

# 基于时间离散和空间离散的两类随机微分方程数值格式比较

## 硕士毕业论文预答辩

华光辉

东北师范大学数学与统计学院

2026年5月

# 目录

- ① 研究背景与意义
- ② 主要研究内容
- ③ 理论基础
- ④ 固定空间距离跨越时间比较
- ⑤ 随机Canard系统分析
- ⑥ 结论与展望
- ⑦ 致谢

# 目录

- ① 研究背景与意义
- ② 主要研究内容
- ③ 理论基础
- ④ 固定空间距离跨越时间比较
- ⑤ 随机Canard系统分析
- ⑥ 结论与展望
- ⑦ 致谢

- 随机微分方程（SDE）在分子动力学、数理金融、生物系统等领域广泛出现
- 对于仅满足局部Lipschitz条件且漂移具有超线性增长的方程，经典Euler-Maruyama格式可能数值发散
- 基于无穷小生成元的空间离散方法（如连续时间随机游走）在稳定性和长期统计性质上往往更可靠
- **核心问题：**时间离散与空间离散哪一种更适合刻画给定SDE的长期行为？

- 在统一框架下比较两类数值格式的精度与计算代价
- 为复杂随机动力系统中选择和设计合适的数值格式提供参考
- 对具有超线性增长和非全局Lipschitz系数的SDE数值方法研究具有理论价值

# 目录

- ① 研究背景与意义
- ② 主要内容
- ③ 理论基础
- ④ 固定空间距离跨越时间比较
- ⑤ 随机Canard系统分析
- ⑥ 结论与展望
- ⑦ 致谢

## ① 模型选取:

- 一维立方振子
- 随机Canard快-慢系统

## ② 数值格式:

- 时间离散: 驯服Euler-Maruyama、截断Euler-Maruyama
- 空间离散: 连续时间游走格式 $Q_u$ 及其改进格式 $\tilde{Q}_u$

## ③ 比较指标:

- 固定空间跨越距离的时间尺度
- 逃逸概率函数 (committor function)
- 平均首达时间 (MFPT)

# 目录

- ① 研究背景与意义
- ② 主要研究内容
- ③ 理论基础
- ④ 固定空间距离跨越时间比较
- ⑤ 随机Canard系统分析
- ⑥ 结论与展望
- ⑦ 致谢

# Itô扩散的无穷小生成元

## 定义 (Itô扩散的无穷小生成元)

考虑 $n$ 维SDE:

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$$

其无穷小生成元为:

$$Lf(x) = \sum_{i=1}^n \mu_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^n M_{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

其中 $M(x) = \frac{1}{2}\sigma(x)\sigma(x)^T$ 。

# 空间离散格式

- Bou-Rabee和Vanden-Eijnden (2018)提出:
  - 有限差分离散化  $Q_u$  格式
  - 有限体积离散化  $Q_c$  格式
- Zu (2023)改进格式:  $\tilde{Q}_u$ , 补偿了额外扩散项

# 改进的时间离散格式

- 驯服Euler-Maruyama格式:

$$X_{k+1} = X_k + \frac{\mu(X_k)\Delta}{1 + \|\mu(X_k)\|\Delta} + \sigma(X_k)\Delta W_k$$

- 截断Euler-Maruyama格式:

$$X_{k+1} = X_k + \mu_{\Delta}(X_k)\Delta + \sigma_{\Delta}(X_k)\Delta W_k$$

其中 $\mu_{\Delta}, \sigma_{\Delta}$ 为截断后的系数。

# 目录

- ① 研究背景与意义
- ② 主要研究内容
- ③ 理论基础
- ④ 固定空间距离跨越时间比较
- ⑤ 随机Canard系统分析
- ⑥ 结论与展望
- ⑦ 致谢

# 一维立方振子模型

- 模型方程:  $dX_t = -X_t^3 dt + \sqrt{2}dW_t$
- 研究目标: 从 $x$ 向左跨越固定距离 $\delta$ 的时间比较
- 比较基准:
  - 精确漂移时间:  $t^e = \int_{x-\delta}^x \frac{ds}{|\mu(s)|}$
  - 空间离散平均驻留时间:  $t^u$
  - 时间离散平均首达时间:  $t^\delta, t^\Delta$

# 主要定理（时间比较）

## 定理 (空间离散平均驻留时间与精确漂移时间的比较)

假设 $|\mu(x)|$ 足够大且 $\frac{\mu'(x)}{\mu(x)^2} \sim o\left(\frac{1}{\mu(x)}\right)$ , 则对于任意 $h > 0$ ,

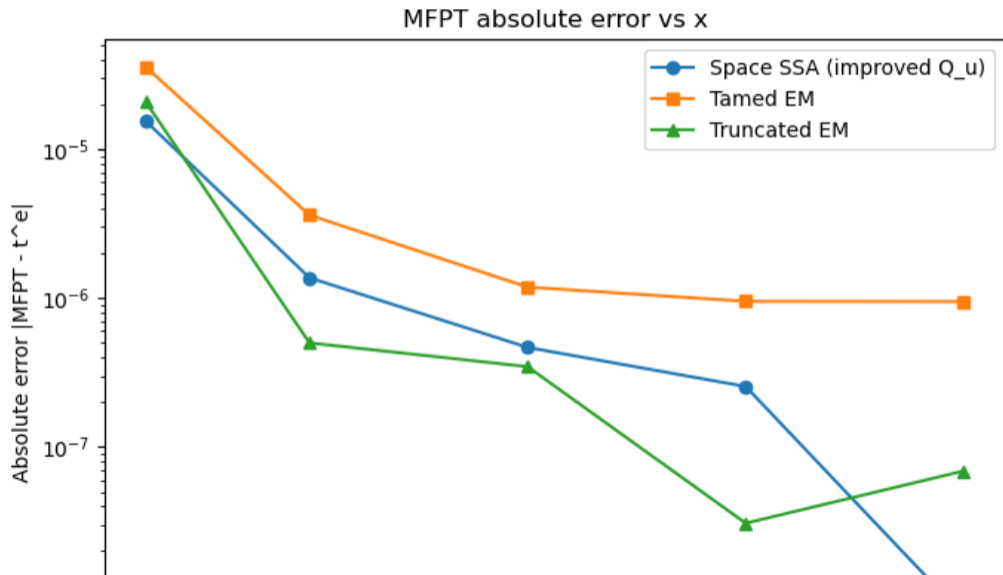
$$\frac{|t^u - t^e|}{t^e} \sim O\left(\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}\right) \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty$$

## 定理 (驯服Euler方法的MFPT渐近)

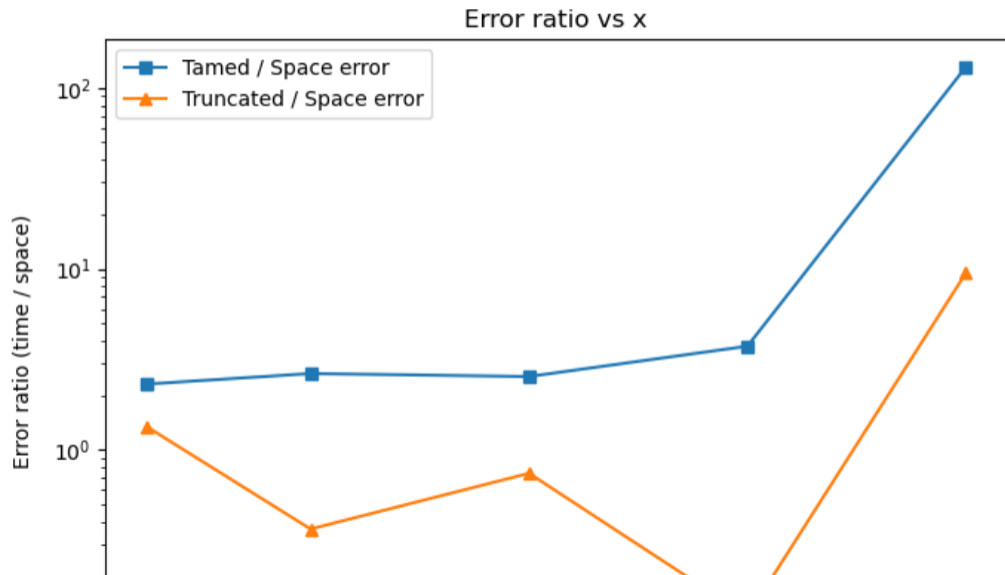
设 $\mu \in C^2$ 且在 $x$ 的邻域内单调并满足 $\mu(x) < 0$ ,  $\sigma$ 有界, 则

$$t^\delta = \frac{\delta}{|\mu(x)|} + \delta\Delta + \mathcal{O}(\Delta^2\delta) + \mathcal{O}(\delta^2|\mu|^{-2}|\mu'|)$$

# 数值实验结果



# 数值实验结果



# 目录

- ① 研究背景与意义
- ② 主要研究内容
- ③ 理论基础
- ④ 固定空间距离跨越时间比较
- ⑤ 随机Canard系统分析
- ⑥ 结论与展望
- ⑦ 致谢

- 模型方程:

$$\begin{aligned}dx_t &= \left( y_t - \left( \frac{x_t^3}{3} - x_t \right) \right) dt + \sigma_x dW_t^{(x)} \\ dy_t &= \varepsilon(a - x_t)dt + \sigma_y dW_t^{(y)}\end{aligned}$$

- 参数:  $\varepsilon = 10^{-2}$ ,  $a = 1.0$ ,  $\sigma_x = 0$ ,  $\sigma_y = 0.08$
- 特征: 具有典型的Canard现象, 在折叠点附近发生快速跃迁

# 逃逸概率函数

## 定义 (逃逸概率)

给定两个互不相交的集合  $A, B \subset D$ , 逃逸概率函数定义为:

$$q(x) := \mathbb{P}_x(\tau_B < \tau_A)$$

满足椭圆边值问题:

$$\begin{cases} Lq(x) = 0, & x \in D \setminus (A \cup B) \\ q(x) = 0, & x \in A \\ q(x) = 1, & x \in B \end{cases}$$

# 空间离散下的收敛性定理

## 定理 (空间离散下逃逸概率的收敛)

在适当正则性假设下, 存在常数  $C > 0$ , 当  $h > 0$  足够小时,

$$\max_{z_i \in D_h} |q_h(z_i) - q(z_i)| \leq Ch^p$$

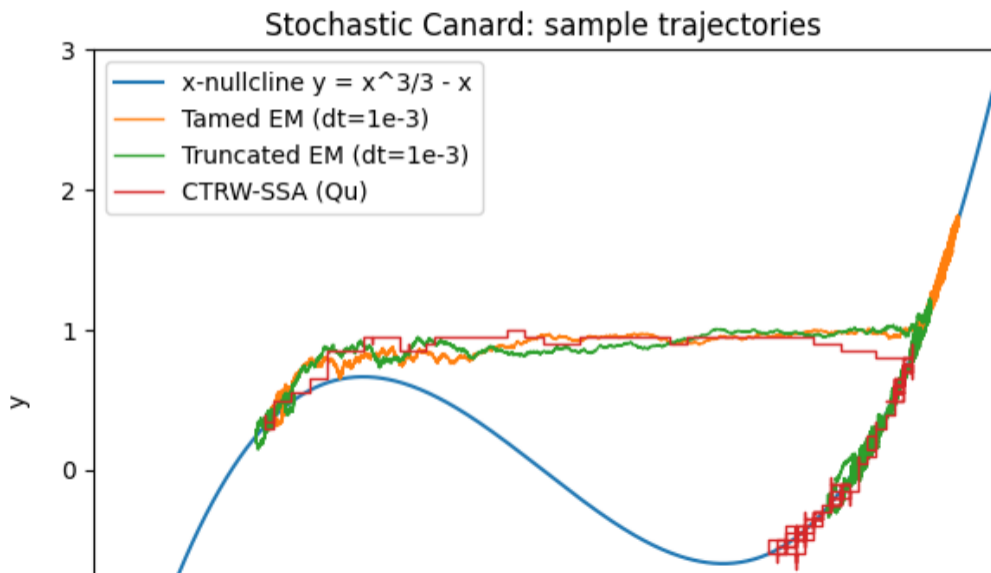
其中  $p$  为逼近阶, 对改进的  $\tilde{Q}_u$  格式有  $p = 2$ 。

## 定理 (时间离散下逃逸概率的收敛)

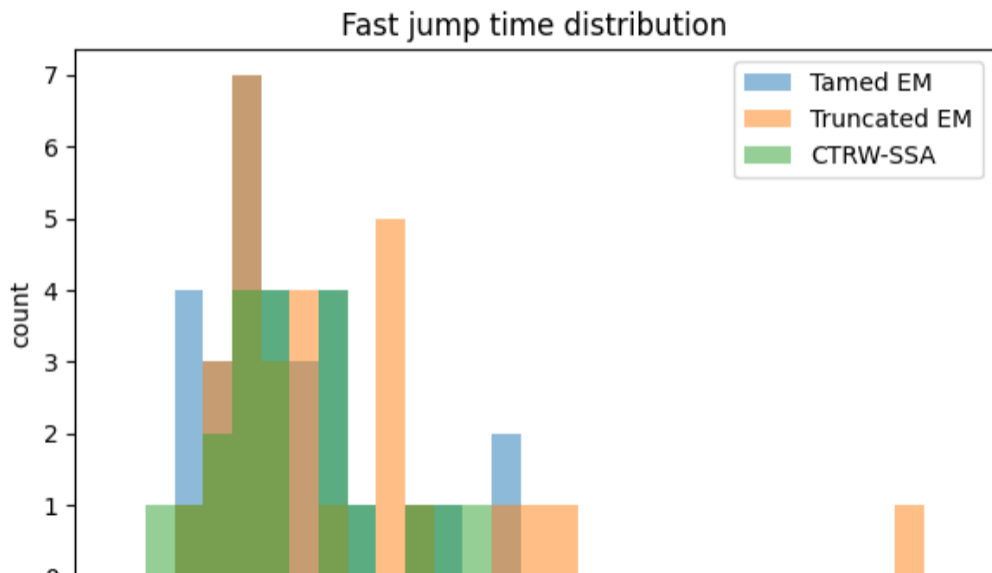
在Khasminskii型条件下，驯服Euler和截断Euler-Maruyama方法近似 $Z_t^\Delta$ 满足强收敛：

$$\mathbb{E} \left( \sup_{0 \leq t \leq T} \|Z_t - Z_t^\Delta\|^q \right) \leq C \Delta^{q\gamma}, \quad \gamma = \frac{1}{2}$$

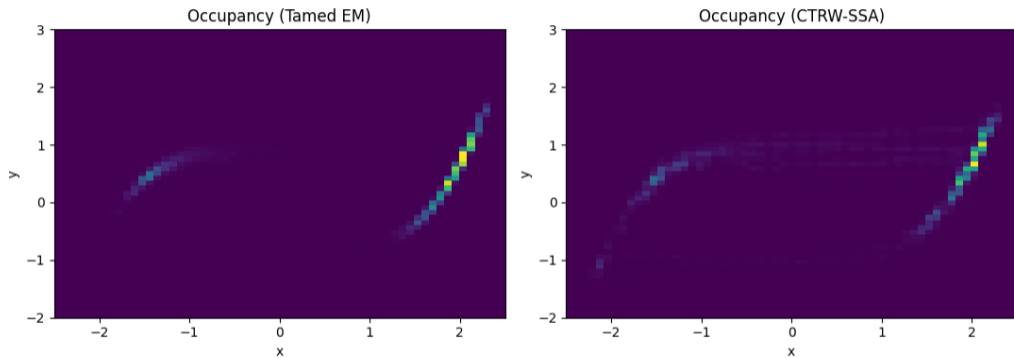
相应地，离散逃逸概率 $q_\Delta$ 收敛到 $q$ ，但误差阶不超过 $O(\Delta^{1/2})$ 。



## 数值实验：快跳时间分布

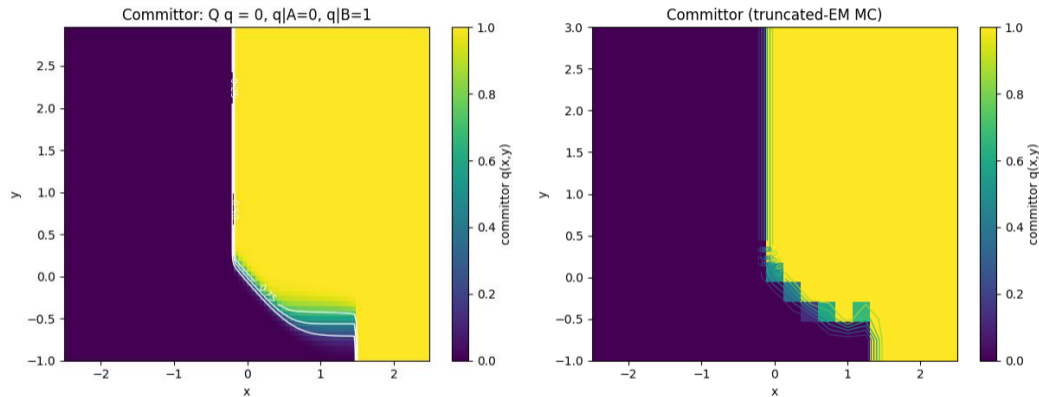


## 数值实验：占据度热图



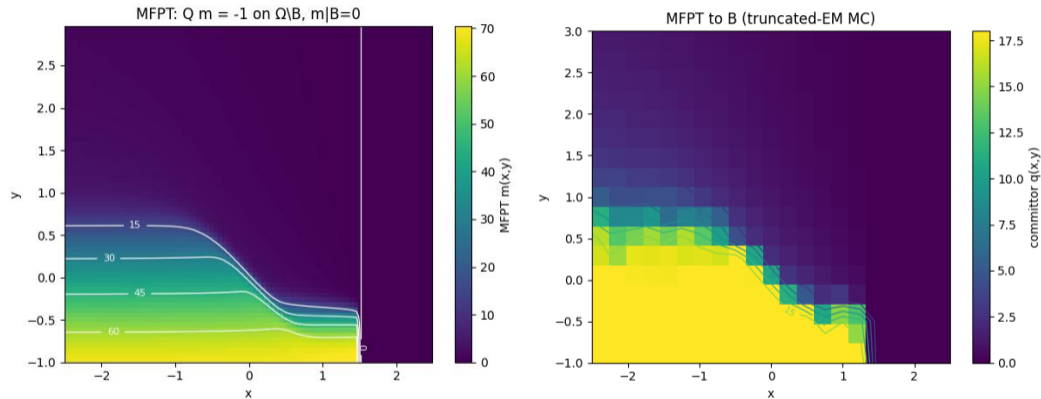
图：长期驻留分布（占据度热图）

# 数值实验：逃逸概率热图

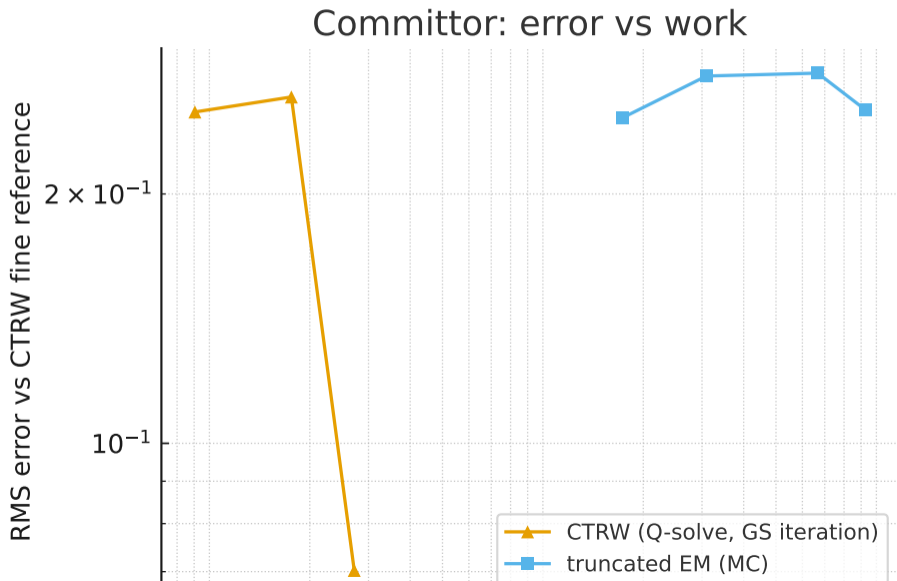


图：逃逸概率热图：左为CTRW/ $Q$ -解，右为截断EM Monte Carlo

# 数值实验：MFPT热图



图：MFPT热图：左为CTRW/Q-解，右为截断EM Monte Carlo



# 目录

- ① 研究背景与意义
- ② 主要研究内容
- ③ 理论基础
- ④ 固定空间距离跨越时间比较
- ⑤ 随机Canard系统分析
- ⑥ 结论与展望
- ⑦ 致谢

# 主要结论

- ❶ **固定空间跨越时间**: 在漂移主导区域, 空间离散方法对局部时间的刻度更精确, 误差随 $x$ 增大快速衰减; 时间离散方法的误差受限于时间步长。
- ❷ **逃逸概率与MFPT**: 对于生成元型弱量, 空间离散方法通过一次线性求解即可获得全场解, 误差阶可达 $O(h^2)$ ; 时间离散方法需要通过Monte Carlo模拟, 误差阶不超过 $O(\Delta^{1/2})$ 。
- ❸ **计算效率**: 在同等精度要求下, 空间离散方法通常具有更低的计算代价, 特别适用于长期统计性质的计算。
- ❹ **适用场景**: 时间离散方法在捕捉单条样本轨道和短时动力学方面更具灵活性; 空间离散方法在长期统计方面更高效。

- 提出了固定空间跨越距离的时间比较框架，统一了时间离散与空间离散的性能评估
- 在一维立方振子和随机Canard系统上，分别从时间尺度和动力学行为两个角度系统比较了两类方法
- 给出了空间离散格式在平均驻留时间、逃逸概率和MFPT上的收敛性理论分析
- 通过数值实验验证了理论分析，并提供了误差-代价的定量比较

- 将理论分析推广到高维、退化扩散或具有复杂边界条件的随机系统
- 设计更高阶的显式或半隐式时间离散算法，保持强收敛与矩有界性
- 研究时间离散与空间离散的自适应混合策略，发挥两类方法的互补优势
- 在更多具有代表性的模型（如多稳态反应网络、高维随机梯度系统等）上验证比较框架

# 目录

- ① 研究背景与意义
- ② 主要研究内容
- ③ 理论基础
- ④ 固定空间距离跨越时间比较
- ⑤ 随机Canard系统分析
- ⑥ 结论与展望
- ⑦ 致谢

- 感谢导师祖建副教授的悉心指导
- 感谢评阅专家和答辩委员会各位老师的宝贵意见
- 感谢东北师范大学数学与统计学院提供的学习和科研环境
- 感谢家人和朋友的支持与鼓励

谢谢!