

2023.11.01 第 11 次作业

卢科政 夏业志

2023 年 11 月 8 日

题目 1. (课本 3.2) 在半径为 a, b 的同心球壳导体之间填满电导率为 σ 的导电介质, 求两壳之间的电阻.

解答.

$$R = \int_b^a \frac{dr}{\sigma S} = \int_b^a \frac{dr}{\sigma 4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi\sigma} \frac{a-b}{ab} \quad (1)$$

题目 2. (课本 3.3) 丹聂尔电池由两个同轴圆筒构成, 长为 l , 外筒是内半径为 b 的铜, 内筒是外半径为 a 的锌, 两筒之间充满介电常数为 ϵ 、电阻率为 ρ 的硫酸铜溶液。如图所示, 略去边缘效应。求:(1) 该电池的内阻;(2) 该电池的电容;(3) 电阻与电容之间的关系。

解答. (1). 以轴线为轴, 取一个半径 r 处的厚度为 dr 、长为 l 的圆筒, 该圆筒的电阻为:

$$dR = \rho \frac{dr}{2\pi r l}$$

则电池的内阻为:

$$R = \int_a^b dR = \frac{\rho}{2\pi l} \ln \frac{b}{a}$$

(2). 设内筒上的电荷量为 Q , 则根据高斯定理可以算得溶液中的电场强度为 $\vec{E} = Q/(2\pi\epsilon l r)\vec{e}_r$, 电势差可以算得:

$$U = \int_a^b E dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{b}{a}$$

则电容为:

$$C = Q/U = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln(b/a)}$$

(3). C 和 R 的关系为:

$$CR = \rho\epsilon$$

题目 3. (课本 3.6) 若把大地看成是一个导电率为 σ 的导电介质。(1) 将半径为 R 的球形电极的一半埋到地下, 求其接地电阻;(2) 在距离为 $d(d \gg R)$ 的地方同样埋一相同的电极, 求他们之间的电阻。

解答. (1)

$$R_1 = \int_R^{+\infty} \frac{dr}{\sigma 2\pi r^2} = \frac{1}{2\pi\sigma R} \quad (2)$$

(2)

假设进入大地的电流大小为 I , 则离开大地的电流大小为 I , 假设 P 距离两点距离分别为 $r, d-r$, 对于进入大地的电流:

$$j_1 = \frac{I}{2\pi r^2} \quad (3)$$

对于离开大地的电流:

$$j_2 = \frac{I}{2\pi(d-r)^2} \quad (4)$$

则 P 点处的电流密度为:

$$j = j_1 + j_2 = \frac{I}{2\pi} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{(d-r)^2} \right) \quad (5)$$

利用公式 $E = \sigma/j$, 可得:

$$U = \int_R^{d-R} E dr = \frac{I}{2\pi\sigma} \int_R^{d-R} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{(d-r)^2} \right) dr = \frac{1}{\pi\sigma} \left(\frac{d-2R}{R(d-R)} \right) \quad (6)$$

题目 4. (课本 3.7) 如图所示的电路图中, 包含 50 只不同的安培表 ($A_1 - A_{50}$), 以及 50 只相同规格的伏特表 ($V_1 - V_{50}$)。第 1 只伏特表的读数为 $U_1 = 9.6V$, 第 1 只安培表的读数为 $I_1 = 9.5mA$, 第 2 只安培表的读数为 $I_2 = 9.2mA$ 。试根据给出的这些条件求所有伏特表的读数总和。

解答. 流过第 1 个伏特表的电流大小为 $I' = I_1 - I_2 = 0.3mA$, 则伏特表的电阻为:

$$R_v = U_1/I' = 32k\Omega$$

要求所有伏特表读数的综合, 只需要将所有流过伏特表的电流总和乘上电阻即可:

$$\Sigma U = R \cdot I_1 = 304V$$

题目 5. (课本 3.23) 如课本习题 3.23 图所示, 3 个电源的电动势分别为 $\varepsilon_1 = 12.0V, \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 6.0V$, 电阻 $R_1 = R_2 = R_3 = 3\Omega, R_4 = 6\Omega$, 求 R_4 上的电压和通过 R_2 的电流。

解答. 列出回路方程可得:

$$\begin{cases} i_1 R_3 + (i_1 + i_2) R_2 + i_1 R_4 = \varepsilon_3 \\ (i_1 + i_2) R_2 + i_2 R_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \end{cases} \quad (7)$$

将题目中的数据带入上述方程式中, 可解得:

$$i_1 = \frac{2}{7}A, i_2 = \frac{6}{7}A \quad (8)$$

所以 R_4 上的电压 $U = \frac{12}{7}V$, 通过 R_2 的电流 $I = \frac{8}{7}A$