信息论第七次小测解答

中国科学技术大学《信息论 A》006125.01 班助教组

2024 年 5 月 23 日

第 1 题

考虑离散随机变量$(X,Y)\sim P_{XY}$，证明：

1) $\forall\, Q_X$ *over* X*,* $I(X;Y)\le D(P_{XY}||Q_XP_Y)$*.*

2) $\forall\, Q_X$ *over* X*,* Q_Y *over* Y*,* $I(X;Y)=\min_{Q_X,Q_Y}D(P_{XY}||Q_XQ_Y)$*.*

证明: a):

$$
\begin{aligned}
&D(P_{XY}||Q_XP_Y)-I(X;Y) && (1)\\
=&\mathbf{E}_{P(X,Y)}\left[\log\frac{P_{XY}(X,Y)}{Q_X(X)P_Y(Y)}\right]-\mathbf{E}_{P(X,Y)}\left[\log\frac{P_{XY}(X,Y)}{P_X(X)P_Y(Y)}\right] && (2)\\
=&\mathbf{E}_{P(X,Y)}\left[\frac{P_X(X)}{Q_X(X)}\right]=\mathbf{E}_{P(X)}\left[\frac{P_X(X)}{Q_X(X)}\right] && (3)\\
=&D(P_X(X)||Q_X(X))\ge 0. && (4)
\end{aligned}
$$

b):

$$
\begin{aligned}
&D(P_{XY}||Q_XQ_Y)-I(X;Y) && (5)\\
=&\mathbf{E}_{P(X,Y)}\left[\log\frac{P_{XY}(X,Y)}{Q_X(X)Q_Y(Y)}\right]-\mathbf{E}_{P(X,Y)}\left[\log\frac{P_{XY}(X,Y)}{P_X(X)P_Y(Y)}\right] && (6)\\
=&\mathbf{E}_{P(X,Y)}\left[\frac{P_X(X)}{Q_X(X)}\right]+\mathbf{E}_{P(X,Y)}\left[\frac{P_Y(Y)}{Q_Y(Y)}\right] && (7)\\
=&\mathbf{E}_{P(X)}\left[\frac{P_X(X)}{Q_X(X)}\right]+\mathbf{E}_{P(Y)}\left[\frac{P_Y(Y)}{Q_Y(Y)}\right] && (8)\\
=&D(P_X(X)||Q_X(X))+D(P_Y(Y)||Q_Y(Y))\ge 0. && (9)
\end{aligned}
$$

从而：

1. $\forall\, Q_X$ over X, Q_Y over Y, $D(P_{XY}||Q_XQ_Y)\ge I(X;Y)$。
2. 若 $Q_X(X)=P_X(X)$, $Q_Y(Y)=P_Y(Y)$，则$D(P_{XY}||Q_XQ_Y)=I(X;Y)$。

故$I(X;Y)=\min_{Q_X,Q_Y}D(P_{XY}||Q_XQ_Y)$。 □