1 tau-leaping 原理

考虑搅拌均匀的化学反应系统，包含 n 种反应物种 $\{S_i\}_{i=1}^n$，具有 M 条反应通道。系统状态记为

$$X(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t)) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n,$$

其中 $X_i(t)$ 表示时刻 t 物种 S_i 的分子数。第 j 条反应通道由倾向函数 $a_j(x)$ 与状态改变量（化学计量向量）

$$\nu_j = (\nu_{1j}, \dots, \nu_{nj})^\top$$

描述：对给定状态 $X(t) = x$，在小时间段 $[t, t+dt)$ 内第 j 条反应发生的概率近似为 $a_j(x)\,dt$；当该反应发生时，系统状态变化为 $x \mapsto x + \nu_j$。

系统动力学满足化学主方程（CME）：

$$\frac{d}{dt} P(x, t \,|\, x_0, t_0) = \sum_{j=1}^{M} \Big[a_j(x - \nu_j)\, P(x - \nu_j, t \,|\, x_0, t_0) - a_j(x)\, P(x, t \,|\, x_0, t_0) \Big]. \tag{1.1}$$

除少数简单系统外，直接求解 (1.1) 代价很高，因此常用随机模拟算法（SSA）近似轨道。令

$$a_0(x) = \sum_{j=1}^{M} a_j(x).$$

在状态 x 处，下一个反应发生等待时间 T 服从参数为 $a_0(x)$ 的指数分布，反应通道 j 被触发的概率为 $a_j(x)/a_0(x)$。SSA 通过两个独立的均匀随机数 $r_1, r_2 \sim U(0,1)$ 生成：

$$\tau = \frac{1}{a_0(x)} \ln\Big(\frac{1}{r_1}\Big), \tag{2.13}$$

并选择满足

$$\sum_{j=1}^{\mu-1} a_j(x) \;<\; r_2\, a_0(x) \;\leq\; \sum_{j=1}^{\mu} a_j(x) \tag{2.14}$$

的通道 μ，随后更新

$$X(t+\tau) = X(t) + \nu_\mu.$$

SSA 对每一次反应都逐事件推进，计算量很大。Gillespie 提出 *tau-leaping* 思想：将时间轴划分为连续小区间，在每个区间内倾向函数变化不大，则可放弃反应精确发生时刻，直接从一个区间跳到下一个区间。设 $K_j(\tau, x)$ 表示在固定区间 $[t, t+\tau)$ 内第 j 条反应的真实发生次数。若在该区间内满足 *leap condition*（倾向函数近似常数），则有近似

$$K_j(\tau, X(t)) \;\approx\; \text{Poisson}\big(a_j(X(t))\,\tau\big), \qquad j = 1, \dots, M, \tag{2.15}$$

并可一次性更新状态

$$X(t+\tau) = X(t) + \sum_{j=1}^{M} \nu_j\, K_j(\tau, X(t)). \tag{2.16}$$

常用的一种跳跃条件写为：存在给定阈值 $\varepsilon \in (0,1)$，使得对所有 j，

$$\big| a_j(X(t+\tau)) - a_j(X(t)) \big| \leq \varepsilon\, a_0(X(t)). \tag{2.17}$$

1.1 基于空间离散格式的 tau-leaping 算法

考虑一维随机微分方程

$$dX_t = b(X_t)\,dt + \sigma\,dW_t, \tag{1.2}$$

其生成元为

$$\mathcal{L}f(x) = b(x)f'(x) + \frac{\sigma^2}{2}f''(x).$$

在区间 $\Omega = [x_{\min}, x_{\max}]$ 上取均匀网格 $x_i = x_{\min} + ih$。离散生成元 Q 的基本思想是：构造一个在离散状态空间上跳跃的连续时间马尔可夫链，使其无穷小生成元矩阵 Q 近似 $\mathcal{L}$。

(1) 中心差分生成元 Q_c（两点跳跃）　令 $D = \sigma^2/2$，在节点 x_i 处定义向右、向左跳跃速率

$$q^c_{i,i+1} = \frac{D}{h^2} + \frac{b(x_i)}{2h}, \qquad q^c_{i,i-1} = \frac{D}{h^2} - \frac{b(x_i)}{2h}, \tag{1.3}$$

并令

$$q^c_{i,i} = -(q^c_{i,i+1} + q^c_{i,i-1}).$$

当漂移较大时，(1.3) 可能导致非负性问题（某些速率为负）。

(2) 迎风生成元 Q_u（保证非负性）　典型的迎风构造可写为（按 $b(x_i)$ 符号分段）：

$$\begin{aligned} &\text{若 } b(x_i) \ge 0: \qquad q^u_{i,i+1} = \frac{D}{h^2} + \frac{b(x_i)}{h}, \qquad q^u_{i,i-1} = \frac{D}{h^2}, \\ &\text{若 } b(x_i) < 0: \qquad q^u_{i,i+1} = \frac{D}{h^2}, \qquad q^u_{i,i-1} = \frac{D}{h^2} - \frac{b(x_i)}{h}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

并同样设 $q^u_{i,i} = -(q^u_{i,i+1} + q^u_{i,i-1})$。

(3) 在 Q-跳过程上的 tau-leaping 更新　将离散跳过程理解为“两个反应通道”：向右跳、向左跳。在当前位置 x_i，取时间步长 τ，生成独立泊松随机数

$$K_+ \sim \mathrm{Poisson}(q_{i,i+1}\tau), \qquad K_- \sim \mathrm{Poisson}(q_{i,i-1}\tau),$$

则一次跳跃步更新为

$$i \leftarrow i + K_+ - K_-, \qquad \text{即} \qquad X \leftarrow x_{\,i+K_+-K_-}. \tag{3.2}$$

多维情形对应为 $2d$ 个方向的泊松计数与向量更新（例如二维为四个方向）。

1.2 中点格式的 tau-leaping 算法

为提高精度，可借鉴中点思想：先构造“中点状态”，再在中点处计算速率并采样泊松次数。设当前离散状态为 x（或索引为 i），令速率向量记为 $q(x)$（包含各方向/各通道速率）。记跳跃方向向量为 $\{\nu_j\}$（一维情形 $\nu_+ = +h, \nu_- = -h$）。定义中点预测（用期望漂移近似）：

$$x_{\mathrm{mid}} = x + \frac{\tau}{2}\sum_j \nu_j\, q_j(x), \tag{1.5}$$

然后在 x_{mid} 处计算速率 $q_j(x_{\mathrm{mid}})$ 并生成

$$K_j \sim \mathrm{Poisson}\big(q_j(x_{\mathrm{mid}})\tau\big),$$

最后更新

$$x \leftarrow x + \sum_j \nu_j K_j. \tag{1.6}$$

1.3 带拒绝机制的 tau-leaping 算法

在实际模拟中可能出现泊松跳跃次数过大，使得 leap condition 不满足，或者使粒子跳出计算区域 Ω，从而导致该步无效。因此可引入拒绝机制（rejection-based）：

给定当前状态 x 与步长 τ，先生成

$$K_j \sim \mathrm{Poisson}\big(q_j(x)\tau\big),$$

得到候选更新

$$x^\star = x + \sum_j \nu_j K_j.$$

若发生以下任一情形，则拒绝该步：

- $x^\star \notin \Omega$（越界）；
- leap condition 不满足，例如

$$\big|q_j(x^\star) - q_j(x)\big| \le \varepsilon\, q_0(x) \quad (j = 1, \ldots, \text{通道数}), \qquad q_0(x) = \sum_j q_j(x), \tag{1.7}$$

  不成立（这里 $\varepsilon \in (0,1)$ 为阈值）。

拒绝后令步长缩小（常用 $\tau \leftarrow \tau/2$）并重新采样；若通过检查则接受：

$$x \leftarrow x^\star, \qquad t \leftarrow t + \tau.$$

2 随机Canard慢快系统的平稳密度计算

2.1 模型、参数与Canard爆炸背景

本节将前述基于空间离散生成元 Q 的 *tau-leaping* 方法应用于随机慢快 Canard 系统，用于计算其二维平稳密度并讨论其与 Canard 爆炸现象的联系。考虑如下带加性噪声的慢快系统：

$$\begin{cases} \delta\, dX_t = \big(Y_t - \dfrac{X_t^3}{3} + X_t\big)\, dt + \sigma_x\, dW_t^{(1)}, \\ dY_t = (a - X_t)\, dt + \sigma_y\, dW_t^{(2)}, \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $0 < \delta \ll 1$ 为慢快参数，a 为控制参数，$W_t^{(1)}, W_t^{(2)}$ 为相互独立的标准布朗运动。将其写成标准形式：

$$\begin{aligned} dX_t &= b_x(X_t, Y_t)\,dt + \tilde{\sigma}_x\,dW_t^{(1)}, \qquad b_x(x,y) = \frac{1}{\delta}\Big(y - \frac{x^3}{3} + x\Big), \quad \tilde{\sigma}_x = \frac{\sigma_x}{\delta}, \\ dY_t &= b_y(X_t, Y_t)\,dt + \sigma_y\,dW_t^{(2)}, \qquad b_y(x,y) = a - x. \end{aligned} \tag{2.2}$$

在确定性情形（$\sigma_x = \sigma_y = 0$）下，该系统存在典型的慢流形/临界流形结构。当 a 穿越一个窄参数区间时，轨道振幅会从小振幅迅速过渡到大振幅回转（即 Canard 爆炸）。为使系统处于接近爆炸阈值的区域，本文采用与慢快渐近展开一致的参数选取（示例）：

$$\delta = 0.1, \qquad a = 1 - \frac{\delta}{8} - \frac{3\delta^2}{32} - \frac{173\delta^3}{1024} - \eta, \tag{2.3}$$

其中 $\eta > 0$ 为人为偏移量（用于将系统放置在“接近但略偏离”爆炸临界的区域）。随机扰动加入后，轨道会在吸引/排斥慢流形附近产生随机偏移，并在长时间尺度上呈现稳定的统计占据结构，从而诱导出二维平稳密度 $p_\infty(x,y)$。

2.2 生成元与空间离散：四方向跳跃速率 $q_1, \ldots, q_4$

对足够光滑的测试函数 f，(2.2) 的生成元为

$$\mathcal{L}f = b_x\,\partial_x f + b_y\,\partial_y f + D_x\,\partial_{xx} f + D_y\,\partial_{yy} f, \qquad D_x = \frac{\tilde{\sigma}_x^2}{2} = \frac{\sigma_x^2}{2\delta^2}, \quad D_y = \frac{\sigma_y^2}{2}. \tag{2.4}$$

在矩形区域 $\Omega = [x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}]$ 上取均匀网格步长 h_x, h_y，对 $\mathcal{L}$ 做空间离散得到离散生成元 Q。本文采用“每次向四个相邻方向跳一步”的 CTRW/SSA 结构：

$$(x_i, y_j) \to (x_{i\pm1}, y_j), \qquad (x_i, y_j) \to (x_i, y_{j\pm1}).$$

记四个方向的跳跃速率分别为

$$q_1 = q_x^+, \quad q_2 = q_x^-, \quad q_3 = q_y^+, \quad q_4 = q_y^-.$$

为在漂移占优与扩散占优区域均保持数值鲁棒性，可采用指数拟合（exponential fitting）形式的速率构造（示例写法）：

$$\begin{aligned} q_x^\pm(x,y) &= \frac{D_x}{h_x^2}\exp\Big(\pm\frac{h_x\,b_x(x,y)}{2D_x}\Big) = \frac{D_x}{h_x^2}\exp\Big(\pm\frac{h_x\,b_x(x,y)}{\tilde{\sigma}_x^2}\Big), \\ q_y^\pm(x,y) &= \frac{D_y}{h_y^2}\exp\Big(\pm\frac{h_y\,b_y(x,y)}{2D_y}\Big) = \frac{D_y}{h_y^2}\exp\Big(\pm\frac{h_y\,b_y(x,y)}{\sigma_y^2}\Big). \end{aligned} \tag{2.5}$$

于是 Q 过程可解释为连续时间马尔可夫跳过程，其总速率为

$$\lambda(x,y) = q_1 + q_2 + q_3 + q_4.$$

边界处理： 若跳跃会越出 Ω，可采用反射边界（将越界跳跃映射回边界点）或直接置零相应越界通道速率。为避免边界截断影响平稳密度，Ω 需足够覆盖轨道的主要占据区域。

2.3 *tau-leaping*在随机Canard中的实现要点

在 SSA 中逐事件推进会非常耗时。本节直接使用前文已给出的 *tau-leaping* 主算法（保持不变），在本算例中需要强调以下实现要点：

(1) 步长 τ 的自适应控制 由于 b_x 含有 $1/\delta$ 因子，慢快结构导致在某些区域局部速率变化显著。因此采用简单的上界控制原则（示例）：

$$\tau(x,y)=\min\Big\{\tau_{\max},\ \frac{\Lambda}{\max\{q_1,q_2,q_3,q_4\}}\Big\}, \tag{2.6}$$

其中 $\Lambda\in(0,1)$ 控制单步内期望跳跃次数上限，$\tau_{\max}$ 给出最大步长。当进入快区（速率变大）时 τ 自动缩小，以满足 leap condition 的要求。

(2) 拒绝机制与越界控制 一次 *tau-leaping* 可能产生较大泊松计数导致越界或 leap condition 失效。可使用前文的拒绝机制：若出现越界或 $\max_j K_j$ 超过阈值，则拒绝该步并令 $\tau\leftarrow\tau/2$ 重试。

(3) 平稳密度统计：burn-in 与占据时间加权 设总模拟时间为 T，丢弃前 T_{burn} 段作为 burn-in，在 $[T_{\mathrm{burn}},T]$ 上统计直方图。对连续时间跳过程，更推荐以“停留时间”加权：每一步推进 $t\leftarrow t+\tau$ 时，将 τ 累加到当前箱体的占据时间上，最后归一化得到 $\hat{p}_\infty(x,y)$。

2.4 数值设置与结果展示

本节给出一组可复现实验设置（你可按实际计算替换具体数值）：

- 参数：$\delta=0.1$，a 由 (2.3) 给出（例如取 $\eta=0.01$），噪声强度 σ_x,σ_y 取 $10^{-2}\sim10^{-1}$ 量级；
- 区域与网格：$\Omega=[x_{\min},x_{\max}]\times[y_{\min},y_{\max}]$，网格步长 $h_x=h_y=h$；
- *tau-leaping*：τ 由 (2.6) 自适应选取，启用拒绝机制；
- 统计：总时长 T，burn-in 为 T_{burn}，箱体数 $N_x\times N_y$。

(1) 平稳密度的几何形状与慢快结构 数值平稳密度 $\hat{p}_\infty(x,y)$ 往往沿慢流形附近呈现“带状集中”，并在靠近转折区域出现明显的概率聚集。当 a 位于 Canard 爆炸临界附近时，随机扰动会使轨道在“小振幅振荡区域”与“大振幅回转区域”之间产生随机切换，从密度角度通常表现为：

- 在相图中出现两类高概率区域（或一条高概率通道）；
- 当 σ 增大时，密度从尖锐集中逐渐变得更弥散；
- 当 η 逐渐减小（更接近临界）时，密度沿大回转方向的尾部显著增强，体现“爆炸”概率增加。

(2) 与时间离散方法的对比（可选，用于投稿时强调优势） 为突出本文方法在长时间统计上的优势，可增加一组对照：使用 Euler–Maruyama（或 tamed/truncated EM）在相同总物理时间 T 下统计密度，并报告：

$$\text{CPU 时间}, \qquad \|\hat{p}_{\mathrm{TL}} - \hat{p}_{\mathrm{ref}}\|_{L^1}, \qquad \|\hat{p}_{\mathrm{EM}} - \hat{p}_{\mathrm{ref}}\|_{L^1},$$

其中 $\hat{p}_{\mathrm{ref}}$ 可由更细网格/更小步长或更长时间 SSA 得到。在慢快 Canard 系统中，通常可观察到：*tau-leaping* 在保持可接受密度误差的同时显著减少事件推进次数，尤其在需要极长时间采样以稳定直方图时更为明显。

图 2.1 随机Canard系统的样本轨道与平稳密度示意图（左：相平面轨道；右：二维平稳密度热力图）。图由程序生成。

2.5 小结：平稳密度与Canard爆炸的联系

从统计角度看，Canard 爆炸可理解为在极窄参数区间内，系统对轨道振幅的“选择”发生突变。加入噪声后，这种突变被随机化为“概率分配”的快速改变：当参数靠近临界时，平稳密度在大振幅回转区域的占据概率迅速上升。因此，$\hat{p}_\infty(x,y)$ 提供了一种定量刻画 Canard 爆炸随机化效应的手段：不仅能观察轨道几何结构，还能比较不同参数/噪声强度下“大回转事件”的发生概率与占据时间。

3 模型与快慢分解

考虑二维快慢系统（$\varepsilon = \delta \in (0,1)$ 很小）：

$$\varepsilon \dot{x} = y - f(x), \qquad \dot{y} = a - x, \qquad f(x) = \frac{x^3}{3} - x. \tag{3.1}$$

3.1 快时间与层系统（layer problem）

引入快时间 $\tau = t/\varepsilon$，记 $\frac{d}{d\tau}(\cdot) = (\cdot)'$，则

$$x' = y - f(x), \qquad y' = 0. \tag{3.2}$$

因此在快时间尺度上 y 可视为参数；x 很快被吸引/排斥到快子系统的平衡点集合。

3.2 临界流形（critical manifold）与稳定性

层系统平衡点满足 $y = f(x)$，得到临界流形

$$\mathcal{C}_0 = \{(x,y) : y = f(x)\}. \tag{3.3}$$

线性化：$\partial_x(y - f(x)) = -f'(x) = -(x^2 - 1)$。因此

$$|x| > 1 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \partial_x(y - f(x)) < 0 \text{（吸引支）}, \qquad |x| < 1 \Rightarrow \partial_x(y - f(x)) > 0 \text{（排斥支）}.$$

折点（saddle–node/ fold）由 $f'(x)=0$ 给出：

$$x=\pm 1, \qquad y=f(\pm 1)=\mp\frac{2}{3}. \tag{3.4}$$

4 慢系统（reduced problem）与 Fenichel 慢流形

4.1 慢极限（$\varepsilon \to 0$）上的约化方程

在慢时间 t 下，令 $\varepsilon=0$，得到代数约束 $y=f(x)$，并且

$$\dot{y}=f'(x)\dot{x}.$$

由 $\dot{y}=a-x$ 得到约化慢方程（在 $\mathcal{C}_0$ 上）：

$$\dot{x}=\frac{a-x}{f'(x)}=\frac{a-x}{x^2-1}, \qquad y=f(x). \tag{4.1}$$

注意在折点 $x=\pm 1$ 处分母为 0，意味着慢流在折点处“失效”，轨道会发生快跳。

4.2 Fenichel 理论给出的 $\mathcal{C}_\varepsilon^{a/r}$

当 $\varepsilon>0$ 足够小，远离折点的吸引支与排斥支会分别扰动为

$$\mathcal{C}_\varepsilon^a,\ \mathcal{C}_\varepsilon^r,$$

并保持与 $\mathcal{C}_0$ 同胚（光滑）且具有指数吸引/排斥性质（这就是 Canard 理论的几何骨架）。（Sowers 用一般三次型 f 将 $\mathcal{C}_0$ 分成稳定支 S_L, S_R 与不稳定支 U：稳定与不稳定的划分思想与此一致。）

5 确定性动力学：平衡点、松弛振荡、鸭解（regular duck / headless duck）

5.1 平衡点与线性稳定性

由 (3.1) 得平衡点

$$x^*=a, \qquad y^*=f(a)=\frac{a^3}{3}-a.$$

Jacobi 矩阵为

$$J=\begin{pmatrix}\frac{1}{\varepsilon}(1-a^2) & \frac{1}{\varepsilon}\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \quad \mathrm{tr}(J)=\frac{1-a^2}{\varepsilon}, \quad \det(J)=\frac{1}{\varepsilon}>0.$$

故当 $|a|>1$ 时 $\mathrm{tr}(J)<0$，平衡点稳定；当 $|a|<1$ 时平衡点不稳定。特别地，$a=\pm 1$ 是临界（“Hopf 型临界”）位置，并且在本快慢问题中它恰好与折点重合（$a=1$ 对应 $(1,-2/3)$，$a=-1$ 对应 $(-1,2/3)$），这正是 Canard 爆炸发生的典型几何情形。

5.2 为什么会出现松弛振荡（relaxation oscillation）？

当 $|a| < 1$ 时，平衡点落在排斥区（因为 $|x^*| = |a| < 1$），轨道不能收敛到平衡点。在 $\varepsilon \ll 1$ 时，典型轨道呈现“两段慢爬 + 两次快跳”的结构：

- 在吸引慢流形 $\mathcal{C}_\varepsilon^a$ 上按 (4.1) 慢慢移动；
- 接近折点 $x = 1$（或 $x = -1$）时，吸引慢流形终止，轨道在快时间尺度上沿层系统 (3.2) 快速跳到另一条吸引支附近；
- 重复上述过程形成闭合周期轨道（松弛振荡）。

奇异极限下的“跳跃落点”可以显式写出。 例如到达右折点 $(1, -2/3)$ 时，y 近似保持 $y = -2/3$ 不变，快方程把 x 拉到 $y = f(x)$ 的稳定根。解 $f(x) = -2/3$：

$$\frac{x^3}{3} - x = -\frac{2}{3} \iff x^3 - 3x + 2 = 0 \iff (x-1)^2(x+2) = 0.$$

因此从 $x = 1$ 会快跳到另一稳定根 $x = -2$（而不是停留在重根 $x = 1$）。同理，在左折点 $(-1, 2/3)$ 处解 $f(x) = 2/3$：

$$x^3 - 3x - 2 = 0 \iff (x+1)^2(x-2) = 0,$$

故从 $x = -1$ 会快跳到 $x = 2$。

周期的慢段可由积分近似。 在右吸引支上 x 从 2 慢走到 1；在左吸引支上 x 从 -2 慢走到 -1。由 (4.1) 得慢段时间近似

$$T \approx \int_1^2 \frac{x^2-1}{x-a}\,dx \;+\; \int_{-2}^{-1} \frac{x^2-1}{a-x}\,dx, \qquad (|a|<1,\ \varepsilon \ll 1). \tag{5.1}$$

这体现了松弛振荡的“长时间慢漂移 + 短时间快跳”。

5.3 为什么会出现 regular duck 与 headless duck？（Canard 几何机制）

核心几何：排斥慢流形附近的“指数放大”。 当参数 a 接近临界值（尤其在 $a \approx 1$ 且 $\varepsilon \ll 1$）时，轨道可能在排斥慢流形 $\mathcal{C}_\varepsilon^r$ 附近停留一段时间。在排斥支上，快方向的线性化增长率约为

$$\dot{\xi} \approx \frac{1}{\varepsilon}(1 - x^2)\,\xi,$$

而在 $|x| < 1$ 时 $1 - x^2 > 0$，因此任何微小偏差 ξ 会以 $e^{c/\varepsilon}$ 的量级被放大。这导致一个著名现象：a 只需发生极微小（常常是指数小窗口）的变化，周期轨道的幅值就会从“小振幅”突然跃迁到“松弛大振幅”（Canard explosion）。

regular duck vs headless duck（用“跳回哪条稳定支”区分）。 沿排斥支走一段后，轨道终究会“跑不动”并从排斥区脱离，回到某条吸引支。如果它回到左吸引支，就得到 **regular duck**；若回到右吸引支，就得到 **headless duck**。 Sowers 在一般三次型快慢系统中用图像语言明确指出：轨道在排斥慢流形 U 上“绕行”后，最终回到稳定慢流形 S；回到 S_L 是 regular duck，回到 S_R 是 headless duck。

与参数 a, ε 的关系（定性结论）。

- 当 $|a| > 1$：平衡点稳定，轨道通常收敛到平衡点（不振荡）。
- 当 $|a| < 1$ 且远离临界：存在稳定松弛振荡（大振幅）。
- 当 a 位于靠近 1（或 -1）的极窄窗口：出现 Canard 轨道；窗口内随 a 变化会出现 headless duck ↔ regular duck ↔ relaxation oscillation 的快速切换（Canard 爆炸）。

（可用于写作的具体参数展开） 经典 van der Pol/Canard 理论给出“canard 点”参数 $a = a_c(\varepsilon)$ 的渐近展开（你的代码里使用过）：

$$a_c(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon}{8} - \frac{3\varepsilon^2}{32} - \frac{173\varepsilon^3}{1024} + \cdots,$$

在 a 穿过 $a_c(\varepsilon)$ 的极窄区间时，轨道从 headless 转向 regular，并迅速爆炸到松弛振荡。（该展开的严格推导通常用 blow-up/匹配渐近或正则形化方法完成，见参考文献中的 Krupa–Szmolyan 等。）

6 加入噪声后的 Canard：慢变量噪声 ⇒ 随机选择；快变量噪声 ⇒ 随机共振

6.1 两种加噪方式

对 (3.1) 常见的两种加性白噪声版本为：

(A) 噪声加在慢变量（y）上：

$$dx_t = \frac{1}{\varepsilon}\big(y_t - f(x_t)\big)\,dt, \qquad dy_t = (a - x_t)\,dt + \sigma\,dW_t. \tag{6.1}$$

(B) 噪声加在快变量（x）上：

$$dx_t = \frac{1}{\varepsilon}\big(y_t - f(x_t)\big)\,dt + \frac{\sigma}{\varepsilon}\,dW_t, \qquad dy_t = (a - x_t)\,dt. \tag{6.2}$$

Sowers 明确说明：本文主要研究噪声进入慢变量时导致“regular vs headless”的**随机选择**；而把噪声放进快变量会出现**随机共振**等不同现象，并引用相关工作。

6.2 慢变量噪声为什么会导致“随机选择”？

6.2.1 机制 1：排斥慢流形上的指数放大把噪声“放大成选择”

在 canard 瓶颈区域，轨道必须贴着排斥慢流形 $\mathcal{C}_\varepsilon^r$ 走一段。设与排斥慢流形的快向偏差为 ξ，其主导项满足（见上一节）

$$\dot{\xi} \approx \frac{\lambda(t)}{\varepsilon}\xi, \qquad \lambda(t) > 0.$$

因此任何由噪声引入的、哪怕极微小的随机偏差，在时间推进中都会被放大为 $O(1)$ 的差异，从而决定轨道最终回到哪条吸引支（S_L 或 S_R），即决定 **regular duck** 或 **headless duck**。这就是“随机选择”的本质：**确定性系统中由参数决定的极其敏感的分界，被噪声模糊成概率分界。**

6.2.2 机制 2：Sowers 的极限定理——分界量的符号趋于高斯分布

Sowers 构造了刻画“靠近慢流形时偏离量”的量 $D_\varepsilon(\cdot)$，并在合适缩放下证明它的极限分布含有高斯项，因而轨道以某个概率趋向 $+\infty$ 或 $-\infty$，对应“落到左支/右支”的随机选择概率（高斯分布函数 Φ 给出）。例如在其结论之一中，极限概率写成 $\int_{-\infty}^{m} e^{-z^2/2}dz$ 的形式。这正是“随机选择（random decision/selection）”的严格概率论版本：**在 canard 分界附近，轨道去 regular 或 headless 不再由参数单独决定，而是由噪声驱动的随机变量决定。**

6.2.3 机制 3：折点附近的局部正则形（Berglund–Gentz 的样本路径推导）

Berglund–Gentz 在 van der Pol 型系统中研究了慢变量加噪：

$$dx_t = \frac{1}{\varepsilon}\Big(y_t + x_t - \frac{x_t^3}{3}\Big)dt, \qquad dy_t = -x_t\,dt + \sigma\,dW_t. \tag{6.3}$$

它的关键动力学发生在折点（鞍结分岔点）附近。以右折点 $(x_c, y_c) = (1, -2/3)$ 为例，作局部变换（其符号选择使正则形更标准）：

$$(\tilde{x}_t, \tilde{y}_t) = (x_t - x_c,\ -(y_t - y_c)).$$

在折点邻域可化为正则形的小扰动：

$$d\tilde{x}_t = \frac{1}{\varepsilon}\big(-\tilde{y}_t - \tilde{x}_t^2\big)\,dt, \qquad d\tilde{y}_t = dt + \sigma\,dW_t. \tag{6.4}$$

“贴慢流形的绝热解”与偏差方程。 确定性情形 $\sigma = 0$ 存在绝热解 $\bar{x}(\tilde{y}, \varepsilon)$ 追踪慢流形 $x^*(y) = |y|^{1/2}$，并且当 $\tilde{y} \lesssim -\varepsilon^{2/3}$ 时偏离量随 $|\tilde{y}|$ 变化具有可控估计。定义噪声诱导偏差

$$\xi_t = \tilde{x}_t - \bar{x}(\tilde{y}_t, \varepsilon),$$

则其满足（含漂移、非线性项与有效噪声强度）：

$$d\xi_t = \frac{1}{\varepsilon}\Big(a(\tilde{y}_t)\xi_t - \xi_t^2 - \frac{1}{2}\sigma^2\varepsilon\,\partial_{yy}\bar{x}(\tilde{y}_t, \varepsilon)\Big)\,dt + \sigma\,g(\tilde{y}_t)\,dW_t, \tag{6.5}$$

其中

$$a(y) = -2\bar{x}(y, \varepsilon), \qquad g(y) = -\partial_y \bar{x}(y, \varepsilon). \tag{6.6}$$

并且在 $y \lesssim -\varepsilon^{2/3}$ 时

$$a(y) \sim -|y|^{1/2}, \qquad g(y) \sim |y|^{-1/2}.$$

线性近似下的方差增长：解释“为何折点附近噪声影响被放大”。 取线性近似

$$d\xi_t^0 = \frac{1}{\varepsilon}a(\tilde{y}_t^{\det})\xi_t^0\,dt + \sigma\,g(\tilde{y}_t^{\det})\,dW_t, \tag{6.7}$$

其方差增长满足

$$\mathrm{Var}(\xi_t^0) \sim \frac{\sigma^2\varepsilon}{|\tilde{y}_t^{\det}|^{3/2}}, \qquad \text{典型扩散尺度}\ |\xi| \sim \frac{\sigma\,\varepsilon^{1/2}}{|\tilde{y}|^{3/4}}.$$

这条公式直接告诉你：当轨道慢慢接近折点（$|\tilde{y}| \to 0$）时，即使 σ 固定不大，快方向的随机扩散尺度也会被 $|\tilde{y}|^{-3/4}$ 放大，从而更容易触发“提前/延后跳跃”以及在 canard 分界附近的“落左/落右”的随机选择。

与“regular/headless”的连接（写作建议）。 在 canard 窗口内，确定性系统中“落左/落右”对参数 a 极端敏感；而 (6.7) 的扩散放大意味着：在折点/排斥段附近，轨道会获得一个近似高斯的横向随机偏移，随后又被排斥动力学指数放大，最终把“横向偏移的符号/大小”转化成“落到 S_L 或 S_R 的概率”——这正是随机选择的数学机制。

6.3 快变量噪声为什么会导致“随机共振（stochastic resonance）”？

6.3.1 随机共振的标准定义

随机共振通常指：系统在**弱周期信号**（或慢调制）作用下，本来难以跨越阈值/势垒发生切换；加入**适当强度**的噪声后，切换事件与周期信号产生最强同步，导致输出的信号-噪声比或谱峰在某个噪声强度处达到最大。

在快慢系统中，慢变量（或慢流形几何）往往提供一个缓慢变化的“势垒高度/阈值位置”；而当噪声直接作用于快变量时，快变量在短时间内被噪声“踢过”分界（例如跨过不稳定支或在折点前提前跳跃），于是产生与慢调制相关的“近周期切换”。当噪声太小，几乎不切换；噪声太大，切换太随机；中间某个噪声强度使平均切换时间与慢时间尺度（或外加周期）匹配，从而出现“共振”。

6.3.2 用 Kramers 型速率解释“为何存在最优噪声强度”

在许多等效一维阈值/势垒模型中，跨越事件的速率可近似为

$$r(t) \approx C(t) \exp\Big(-\frac{\Delta V(t)}{\sigma^2}\Big),$$

其中 $\Delta V(t)$ 随慢变量缓慢变化（慢变量相当于对势垒做慢调制）。当慢调制有特征周期 T_{slow}（例如松弛振荡或外部微弱周期输入），随机共振常对应

$$\mathbb{E}[\tau_{\mathrm{switch}}] \approx \frac{T_{\mathrm{slow}}}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad r(\sigma) \approx \frac{2}{T_{\mathrm{slow}}},$$

从而在某个 σ 处同步最强、谱峰最明显。

6.3.3 与 Canard/van der Pol 几何的直接对应

对 (6.2)，噪声项在 x 方程中被 $1/\varepsilon$ 放大（若仍用加性白噪写法），这意味着快方向的随机扰动会更直接、更强烈地影响“何时离开吸引支、何时跨过不稳定区”，从而把“慢变量的缓慢变化”转化为“随机切换事件的相位锁定”。因此快变量噪声下更典型地观察到随机共振/相干共振等现象，而不是像慢变量噪声那样主要表现为“regular vs headless 的随机选择”。（Sowers 也指出：把噪声放入快变量会导致随机共振等不同现象，并引相关文献。）

7 在快变量和慢变量上分别加噪声

1. **模型层**：写出慢变量加噪的 van der Pol SDE (6.3)，并强调“关键发生在折点”。
2. **局部正则形层**：给出折点邻域正则形 (6.4)，指出它是鞍结正则形的随机扰动。
3. **样本路径估计层**：给出偏差 SDE (6.5)–(6.7) 与方差/扩散尺度结论，用 $|\tilde{y}|^{-3/4}$ 的放大量解释“为什么接近折点时噪声效果突然变强”，再把它与 canard 分界的指数敏感性结合，得到“随机选择”的机制闭环。

8 Ring density 模型的 closed-form 平稳密度推导

8.1 模型设定

令随机过程 $Z_t = (X_t, Y_t) \in \mathbb{R}^2$ 满足二维随机微分方程

$$dZ_t = b(Z_t)\,dt + \sigma\,dW_t, \tag{8.1}$$

其中 W_t 是二维标准布朗运动，$\sigma > 0$ 为常数。

Ring density 模型的漂移项采取如下分解形式

$$b(z) = -\nabla V(z) + R(z), \qquad z = (x, y), \tag{8.2}$$

其中势函数取为

$$V(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2, \tag{8.3}$$

而 R 是沿等势线方向的**旋转项**（与 ∇V 正交），典型选择为

$$R(x, y) = (y, -x). \tag{8.4}$$

该 R 满足 $\nabla \cdot R = 0$ 且 $R \cdot \nabla V = 0$，因此只产生“环向流”，不改变平稳密度的闭式表达。

8.2 Fokker–Planck 方程与平稳方程

令 $p(t, z)$ 表示 Z_t 的概率密度，则对应的 Fokker–Planck 方程为

$$\partial_t p(t, z) = -\nabla \cdot \big(b(z)p(t, z)\big) + \frac{\sigma^2}{2}\Delta p(t, z) = -\nabla \cdot \left(b(z)p(t, z) - \frac{\sigma^2}{2}\nabla p(t, z)\right). \tag{8.5}$$

记概率流（probability current）

$$J(t, z) := b(z)p(t, z) - \frac{\sigma^2}{2}\nabla p(t, z). \tag{8.6}$$

平稳密度 $p^*(z)$ 满足 $\partial_t p = 0$，即

$$0 = -\nabla \cdot J^*(z) \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla \cdot \left(b(z)p^*(z) - \frac{\sigma^2}{2}\nabla p^*(z)\right) = 0. \tag{8.7}$$

8.3 梯度系统的闭式平稳密度

先考虑仅含梯度漂移 $b = -\nabla V$ 的情形。若要求平稳时**无概率流**（详细平衡）

$$J^*(z) = -\nabla V(z)\, p^*(z) - \frac{\sigma^2}{2}\nabla p^*(z) \equiv 0, \tag{8.8}$$

则由 (8.8) 得

$$\nabla p^*(z) = -\frac{2}{\sigma^2} p^*(z)\nabla V(z) \quad\Longrightarrow\quad \nabla\big(\log p^*(z)\big) = -\frac{2}{\sigma^2}\nabla V(z).$$

对空间积分可得

$$p^*(x, y) = \frac{1}{K}\exp\left(-\frac{2}{\sigma^2}V(x, y)\right), \tag{8.9}$$

其中 K 为归一化常数，使得 $\int_{\mathbb{R}^2} p^*(x, y)\,dx\,dy = 1$。

8.4 旋转项 R 不改变平稳密度的原因

将一般漂移 $b = -\nabla V + R$ 代入 (8.6)，并取候选密度为 (8.9)。由于对该候选密度有

$$-\nabla V\, p^* - \frac{\sigma^2}{2}\nabla p^* \equiv 0,$$

因此平稳概率流化简为

$$J^*(z) = R(z)\, p^*(z).$$

于是平稳条件 (8.7) 等价于

$$\nabla\cdot(Rp^*) = 0.$$

注意到

$$\nabla\cdot(Rp^*) = (\nabla\cdot R)p^* + R\cdot\nabla p^*, \qquad \nabla p^* = -\frac{2}{\sigma^2}p^*\nabla V,$$

因此

$$\nabla\cdot(Rp^*) = (\nabla\cdot R)p^* - \frac{2}{\sigma^2}p^*(R\cdot\nabla V).$$

若满足

$$\nabla\cdot R = 0, \qquad R\cdot\nabla V = 0, \tag{8.10}$$

则 $\nabla\cdot(Rp^*) = 0$ 成立，说明旋转项 R 仅引入非零环向概率流，不改变平稳密度的形状，因此 (8.9) 仍是 (8.1) 的闭式平稳密度。

对本模型 $V(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2$，

$$\nabla V(x, y) = 4(x^2 + y^2 - 1)(x, y),$$

而 $R(x, y) = (y, -x)$ 满足

$$\nabla\cdot R = \partial_x(y) + \partial_y(-x) = 0, \qquad R\cdot\nabla V = 4(x^2 + y^2 - 1)\big(yx - xy\big) = 0,$$

因此条件 (8.10) 成立。

8.5 归一化常数 K 的显式计算

由 (8.9)，

$$K=\int_{\mathbb{R}^2}\exp\left(-\frac{2}{\sigma^2}(x^2+y^2-1)^2\right)\,dx\,dy.$$

改用极坐标 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$，则 $V=(r^2-1)^2$ 且 $dx\,dy=r\,dr\,d\theta$，

$$\begin{aligned}K&=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{2}{\sigma^2}(r^2-1)^2\right)\,r\,dr\,d\theta\\&=2\pi\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{2}{\sigma^2}(r^2-1)^2\right)\,r\,dr.\end{aligned}\tag{8.11}$$

令变量代换 $t=r^2-1$，则 $dt=2r\,dr$，并且当 $r:0\to\infty$ 时 $t:-1\to\infty$，因此

$$K=2\pi\int_{-1}^{\infty}\exp\left(-\frac{2}{\sigma^2}t^2\right)\frac{1}{2}\,dt=\pi\int_{-1}^{\infty}\exp\left(-\frac{2}{\sigma^2}t^2\right)\,dt.\tag{8.12}$$

8.6 最终 closed-form 平稳密度

综上，Ring density 模型 (8.1)–(8.4) 的平稳密度为

$$p^*(x,y)=\frac{1}{K}\exp\left(-\frac{2}{\sigma^2}(x^2+y^2-1)^2\right),\tag{8.13}$$

其中归一化常数 K 由 (8.12) 给出，即

$$K=\pi\int_{-1}^{\infty}\exp\left(-\frac{2}{\sigma^2}t^2\right)\,dt.$$

9 退化噪声情形下 Ring density 平稳密度是否仍有闭式解？

总体结论是：**一般情况下不再有简单的闭式密度解**。当扩散（噪声）是**退化的**（扩散矩阵不满秩）时，经典的 Ring-density “Gibbs 型”闭式形式

$$p^*(x,y)\propto\exp\left(-\frac{2}{\sigma^2}V(x,y)\right),\qquad V(x,y)=(x^2+y^2-1)^2$$

不再自动成立；并且很多时候甚至不存在相对于 $\mathbb{R}^2$ 上 Lebesgue 测度的 **光滑概率密度**（可能只存在奇异不变测度）。

9.1 1. 退化扩散下的平稳 Fokker–Planck 方程

考虑二维 SDE

$$dZ_t=b(Z_t)\,dt+G\,dW_t,\qquad Z_t\in\mathbb{R}^2,\tag{9.1}$$

其中 $G\in\mathbb{R}^{2\times m}$ 的秩 $\operatorname{rank}(G)<2$，这表示噪声只作用在某些方向上。令

$$a:=GG^{\mathsf{T}},$$

则 a 是**秩亏**（rank-deficient）的扩散矩阵。

若平稳密度 $\rho(z)$（作为函数）存在，则它应满足退化椭圆型的平稳 Fokker–Planck 方程

$$0 = -\nabla \cdot \big(b(z)\rho(z)\big) + \frac{1}{2}\nabla \cdot \big(a\nabla\rho(z)\big). \tag{9.2}$$

当 a **满秩**（一致椭圆）时，梯度漂移往往导出 Gibbs 型闭式平稳密度；但当 a **退化**时，上式变为**退化椭圆**方程，经典 Gibbs 推导通常会失效，除非漂移与扩散满足额外的结构兼容条件。

9.2 2. 什么时候仍可能保持 Gibbs 型闭式形式？

设我们希望平稳分布具有形式

$$\rho(z) = Z^{-1}e^{-U(z)}.$$

一个非常常用且足够的条件是：漂移可以写成

$$b(z) = -\frac{1}{2}a\nabla U(z) \ + \ c(z), \qquad \text{并且} \quad \nabla \cdot \big(c(z)\rho(z)\big) = 0. \tag{9.3}$$

这里

- $-\frac{1}{2}a\nabla U$ 是与扩散矩阵 a 相匹配的**可逆（耗散）部分**；
- c 是**不可逆（环流）部分**：它可以产生非零概率流，但仍保持 ρ 不变。

为什么退化会破坏 Ring density 的闭式结果？ 在非退化 Ring 模型中，我们使用

$$b(z) = -\nabla V(z) + R(z),$$

其中 R 常取为沿等势线的旋转场（例如 $(y, -x)$），并满足 $\nabla \cdot R = 0$ 与 $R \cdot \nabla V = 0$，从而不改变平稳密度。

但若扩散退化，则要保持 Gibbs 型形式，必须能把 $-\nabla V$ 写成 $-\frac{1}{2}a\nabla U$ 的形式。由于退化矩阵 a 的像空间 $\mathrm{Range}(a)$ 是低维的，$-\frac{1}{2}a\nabla U$ 的方向**只能落在** $\mathrm{Range}(a)$ 中；而一般的 $-\nabla V$ 在二维空间里通常同时包含两个方向的分量。因此，除非 V 或 a 具有非常特殊的结构，否则这种匹配**无法成立**，从而原先的闭式平稳密度通常**不再正确**。

9.3 3. 两类重要的“特殊情况下仍可写出闭式表达”的情形

9.3.1 (A) 存在不变测度，但它是奇异的（例如集中在一条环上）

如果噪声只沿**切向**作用，而**径向**动力学是确定性的并把轨道吸引到 $r = 1$，则长期极限的不变对象可能是集中在单位圆上的测度，例如

$$\mu^*(dr\,d\theta) = \delta(r-1)\,\frac{d\theta}{2\pi}.$$

这在某种意义上也算“闭式解”，但它**不是** $\mathbb{R}^2$ 上的密度函数：它对 Lebesgue 测度**不绝对连续**（是奇异测度）。

9.3.2 (B) 次椭圆/低秩但可平滑（hypoelliptic）的结构模型可能仍有显式 Gibbs 定律

一个经典例子是**欠阻尼 Langevin 动力学**（噪声只加在动量变量上，因此扩散退化），但其不变分布仍是 Gibbs 型：

$$\rho(q,p) \propto \exp\left(-\beta\left(V(q)+\frac{1}{2}|p|^2\right)\right).$$

原因在于该系统的漂移与扩散被**专门设计**成满足 (9.3) 的结构，从而 Gibbs 不变测度可以严格成立。

需要注意：你在二维 Ring density 中若仅对 x（或仅对 y）加噪声，通常**并不自动**落入这种“仍保持 Gibbs 闭式密度”的结构类别。

9.4 4. “只在一个变量上加噪声”时通常会发生什么？

如果噪声只作用于 x（或只作用于 y），一般可以期待：

- 仍可能存在**唯一**的不变测度；
- 在满足 Hörmander 条件等情形下，测度可能仍有**光滑密度**（退化但可平滑）；
- 但通常**很难得到简单显式的闭式公式**，往往需要数值方式求解，例如：
  - 直接数值求解退化的平稳 Fokker–Planck 方程 (9.2)；
  - 长时间模拟 + 遍历平均/直方图估计平稳密度；
  - 生成元离散（如 CTRW/SSA 的空间离散）后求解离散平稳方程 $Q^{\mathsf{T}}\nu = 0$。

9.5 5. 小结

- **一般结论**：退化噪声下，Ring density 模型通常**不能**直接沿用 $p^* \propto e^{-2V/\sigma^2}$ 这样的闭式平稳密度。
- **例外**：若漂移与退化扩散满足特殊结构（如 (9.3)），或不变对象为奇异测度，则仍可能写出某种意义的“闭式表达”。

参考文献

[1] R. B. Sowers, *Random Perturbations of Canards*, Journal of Theoretical Probability, 21 (2008), 824–889.

[2] N. Berglund and B. Gentz, *Noise-Induced Phenomena in Slow-Fast Dynamical Systems: A Sample-Paths Approach*, Springer, 2006.

[3] E. Benoît, J.-L. Callot, F. Diener, and M. Diener, *Chasse au canard*, Collectanea Mathematica, 32 (1981), 37–119.

[4] M. Krupa and P. Szmolyan, *Extending Geometric Singular Perturbation Theory to Nonhyperbolic Points—Fold and Canard Points*, (系列论文，2001–2004 年间多篇；用于 canard 点展开与严格几何证明).

[5] L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung, and F. Marchesoni, *Stochastic Resonance*, Reviews of Modern Physics, 70 (1998), 223–287.