概率论与数理统计 第二次习题课

2023 年 12 月 18 日

第十一次作业

第七章

10. 设 $X_1, \ldots, X_n$ 是总体 X 的一个简单随机样本, 试求在 X 具有下列概率分布时参数 θ 的极大似然估计.

(3) $p(x;\theta) = (x-1)\theta^2(1-\theta)^{x-2}, \quad x = 2, 3, \ldots; 0 < \theta < 1.$

解: (3) 似然函数: $l(\theta) = \prod_{i=1}^{n}(X_i - 1)\,\theta^2(1-\theta)^{X_i - 2}$.

对数似然函数: $L(\theta) = \ln l(\theta) = \sum_{i=1}^{n}\left[\ln(X_i - 1) + 2\ln\theta + (X_i - 2)\ln(1-\theta)\right]$.

令 $\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta} = 0$, 有 $\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{2}{\theta} - \frac{X_i - 2}{1-\theta}\right] = 0$.

$\therefore\ \frac{2n}{\theta} - \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - 2n}{1-\theta} = 0 \quad \therefore \hat{\theta} = \frac{2}{\bar{X}}, \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

11. 设 $X_1, \ldots, X_n$ 是总体 X 的一个简单随机样本, 试求在 X 具有下列概率密度时参数 θ 的极大似然估计.

(1) $f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{2}{\theta^2}(\theta - x), & 0 < x < \theta \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$

(2) $f(x;\theta) = \begin{cases} (\theta+1)x^{\theta}, & 0 < x < 1, \theta > 0 \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$

解: (1) 似然函数: $l(\theta) = \prod_{i=1}^{n}\frac{2}{\theta^2}(\theta - X_i)\cdot\mathbb{I}_{\{0<X_i<\theta\}} = \prod_{i=1}^{n}\frac{2}{\theta^2}(\theta - X_i)\cdot\mathbb{I}_{\{\theta > X_{(n)}\}}$

对数似然函数: $L(\theta) = \ln l(\theta) = \sum_{i=1}^{n}\left[\ln 2 - 2\ln\theta + \ln(\theta - X_i)\right]\cdot\mathbb{I}_{\left\{\theta > X_{(n)}\right)\}}$.

令 $\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta} = 0$, 有 $\sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{2}{\theta} + \frac{1}{\theta - X_i}\right] = 0$.

设 $\bar{\theta}$ 满足 $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\bar{\theta} - X_i} - \frac{2}{\bar{\theta}}\right) = 0$ 且 $\bar{\theta} \geq X_{(n)}$, 记 Θ 为 $\bar{\theta}$ 构成的集合, 则极大似然估计 $\hat{\theta} = \arg\max_{\bar{\theta}\in\Theta\cup\{X_{(n)}\}} L(\bar{\theta})$.

(2) 似然函数: $l(\theta) = \prod_{i=1}^{n}(\theta+1){X_i}^{\theta}\cdot\mathbb{I}_{\{\theta>0\}}\cdot\mathbb{I}_{\{0<X_i<1\}}$.

对数似然函数: $L(\theta) = \ln l(\theta) = \sum_{i=1}^{n}\left[\ln(\theta+1) + \theta\ln X_i\right]\cdot\mathbb{I}_{\{\theta>0\}}\cdot\mathbb{I}_{\{0<X_i<1\}}\}$.

令 $\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta} = 0$ 有 $\hat{\theta} = -\left(\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i} + 1\right)$. θ 的 MLE 为 $\max\{\hat{\theta}, 0\}$.

注： 在求解极大似然估计的时候要注意参数的取值范围。虽然在本题求解过程中省略了对（对数）似然函数的导数何时大于 0，何时小于 0 的分析，直接求解导数等于 0 的解，但是这个解同时需要满足在其左侧导数大于 0，右侧小于 0 的条件。

15. 设 $X_1,\dots,X_n$ 是抽自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本, 其中 $-\infty<\mu<+\infty,\sigma^2>0$ 为未知参数. 求 $\theta=\mathbb{P}(X\geq 2)$ 的极大似然估计.

解:
$$\theta=P(x\geqslant 2)=1-P(x<2)=1-P\left(\frac{x-\mu}{\sigma}<\frac{2-\mu}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(\frac{2-\mu}{\sigma}\right)$$

μ 的 MLE 为 $\hat{\mu}=\bar{X}$ σ^2 的 MLE 为 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2$，由 MLE 的不变性得: θ 的 MLE 为 $\hat{\theta}=1-\Phi\left(\frac{2-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)$.

17. 设总体 X 的分布函数为

$$F(x;\theta)=\begin{cases}1-e^{-x^2/\theta}, & x\geq 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中 θ 为未知参数且大于零, $X_1,X_2,\dots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机抽样.

(1) 求 $\mathbb{E}X,\mathbb{E}[X^2]$;

(2) 求 θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}$;

(3) 是否存在实数 a, 使得对任何 $\epsilon>0$, 都有 $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(|\hat{\theta}-a|\geq\epsilon)=0$?

解: 由题知 X 的密度函数为 $f(x,\theta)=\frac{2x}{\theta}\cdot e^{-x^2/\theta}\cdot\mathbb{I}_{\{x\geqslant 0\}}$.

(1)

$$\mathbb{E}X=\int_0^{\infty}x\cdot\frac{2x}{\theta}\cdot e^{-x^2/\theta}dx\overset{t=x^2/\theta}{=}\sqrt{\theta}\int_0^{\infty}t^{\frac{1}{2}}e^{-t}dt=\sqrt{\theta}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{\theta\pi}}{2},$$

$$\mathbb{E}X^2=\int_0^{\infty}x^2\cdot\frac{2x}{\theta}e^{-x^2/\theta}dx\overset{t=x^2/\theta}{=}\theta\int_0^{\infty}t\cdot e^{-t}dt=\theta\cdot\Gamma(2)=\theta.$$

(2) $l(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{2Xi}{\theta}e^{-X_i^2/\theta}\cdot\mathbb{I}_{\{X_i\geqslant 0\}}$,
$L(\theta)=\ln l(\theta)=\sum_{i=1}^{n}[\ln 2X_i-\ln\theta-X_i^2/\theta]$.
令 $\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta}=0$ 有 $\quad -\frac{n}{\theta}+(\sum_{i=1}^{n}X_i^2)\,\theta^{-2}=0.\quad\therefore\hat{\theta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n}$

(3) 由大数定律知, $\hat{\theta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n}\xrightarrow{P}\mathbb{E}X^2=\theta(n\to\infty)$.
$\therefore$ 令 $a=\theta$ 得: 对 $\forall\varepsilon>0$ ，有 $\lim_{n\to\infty}P(|\hat{\theta}-a|\geqslant\varepsilon)=0$.

19. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{3x^2}{\theta^3}, & 0<x<\theta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中 $\theta\in(0,+\infty)$ 为未知参数，X_1,X_2,X_3 为总体 X 的简单随机抽样，令 $T=\max(X_1,X_2,X_3)$.

(1) 求 T 的概率密度;

(2) 确定 a, 使得 aT 为 θ 的无偏估计.

解: (1)

$$\begin{aligned}
P(T \leqslant t) &= P\left(\max\left\{X_1, X_2, X_3\right\} \leqslant t\right) \quad 0 < t < \theta \\
&= P\left(X_1 \leq t, X_2 \leqslant t, X_3 \leqslant t\right) = \prod_{i=1}^{3} P\left(X_i \leqslant t\right) \\
&= \left(\int_0^t \frac{3x^2}{\theta^3} dx\right)^3 = \frac{t^9}{\theta^9}
\end{aligned}$$

$\therefore f_T(t) = \begin{cases} \frac{9t^8}{\theta^9} & , 0 < t < \theta \\ 0 & , \text{其他}. \end{cases}$

(2) $\mathbb{E}T = \int_0^\theta t \cdot \frac{9t^8}{\theta^9} dt = \frac{9\theta}{10} \therefore \mathbb{E}(aT) = a \cdot \frac{9\theta}{10} = \theta \Rightarrow a = \frac{10}{9}$.

20. 设 $X_1, \ldots, X_n$ 是来自总体 X 的一个简单随机样本, $\mathbb{E}X = \mu, \operatorname{Var}(X) = \sigma^2$.

(1) 确定常数 c 使得 $c\sum_{i=1}^{n-1}\left(X_{i+1} - X_i\right)^2$ 为 σ^2 的无偏估计.

(2) 记 $\bar{X}, S^2$ 分别是样本均值和样本方差. 确定常数 c 使 $\bar{X}^2 - cS^2$ 是 μ^2 的无偏估计.

解: (1)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\left(X_{i+1} - X_i\right)^2\right] =& \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n-1} X_{i+1}^2 + X_i^2 - 2X_{i+1}X_i\right] = (2n-2)\left[\mathbb{E}X_1^2 - \left(\mathbb{E}X_1\right)^2\right] \\
=& (2n-2)\sigma^2.
\end{aligned}$$

由 $\mathbb{E}\left[c\sum_{i=1}^{n-1}\left(X_{i+1} - X_i\right)^2\right] = \sigma^2$, 得 $c = \frac{1}{2(n-1)}, \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{2(n-1)}\sum_{i=1}^{n-1}\left(X_{i+1} - X_i\right)^2$

(2)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\bar{X}^2 &= \mathbb{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{i \neq j} X_i X_j\right] \\
&= \frac{1}{n^2}\left[n\left(\mu^2 + \sigma^2\right) + \left(n^2 - n\right)\mu^2\right] \\
&= \mu^2 + \frac{1}{n}\sigma^2 \\
\mathbb{E}S^2 &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n\left(X_i - \bar{X}\right)^2\right] = \frac{1}{n-1}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2\right] \\
&= \frac{1}{n-1}\left[n\left(\mu^2 + \sigma^2\right) - n\left(\mu^2 + \frac{1}{n}\sigma^2\right)\right] \\
&= \sigma^2.
\end{aligned}$$

$\because \mathbb{E}\left[\bar{X}^2 - cS^2\right] = \mu^2, \quad \therefore c = \frac{1}{n},\ \hat{\mu}^2 = \bar{X}^2 - \frac{1}{n}S^2$.

21. 设从均值为 μ, 方差为 σ^2 的总体中, 分别抽取容量为 n_1, n_2 的两个独立样本. 设 $\bar{X}_1, \bar{X}_2$ 分别是两样本的均值. 试证明对于任意常数 $a, Y = a\bar{X}_1 + (1-a)\bar{X}_2$ 是 μ 的无偏估计, 并确定常数 a 使 Y 的方差达到最小.

证明:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}Y = \mathbb{E}\left[a\bar{X}_1 + (1-a)\bar{X}_2\right] &= \mathbb{E}\left[a \cdot \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n} X_i^{n_1} + (1-a)\frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} X_i^{n_2}\right] \\
&= \frac{a}{n_1}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^{n_1}\right] + \frac{1-a}{n_2}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n_2} X_i^{n_2}\right] \\
&= \frac{a}{n_1} \cdot n_1\mu + \frac{1-a}{n_2} \cdot n_2\mu = \mu.
\end{aligned}$$

$\therefore Y$ 为 μ 无偏估计。

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var} Y = \operatorname{Var}\left(aX_1 + (1-a)\bar{X}_2\right) &= a^2 \operatorname{Var} \bar{X}_1 + (1-a)^2 \operatorname{Var} \bar{X}_2 \\
&= \frac{a^2}{n_1}\operatorname{Var} X + \frac{(1-a)^2}{n_2}\operatorname{Var} X = \left[\frac{a^2}{n_1} + \frac{(1-a)^2}{n_2}\right]\sigma^2.
\end{aligned}$$

关于 a 求导有 $\frac{\partial \operatorname{Var} Y}{\partial a} = \left[\frac{2a}{n_1} - \frac{2(1-a)}{n_2}\right]\sigma^2$. 令导数 $= 0$ 有 $\left[\frac{2a}{n_1} - \frac{2(1-a)}{n_2}\right]\sigma^2 = 0$. $\therefore a = \frac{n_1}{n_1+n_2}$

$\therefore$ 当 $a = \frac{n_1}{n_1+n_2}$ 时, $\operatorname{Var} Y$ 最小, 为 $\frac{1}{n_1+n_2}\sigma^2$.

27. 一袋中有 N 个均匀硬币, 其中 θ 个是普通的硬币, 其余 $N-\theta$ 个两面都是正面. 现从袋中随机摸出一个把它连郑两次, 记下结果, 但是不看它属于哪种硬币, 又把它放回袋中, 如此重复 n 次. 如果掷出 $0, 1, 2$ 次正面的次数分别是 n_0, n_1, n_2 次, 其中 $n_0 + n_1 + n_2 = n$, 试分别用矩估计法和极大似然法这两种方法估计袋中普通硬币数 θ.

解: X: 把硬币连瓶两次出现正面的次数。X 的分布如下: $P(X=0) = \frac{\theta}{4N}, P(X=1) = \frac{\theta}{2N}, P(X=2) = \frac{4N-3\theta}{4N}$.

$\therefore \mathbb{E}X = 0 \cdot \frac{\theta}{4N} + 1 \cdot \frac{\theta}{2N} + 2 \cdot \frac{4N-3\theta}{4N} = \frac{4N-2\theta}{2N} = 2 - \frac{\theta}{N}$.

而 $\bar{X} = 0 \cdot \frac{n_0}{n} + 1 \cdot \frac{n_1}{n} + 2 \cdot \frac{n_2}{n} = \frac{n_1+2n_2}{n}$.

$\therefore \theta$ 矩估计 $\hat{\theta}_1 = \frac{2n-n_1-2n_2}{n}N = \frac{2n_0+n_1}{n}N$.

X 的似然函数为

$$l(\theta) = \left(\frac{\theta}{4N}\right)^{n_0} \cdot \left(\frac{\theta}{2N}\right)^{n_1} \cdot \left(\frac{4N-3\theta}{4N}\right)^{n_2}$$

则对数似然函数为

$$L(\theta) = \ln l(\theta) = n_0(\ln\theta - \ln 4N) + n_1(\ln\theta - \ln 2N) + n_2(\ln(4N-3\theta) - \ln 4N).$$

令 $\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = 0$ 有 $\frac{n_0}{\theta} + \frac{n_1}{\theta} - \frac{3n_2}{4N-3\theta} = 0$. $\therefore \theta$ 的 MLE 估计 $\hat{\theta}_2 = \frac{4N(n_0+n_1)}{3n}$.

第十二次作业

40. 设 $X_1, \ldots, X_n$ 为抽自指数分布

$$f(x, \theta) = \mathrm{e}^{-(x-\mu)}, x \geq \mu, -\infty < \mu < +\infty$$

的简单样本.

(1) 试求 μ 的极大似然估计 $\hat{\mu}^*$, $\hat{\mu}^*$ 是 μ 的无偏估计吗? 如果不是, 试对它作修改, 以得到 μ 的无偏估计 $\hat{\mu}^{**}$.

(2) 试求 μ 的矩估计 $\hat{\mu}$, 并证明它是 μ 的无偏估计.

(3) 试问 $\hat{\mu}^{**}$ 和 $\hat{\mu}$ 哪一个有效?

解: (1) $l(\theta) = \prod_{i=1}^n e^{-(X_i-\mu)} \cdot \mathbb{I}_{\{X_i \geqslant \mu\}}$. $L(\theta) = \ln l(\theta) = (-\sum_{i=1}^n X_i + n\mu) \cdot \mathbb{I}_{\left\{X_{(1)} \geqslant \mu\right\}} \leq 0$. 在 $\mu = X_{(1)}$ 处达到最大. $\therefore \hat{\mu}^* = X_{(1)}$. $X_{(1)}$ 的分布如下

$$f_{X_{(1)}}(x) = ne^{-n(x-\mu)} \cdot \mathbb{I}_{\{x \geqslant \mu\}}.$$

$\therefore \mathbb{E}\left[X_{(1)}\right] = \int_\mu^\infty x \cdot ne^{-n(x-\mu)} dx = \mu + \frac{1}{n}$. $\quad \therefore \hat{\mu}^* = X_{(1)}$ 不是无偏估计.
μ 的无偏估计 $\hat{\mu}^{**} = \hat{\mu}^* - \frac{1}{n}$.

(2)

$$\mathbb{E}X = \int_\mu^\infty xe^{-(x-\mu)} dx = e^\mu \int_\mu^\infty xe^{-x} dx = e^\mu(\mu+1)e^{-\mu} = \mu + 1$$

$$\therefore \hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - 1.$$

$$E[\hat{\mu}] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right] - 1 = \frac{1}{n} E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] - 1 = \mu.$$

$\therefore \hat{\mu}$ 是无偏估计。

(3)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_{(1)}^2\right] &= \int_{n\mu}^\infty x^2 \cdot ne^{-n(x-\mu)} dx = \int_{n\mu}^\infty \frac{t^2}{n^2} e^{-t+n\mu} dt = \frac{e^{n\mu}}{n^2}\int_{n\mu}^\infty t^2 e^{-t} dt \\
&= \frac{e^{n\mu}}{n^2} \cdot \left(t^2 + 2t + 2\right) \cdot e^{-t}\Big|_{n\mu}^\infty = \mu^2 + \frac{2\mu}{n} + \frac{2}{n^2}
\end{aligned}$$

$\therefore$ $\operatorname{Var}\left[X_{(1)}\right] = \mathbb{E}\left[X_{(1)}^2\right] - \mathbb{E}\left[X_{(1)}\right]^2 = \mu^2 + \frac{2\mu}{n} + \frac{2}{n^2} - \mu^2 - \frac{2\mu}{n} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2}$,
$\therefore \operatorname{Var}\left[\hat{\mu}^{**}\right] = \operatorname{Var}\left[X_{(1)}\right] = \frac{1}{n^2}$.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\hat{\mu}^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - 1\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i + 1\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \sum_{i=j} X_i X_j\right) - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i + 1\right] \\
&= \mu^2 + \frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

$\therefore \operatorname{Var}(\hat{\mu}) = \mathbb{E}\left[\hat{\mu}^2\right] - \mathbb{E}[\hat{\mu}]^2 = \frac{1}{n}$.

$\therefore \operatorname{Var}\left(\hat{\mu}^{**}\right) = \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n} = \operatorname{Var}(\hat{\mu}),\ n \geqslant 1.\ \therefore \hat{\mu}^{**}$ 更有效.

45. 设 $X_1, \ldots, X_n$ 自下列总体中抽取的简单样本,

$$
f(x, \theta) = \begin{cases} 1, & \text{当}\theta - \frac{1}{2} \leq x \leq \theta + \frac{1}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}
$$

证明: 样本均值 $\bar{X}$ 及 $\max_{1 \leq i \leq n} X_i + \frac{1-n}{2(n+1)}$ 都是 θ 的无偏估计, 问何者更有效?(习题册中写的是 $\max_{1 \leq i \leq n} X_i + \frac{n+3}{2(n+1)}$.)

证明:

$$
\mathbb{E}\bar{X} = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \mathbb{E}X = \theta
$$

$\therefore \bar{X}$ 为无偏估计.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}X_{(n)} &= \int_{\theta-\frac{1}{2}}^{\theta+\frac{1}{2}} x \cdot n\left(x - \theta + \frac{1}{2}\right)^{n-1} dx \overset{x-\theta+\frac{1}{2}=t}{=} \int_0^1 \left(t + \theta - \frac{1}{2}\right) \cdot n t^{n-1} dt \\
&= \theta + \frac{n-1}{2(n+1)}
\end{aligned}
$$

$\therefore X_{(n)} + \frac{1-n}{2(1+n)}$ 为 θ 无偏估计.

$\because \mathbb{E}X^2 = \int_{\theta-\frac{1}{2}}^{\theta+\frac{1}{2}} x^2 dx = \theta^2 + \frac{1}{12}, \therefore \operatorname{Var}(\bar{X}) = \frac{1}{n}\operatorname{Var} X = \frac{1}{12n}$.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}X_{(n)}^2 &= \int_{\theta-\frac{1}{2}}^{\theta+\frac{1}{2}} x^2 \cdot n\left(x - \theta + \frac{1}{2}\right)^{n-1} dx = \int_0^1 \left(t + \theta - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot n t^{n-1} dt \\
&= \int_0^1 n t^{n+1} dt + 2\left(\theta - \frac{1}{2}\right)\int_0^1 n t^n dt + \left(\theta - \frac{1}{2}\right)^2 \int_0^1 n t^{n-1} dt \\
&= \frac{n}{n+2} + 2\left(\theta - \frac{1}{2}\right)\frac{n}{n+1} + \left(\theta - \frac{1}{2}\right)^2
\end{aligned}
$$

$\therefore \operatorname{Var}\left(X_{(n)} + \frac{1-n}{2(n+n)}\right) = \operatorname{Var} X_{(n)} = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}$.

当 $n \leqslant 7$ 时。$\operatorname{Var}(\bar{X}) \leqslant \operatorname{Var}\left(X(n) + \frac{1-n}{2(1+n)}\right)$ 前者更有效。

当 $n \geqslant 8$ 时。$\operatorname{Var}(\bar{X}) \geqslant \operatorname{Var}\left(X(n) + \frac{1-n}{2(1+n)}\right)$ 后者更有效.

48. 设 $X_1,\dots,X_n$ 为抽自均匀分布 $U(0,\theta)$ 的简单随机样本.

(1) 选取适当的参数 a_n,b_n,c_n 使得, $\hat{\theta}_1=a_n\bar{X},\hat{\theta}_2=b_n\min(X_1,\dots,X_n)$ 和 $\hat{\theta}_3=c_n\max(X_1,\dots,X_n)$ 都是 θ 的无偏估计.

(2) 比较 $\hat{\theta}_i,i=1,2,3$ 哪个更有效.

解: (1) $\mathbb{E}\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\mathbb{E}X_i=\mathbb{E}X=\frac{\theta}{2}$

$\therefore$ 当 $a_n=2$ 时, $\hat{\theta}_1=a_n\bar{X}$ 是无偏估计.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X_{(1)}&=\int_0^\theta x\cdot n\left(1-\frac{x}{\theta}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{\theta}dx=\frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta x\cdot(\theta-x)^{n-1}dx\\&\overset{x=\theta t}{=}n\theta\int_0^1 t(1-t)^{n-1}dt=n\theta B(2,n)=n\theta\frac{\Gamma(2)\cdot\Gamma(n)}{\Gamma(n+2)}=\frac{\theta}{n+1}\end{aligned}$$

$\therefore$ 当 $b_n=n+1$ 时, $\hat{\theta}_2=b_nX_{(1)}$ 是无偏估计.

$$\mathbb{E}X(n)=\int_0^\theta x\cdot n\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{\theta}dx=\frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta x^n dx=\frac{n}{n+1}\theta$$

$\therefore$ 当 $c_n=\frac{n+1}{n}$ 时, $\hat{\theta}_3=c_nX_{(n)}$ 是元偏估计.

(2)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\hat{\theta}_1^2\right]&=4\mathbb{E}\left[\bar{X}^2\right]=4\mathbb{E}\left[\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^n X_i^2+\sum_{i\neq j}X_iX_j\right)\right]\\&=\frac{4}{n}\mathbb{E}X^2+4\frac{n^2-n}{n^2}(\mathbb{E}X)^2\\&=\frac{4\theta^2}{3n}+4\cdot\frac{n^2-n}{n^2}\cdot\frac{\theta^2}{4}=\left(1+\frac{1}{3n}\right)\theta^2\end{aligned}$$

$\therefore \operatorname{Var}\left(\hat{\theta}_1\right)=E\hat{\theta}_1^2-\left(E\hat{\theta}_1\right)^2=\left(1+\frac{1}{3n}\right)\theta^2-\theta^2=\frac{1}{3n}\theta^2.$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\hat{\theta}_2^2\right]&=\frac{n(n+1)^2}{\theta^n}\int_0^\theta x^2\cdot(\theta-x)^{n-1}dx\overset{x=\theta t}{=}\frac{n(n+1)^2}{\theta^n}\int_0^1(\theta t)^2\theta^{n-1}(1-t)^{n-1}\theta dt\\&=n\theta^2B(3,n)=n(n+1)^2\theta^2\frac{\Gamma(3)\Gamma(n)}{\Gamma(n+3)}=\frac{2(n+1)}{n+2}\theta^2\end{aligned}$$

$\therefore \operatorname{Var}\left(\hat{\theta}_2\right)=\frac{2(n+1)}{n+2}\theta^2-\theta^2=\frac{n}{n+2}\theta^2$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\hat{\theta}_3^2\right]&=\mathbb{E}\left[\left(\frac{n+1}{n}X_{(n)}\right)^2\right]=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\int_0^\theta x^2\cdot n\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{\theta}dx\\&=\frac{(n+1)^2}{n}\cdot\frac{1}{\theta^n}\int_0^\theta x^{n+1}dx=\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\theta^2\end{aligned}$$

$\therefore \operatorname{Var}\left(\hat{\theta}_3\right)=\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\theta^2-\theta^2=\frac{1}{n(n+2)}\theta^2,$

$\therefore \operatorname{Var}\left(\hat{\theta}_3\right)=\frac{1}{n(n+2)}\theta^2\leqslant\operatorname{Var}\left(\hat{\theta}_1\right)=\frac{1}{3n}\theta^2\leqslant\operatorname{Var}\left(\hat{\theta}_2\right)=\frac{n}{n+2}\theta^2,\ n\geqslant 1$

$\therefore \hat{\theta}_3$ 更有效。

63. 随机从一批钉子中抽取 9 枚, 测得其长度 (cm) 为:

$$2.15, 2.13, 2.10, 2.14, 2.15, 2.16, 2.12, 2.11, 2.13$$

假设钉子长度服从正态分布, 分别在下面两种情况下, 求出总体均值的 90% 置信区间:

(1) $\sigma = 0.01$

(2) σ 未知.

解: (1) $\sigma = 0.01, \alpha = 0.10$.
μ 的 90% 的置信区间 $\left[\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\frac{\alpha}{2}}\right]$ 其中 u_{2}^{α} 为标准正态上分位数。
$\therefore \phi\left(u_{2}^{\alpha}\right) = \phi\left(u_{0.05}\right) = 0.95. \quad \therefore u_{\frac{\alpha}{2}} = 1.645,\ \bar{X} = 2.13222,\ n = 9.$
$\therefore \mu$ 的 90% 置信区间 $[2.12674, 2.13770]$

(2) σ 未知, $\alpha = 0.10$.
μ 的 90% 置信区间 $\left[\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right), \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]$ 其中 $\bar{X} = 2.13222$ 。样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2 = 3.7764 \therefore S = 0.019433,\ n = 9,\ t_8(0.05) = 1.8595$.
$\therefore \mu$ 的 90% 置信区间$[2.12017, 2.14427]$

64. 从某一小学的一年级学生中随机选了 9 名男生和 9 名女生, 测量他们的身高 (cm) , 假设身高服从正态分布.

男孩	126	131	120	125	116	126	117	130	117
女孩	122	123	124	125	125	118	120	120	114

(1) 求这所小学一年级学生平均身高的 95% 置信区间;

(2) 求这所小学一年级男孩平均身高的 95% 置信区间;

(3) 求这所小学一年级女孩平均身高的 95% 置信区间.

解: μ 的 95% 置信区间 $\left[\bar{X}_i - \frac{S_i}{\sqrt{n}} t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right), \bar{X}_i + \frac{S_i}{\sqrt{n}} t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]$

(1) $[119.80, 124.54]$

(2) $[118.69, 127.53]$

(3) $[118.43, 124.01]$

65. 假设 $0.4, 2.5, 1.8, 0.7$ 是来自总体 X 的简单随机样本. 已知 $Y = \ln(X)$ 服从正态 $N(\mu, 1)$.

(1) 求 X 的数学期望 $a = \mathbb{E}X$;

(2) 求 μ 的 95% 置信区间;

(3) 求 a 的 95% 置信区间.

解: (1)

$$a = \mathbb{E}X = \mathbb{E}\left[e^{Y}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{y} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}} dy \overset{x=y-\mu}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\mu+\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x+1)^2}{2}} dx = e^{\mu+\frac{1}{2}}$$

(2) 来自 X 简单样本 $0.4, 2.5, 1.8, 0.7, Y=\ln X$ 简单样本 $-0.91629, 0.91629, 0.58779, -0.35667$

$\bar{Y}=0,05778. \quad \sigma=1, \quad n=4 \quad \alpha=0,05, \quad \phi\left(u_{0.025}\right)=0,975 \quad \therefore u_{0,025}=1.96$

μ 的 95% 置信区间 $\left[\bar{Y}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{Y}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\frac{\alpha}{2}}\right]=[-0.922, 1.038]$

(3) a 的 95% 置信区间 $\left[e^{-0.922+1/2}, e^{1.038+1/2}\right]=[0.656, 4.655]$

71. 一批零件的长度 $X \sim N\left(\mu, \sigma^{2}\right)$, 从这批零件中随机地抽取 10 件, 测得长度值分别为 (单位: mm): $49.5, 50.4, 49.7, 51.1, 49.4, 49.7, 50.8, 49.9, 50.3, 50.0$. 在下列条件下求这批零件长度总体方差 σ^{2} 的 95% 置信区间.

(1) $\mu=50$ mm.

(2) μ 未知.

解: (1) σ^{2} 的 95% 置信区间 $\left[\frac{n S_{\mu}^{2}}{x_{n}^{2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \frac{n S_{\mu}^{2}}{x_{n}^{2}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right]=[0.141, 0.893]$, 其中 $S_{\mu}^{2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_{i}-\mu\right)^{2}}{n}$.

(2) σ^{2} 的 95% 置信区间 $\left[\frac{(n-1) S^{2}}{x_{n}^{2}-1\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \frac{(n-1) S^{2}}{x_{n-1}^{2}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right]=[0.149, 1.050]$, 其中 $S^{2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_{i}-\bar{X}\right)^{2}}{n-1}$.

第十三次作业

76. 假设到一商场的顾客有 p 的概率购买商品, 现随机抽取了 500 个顾客, 其中 15 个购买了商品. 求 p 的 95% 置信区间.

解: 由题知 $S_{n}=\sum_{i=1}^{n} X_{i} \sim B(n, p)$.

由中心极限定理

$$\frac{s_{n-n p}}{\sqrt{n p(1-p)}}=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-p)}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{L} N(0,1).$$

$\therefore \hat{p}=\frac{S_{n}}{n} \xrightarrow{p} p. \quad \therefore \sqrt{\frac{p(p)}{\hat{p}(-\hat{p})}} \xrightarrow{P} 1. \quad$ 而 $\frac{\sqrt{n}(\hat{p}-p)}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{1} N(0,1)$

$\therefore \frac{\sqrt{n}(\hat{p}-p)}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}} \xrightarrow{L} N(0,1)$.

$\therefore p$ 的 $1-\alpha$ 置信区间为 $\left[\hat{p}-u_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p}+u_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$, 其中 $\hat{p}=\frac{S_{n}}{n}=0.03, \alpha= 0.05, u_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$. p 的 96% 置信区间 $[0.01505, 0.04495$ 。

81. 设一农作的单位面积产量服从正态分布 $N\left(80, \sigma^{2}\right)$, 其标准差 $\sigma=5$, 问至少需要几块试验田, 才能有 99% 的把握保证这些试验田的单位面积平均产量大于 75?

解: μ 的 $(1-\alpha)$ 置信上限: $\quad \mu \leqslant \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha}$. 其中 u_{α} 为标准正态上分位数。

$\therefore \bar{X} \geqslant \mu-\frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha}$. 其中 $\mu=80, \sigma=5. \quad u_{\alpha}=u_{0.01}=2.33$. $\therefore \bar{X} \geqslant 80-\frac{5}{\sqrt{n}} \cdot 2.33$

由题知，当 $80-\frac{11.65}{\sqrt{n}}>75$ 时，有 99% 把握保证试验田平均产量 >75.

则 $n>5.4289 \therefore$ 至少需要 6 块试验田。

86. 为了了解一批灯泡的使用寿命, 共测试了 16 个灯泡的寿命, 得到寿命的平均为 $1600h$, 样本标准差为 $15h$. 假设寿命服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$.

(1) 求 μ 的 95% 置信下限;

(2) 求 σ^2 的 95% 置信上限.

解: 已知 $n=16,\ \bar{X}=1600,\ S=15$

(1) μ 的 95% 置信下限为 $\mu \geqslant \bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{n-1}(\alpha)$
其中 $\alpha=0,05.\ t_5(0,05)=1.7531$

$$\therefore \mu \geqslant 1600-\frac{15}{4}\cdot 1.7531=1593.426$$

(2) σ^2 的 95% 置信上限为 $\sigma^2 \leqslant \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1}(1-\alpha)}$
其中 $\alpha=0.05,\ \chi^2_{15}(0.95)=7.261$

$$\therefore \sigma^2 \leqslant \frac{15\cdot 15^2}{7.261}=464.812$$

第八章

1. 假设 $X_1,\ldots,X_{16}$ 服从正态分布 $N(\mu,0.16)$. 检验问题

$$H_0:\mu=0.5 \leftrightarrow H_1:\mu>0.5,$$

显著水平为 0.05 .

(1) 检验的拒绝域是什么?

(2) $\mu=0.65$ 时犯第二类错误的概率是多少?

解: (1) $U=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}\sim N(0,1)$
在 H_0 下: $n=16,\mu=0.5,\alpha=0.05,\sigma=0.4,\quad u_\alpha=1.645.$
$\therefore$ 拒绝域 $W=\{U>u_\alpha\}=\left\{\frac{\sqrt{16}(\bar{X}-0.5)}{0.4}>1.645\right\}=\{\bar{X}>0,6645\}.$

(2) 第二类错误的概率

$$\begin{aligned} P\left(\bar{X}\notin W \mid H_1\right) &= P(\bar{X}\leqslant 0.6645 \mid \mu=0.65) \\ &= P\left(\frac{\sqrt{16}(\bar{X}-0.65)}{0.4}<0.145 \mid \mu=0.65\right) \\ &= \Phi(0.145)=0.5576 \end{aligned}$$

$(\Phi(0.14)=0.5557\quad \Phi(0.15)=0.5596).$

5. 设样本 $X_1,\cdots,X_n$ 抽自参数为 λ 的泊松分布总体, 对检验问题

$$H_0:\quad \lambda=\frac{1}{2}\quad \longleftrightarrow\quad H_1:\quad \lambda\neq\frac{1}{2}$$

取检验的拒绝域为 $\left\{(X_1,\cdots,X_n): \sum_{i=1}^{10} X_i \le 1 \text{ 或 } \ge 12\right\}$

(1) 求此检验在 $\lambda=0.25,0.5,1$ 处的功效函数值, 并求出该检验的水平.

(2) 求犯第一类错误的概率及在 $\lambda=0.25,0.75$ 处犯第二类错误的概率.

解: (1) $T=\sum_{i=1}^n X_i \sim P(n\lambda), n=10$. 拒绝域 $W=\{T\le 1 \text{ 或 } T\ge 12\}$. 此检验的功效函数

$$g(\lambda)=P_\lambda(X\in W)=\begin{cases}\alpha(\lambda), & \lambda\in H_0,\\ 1-\beta(\lambda), & \lambda\in H_1\end{cases},$$

其中 $\alpha(\lambda),\beta(\lambda)$ 为第一、二类错误发生的概率。

(i) $\lambda=0.25\in H_1$

$$\begin{aligned}g(\lambda)&=1-\beta(\lambda)=1-P(T\notin W\mid\lambda=0.25)=1-P(1<T<12\mid\lambda=0.25)\\&=1-\sum_{i=2}^{11}\frac{2.5^i}{i!}e^{-2.5}=0.2873\end{aligned}$$

(ii) $\lambda=0,5\in H_0$

$$\begin{aligned}g(\lambda)&=\alpha(\lambda)=P(T\in W\mid\lambda=0.5)=P(T\leqslant 1 \text{ 或} T\geqslant 12\mid\lambda=0.5)\\&=1-P(|<T<12|\lambda=0.5)=1-\sum_{i=2}^{11}\frac{5^i}{i!}e^{-5}=0.0459\end{aligned}$$

(iii) $\lambda=1\in H_1$

$$\begin{aligned}g(\lambda)&=1-\beta(\lambda)=1-P(T\notin W\mid\lambda=1)=1-P(1<T<12\mid\lambda=1)\\&=1-\sum_{i=2}^{11}\frac{10^i}{i!}e^{-10}=0.3037\end{aligned}$$

对 $\lambda=0.5.\quad g(0.5)=\alpha(0.5)=0.0459.\ \therefore$ 该检验的水平是 0.0459

(2) 犯第一类错误概率

$$\alpha(\lambda)=\begin{cases}0.0459, & \lambda=\frac{1}{2}\\ 0, & \lambda\neq\frac{1}{2}.\end{cases}$$

犯第二类错误概率

$$\beta(\lambda)=\begin{cases}0 & ,\lambda=\frac{1}{2}\\ P(T\notin W\mid\lambda), & \lambda\neq\frac{1}{2}.\end{cases}$$

当 $\lambda=0.25$ 时, $\beta(\lambda)=0.7127$.

当 $\lambda=0.75$ 时, $\beta(\lambda)=P(1<T<12\mid\lambda=0.75)=\sum_{i=2}^{\infty}\frac{7.5i}{i!}e^{-7.5}=0.9161$.

13. 令 $X_1,\ldots,X_{10}$ 是从 $N(\mu,16)$ 中抽取的随机样本, 假设样本均值 $\bar{X}=4.8$. 在 5% 显著水平下, 检验:

(1) $H_0:\mu=7\leftrightarrow H_1:\mu\neq 7$;

(2) $H_0: \mu \geq 7 \leftrightarrow H_1: \mu < 7$;

(3) $H_0: \mu \leq 2 \leftrightarrow H_1: \mu > 2$.

解: $F = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1),\ \alpha = 0.05,\ \sigma = 4,\ \bar{X} = 4.8 \quad u_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96,\ u_\alpha = 1.645$.

(1) 拒绝域 $W = \left\{|T| > u_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = \left\{\frac{\sqrt{10}|\bar{X}-7|}{4} > 1.96\right\},\ \frac{\sqrt{10}|\bar{X}-7|}{4} = \frac{\sqrt{10}\cdot 2.2}{4} = 1.739 < 1.96$. 接受 H_0

(2) 拒绝域 $W = \{T < -u_\alpha\} = \left\{\frac{\sqrt{10}(\bar{X}-7)}{4} < -1.645\right\},\ \frac{\sqrt{10}(\bar{x}-7)}{4} = \frac{\sqrt{10}\cdot(-2.2)}{4} = -1.739 < -1.645$. 拒绝 H_0

(3) 拒绝域 $W = \{T > u_\alpha\} = \left\{\frac{\sqrt{10}(\bar{X}-2)}{4} > 1,645\right\},\ \frac{\sqrt{10}(\bar{X}-2)}{4} = 2.21359 > 1.645$. 拒绝 H_0

26. 令 $1.7, 4, 2.3, 3.2$ 是从 $N\left(2.5, \sigma^2\right)$ 中抽取的随机样本, 5% 显著水平下, 检验 $H_0: \sigma^2 = 1 \leftrightarrow H_1: \sigma^2 \neq 1$

解: $\mu = 2.5,\ \alpha = 0.05,\ \sigma = 1,\ n = 4$,

$\chi_\mu^2 = \frac{nS_\mu^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2,\ S_\mu^2 = \sum_{i=1}^n \left(X_i - \mu\right)^2/n,\ \chi_n^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 11.143, \quad \chi_n^2\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = 0.484$。

拒绝域 $W = \left\{\chi_\mu^2 < \chi_n^2\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\ 或\ \chi_\mu^2 > \chi_n^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right\} = \left\{\frac{nS_\mu^2}{\sigma^2} < 0.484\ 或\ \frac{nS_\mu^2}{\sigma^2} > 11.143\right\}$.

$S_\mu^2 = \sum_{i=1}^n \left(X_i - \mu\right)^2/n = 0.855 \quad \therefore$ 接受 H_0

27. 令 $X_1, \ldots, X_9$ 是从 $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ 中抽取的随机样本, 假设样本均值 $\bar{X} = 48$, 样本方差为 $\sigma^2 = 64$, 5% 显著水平下, 检验

(1) $H_0: \mu \leq 40 \leftrightarrow H_1: \mu > 40$;

(2) $H_0: \sigma^2 \geq 70 \leftrightarrow H_1: \sigma^2 < 70$.

解: (1) $T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S} \sim t_{n-1},\ \mu = 40,\ n = 9,\ \bar{X} = 48,\ S^2 = 64,\ \alpha = 0.05$.

拒绝域 $W = \{T > t_{n-1}(0.05)\} = \left\{\frac{\sqrt{9}(\bar{X}-40)}{S} > 1.8553\right\}$.

$\frac{\sqrt{9}(\bar{X}-40)}{S} = 3 > 1.8595$. 拒绝 H_0

(2) $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2,\ n = 9,\ \sigma^2 = 70,\ S^2 = 64. \quad \alpha = 0.05$.

拒绝域 $W = \left\{\chi^2 < \chi_{n-1}^2(1-\alpha)\right\} = \left\{\frac{8S^2}{70} < 2.733\right\} = \{S^2 < 23.91375\}$.

$\frac{85^2}{70} = \frac{8\times 66^4}{70} = 7.314 > 2.733$. 接受 H_0

30. 随机从一批钉子中抽取 9 枚, 测得其长度 (cm) 为:

$$2.15, 2.13, 2.10, 2.14, 2.15, 2.16, 2.12, 2.11, 2.13$$

假设钉子长度服从正态分布, 分别在下面两种情况, 5% 显著水平下, 检验 $H_0: \sigma \leq 0.01 \leftrightarrow H_1: \sigma > 0.01$:

(1) $\mu = 2.12$;

(2) μ 未知.

解: (1)

$$\chi^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2}{\sigma^2}\sim\chi_n^2,\ n=9,\ \alpha=0.05,\ \sigma=0.01,\ \bar{X}=2.1322,\ \chi_n^2(\alpha)=16.919$$

$$\text{拒绝域}W=\left\{\chi^2>\chi_n^2(\alpha)\right\}=\left\{\frac{\sum\left(X_i-\mu\right)^2}{\sigma^2}>16.919\right\}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2}{\sigma^2}=45>16.919,\ \text{拒绝}H_0.$$

(2)

$$U=\frac{\sum\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{\sigma^2}\sim\chi_{n-1}^2,\ n=9,\ \alpha=0.05,\ \sigma=0.01,$$

$$\bar{X}=2.1322,\ \chi_{n-1}^2(\alpha)=15.507,\ S^2=\frac{1}{n-1}\sum\left(X_i-\bar{X}\right)^2=0.0199^2$$

拒绝域 $W=\left\{U>\chi_{n-1}^2(\alpha)\right\}=\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}>15.507\right\}$

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=31.6808>15.507$. 拒绝$H_0$.