

磁部分复习

(O,O)

2024 年 1 月 4 日

1 电流元模型

- 电流元：有共同定向速度的一小团运动电荷。（假象模型）
- 电流方向为正电荷速度的方向。
- 记电荷的电量为 q ，速度为 v ，单位体积的电荷数 n 。

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{nqSvdt}{dt} = nqSv$$

$$\vec{j} = nq\vec{v}$$

2 安培力公式

dl 长度的电流元在磁场 \vec{B} 中受到的安培力为： $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$

体电流元形式： $d\vec{F} = \vec{j} \times \vec{B} dV$

面电流元形式： $d\vec{F} = \vec{i} \times \vec{B} dS$

线电流元形式： $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$

- 要计算整个载流导体所受的安培力，只要选取相应公式进行积分运算就行了

3 安培定律

电流元 1($I_1 d\vec{l}_1$) 对电流元 2($I_2 d\vec{l}_2$) 的作用力为：

$$d\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{21})}{r_{21}^3}$$

\vec{r}_{21} 是由电流元 1 指向电流元 2 的矢量, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{N/A}^2$

- 电流元之间的相互作用力不一定满足牛顿第三定律。但是，实际上不存在孤立的稳恒电流元，它们只是闭合回路的一部分，两闭合回路间的作用力总是大小相等，方向相反。

4 毕奥 - 萨伐尔定律

结合安培定律和安培力定律可以得到电流元 $Id\vec{l}$ 在 \vec{r} 处产生的磁场为:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} Id\vec{l} \times \frac{\vec{r}}{r^3}$$

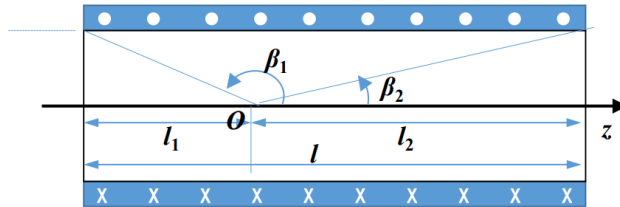
- 圆电流 I 轴线上的磁场:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{\mu}}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I\pi R^2 \vec{e}_z}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

- 密绕螺线管轴线上的磁场:

$$\vec{B} = \frac{n\mu_0 I}{2} (\cos(\beta_2) - \cos(\beta_1))$$

n 为单位长度的匝数, 线管长度为 l , 如下图所示



- 亥姆霍兹线圈
- 原线圈周围磁场:

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 \vec{\mu}}{4\pi r_0^3} + \frac{3\mu_0(\vec{\mu} \cdot \vec{r}_0)}{4\pi r_0^5} \vec{r}_0$$

5 静磁场基本定理

1. 磁感线: 磁场空间中一些有方向的曲线, 规定:

- 其上每点的切线方向与该点的磁感应强度方向一致;
- 过该点垂直于磁感应线的截面的数密度与磁感应强度成正比.

2. 磁通量: 垂直通过 ΔS 的磁感应线的根数, 满足叠加原理。

$$\Delta\Phi_B = \vec{B} \cdot \Delta\vec{S}$$

$$\Phi_B = \int \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

- 磁通量单位为韦伯 ($1Wb = 1T \cdot m^2$)

3. 高斯定理: 通过任意闭合曲面 S 的磁通量等于零, 即:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

- 反映了磁场的无源性, 孤立的磁荷不可能存在, 磁场线闭合。

- 磁场服从叠加原理, 磁场高斯定理对线电流、面电流和体电流产生的磁场均成立。

4. 安培环路定理

磁场的环量 $= \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{L}$

安培环路定理: 沿任何闭合曲线 L 磁感应强度 B 的环流等于穿过 L 的电流强度的代数和的 μ_0 倍:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{L} = \mu_0 \Sigma(I)$$

- I 的正负确定规则: 在设定了 L 绕行方向后, 采用右手定则, 四指沿 L 方向, 则电流方向与大拇指一致时取正, 反之取负。
- 磁场是有旋场

5. 稳恒电流磁场的基本方程式:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{cases}$$

- 稳恒磁场无源有旋。

6 带电粒子的运动

在电场 \vec{E} 和磁场 \vec{B} 中, 带电粒子 q 受到的洛伦兹力表达式为:

$$d\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

- 洛伦兹力不做功

粒子运动方程: $m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B}$

对于仅有磁场的情况下, 在垂直于磁场的平面上, 粒子运动的投影按照圆周运动, 设速度为 v_{\perp}

回旋角频率 $\omega_L = qB/m$ 回旋半径 $R_{\perp} = \frac{mv_{\perp}}{qB}$

- 加入电场后, 运动方程变为 $m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B} + \vec{E}$ 通过解微分方程可以得到运动轨迹, 当电场和磁场相互垂直时情况较为简单, 详见 ppt(第四章 03)

7 磁场对电流的作用

外磁场 B 对线电流系统的作用:

$$\vec{F} = \oint_L I d\vec{l} \times \vec{B} \quad \vec{L} = \oint_L \vec{r} \times (I d\vec{l} \times \vec{B})$$

对于面电流和体电流系统, 将上述公式中的 $I d\vec{l}$ 相应改为 $\vec{j} dS$ 和 $\vec{j} dV$ 即可

- 应用上述公式, 应先求出外磁场 B。
- 有时候, 由外磁场和受作用电流的磁场合成的总磁场 B_t 容易计算。在这种情况下, 应从 B_t 中减去受作用电流的贡献 B_1 才得到外磁场 B, 即 $\vec{B} = \vec{B}_t - \vec{B}_1$

8 磁场中的载流线圈

$$\vec{F} = \int_L I d\vec{l} \times \vec{B}$$
$$\vec{M} = \int_L \vec{r} \times (I d\vec{l} \times \vec{B})$$

- 对于闭合线圈在均匀磁场中:

$$\vec{F} = 0$$

$$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

- 不均匀磁场中的小载流线圈:

$$\vec{F} = (\vec{\mu} \cdot \nabla) \vec{B}$$

$$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B} + \vec{r} \times \vec{F}$$

- 磁偶极子的磁场

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 \vec{\mu}}{4\pi r^3} + \frac{3\mu_0 (\vec{\mu} \cdot \vec{r})}{4\pi r^5} \vec{r}$$

磁偶极子受到的力矩:

$$\vec{M} = I \vec{S} \times \vec{B} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

9 磁场常见模型

1. 速度选择器:

一束带电粒子射入一相互垂直的均匀电场和均匀磁场。若粒子走直线, 便能从小孔中穿出, 它所受到的电力应与磁力平衡, 则: $qE = qvB$ 即只允许特定速率 $v = E/B$ 的粒子穿过 (忽略重力), 与粒子的电荷、质量无关。

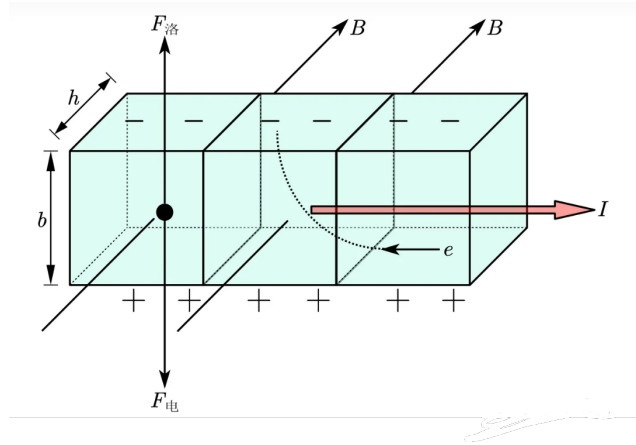
2. 质谱仪:

根据回转半径 $R_{\perp} = \frac{mv_{\perp}}{qB}$, 得到 $\frac{q}{m} = \frac{v_{\perp}}{R_{\perp} B}$, 由测量所得 R 可得带电粒子的荷质比, 并可用来分离同位素, 分析丰度。

3. 回旋加速器:

$$T = \frac{2\pi m}{qB}, R = \frac{vm}{qB}$$
$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{q^2 B^2 R^2}{2m}$$

4. 霍尔效应:



将一载流导体放在磁场中时，由于洛伦兹力的作用，会在与磁场和电流二者垂直的方向上出现横向电势差，这一现象称之为霍尔效应。

若存在电流 I 在金属导体中流动，方向与磁感应强度 B 的方向，导体的高度和宽度分别为 b 和 h 。设导体单位体积内的自由电子数为 n ，电子的电量为 e ，电子的定向移动平均速度为 v 。

电流的微观定义式为：

$$I = nqSv = nehbv$$

由于存在洛伦兹力的作用，自由电子开始横向漂移，向导体的上表面聚集，使上表面带负电荷，下表面带正电荷，上、下表面间形成了电势差 U 。这个电势差会在导体中产生一个匀强电场 E ，这电场对电子产生的作用力 F_E 方向向下，其电场力大小为：

$$F_E = qE = e \frac{U}{b}$$

由于电场力 F_E 与洛伦兹力 F_B 方向相反，且由于自由电子在上表面逐渐聚集，那么上下表面的电势差逐渐增大，最终电场力逐渐增大，导致二力平衡，此时电子的横向漂移运动停止：

$$F_B = qvB = evB$$

$$F_E = F_B \Rightarrow e \frac{U}{b} = evB$$

综合上述表达式：

$$U = \frac{IB}{neh} = R_H \frac{IB}{h}$$

其中 $R_H = 1/(ne)$ 为霍尔系数，由金属的性质决定。

10 磁性的经典解释

根据安培分子电流假说，已磁化物质的磁性来源于物质内部有规则排列的分子电流，即分子磁矩。

- 分子电流：每个分子都有一个等效的小分子环形电流
- 分子磁矩：分子环形电流的磁矩

11 磁化强度

$$\vec{M} = \frac{\sum \vec{\mu}}{\Delta V} = n\vec{\mu}_a \quad (1)$$

其中 $\vec{\mu}_a$ 为分子平均磁矩.

非磁化状态下分子有固有磁矩, 但取向随机, 分子磁矩和为零.

12 磁化电流

取磁介质中任一闭合有向回路 \vec{L} 和以它为周线的有向曲面 \vec{S} (满足右手螺旋定则) 磁化强度的环量: 只有从 S 内穿过并在 S 外闭合的分子电流才对 $\sum I'$ 有贡献.

$$\Delta \sum I' = I_a n S_a \cos \theta dl = n\vec{\mu}_a \cdot d\vec{l} = \vec{M} \cdot d\vec{l} \quad (2)$$

$$\oint \vec{M} \cdot d\vec{l} = \sum I' \quad (3)$$

磁化电流可以表示为:

$$\vec{j}' = \nabla \times \vec{M} \quad (4)$$

对于均匀磁化介质, 介质的表面上存在着面分布的磁化电流; 两种不同介质的交界面上会有面分布的磁化电流. 则磁化面电流密度可以表示为:

$$\vec{j}' = \vec{M} \times \vec{n} \quad (5)$$

13 介质中磁场的定理

介质中的高斯定理:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \Sigma I_0 + \mu_0 \Sigma I'$$

其中 I_0 为传导电流, I' 为磁化电流。

引入磁场强度

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

磁介质中电磁场基本定理:

$$\begin{cases} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \Sigma I_0 \end{cases}$$

线性均匀各向同性磁介质:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

磁介质的性能方程: $\vec{B} = \mu \vec{H}$, $\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$, χ_m 为磁化率, μ 为磁导率。

14 边值关系

- 界面两侧 B 的法向连续: $B_{2n} = B_{1n}$
- 没有传导电流的界面两侧 H 的切向连续: $\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0$

界面电流关系:

- 传导电流: $\vec{i}_0 = \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)$
- 磁化电流: $\vec{i}' = \vec{n} \times (\vec{M}_2 - \vec{M}_1)$
- 总电流: $\vec{i} = \frac{1}{\mu_0} \times (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)$

两类特殊介质问题:

- 介质界面与磁感应线重合: 介质不影响传导电流分布, 磁场强度分布和无介质时一样。
- 介质界面与磁感应线垂直: 在分界面, $B_1 = B_2 = B_n$ 。故在介-介分界面 $M = M_n$, 故 $i' = 0$ 介质-介质分界面上无磁化电流。

15 磁路定理

磁路: 被铁芯约束限定在一定范围内的磁场闭合回路

理想磁路: 也称无漏磁模型, 指所有磁力线都被约束在铁心内 (磁路内), 没有磁场泄露。

磁路	电路
磁动势 $\epsilon_m = NI_0$	电动势 ϵ
磁通量 $\phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{s}$	电流(通量) $I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{s}$
磁通密度 \vec{B}	电流密度 \vec{j}
磁阻 $R_m = l/\mu s$	电阻 $R = \frac{l}{\sigma s}$
磁场强度 H	电场强度 E
磁位降 $U_m = \int \vec{H} \cdot d\vec{l} = \phi R_m$	电位降 $U = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = IR$

磁路的基尔霍夫定律:

- 节点处: $\sum_i \Phi_i = 0$
- 磁场回路中, 磁位差的和等于磁动势的和:

$$\sum_i H_i l_i = \sum_j N_j I_j$$

16 电磁感应基本定律

1. 法拉第电磁感应定律:

$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

- 如果被感应的线圈是 N 匝时, 各圈的感应电动势应叠加, 若第 i 圈的磁通量为 ϕ_i , 则有: $\Phi = \sum_{i=1}^N \phi_i$
- 在回路中产生感应电动势的原因是由于通过回路平面的磁通量的变化, 而不是磁通量本身。
- 通过平面的磁通量为 $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$

2. 楞次定律: 感应电流所产生的磁场通过回路的磁通量总是阻止引起感应电流的那个磁通量的变化。

感应电动势正负的确定方法: 首先要选定回路的绕行方向, 选定绕行方向后, 若计算电动势为正值, 表明电动势的“方向”与回路绕行的方向一致。反之, 则相反。

3. 两种电动势:

- 动生电动势: 导体回路或其一部分在磁场中运动, 动生电动势的产生是导体在磁场中运动时, 导体中的载流子获得了一个沿导体运动方向的定向宏观速度, 受到洛伦兹力作用的结果。回路面积或回路的法线与磁感应强度 B 的夹角随时间变化, 从而使回路中的磁通量发生变化。

在普遍情况下, 一个任意形状的导体线圈 L (不一定闭合) 在任意恒定的磁场中运动或发生形变时, L 中的动生电动势为:

$$\epsilon = \int_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

- 感生电动势: 当置于磁场中的导体回路不动, 而磁场随时间变化时, 也会在导体回路中产生感应电动势, 这种感应电动势称为感生电动势。

涡旋电场假说: 变化的磁场在其周围空间激发一种新的电场, 这种电场是涡旋电场, 或称感应电场。

$$\epsilon = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

变化的磁场在空间激发涡旋电场, 涡旋电场是有旋无源场。

17 互感和自感

1. 当一个线圈中的电流发生变化时, 其在周围空间产生变化的磁场, 磁场中的另一个线圈中会产生感应电动势, 这种现象称为互感现象。

线圈 1 激发磁场在线圈 2 中的磁匝链数: $\Phi_{21} = M_{21} I_1$

线圈 2 激发磁场在线圈 1 中的磁匝链数: $\Phi_{12} = M_{12} I_2$

可以证明: $M_{12} = M_{21} = M$, 简称为互感。

I_j 变化而激发线圈 i 中的感应电动势为:

$$\epsilon_{ij} = -M_{ij} \frac{dI_j}{dt}$$

- 互感系数是由回路自身的几何特性和介质特性决定的;
- M 可正可负, 取决于 I 的方向。

2. 自感现象：线圈中的电流变化会在线圈自身中产生感应电动势的物理现象。

线圈激发磁场在线圈自身中的磁匝链数 $\Phi = LI \Rightarrow L = \Phi/I$

I 变化激发线圈中的感应电动势为：

$$\epsilon = -L \frac{dI}{dt}$$

- 理想螺线管的自感系数： $L = \mu_0 \frac{N^2}{l^2} V = \mu_0 n^2 l S$
- 自感系数由回路自身的几何特性和介质特性决定；
- L 总大于零；L 又称为电磁惯量。

3. 自感系数与互感系数的关系： $M = k\sqrt{L_1 L_2}, k \leq 1$ ，理想耦合时 $k=1$ 。

4. 线圈的串联和并联（具体的推导过程见 ppt（第六章 02））：

- 串联：

$$L = L_1 + L_2 \pm 2M$$

（顺接时取“+”，逆接时取“-”）。

- 并联：

$$L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \pm 2M}$$

（同名端并联时取“-”，异名端并接时取“+”）。

18 暂态过程

非稳恒电路：电流随时间变化的电路。

- 电荷分布、电流分布随时间变化
- 各点的瞬时电场、磁场不是由该时刻的电荷、电流分布决定；
- 电路中的电场是库仑电场叠加感应电场，电压概念不再存在；
- 电流不满足稳恒条件，基尔霍夫定律不成立

似稳电路：电路尺寸比较小，电源的变化传播到电路各处所需要的时间远远小于电源的变化周期。

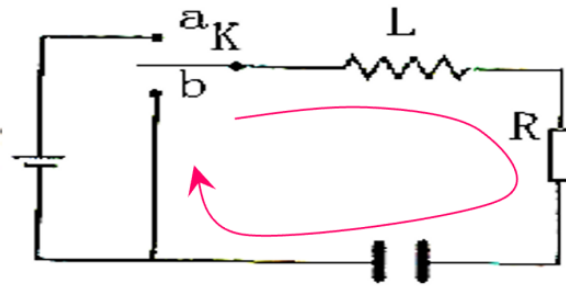
- 电路中的电荷、电流分布随时间变化，但是各点的电场、电流都与电源同步变化
- 电场、磁场近似对应于同一时刻的电荷、电流分布，可视为在该时刻任意时刻的分布稳恒场
- 静电场的环路定理、稳恒条件瞬时成立

似稳条件（似稳判据）：设电路的尺寸为 l ，电源变化的频率为 f ，电场的传播速度为 C ，则似稳条件为

$$\lambda \gg l$$

似稳电路的基本方程（取电流方向为回路方向）：

$$-\epsilon + u_R + u_C + u_L = 0 \Rightarrow \epsilon = IR + \frac{1}{C} \int I dt + L \frac{dI}{dt}$$



RL 电路的暂态过程 (具体过程见 ppt(第六章 03)):

充电过程: $I = I_0(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$

放电过程: $I = I_0e^{-\frac{R}{L}t}$

回路的时间常数: $\tau = L/R$

线圈的自能: $W = \frac{1}{2}LI_0^2$

互感能: $W = MI_1I_2$

n 个线圈的总磁能:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n L_i I_i^2 + \sum_{i,k=1(i,k)}^n M_{ik} I_i I_k$$

19 麦克斯韦方程组

积分形式:

$$\begin{cases} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho_0 dV \\ \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} \end{cases}$$

微分形式:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_0 \\ \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

边值关系:

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_0 \\ \vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \\ \vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \\ \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{i}_0 \end{cases}$$

σ_0 是界面上的自由面电荷密度, i_0 是界面上的传导面电流密度。

20 平面电磁波

从微分形式的麦克斯韦方程和均匀各向同性线性介质的电磁性能方程出发，可以得到自由空间 ($\rho_0 = 0, j_0 = 0$) 中电磁场的运动规律.

1. 波动方程：

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \nabla^2 \vec{E} = 0 \\ \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \nabla^2 \vec{B} = 0 \end{cases}$$

$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ 为常数无限均匀线性各向同性介质中电磁场的波动方程：

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon \mu} \nabla^2 \vec{E} = 0 \\ \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon \mu} \nabla^2 \vec{H} = 0 \end{cases}$$

2. 定态电磁波的解：

设电磁波的激发源以确定的频率 作简谐振动，因而辐射的电磁波也以相同频率作简谐振动。
这种以一定频率作简谐振动的波，常称为定态电磁波或单色波。

$$\begin{cases} \vec{E}(z) = \vec{E}_0 e^{jkz} \\ \vec{H}(z) = \vec{H}_0 e^{jkz} \end{cases}$$

其中波数 $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$

相速度： $v_p = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$

平面波解的一般式：

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \\ \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 e^{-j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \end{cases}$$

\vec{k} 大小为 $\frac{2\pi}{\lambda}$ ，方向为电磁波传播的方向。

3. 平面电磁波的性质讨论 (具体过程见第八章 ppt)：

- E, H 和 K 构成一个右手坐标系
- $K = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$
- $\vec{K} \times \vec{E} = \mu \omega \vec{H}$
- E 和 H 的幅值成比例，E 和 B 比值就是电磁波的相速度

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \epsilon_0}{\mu \epsilon}} c$$

介质折射率 $n = \sqrt{\frac{\mu_0 \epsilon_0}{\mu \epsilon}}$

- 电磁波是横波
- 真空中：

$$c = E/B$$