告诉你：当轨道慢慢接近折点 ($|\tilde{y}| \rightarrow 0$) 时，即使 σ 固定不大，快方向的随机扩散尺度也会被 $|\tilde{y}|^{-3/4}$ 放大，从而更容易触发“提前/延后跳跃”以及在 canard 分界附近的“落左/落右”的随机选择。

与“regular/headless”的连接（写作建议）。在 canard 窗口内，确定性系统中“落左/落右”对参数 a 极端敏感；而 (6.7) 的扩散放大意味着：在折点/排斥段附近，轨道会获得一个近似高斯的横向随机偏移，随后又被排斥动力学指数放大，最终把“横向偏移的符号/大小”转化成“落到 S_L 或 S_R 的概率”——这正是随机选择的数学机制。

6.3 快变量噪声为什么会导致“随机共振 (stochastic resonance)”？

6.3.1 随机共振的标准定义

随机共振通常指：系统在弱周期信号（或慢调制）作用下，本来难以跨越阈值/势垒发生切换；加入适当强度的噪声后，切换事件与周期信号产生最强同步，导致输出的信号-噪声比或谱峰在某个噪声强度处达到最大。

在快慢系统中，慢变量（或慢流形几何）往往提供一个缓慢变化的“势垒高度/阈值位置”；而当噪声直接作用于快变量时，快变量在短时间内被噪声“踢过”分界（例如跨过不稳定支或在折点前提前跳跃），于是产生与慢调制相关的“近周期切换”。当噪声太小，几乎不切换；噪声太大，切换太随机；中间某个噪声强度使平均切换时间与慢时间尺度（或外加周期）匹配，从而出现“共振”。

6.3.2 用 Kramers 型速率解释“为何存在最优噪声强度”

在许多等效一维阈值/势垒模型中，跨越事件的速率可近似为

$$r(t) \approx C(t) \exp\left(-\frac{\Delta V(t)}{\sigma^2}\right),$$

其中 $\Delta V(t)$ 随慢变量缓慢变化（慢变量相当于对势垒做慢调制）。当慢调制有特征周期 T_{slow} （例如松弛振荡或外部微弱周期输入），随机共振常对应

$$\mathbb{E}[\tau_{\text{switch}}] \approx \frac{T_{\text{slow}}}{2} \iff r(\sigma) \approx \frac{2}{T_{\text{slow}}},$$

从而在某个 σ 处同步最强、谱峰最明显。

6.3.3 与 Canard/van der Pol 几何的直接对应

对 (6.2)，噪声项在 x 方程中被 $1/\varepsilon$ 放大（若仍用加性白噪写法），这意味着快方向的随机扰动会更直接、更强烈地影响“何时离开吸引支、何时跨过不稳定区”，从而把“慢变量的缓慢变化”转化为“随机切换事件的相位锁定”。因此快变量噪声下更典型地观察到随机共振/相干共振等现象，而不是像慢变量噪声那样主要表现为“regular vs headless 的随机选择”。（Sowers 也指出：把噪声放入快变量会导致随机共振等不同现象，并引相关文献。）

7 在快变量和慢变量上分别加噪声

1. 模型层：写出慢变量加噪的 van der Pol SDE (6.3)，并强调“关键发生在折点”。
2. 局部正则形层：给出折点邻域正则形 (6.4)，指出它是鞍结正则形的随机扰动。
3. 样本路径估计层：给出偏差 SDE (6.5)–(6.7) 与方差/扩散尺度结论，用 $|\tilde{y}|^{-3/4}$ 的放大量解释“为什么接近折点时噪声效果突然变强”，再把它与 canard 分界的指数敏感性结合，得到“随机选择”的机制闭环。

参考文献

- [1] R. B. Sowers, *Random Perturbations of Canards*, Journal of Theoretical Probability, 21 (2008), 824–889.
- [2] N. Berglund and B. Gentz, *Noise-Induced Phenomena in Slow-Fast Dynamical Systems: A Sample-Paths Approach*, Springer, 2006.
- [3] E. Benoît, J.-L. Callot, F. Diener, and M. Diener, *Chasse au canard*, Collectanea Mathematica, 32 (1981), 37–119.
- [4] M. Krupa and P. Szmolyan, *Extending Geometric Singular Perturbation Theory to Nonhyperbolic Points—Fold and Canard Points*, (系列论文, 2001–2004 年间多篇; 用于 canard 点展开与严格几何证明).
- [5] L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung, and F. Marchesoni, *Stochastic Resonance*, Reviews of Modern Physics, 70 (1998), 223–287.