

# 基于时间离散和空间离散的两类随机微分方程数值格式比较

华光辉

东北师范大学 数学与统计学院

2025年12月

# 报告提纲

- 1 引言
- 2 预备知识
- 3 固定空间距离跨越时间的比较
- 4 随机 Canard 快-慢系统的动力学行为分析
- 5 综合比较与结论

# 研究背景与问题动机

- 随机微分方程 (SDE)

$$dX_t = \mu(X_t) dt + \sigma(X_t) dW_t, \quad X_0 = x_0,$$

在金融、物理、生物、化学、神经科学等众多领域中刻画含噪动力学行为。

- 实际模型中漂移  $\mu$ 、扩散  $\sigma$  往往仅满足局部 Lipschitz 条件，甚至具有超线性增长，经典 Euler-Maruyama 格式可能发散。
- 数值模拟 SDE 的两大途径：
  - 时间离散：基于时间步长  $\Delta t$  的改进 Euler-Maruyama 类方法；
  - 空间离散：基于生成元的连续时间随机游走 (CTRW) 方法。
- 问题：在给定的 SDE 模型下，**时间离散**与**空间离散**哪一种更适合刻画长时间行为、逃逸概率和平均首达时间？

# 时间离散与空间离散：两类典型方法

## ● 时间离散方法

- Euler-Maruyama 方法：1/2 阶强收敛、1 阶弱收敛，在全局 Lipschitz 情形下表现良好；
- Tamed Euler、truncated Euler-Maruyama 等改进方法：通过驯服或截断漂移/扩散，恢复非全局 Lipschitz 情形下的强收敛性。

## ● 空间离散方法

- Bou-Rabee & Vanden-Eijnden 提出的 CTRW/生成元离散方法；
- 在空间网格上离散无穷小生成元  $L$  得到稀疏矩阵  $Q$ ，再用 SSA 等算法模拟跳跃过程。

## ● 本文聚焦：

- 固定空间距离跨越时间（MFPT） 的比较；
- 随机 Canard 快-慢系统 中逃逸概率和 MFPT 的比较；
- 在误差-代价（work-error） 意义下系统比较两类方法的数值表现。

# 本文研究内容与主要贡献

- 在一维立方振子模型中，引入**漂移主导时间**  $t^e$  作为基准，比较：
  - 空间离散 CTRW 平均驻留时间  $t^u$ ；
  - 驯服/截断 EM 格式下的 MFPT  $t^\delta, t^\Delta$ 。
- **理论贡献**
  - 证明在强漂移极限下， $t^u$  与  $t^e$  的**渐近一致性**以及多项式漂移  $\mu(x) = -ax^{2p+1}$  情形下的**相对误差估计**；
  - 对驯服 Euler 与截断 EM，给出固定空间跨越时间 MFPT 的**渐近展开与误差估计**；
  - 基于生成元理论，对随机 Canard 系统中**逃逸概率和 MFPT** 的空间离散/时间离散收敛性进行分析。
- **数值贡献**
  - 在一维立方振子与随机 Canard 系统上，系统比较两类方法在**路径几何、逃逸概率、MFPT 以及 work-error 曲线**上的表现。

# Itô 扩散与无穷小生成元

- 考虑  $\mathbb{R}^d$  上的 Itô 扩散

$$dX_t = \mu(X_t) dt + \sigma(X_t) dW_t, \quad X_0 = x.$$

- 对  $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ , 无穷小生成元

$$(Lf)(x) = \sum_i \mu_i(x) \partial_i f(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij}(x) \partial_{ij} f(x), \quad a = \sigma \sigma^T.$$

- 对应 Kolmogorov 后向/前向方程刻画:
  - 逃逸概率、committor 函数等弱量;
  - 平稳分布、MFPT 等长期统计量。

# 空间离散：连续时间随机游走 (CTRW)

- 在空间网格  $\{x_i\}$  上离散生成元  $L$ ，得到  $Q$ -矩阵

$$(Qf)_i = \sum_j q_{ij} f(x_j), \quad q_{ij} \geq 0, \quad \sum_{j \neq i} q_{ij} = -q_{ii}.$$

- 得到在有限状态空间上的  $Q$ -过程  $X_t$ :
  - 状态  $x_i$  的跳出速率  $\lambda_i = -q_{ii}$ ;
  - 驻留时间服从  $\text{Exp}(\lambda_i)$ ，然后按  $q_{ij}/\lambda_i$  跳转。
- 定理（已有）：  $Q$ -过程的无穷小生成元**

$$(\mathcal{A}f)(i) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{E}^i[f(X_t)] - f(i)}{t} = \sum_j q_{ij} f(j).$$

因此  $Q$  正是  $X_t$  的无穷小生成元。

# 时间离散：驯服/截断 Euler–Maruyama 格式

- **驯服 Euler–Maruyama** (tamed EM):

$$X_{k+1} = X_k + \frac{\mu(X_k)}{1 + \delta|\mu(X_k)|} \delta + \sigma(X_k) \Delta W_k.$$

- **截断 Euler–Maruyama** (truncated EM):
  - 在球  $B(0, h(\Delta))$  内截断漂移/扩散, 使其有界且满足全局 Lipschitz;
  - 对截断后的系数应用标准 EM。
- 在 Khasminskii 型条件下, 两者都能在非全局 Lipschitz 情形下达到

$$\left( \mathbb{E} |X_{t_k} - X_k|^p \right)^{1/p} \leq C \Delta^{1/2},$$

即保持 1/2 阶强收敛。



# 本章小结：理论基础

- Itô 扩散的无穷小生成元  $L$  为构造 PDE 与生成元离散提供了统一框架；
- CTRW/ $Q$ -过程将连续状态 SDE 转化为有限状态的马尔可夫跳跃过程；
- 驯服/截断 EM 保证在局部 Lipschitz 且超线性漂移下仍具有  $1/2$  阶强收敛；
- 为后续比较固定空间跨越时间以及随机 Canard 系统的逃逸概率与 MFPT 提供了理论基础。

# 模型与顺漂移设定

- 一维加性噪声 SDE

$$dX_t = \mu(X_t) dt + \sigma dW_t, \quad X_0 = x, \quad |x| \gg 1.$$

- 选取立方振子作为典型模型:

$$\mu(x) = -x^3, \quad \sigma > 0.$$

- 研究从  $x$  向左跨越固定距离  $\delta$  所需时间:

$$L = x - \delta, \quad 0 < \delta \ll x, \quad \mu(x) < 0.$$

- 当漂移方向与目标一致时（顺漂移），跨越时间由漂移主导，可由常微分方程

$$\dot{X}_t = \mu(X_t), \quad X(0) = x$$

给出漂移主导时间  $t^e$ 。

# 漂移主导时间与空间离散平均驻留时间

- 漂移主导时间

$$t^e = \int_{x-\delta}^x \frac{ds}{|\mu(s)|},$$

在  $\delta \ll x$  下展开得到

$$t^e = \frac{\delta}{|\mu(x)|} - \frac{\mu'(x)}{2\mu(x)^2} \delta^2 + \mathcal{O}(\delta^3).$$

- CTRW 中, 状态  $x_i$  的跳出速率

$$\lambda(x_i) \approx \frac{|\mu(x_i)|}{h}, \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}S_i = \frac{1}{\lambda(x_i)} \approx \frac{h}{|\mu(x_i)|}.$$

- **平均驻留时间**  $t^u$  与  $t^e$  的比较是评价空间离散在强漂移极限下时间刻画能力的关键。

# 定理：空间离散平均驻留时间的渐近一致性

## 定理

假设  $|\mu(x)|$  足够大且

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)^2} \sim o\left(\frac{1}{\mu(x)}\right), \quad |x| \rightarrow \infty.$$

则对任意  $h > 0$ ，空间离散平均驻留时间  $t^u$  与漂移主导时间  $t^e$  满足

$$\frac{|t^u - t^e|}{t^e} \sim O\left(\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}\right) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0.$$

- 说明：在强漂移区域，CTRW 平均驻留时间与解析漂移时间同阶，网格步长  $h$  固定时误差随  $|x|$  增大而衰减。

# 定理：多项式漂移下的误差估计

## 定理

假设

$$\mu(x) = -ax^{2p+1}, \quad p \geq 0, a > 0,$$

记漂移主导时间主部  $t^* = \delta/|\mu(x)|$ , 则对任意  $h > 0$ , 有

$$\frac{|t^u - t^*|}{t^*} \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0.$$

- 对立方振子  $\mu(x) = -x^3$ , 空间离散在强漂移区域能高精度再现局部跨越时间的主导标度。

# MFPT 与连续模型的 PDE 表述

- 对一维 SDE 若以区间端点为吸收边界, 平均首达时间  $m(x)$  满足常微分方程

$$\mu(x)m'(x) + \frac{\sigma^2}{2}m''(x) = -1,$$

并配以适当的边界条件 (吸收/反射)。

- 漂移主导时间  $t^e$  可看作该 PDE 解在强漂移极限下的主导项。
- 空间离散/CTRW 对应在网格上求解线性方程

$$Qm = -\mathbf{1},$$

是 MFPT PDE 的有限维近似。

- 驯服/截断 EM Monte Carlo 则通过时间步进模拟路径, 统计首达时间样本得到  $t^\delta, t^\Delta$ 。

# 定理：驯服 Euler 方法的 MFPT 渐近与误差

## 定理 (驯服 Euler 方法的 MFPT 渐近与误差)

设  $\mu \in C^2$  在  $x$  的邻域内单调, 且  $\mu(x) < 0$ ,  $\sigma$  有界。在极限  $x \rightarrow \infty$ ,  $\delta/x \rightarrow 0$ ,  $\Delta \rightarrow 0$  下, 驯服 EM 下从  $x$  向左跨越距离  $\delta$  的 MFPT  $t^\delta$  满足

$$t^\delta = \frac{\delta}{|\mu(x)|} + \delta \Delta + \mathcal{O}(\Delta^2 \delta) + \mathcal{O}(\delta^2 |\mu|^{-2} |\mu'|),$$
$$t^\delta - t^e = \delta \Delta - \frac{\mu'(x)}{2\mu(x)^2} \delta^2 + o(\Delta \delta) + o(\delta^2).$$

以  $t^e$  的主导项  $\delta/|\mu(x)|$  计, 相对误差满足

$$\frac{t^\delta - t^e}{\delta/|\mu(x)|} = \Delta |\mu(x)| + \mathcal{O}\left(\frac{\delta}{x}\right).$$

## 定理：截断 EM 方法的 MFPT 渐近与误差

### 定理 (截断 Euler-Maruyama 方法的 MFPT 渐近与误差)

沿用上面的设定，设截断半径  $h(\Delta)$  使得在  $[x - \delta, x]$  内截断生效 ( $x \gg h(\Delta)$ )。则存在常数  $c > 0$  使得

$$t^\Delta = \frac{\delta}{|\mu(h(\Delta))|} + \mathcal{O}(\delta^2),$$

并且

$$t^\Delta - t^e = \delta \left( \frac{1}{|\mu(h(\Delta))|} - \frac{1}{|\mu(x)|} \right) + \mathcal{O}(\delta^2).$$

对立方振子  $\mu(y) = -y^3$ ，若取常用约束  $\Delta^{1/4} h(\Delta) \leq 1$  并令  $h(\Delta) \asymp \Delta^{-1/4}$ ，则有

$$t^\Delta \asymp \delta \Delta^{1/4}, \quad \frac{t^\Delta}{t^e} \asymp x^3 \Delta^{1/4}.$$



# 固定空间跨越时间：理论比较小结

- 空间离散：在强漂移极限下，平均驻留时间  $t^u$  与漂移主导时间  $t^e$  渐近一致；
- 多项式漂移下， $t^u$  与主部  $t^*$  的相对误差随  $|x|$  增大而衰减；
- 驯服 EM：MFPT  $t^\delta$  的相对误差主要由  $\Delta|\mu(x)|$  控制；
- 截断 EM：误差与截断半径  $h(\Delta)$  强耦合，立方漂移下要求

$$\Delta \lesssim \varepsilon^4 x^{-12}$$

才能保证给定的相对误差；

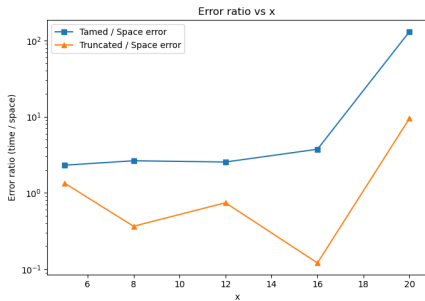
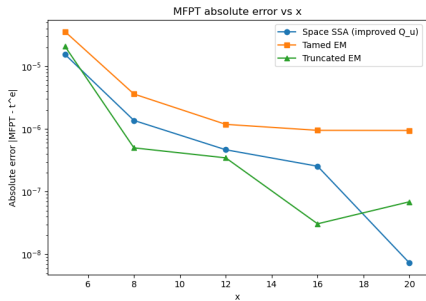
- 为数值实验中的**误差-代价比较**提供了指导。

# 一维立方振子上的数值实验设置

- 模型:  $dX_t = -X_t^3 dt + \sigma dW_t$ , 初值  $X_0 = x \gg 1$ .
- 空间离散:
  - 在一维网格上构造 CTRW/SSA, 步长  $h$ ;
  - 通过生成元  $Q_u$  的平均驻留时间给出  $t^u$ .
- 时间离散:
  - 使用驯服 EM 和截断 EM, 时间步长分别为  $\Delta$ ;
  - 通过 Monte Carlo 估计 MFPT  $t^\delta, t^\Delta$ .
- 误差度量:
  - 绝对误差  $|t^{\text{num}}(x) - t^e(x)|$ ;
  - 相对误差以及时间离散/空间离散误差比值

$$R_{\text{tame}}(x), R_{\text{trunc}}(x).$$

# 图 3.1: 平均时间误差比较



左: 不同方法相对于  $t^e(x \rightarrow L)$  的绝对误差; 右: 时间离散误差与空间离散误差比值  $R_{\text{tame}}(x), R_{\text{trunc}}(x)$ 。

- 随着  $x$  增大, 三种方法的平均首达时间均趋近  $t^e$ , 其中CTRW/SSA 的误差衰减最快。
- 大  $x$  区域下  $R_{\text{tame}}(x), R_{\text{trunc}}(x) \gg 1$ , 表明在固定空间跨越距离下, 空间离散在强漂移极限下具有明显优势。

# 随机 Canard 快-慢系统模型

- 考虑具有典型 Canard 结构的一类二维快-慢系统

$$\begin{cases} dX_t = f(X_t, Y_t) dt + \sigma_x dW_t^1, \\ dY_t = \varepsilon g(X_t, Y_t) dt + \sigma_y dW_t^2, \end{cases}$$

其中  $0 < \varepsilon \ll 1$ 。

- 相空间结构：
  - 存在吸引/排斥慢流形及折叠点；
  - 轨道沿慢流形缓慢演化，在折叠附近发生快跳，形成 Canard 轨道。
- 噪声引入随机性：
  - 快跳时间与位置呈分布；
  - 慢流形附近存在驻留与穿越的统计结构。

# 逃逸概率与 MFPT：连续模型

- 在相空间中选取两个不相交区域  $A, B \subset D$ :
  - $A$ : 左侧稳态 / 代谢态;
  - $B$ : 右侧目标区域 (例如另一代谢态或崩溃态)。
- 逃逸概率 (committor)

$$q(z) = \mathbb{P}^z\{\tau_B < \tau_A\}, \quad z \in D \setminus (A \cup B).$$

满足椭圆型边值问题

$$Lq = 0 \text{ in } D \setminus (A \cup B), \quad q|_A = 0, \quad q|_B = 1.$$

- 平均首次时间 (MFPT)

$$m(z) = \mathbb{E}^z[\tau_{A \cup B}],$$

满足

$$Lm = -1, \quad m|_{A \cup B} = 0.$$

- 这两个量是描述随机 Canard 系统转迁概率与时间尺度的典型弱指标。

# 空间离散下逃逸概率的收敛性

- 在二维网格  $D_h$  上离散生成元  $L$ , 得到 CTRW 生成元  $Q_h$ 。
- 空间离散 committor  $q_h$  满足线性方程

$$Q_h q_h = 0 \text{ on 内点}, \quad q_h|_A = 0, \quad q_h|_B = 1.$$

## 定理 (空间离散下逃逸概率的收敛)

在适当正则性与一致逼近条件下, 存在常数  $C > 0$ , 当  $h > 0$  足够小时, 有

$$\max_{z_i \in D_h} |q_h(z_i) - q(z_i)| \leq Ch^p,$$

其中  $p$  由局部离散逼近阶决定。对改进的  $\tilde{Q}_u$  方案有  $p = 2$ , 逃逸概率达到二阶空间精度。

# 时间离散下逃逸概率的收敛性

- 基于驯服/截断 EM 的 Monte Carlo:
  - 在网格节点上发射大量样本路径;
  - 统计从  $z$  出发首先到达  $B$  的频率, 得到离散逃逸概率  $q_\Delta(z)$ 。
- 在 Khasminskii 型条件下, 路径强收敛

$$\max_{0 \leq k \leq N} \left( \mathbb{E} |X_{t_k} - X_k^\Delta|^p \right)^{1/p} \leq C \Delta^{1/2}$$

可以推广为对 committor 的弱收敛控制:

$$|q_\Delta(z) - q(z)| \lesssim C \Delta^{1/2},$$

即误差阶受限于时间步进的强收敛阶。

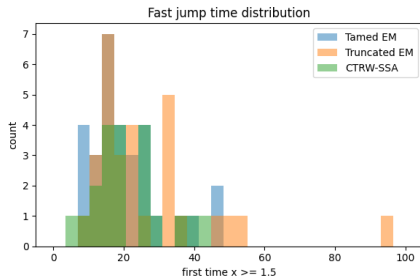
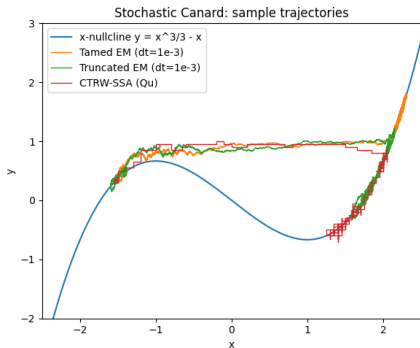
- 这从生成元角度揭示了空间离散在逃逸概率等长期弱量上具有更高阶的空间精度。

# 随机 Canard 系统数值实验设置

- 测试模型：论文中给定的随机 Canard 系统参数组；
- 空间离散：
  - 在相空间矩形区域上构造规则网格；
  - 利用  $\tilde{Q}_u$  生成元构造 CTRW，并用一次线性求解得到  $q_h, m_h$ 。
- 时间离散：
  - 使用驯服 EM 与截断 EM，时间步长  $\Delta$  取若干值；
  - 在所有网格节点上独立发射 Monte Carlo 轨道，估计  $q_\Delta, m_\Delta$ 。
- 工作量 (work)：
  - CTRW：线性方程求解所需的稀疏矩阵操作数；
  - 时间离散：所有路径的总时间步数。



## 图 4.2: 样本路径与快跳时间分布

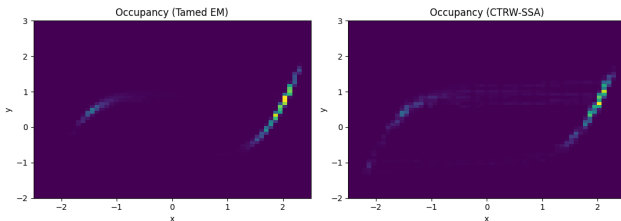


左：三种数值方法在  $T = 40$  内的样本路径；右：对应的快跳时间分布直方图。

- 三种方法均能再现贴靠慢流形、折叠附近快跳的几何结构；
- 快跳时间主要集中在有限区间内，各方法的分布区间相互重叠，峰值略有差异；

在 **路径级强误差** 指标下，时间离散方法在给定代价下更容易获得平滑轨

# 图 4.3: 占据度热图



轨道在相空间中的长期驻留分布：左图为驯服 Euler 方法，右图为 CTRW/SSA。

- 占据度热图刻画轨道在不同区域出现的相对频率；
- 两种方法均在慢流形附近给出较高占据度，但在折叠附近的边界层结构上存在差异；
- CTRW 在长时间统计上更接近由生成元刻画的理论结构。

图 4.4: 逃逸概率与 MFPT 热图 (时间离散 vs 空间离散)

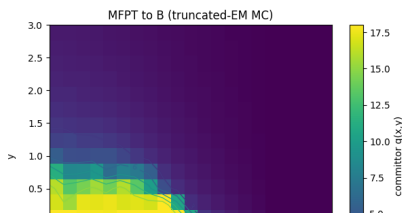
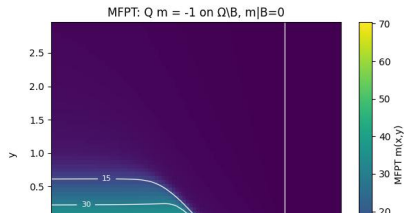
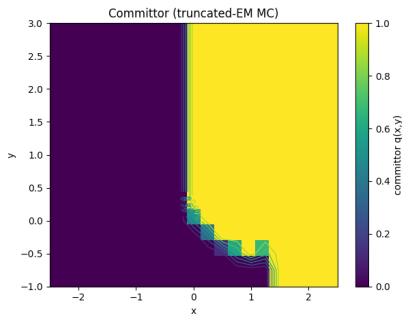
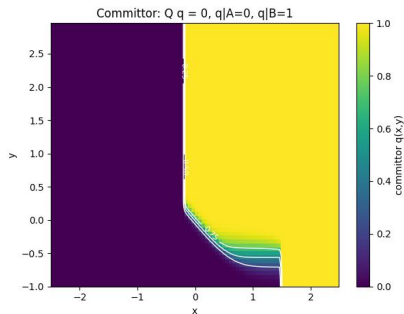
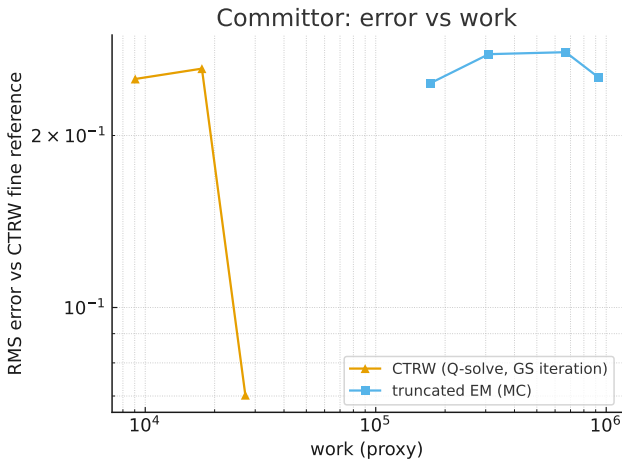


图 4.5: 逃逸概率的 work-error 曲线



截断 EM Monte Carlo 与 CTRW/ $Q_u$  在逃逸概率 RMS 误差下的 work-error 比较。

- 在相同或更小工作量下, CTRW/ $Q_u$  生成元离散通常能提供显著更小的

# 本文提出的主要定理概览

- 固定空间跨越时间方面：
  - 空间离散平均驻留时间  $t^u$  与漂移主导时间  $t^e$  在强漂移极限下渐近一致；
  - 对多项式漂移  $\mu(x) = -ax^{2p+1}$ ，给出  $t^u$  与主部  $t^*$  的相对误差估计；
  - 驯服 Euler 与截断 EM 的 MFPT 渐近展开与步长约束条件。
- 随机 Canard 系统方面：
  - 基于生成元的逃逸概率  $q_h$ 、MFPT  $m_h$  的空间收敛性；
  - 时间离散下 committor 估计的弱收敛阶及其对步长的要求。
- 这些定理为后续 **work-error 数值比较** 提供了理论支撑。

# 时间离散与空间离散方法的特点对比

- **时间离散 (tamed / truncated EM)**

- 优点：实现简单，易于与现有代码库兼容；适合关注单点或少量初值的路径级分析；
- 缺点：步长受限于稳定性与收敛阶；对弱量需要大量 Monte Carlo 以降低方差。

- **空间离散 (CTRW / Q-矩阵)**

- 优点：直接在生成元层面离散，适合求解全场的 committor 和 MFPT；在弱量上可达到更高空间精度；
- 缺点：高维问题中网格数量巨大，需要稀疏线性代数与多重网格等技术支持。

- 本文通过**理论定理** + **数值实验**揭示了两类方法在不同指标下的适用场景。

# 数值实验总体设置

- 测试模型：
  - 一维立方振子：强调强漂移极限下的局部跨越时间；
  - 二维随机 Canard 系统：强调快-慢结构、逃逸概率与 MFPT。
- 指标体系：
  - 路径几何：相图、快跳时间、占据度；
  - 弱量：committor 函数、MFPT；
  - 综合指标：work-error 曲线。
- 所有实验中保持符号与参数选择与论文正文一致，并复用同一组图像文件，便于在答辩中与论文内容一一对应。

# 固定空间距离跨越时间上的比较小结

- 理论上, 空间离散平均驻留时间  $t^u$  与漂移主导时间  $t^e$  在强漂移极限下渐近一致;
- 对多项式漂移  $\mu(x) = -ax^{2p+1}$ ,  $t^u$  相比主部  $t^*$  的相对误差随  $|x|$  增大而消失;
- 驯服/截断 EM 下的 MFPT  $t^\delta, t^\Delta$  存在显式渐近展开, 但相对误差受限于时间步长  $\Delta$  的选取;
- 一维立方振子数值实验表明: 在相同空间跨越距离与相近计算代价下,
  - CTRW/SSA 的平均时间估计更稳定、更精确;
  - 时间离散误差则受限于时间步进与统计方差。



# 随机 Canard 系统上的比较小结

- 在有限时间窗口和路径几何上：
  - 驯服 Euler 与截断 EM 更擅长再现 Canard 轨道的几何细节；
  - CTRW/SSA 也能保持整体几何结构，但局部平滑性略逊。
- 在逃逸概率与 MFPT 等弱/长期指标上：
  - CTRW/Qu 通过一次稀疏线性求解即可获得**全场解**，空间精度高、噪声小；
  - 时间离散方法在给定 work 下误差较大，受限于强收敛阶和 Monte Carlo 方差。
- work-error 曲线表明：
  - 在逃逸概率 RMS 误差固定时，**空间离散往往具有更低的计算代价**；
  - 在路径级强误差指标下，时间离散在同等 work 下优于 CTRW/SSA。

# 本文主要结论

- 针对具有局部 Lipschitz 漂移的 SDE，系统比较了两类数值离散方式：
  - 改进的 Euler–Maruyama 时间离散方法（驯服 EM、截断 EM）；
  - 基于生成元的空间离散 CTRW 方法 ( $Q_u, \tilde{Q}_u$ )。
- 在固定空间跨越时间问题中，证明了：
  - 空间离散平均驻留时间与漂移主导时间的渐近一致性；
  - 驯服/截断 EM 的 MFPT 渐近展开与误差估计。
- 在随机 Canard 系统中，建立了：
  - 空间离散下逃逸概率的高阶空间收敛；
  - 时间离散下逃逸概率的弱收敛控制；
  - 基于 committor/MFPT 的 work–error 比较。

- 将 CTRW/生成元离散方法推广到更高维、带约束或具复杂几何形状的相空间；
- 结合自适应网格与自适应时间步长，提高长时间模拟的整体效率；
- 探索时间离散与空间离散的**混合策略**，例如在关键区域采用高精度空间离散，在其余区域使用时间离散；
- 将 committor/MFPT 分析与**机器学习方法**（如 PINN、深度强化学习）结合，用于复杂随机系统的稀有事件分析。

# 谢谢大家!