2023.11.03 第 12 次作业

卢科政　夏业志

2023 年 11 月 8 日

题目 1. (课本 3.25) 一个平面把空间分为两个部分，一个充满了均匀的导电介质，而物理学家在另一个空间里工作。他们在平面上画出一个边长为 a 的正方形的轮廓，并用精细的电极使一电流 I_0 在正方形的两个相邻角，一个流入，一个流出。同时，他们测量另两个角之间的电势差为 V，如图所示。问物理学家们如何用这些数据计算均匀介质的电阻率?

解答. 先考虑流入 I_0 的情况，根据 $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ 得:

$$E(r) = \frac{I_0 \rho}{2\pi r^2}$$

其中的 $\rho = 1/\sigma, j = \frac{I_0}{2\pi r^2}(2\pi r^2$ 是因为只有半个空间可以导电),r 是点距离 B 点的距离
对电场强度进行积分，可以得到电势的函数:

$$U = -\frac{I_0 \rho}{2\pi r}$$

这样可以计算得到 C 点的电势为 $V_c = -\frac{I_0 \rho}{2\pi a}$,D 点的电势为 $V_D = -\frac{I_0 \rho}{2\sqrt{2}\pi a}$,C、D 点的电势差为 $\frac{I_0 \rho(2-\sqrt{2})}{4\pi a}$。以上是只考虑了流入的情况，考虑流出的情况时可以算得 C、D 之间的电势差依然和上面结果相同，则将两个结果相加即可得到:

$$V = \frac{I_0 \rho(2-\sqrt{2})}{2\pi a}$$

则电阻率为:

$$\rho = \frac{(2+\sqrt{2})\pi a V}{I_0}$$

题目 2. (课本 3.29)$3 \times 10^6 \Omega$ 的电阻与 $1\mu F$ 的电容和 $\varepsilon = 4V$ 的电源连接成简单回路, 试求在电路接通后 $1s$ 的时刻, 下列各量的变化率:(1) 电容上电荷增加的速率;(2) 电容器内存储能量的速率;(3) 电阻上产生的热功率;(4) 电源提供的功率.

解答. (1)

根据电路可写出下列方程:

$$\frac{Q}{C} + \frac{dQ}{dt} R = \varepsilon \tag{1}$$

可解得:

$$q = \varepsilon C (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \tag{2}$$

当 $t = 1s$ 时,$q(1) = \varepsilon C(1 - e^{-\frac{1}{3}}$, 电荷增加速率为:

$$\frac{dq}{dt} = q = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = 9.55 \times 10^{-7} C/s \tag{3}$$

(2)

电容器内存储能量的速率为:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{q(1))}{C} \frac{dq}{dt} = 1.08 \times 10^{-6} J/s \tag{4}$$

(3)

电阻上产生的热功率:

$$P = I^2 R = (\frac{dq}{dt})^2 R = 2.74 \times 10^{-6} W \tag{5}$$

(4)

电源提供的功率:

$$P_\varepsilon = \varepsilon \frac{dq}{dt} = 3.82 \times 10^{-6} W \tag{6}$$

题目 3. 一个球形电容器，在区域 $0 \le r \le R_1$ 的球形区域内充满了介电常数为 ϵ_1、电阻率为 σ_1 的均匀介质，在区域 $R_1 \le r \le R_2$ 的球形区域内充满了介电常数为 ϵ_2、电导率为 σ_2 的另一种均匀介质，R_2 外为真空。设 t=0 时，自由电荷的体密度分布为:

$$\rho_e = \begin{cases} \rho_{e0}, & 0 \le r \le R_1, \\ 0, & R_1 \le r \le R_2. \end{cases} \tag{7}$$

且初始时刻 R_1 和 R_2 两球面上的自由面电荷密度 σ_{e1}, σ_{e2} 均为 0，求 σ_{e1} 和 σ_{e2} 随时间 t 的变化。

解答. 由高斯定理、介质方程、欧姆定律和电荷守恒定律，得:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_e \\ \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \vec{j} = \sigma \vec{E} \\ \nabla \cdot \vec{j} + \dfrac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0 \end{cases} \tag{8}$$

解得:

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon} \rho_e = 0$$

解 ρ_e 得到:

$$\rho_e(r, t) = \rho(r, t = 0) e^{-t/\tau} = \rho_{e0} e^{-t/\tau}, \tau = \frac{\epsilon}{\sigma}$$

由于只有 R_1 球内有 ρ_e，故 ρ_e 应为

$$\rho_e = \begin{cases} \rho_{e0} e^{-t/\tau_1}, & 0 \le r < R_1, \\ 0, & R_1 \le r \le R_2. \end{cases} \tag{9}$$

其中 $\tau_1 = \frac{\epsilon_1}{\sigma_1}$ $\vec{R_1}$ 两侧的 $\vec{D}$ 连续，但由于 ϵ 不同，故 $\vec{E}$，从而 $\vec{j}$ 不同，导致 R_1 球面上自由电荷的积累。设从 t 时刻 t+dt 时刻，在 R_1 球面上自由电荷面密度的增量为 $d\sigma_{e1}$，则

$$d\sigma_{e1} \cdot 4\pi R_1^2 = [j_{in}(R_1, t) - j_{out}(R_1, t)] 4\pi R_1^2 dt$$

即:

$$\frac{d\sigma_{e1}}{dt} = j_{in}(R_1, t) - j_{out}(R_1, t)$$

由高斯定理:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \Sigma Q_0$$

得:

$$D(r,t) = \begin{cases} \frac{r}{3}\rho_{e0}e^{-t/\tau_1}, & 0 \le r < R_1, \\ \frac{R_1^3}{3r^2}\rho_{e0}e^{-t/\tau_1} + \frac{R_1^2}{r^2}\sigma_{e1}, & R_1 < r < R_2 \\ \frac{R_1^3}{3r^2}\rho_{e0}, & R_2 < r \end{cases} \tag{10}$$

于是 R_1 球面两侧的场强分别为:

$$\begin{cases} E_{in}(R_1,t) = \frac{1}{\epsilon_1}D_{in}(R_1,t) = \frac{R_1}{3\epsilon_1}\rho_{e0}e^{-t/\tau_1} \\ E_{out}(R_1,t) = \frac{1}{\epsilon_2}D_{out}(R_1,t) = \frac{R_1}{3\epsilon_2}\rho_{e0}e^{-t/\tau_1} + \frac{\sigma_{e1}}{\epsilon_2} \end{cases} \tag{11}$$

根据 $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ 可得:

$$\begin{cases} j_{in}(R_1,t) = \frac{R_1}{3\tau_1}\rho_{e0}e^{-t/\tau_1} \\ j_{out}(R_1,t) = \frac{R_1}{3\tau_2}\rho_{e0}e^{-t/\tau_1} + \frac{\sigma_{e1}}{\tau_2} \end{cases} \tag{12}$$

其中

$$\tau_1 = \frac{\epsilon_1}{\sigma_1}, \tau_2 = \frac{\epsilon_2}{\sigma_2}$$

将 j_{in}, j_{out} 带入上面的微分方程中可得:

$$\frac{d\sigma_{e1}}{dt} + \frac{\sigma_{e1}}{\tau_2} = Ae^{-t/\tau_1}$$

其中

$$A = \frac{R_1\rho_{e0}}{3\tau*}, \frac{1}{\tau*} = \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}$$

利用一阶线性微分方程的通解:

$$\sigma_{e1} = e^{-t/\tau_2}(-\tau * \cdot Ae^{-t/\tau*+C})$$

初始条件为 t=0 时,$\sigma_{e1}(t=0) = 0$, 可得到 $C = \tau * \cdot A$ 带入得:

$$\sigma_{e1} = \frac{1}{3}R_1\rho_{e0}(e^{-t/\tau_2} - e^{-t/\tau_1})$$

在 R_2 球面上自由电荷面密度为

$$\sigma_{e2}(t) = D_{out}(R_2,t) - D_{in}(R_2,t) = \frac{R_1^3}{3R_2^2}\rho_{e0}(1 - e^{-t/\tau_1}) - \frac{R_1^2}{R_2^2}\sigma_{e1}(t)$$

带入得:

$$\sigma_{e2} = \frac{R_1^3}{3R_2^2}\rho_{e0}(1 - e^{-t/\tau_2})$$