2-1 自相关函数为 $R_x(\tau)=2e^{-4|\tau|}$ 的随机信号 $\{x(t)\}$ 通过冲激响应为 $h(t)=3e^{-3t}u(t)$ 的线性系统，输出为 $\{y(t)\}$，求：

（1）$\{y(t)\}$ 的自相关函数 $R_y(\tau)$；

（2）$\{x(t)\}$ 与 $\{y(t)\}$ 的互相关函数 $R_{xy}(\tau)$ 和 $R_{yx}(\tau)$ 及其在 $\tau=0$、τ=1时的值。

解：

1） $\because$ $y(t)=x(t)*h(t)$，且 $x(t)$ 为平稳随机信号

所以可得输出 $y(t)$ 的功率谱密度函数

$$S_y(\omega)=S_x(\omega)\left|H(j\omega)\right|^2$$

又有 $S_x(\omega)=\dfrac{16}{\omega^2+16}$， $H(j\omega)=\dfrac{3}{j\omega+3}$

所以 $S_y(\omega)=S_x(\omega)\left|H(j\omega)\right|^2=\dfrac{16}{\omega^2+16}\cdot\dfrac{9}{\omega^2+9}=\dfrac{144}{7}(\dfrac{1}{\omega^2+9}-\dfrac{1}{\omega^2+16})$

$R_y(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S_y(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega=\dfrac{24}{7}e^{-3|\tau|}-\dfrac{18}{7}e^{-4|\tau|}$

2） $$S_{xy}(\omega)=S_x(\omega)H(-j\omega)=\frac{16}{\omega^2+16}\cdot\frac{3}{-j\omega+3}$$

$$S_{yx}(\omega)=S_x(\omega)H(j\omega)=\frac{16}{\omega^2+16}\cdot\frac{3}{j\omega+3}$$

令 $s=j\omega$

$$S_{xy}(s)=\frac{16}{-s^2+16}\cdot\frac{3}{-s+3}=\frac{6}{7}\frac{1}{s+4}+\frac{48}{7}\frac{1}{-s+3}-\frac{6}{-s+4}$$
$$S_{yx}(s)=\frac{16}{-s^2+16}\cdot\frac{3}{s+3}=\frac{6}{7}\frac{1}{-s+4}+\frac{48}{7}\frac{1}{s+3}-\frac{6}{s+4}$$

$\therefore$作拉普拉斯反变换后可得，

$$R_{xy}(\tau)=\frac{6}{7}e^{-4\tau}u(\tau)+\frac{48}{7}e^{3\tau}u(-\tau)-6e^{4\tau}u(-\tau)$$
$$R_{yx}(\tau)=\frac{6}{7}e^{4\tau}u(-\tau)+\frac{48}{7}e^{-3\tau}u(\tau)-6e^{-4\tau}u(\tau)$$

代入 $\tau=0$ ， τ=1即可得解。

2-2 平稳随机过程 $\{x(t)\}$ 通过传输函数为 $H(jw)$ 的线性时不变系统，输出为 $\{y(t)\}$，证明：$S_y(w)=H^*(jw)S_{yx}(w)$

证明：

由于$\{x(t)\}$为一平稳随机过程，则通过线性时不变系统后的输出功率谱密度

$S_y(w)=\left|H(jw)\right|^2 S_x(w)$.　其中$S_n(w)$为输入功率谱密度。

又知　$S_{yx}(w)=H(jw)S_x(w)$.　则　$S_x(w)=\dfrac{1}{H(jw)}S_{yx}(w)$.

则

$$S_y(w)=\left|H(jw)\right|^2\cdot\frac{1}{H(jw)}S_{yx}(w)=\left[H(jw)\cdot H^*(jw)\right]\cdot\frac{1}{H(jw)}S_{yx}(w)=H^*(jw)S_{yx}(w)$$

得证。

2-3 积分器是一个线性系统，其冲激响应为$h(t)=\int_{t-T}^{t}\delta(u)du, 0\le t\le T$，功率密度函数为$S_x(f)$的随机信号$\{x(t)\}$通过该系统后的输出为$y(t)=\int_{t-T}^{t}x(u)du$，求$\{y(t)\}$的功率谱密度函数$S_y(f)$以及$\{x(t)\}$与$\{y(t)\}$的互功率谱密度函数$S_{yx}(f)$.

解：$h(t)=\int_{t-T}^{t}\delta(u)du=\int_{t-T}^{t}dU(u)=U(t)-U(t-T)=g_T(t-\dfrac{T}{2})$

$$g_T(t)\leftrightarrow TSa(\frac{Tw}{2})\ \therefore h(t)=g_T(t-\frac{T}{2})\leftrightarrow TSa(\frac{Tw}{2})e^{-jwT/2}=H(jw)$$

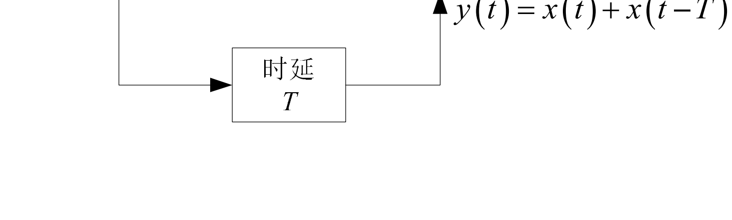
$$H(jf)=TSa(T2\pi f/2)e^{-j2\pi fT/2}$$

$$S_y(f)=|H(jf)|^2 S_x(f)=T^2Sa^2(\pi Tf)S_x(f)$$

$$S_{yx}(f)=H(jf)S_x(f)=TSa(\pi Tf)S_x(f)e^{-j\pi fT}$$

2-4 平稳随机过程$\{x(t)\}$通过如图 2.8 所示的系统后的输出为$\{y(t)\}$，证明：

$\{y(t)\}$的功率谱密度函数$S_y(\omega)=2S_x(\omega)(1+\cos\omega T)$.



证：

对 $y(t)=x(t)+x(t-T)$ 两边作 Fourier 变换，可得 $Y(\omega)=X(\omega)+x(\omega)e^{-j\omega T}$，则

$$H(j\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=1+e^{-j\omega T}$$

$$\Rightarrow \left|H(j\omega)\right|^2=\left|1+e^{-j\omega T}\right|^2=2(1+\cos\omega T)$$

由输入输出关系式可得

$$S_y(\omega)=\left|H(j\omega)\right|^2 S_x(\omega)=2(1+\cos\omega T)S_x(\omega)$$

得证公式。

2-5 设 $\{x(t)\}$ 与 $\{y(t)\}$ 都为平稳随机过程，通过图 2.9 的调制系统后，输出为 $\{z(t)\}$，（1）求 $\{z(t)\}$ 的自相关函数；（2）当 $R_x(\tau)=R_y(\tau)$，$R_{xy}(\tau)=0$ 时，证明：$R_z(\tau)=R_x(\tau)\cos\omega\tau$。

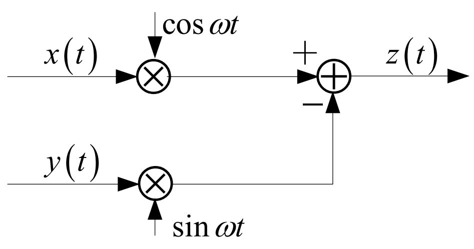


图 2.9

解：（1） $z(t)=x(t)\cos\omega t-y(t)\sin\omega t$

$$\begin{aligned}R_z(t_1,t_2)=E\{z(t_1)z(t_2)\}\\ &=E\{[x(t_1)\cos\omega t_1-y(t_1)\sin\omega t_1][x(t_2)\cos\omega t_2-y(t_2)\sin\omega t_2]\}\\ &=R_x(t_1,t_2)\cos\omega t_1\cos\omega t_2+R_y(t_1,t_2)\sin\omega t_1\sin\omega t_2\\ &\quad -R_{xy}(t_1,t_2)\cos\omega t_1\sin\omega t_2-R_{yx}(t_1,t_2)\cos\omega t_2\sin\omega t_1\end{aligned}$$

因为 $x(t),y(t)$ 为平稳随机过程，

上式 $=R_x(\tau)\cos\omega t_1\cos\omega t_2+R_y(\tau)\sin\omega t_1\sin\omega t_2-R_{xy}(\tau)\cos\omega t_1\sin\omega t_2-R_{yx}(\tau)\cos\omega t_2\sin\omega t_1$

（2）

$R_x(\tau)=R_y(\tau),R_{xy}(\tau)=0,$则$R_{yx}(\tau)=0$

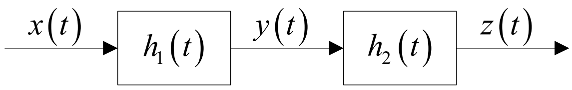
可得，

$$R_z(\tau)=R_x(\tau)[\cos\omega t_1\cos\omega t_2+\sin\omega t_1\sin\omega t_2]=R_x(\tau)\cos\omega\tau$$

2-6 如图 2.10 所示为串联线性时不变系统，输入$\{x(t)\}$为广义平稳随机信号，第一个系统的输出为$\{y(t)\}$，第二个系统的输出为$\{z(t)\}$，

（1）求$\{z(t)\}$和$\{y(t)\}$的互相关函数$R_{yz}(\tau)$；

（2）证明：$\{z(t)\}$的功率谱密度$S_z(f)=|H_1(f)|^2|H_2(f)|^2 S_x(f)$，其中$H_1(f), H_2(f)$分别为$h_1(t), h_2(t)$的傅立叶变换。



解： $R_{yz}(\tau)=E\{z(t_1)y(t_2)\}=\int_{-\infty}^{\infty}h_2(\tau_1)E\{y(t_2)y(t_1-\tau_1)\}d\tau_1=\int_{-\infty}^{\infty}h_2(\tau_1)R_y(\tau-\tau_1)d\tau_1$

$R_y(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h_1(\tau_2)h_1(\tau_3)R_x(\tau-\tau_2+\tau_3)d\tau_2 d\tau_3$

$R_{yz}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h_2(\tau_1)h_1(\tau_2)h_1(\tau_3)R_x(\tau-\tau_1-\tau_2+\tau_3)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3$

（2）证明：对h_1系统有： $S_y(f)=|H_1(f)|^2 S_x(f)$

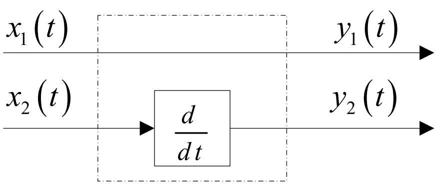
对h_2系统有： $S_z(f)=|H_2(f)|^2 S_y(f)$

$\therefore S_z(f)=|H_1(f)|^2|H_2(f)|^2 S_x(f)$

2-7 假设线性系统如图 2.11 所示：输入端$\{x_1(t)\}$与$\{x_2(t)\}$为联合广义平稳随机过程，输出分别为$\{y_1(t)\}$和$\{y_2(t)\}$。

（1）求输出端互相关函数$R_{y_1y_2}(\tau)$与输入端互相关函数$R_{x_1x_2}(\tau)$的关系式；

（2）若$\{x(t)=x_1(t)+x_2(t)\}$，作用到冲激响应为$h(t)$的线性时不变系统，输出为$\{y(t)\}$，求$\{y(t)\}$的均值，自相关函数以及功率谱密度。



解:（1）输出端自相关函数：

$$
\begin{aligned}
R_{y_1y_2}(\tau) &= E\{y_1(t_1)y_2(t_2)\} = E\{x_1(t_1)\frac{d}{dt}x_2(t_2)\} \\
&= E\{x_1(t_1)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x_2(t_2+\Delta t)-x_2(t_2)}{\Delta t}\} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{E\{x_1(t_1)x_2(t_2+\Delta t)-x_1(t_1)x_2(t_2)\}}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{R_{x_1x_2}(\tau-\Delta t)-R_{x_1x_2}(\tau)}{\Delta t} \\
&= -\frac{d}{dt}R_{x_1x_2}(\tau)
\end{aligned}
$$

（2）输出 $y(t)=x(t)*h(t)=x_1(t)*h(t)+x_2(t)*h(t)$

均值

$$
\begin{aligned}
m_y(t) = E\{y(t)\} &= E\{\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)x_1(t-\tau)d\tau\}+E\{\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)x_2(t-\tau)d\tau\} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)m_{x_1}(t-\tau)d\tau+\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)m_{x_2}(t-\tau)d\tau \\
&= h(\tau)*[m_{x_1}(t)+m_{x_2}(t)]
\end{aligned}
$$

因为 $x_1(t),x_2(t)$ 为联合广义平稳随机过程，则

$$m_y(t)=(m_{x_1}+m_{x_2})\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)d\tau=(m_{x_1}+m_{x_2})H(0)$$

自相关函数

$$
\begin{aligned}
&R_y(t_1,t_2)=E\{y(t_1)y(t_2)\} \\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau_1)h(\tau_2)R_x(\tau-\tau_1+\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau_1)h(\tau_2)[R_{x_1}(\tau-\tau_1+\tau_2)+R_{x_2}(\tau-\tau_1+\tau_2)+R_{x_2x_1}(\tau-\tau_1+\tau_2)+R_{x_1x_2}(\tau-\tau_1+\tau_2)]d\tau_1 d\tau_2
\end{aligned}
$$

功率谱密度函数

$$S_y(\omega)=|H(j\omega)|^2 S_x(\omega)$$

又，$S_x(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=S_{x_1}(\omega)+S_{x_1x_2}(\omega)+S_{x_2x_1}(\omega)+S_{x_2}(\omega)$

则 $S_y(\omega)=|H(j\omega)|^2 S_x(\omega)=|H(j\omega)|^2[S_{x_1}(\omega)+S_{x_1x_2}(\omega)+S_{x_2x_1}(\omega)+S_{x_2}(\omega)]$

2-8 零均值平稳过程 $x(t)$ 通过冲激响应为 $h(t)=ae^{-at}$, $t\ge 0$ 的线性滤波器，证明：

（1）滤波器输出的功率谱密度为 $\dfrac{a^2}{a^2+\omega^2}S_x(\omega)$；

（2）如果滤波器的响应函数是指数形式的一段：$h(t)=\begin{cases} ae^{-at}, & 0\le t\le T \\ 0, & 其它 \end{cases}$，则输出的功率谱密度为$\dfrac{a^2}{a^2+\omega^2}(1-2e^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT})S_x(\omega)$。

证明：

（1）　$h(t)=ae^{-at}, t\ge 0$

对 h(t)作傅里叶变换有

$$H(jw)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)e^{-jwt}dt=a\int_0^{+\infty}e^{-at}e^{-jwt}dt=\frac{a}{a+jw}$$

因为 x(t)为平稳过程，故经过该线性是不变系统之后输出 y(t)也是平稳过程

$$\Rightarrow S_Y(w)=\left|H(jw)\right|^2\cdot S_X(w)$$

$$=\frac{a}{a+jw}\cdot\frac{a}{a-jw}\cdot S_X(w)$$

$$=\frac{a^2}{a^2+w^2}S_X(w)$$

得证

（2）分析同（1）中

$$H(jw)=\int_0^T ae^{-at}e^{-jwt}dt=\frac{a}{a+jw}e^{-(a+jw)t}\Big|_0^T$$

$$=\frac{a}{a+jw}\left[1-e^{-(a+jw)T}\right]$$

$$\Rightarrow H(jw)H(-jw)$$

$$=\frac{a}{a+jw}\cdot\frac{a}{a-jw}\left[1-e^{-(a+jw)T}\right]\left[1-e^{-(a-jw)T}\right]$$

$$=\frac{a^2}{a^2+w^2}\left[1-e^{-aT}e^{jwT}-e^{-aT}e^{-jwT}+e^{-2aT}\right]$$

$$=\frac{a^2}{a^2+w^2}\left(1-2\cos wT+e^{-2aT}\right)$$

$$\therefore S_Y(w)=\left|H(jw)\right|^2\cdot S_X(w)=\frac{a^2}{a^2+w^2}\left(1-2\cos wT+e^{-2aT}\right)\cdot S_X(w)$$

得证

2-9 均值为零、方差为$\sigma_n{}^2$的白噪声系列$\{n(k)\}$通过冲激响应为$h(k)=\begin{cases}1, & k=0,1,2,3\\ 0, & 其它\end{cases}$的线性时不变系统，输出为$\{y(k)\}$，求

(1) $\{y(k)\}$的均值；

(2) $\{y(k)\}$与$\{n(k)\}$的互相关函数；

(3) $\{y(k)\}$的自相关函数。

解：

(1) $E\{y(k)\}=E\{h(k)*n(k)\}=E\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)n(k-m)\right\}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)E\{n(k-m)\}$，

由于白噪声序列$E\{n(k)\}=0$，故$E\{y(k)\}=0$。

(2)

$$R_{ny}(k_1,k_2)=E\{n(k_1)y(k_2)\}=E\left\{n(k_1)\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)n(k_2-m)\right\}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)E\{n(k_1)n(k_2-m)\}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)R_n(k_1,k_2-m)=\sigma_n^2\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)\delta(k_1-k_2+m)$$

$$=\sigma_n^2\left(\delta(k_1-k_2)+\delta(k_1-k_2+1)+\delta(k_1-k_2+2)+\delta(k_1-k_2+3)\right),$$

即$R_{ny}(\tau)=\sigma_n^2\sum_{i=0}^{3}\delta(\tau+i)$，同理可得$R_{yn}(\tau)=\sigma_n^2\sum_{i=0}^{3}\delta(\tau-i)$。

(3) $R_y(k_1,k_2)=E\{y(k_1),y(k_2)\}=E\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)n(k_1-m)\sum_{l=-\infty}^{\infty}h(l)n(k_2-l)\right\}$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}h(m)h(l)E\{n(k_1-m)n(k_2-l)\}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}h(m)h(l)R_n(k_1-k_2-m+l)$$

$=\sigma_n^2\sum_{m=0}^{3}\sum_{l=0}^{3}\delta(k_1-k_2-m+l)$，即$R_y(\tau)=\sigma_n^2\sum_{m=0}^{3}\sum_{m=0}^{3}\delta(\tau-m+l)$，可得

$$R_y(\tau)=\sigma_n^2\left(\delta(\tau-3)+2\delta(\tau-2)+3\delta(\tau-1)+4\delta(\tau)+3\delta(\tau+1)+2\delta(\tau+2)+\delta(\tau+3)\right)$$

2-10 线性时不变系统输入$\{x(n)\}$与输出$\{y(n)\}$的关系为

$y(n)=ay(n-1)+bx(n)$，其中a,b为常数，这是一个一阶 AR 模型，若$\{x(n)\}$是功率谱密度为$S_x(\Omega)=1$的平稳随机过程，求：

（1）$\{y(n)\}$的自相关函数；

（2）$\{y(n)\}$的功率谱密度。

解：

1） $S_x(\omega)=1 \Rightarrow R_x(m)=\delta(m)$，将$y(n)-ay(n-1)$与$y(n-m)-ay(n-m-1)$相乘，

$E\{[y(n)-ay(n-1)][y(n-m)-ay(n-m-1)]\}=E\{b^2x(n)x(n-m)\}$，则可得：

$(1+a^2)R_Y(m)-aR_Y(m-1)-aR_Y(m+1)=b^2\delta(m)$，则有

$$\begin{cases}(1+a^2)R_Y(0)-aR_Y(-1)-aR_Y(1)=b^2\\ (1+a^2)R_Y(1)-aR_Y(0)-aR_Y(2)=0\\ (1+a^2)R_Y(-1)-aR_Y(-2)-aR_Y(0)=0\\ R_Y(m)=R_Y(-m)\end{cases}$$

由方程组可求得$R(0)$，$R(1)$与$R(2)$，并根据这三个值与递推关系得$R_y(m)=\dfrac{a^{|m|}b^2}{1-a^2}$。

2）对 $y(n)-ay(n-1)=bx(n)$ 两边作 Fourier 变换，有

$Y(\Omega)(1-ae^{-j\Omega})=bX(\Omega)$，

可得$H(j\Omega)=\dfrac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}=\dfrac{b}{1-ae^{-j\Omega}}$，则$S_Y(\Omega)=|H(j\Omega)|^2S_x(\Omega)=\dfrac{b^2}{|1-ae^{-j\Omega}|^2}$。

2-11 均值为零、方差为$\sigma_x{}^2$的白噪声序列$\{x(n)\}$通过图 2.12 的离散系统，其中$h_1(n)=a^nu(n)$，$h_2(n)=b^nu(n)$且$|a|<1$和$|b|<1$，输出为$\{z(n)\}$，求：

（1）$\{z(n)\}$的自相关函数；

（2）$\{z(n)\}$的功率谱密度。

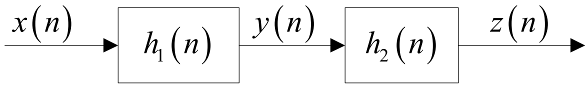


图 2.12

解：

1） 由 $h_1(n)=a^n u(n) \Rightarrow y(n)=ay(n-1)+x(n)$,

以及 $h_2(n)=b^n u(n) \Rightarrow z(n)=bz(n-1)+y(n)$,

得 $z(n)-(a+b)z(n-1)+abz(n-2)=x(n)$,

$$H(j\Omega)=\frac{1}{1-(a+b)e^{-j\Omega}+abe^{-j2\Omega}}=\frac{1}{(1-ae^{-j\Omega})(1-be^{-j\Omega})}=\frac{1}{a-b}\left(\frac{a}{1-ae^{-j\Omega}}-\frac{b}{1-be^{-j\Omega}}\right)$$

则可知 $h(n)=\frac{a}{a-b}a^n u(n)-\frac{b}{a-b}b^n u(n)$，又此系统属于 AR 模型，则 $R_z(m)$ 满足递推条件：$R_z(m)=\sigma_x^2 h(-m)+(a+b)R_z(m-1)-abR_z(m-2)$，由递推条件以及对称关系 $R_z(m)=R_z(-m)$ 可得 $R_z(m)$ 的显式表示，方法同上题。

2） 由 $S_x(\Omega)=\sigma_x^2$ 及 $H(j\Omega)=\frac{1}{1-(a+b)e^{-j\Omega}+abe^{-j2\Omega}}$，可得 $\{z(n)\}$ 的功率谱密度函数为

$$S_x(\Omega)=|H(j\Omega)|^2 S_x(\Omega)=\frac{\sigma_x^2}{\left|1-(a+b)e^{-j\Omega}+abe^{-j2\Omega}\right|^2}$$ 。

2-12 均值为零、方差为 $\sigma_x{}^2$ 的白噪声序列 $\{x(n)\}$ 先通过一个平均器，其输出 $\{y(n)\}$ 与 $\{x(n)\}$ 的关系为 $y(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x(n-1)]$，$\{y(n)\}$ 再通过一个差分器，其输出 $\{z(n)\}$ 与 $\{y(n)\}$ 的关系为 $z(n)=y(n)-y(n-1)$，求 $\{z(n)\}$ 的均值 m_z、方差 $\sigma_z{}^2$、自相关函数 $R_z(k)$ 以及其功率谱密度 $S_z(\omega)$。

解：由题目中条件可知，两个系统的单位冲激响应分别为

平均器：$h_1(n)=\frac{1}{2}\delta(n)+\frac{1}{2}\delta(n-1)$　　差分器：$h_2(n)=\delta(n)-\delta(n-1)$

故而，整个系统的冲激响应为

$$h(n)=h_1(n)*h_2(n)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\delta(n)+\delta(n-1)\right]*\left[\delta(n)-\delta(n-1)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\delta(n)-\delta(n-2)\right]$$

输出序列的均值为：

$$m_z=E(z(n))=E\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h(k)x(n-k)\}=m_X\cdot\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h(k)=0$$

$$\sigma_z^2=E\{z(n)-m_z\}^2=E\{z(n)\}^2=R_z(0)$$

$$H(jw)=\frac{1}{2}(1-e^{-2jw})$$

$$\Rightarrow\left|H(jw)\right|^2=\frac{1}{4}(1-e^{-2jw})\cdot(1-e^{2jw})=\frac{1}{4}(1-2\cos 2w+1)=\frac{1}{2}(1-\cos 2w)$$

输出的功率谱密度函数为：

$$S_z(w)=\left|H(jw)\right|^2\cdot S_X(w)=\frac{1}{2}(1-\cos 2w)\sigma_X^2$$

自相关函数为：

$$R_z(k)=E\{z(n_1)z(n_2)\}$$

$$=E\{\frac{1}{2}[x(n_1)-x(n_1-2)]\cdot\frac{1}{2}[x(n_2)-x(n_2-2)]\}$$

$$=\frac{1}{4}\sigma_X^2[2\delta(k)-\delta(k+2)-\delta(k-2)]$$

$$\therefore\sigma_z^2=R_z(0)=\frac{1}{2}\sigma_X^2$$

2.16 线性时不变系统输入 $\{x(n)\}$ 与输出 $\{y(n)\}$ 的关系为 $y(n)=x(n)+b_1y(n-1)+b_2y(n-2)$，这是一个二阶 AR 模型，$\{x(n)\}$是零均值、方差为$\sigma_x{}^2$的白噪声序列。

（1）求使$\{y(n)\}$平稳的条件；

（2）证明$\{y(n)\}$的功率谱密度为：

$$S_y(\omega)=\sigma_x{}^2\left[1+b_1{}^2+b_2{}^2-2b_1(1-b_2)\cos\omega-2b_2\cos 2\omega\right]^{-1}$$

（3）求$\{y(n)\}$的自相关函数。

解：（1） $y(n)$ 平稳，则需系统为因果稳定的。

系统的传输函数：

$$H(z)=\frac{1}{1-b_1z^{-1}-b_2z^{-2}}=\frac{1}{(1-\alpha_1z^{-1})(1-\alpha_2z^{-1})}$$

极点为：

$$\alpha_{1,2}=\frac{b_1\pm\sqrt{b_1^2+4b_2}}{2}$$

为使系统平稳，则需 $|\alpha_{1,2}|<1$。

（2）输出的功率谱密度函数 $S_x(\omega)=\sigma_x^2$

系统传输函数 $H(j\omega)=\dfrac{1}{1-b_1e^{-j\omega}-b_2z^{-j2\omega}}$

$$|H(j\omega)|^2=\frac{1}{(1+b_1^2+b_2^2-2b_1\cos\omega-2b_2\cos 2\omega+2b_1b_2\cos\omega)}$$

输出的功率谱密度函数：

$$S_y(\omega)=|H(j\omega)|^2\,S_x(\omega)=\frac{\sigma_x^2}{(1+b_1^2+b_2^2-2b_1\cos\omega-2b_2\cos 2\omega+2b_1b_2\cos\omega)}$$

（3）冲激函数

$$h(n)=\begin{cases}b_1h(n-1)+b_2h(n-2)+\delta(n), & n\ge 0\\ 0 & ,n<0\end{cases}$$

则输出的自相关函数

$$R_y(n)=\sigma_x^2h(-n)+b_1R_y(n-1)+b_2R_y(n-2)$$

2-17 线性时不变系统输入 $\{x(n)\}$ 与输出 $\{y(n)\}$ 的关系为 $y(n)=x(n)+a_1x(n-1)+a_2x(n-2)$，这是一个二阶 MA 模型，若 $\{x(n)\}$ 的功率谱密度函数为 $S_x(\omega)=\sigma_x{}^2$，求 $\{y(n)\}$ 的自相关函数和功率谱密度。

解：

由 $y(n)=x(n)+a_1x(n-1)+a_2x(n-2)$

有 $Y(z)=X(z)+a_1z^{-1}X(z)+a_2z^{-2}X(z)$

则系统函数 $H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}=1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}$

系统冲激响应为 $h(n)=\delta(n)+a_1\delta(n-1)+a_2\delta(n-2)$

又 $S_x(w)=\sigma_x{}^2$ 则 $R_x(\tau)=\sigma_x{}^2\delta(\tau)$，则

$$R_y(n_1,n_2)=\sum_{k_1=-\infty}^{+\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{+\infty}h(k_1)h(k_2)R_x(n_1-k_1,n_2-k_2)$$
$$=\sum_{k_1=0}^{q}\sum_{k_2=0}^{q}\left[\delta(k_1)+a_1\delta(k_1-1)+a_2\delta(k_1-2)\right]\left[\delta(k_2)+a_1\delta(k_2-1)+a_2\delta(k_2-2)\right]\cdot\sigma_x{}^2\delta(n_1-k_1-n_2+k_2)$$
$$=\sum_{k_1=0}^{2}\sum_{k_2=0}^{2}\left[\delta(k_2)+a_1\delta(k_2-1)+a_2\delta(k_2-2)\right]\cdot\sigma_x{}^2\delta(n_1-n_2-k_1+k_2)$$
$$\underline{\underline{\tau=n_1-n_2}}\left(1+a_1{}^2+a_2{}^2\right)\sigma_x{}^2\delta(\tau)+a_1(1+a_2)\sigma_x{}^2\left[\delta(\tau-1)+\delta(\tau+1)\right]+a_2\sigma_x{}^2\left[\delta(\tau-2)+\delta(\tau+2)\right]$$

$$\Rightarrow R_y(\tau)=\begin{cases}1+a_1^2+a_2^2 & \tau=0\\ a_1+a_1a_2 & \tau=\pm1\\ a_2 & \tau=\pm2\end{cases}$$

由于 $H(z)=1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}$，则

$$H(\Omega)=1+a_1e^{-j\Omega}+a_2e^{-2j\Omega}=1+a_1\cos\Omega-ja_1\sin\Omega+a_2\cos2\Omega-ja_2\sin2\Omega$$
$$=\left(1+a_1\cos\Omega+a_2\cos2\Omega\right)-j\left(a_1\sin\Omega+a_2\sin2\Omega\right)$$

则

$$\left|H(j\Omega)\right|^2=\left(1+a_1\cos\Omega+a_2\cos2\Omega\right)^2+(a_1\sin\Omega+a_2\sin2\Omega)^2$$
$$=1+a_1^2+a_2^2+2a_1(1+a_2)\cos\Omega+2a_2\cos2\Omega$$

又 $S_x(\Omega)=\sigma_x{}^2$ ，故

$$S_x(\Omega)=\sigma_x{}^2S_y(\Omega)=\left|H(j\Omega)\right|^2S_x(\Omega)=\sigma_x{}^2\left[1+a_1^2+a_2{}^2+2a_1(1+a_2)\cos\Omega+2a_2\cos2\Omega\right]$$

3-1 二元假设如下：

$$H_0: x = n$$
$$H_1: x = s + n$$

其中s与n是统计独立的随机变量，它们的概率密度函数分别是

$$f_s(s) = \frac{1}{2}e^{-|s|}$$
$$f_n(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-n^2/2}$$

（1） 求似然比统计量；

（2） 若采用最小平均错误概率准则，求检测器的门限与假设先验概率之间的关系；

（3） 若采用纽曼-皮尔逊准则，求检测门限与虚警概率的函数关系.

解：（1）最大似然函数为：

$$H_0: f(x|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$
$$H_1: f(x|H_1) = f_s(x) * f_n(x)$$

$$\begin{aligned}H_1: f(x|H_1) &= f_s(x) * f_n(x)\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_s(x-n) f_n(n) dn\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-|x-n|}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-n^2/2}dn\\ &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-x+n-n^2/2}dn + \int_{x}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-n+x-n^2/2}dn\\ &= \frac{1}{2}e^{-x+\frac{1}{2}}\Phi(x-1) + \frac{1}{2}e^{x+\frac{1}{2}}[1-\Phi(x+1)]\end{aligned}$$

$$\lambda(x) = \frac{f(x|H_1)}{f(x|H_0)} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}e^{\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2}}\Phi(x-1) + \frac{\sqrt{2\pi}}{2}e^{\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}}[1-\Phi(x+1)]$$

（2）假设先验概率分别为$P(H_0), P(H_1)$，则检测门限为

$$th = \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$$

（3）设虚警概率为α，则

$$\alpha = P(D_1|H_0) = \int_{th'}^{+\infty} f(x|H_0)dx = \int_{th'}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx = 1-\Phi(th')$$

其中th'为检测门限。

3-4 观测样本x在两种假设下分别服从均值不同的高斯分布

H_0:　　$x \sim N\left(0, \sigma^2\right)$

H_1:　　$x \sim N\left(1, \sigma^2\right)$

已知$P(H_i) = 1/2 \quad (i = 0,1)$。将样本$x$通过一个平方器，它的输出与输入之间满足

$y = ax^2$。采用最小错误概率判决对 y 进行判决，求判决规则。

解：由 $y = ax^2$，可以求得 y 的概率密度函数表达式为：

$$f(y) = \frac{1}{2a\sqrt{\frac{y}{a}}}\left[f_x(\sqrt{\frac{y}{a}}) + f_x(-\sqrt{\frac{y}{a}}) \right]$$

可得：

$$f(y \mid H_0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2ay\pi}} e^{-\frac{y}{2a\sigma^2}}$$

$$f(y \mid H_1) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{2ay\pi}}\left[e^{-\frac{(\sqrt{\frac{y}{a}}-1)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(-\sqrt{\frac{y}{a}}-1)^2}{2\sigma^2}} \right]$$

判决准则为：

$$\frac{f\left(y \mid H_1\right)}{f\left(y \mid H_0\right)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P\left(H_0\right)}{P\left(H_1\right)} = 1$$

化简得到判决规则为：

$$\ln(e^{\frac{2\sqrt{\frac{y}{a}}}{\sigma^2}} + 1) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln 2 + \frac{1}{2\sigma^2}$$

3-4 观测样本 x 在两种假设下分别服从均值不同的高斯分布

$$H_0: \quad x \sim N\left(0, \sigma^2\right)$$
$$H_1: \quad x \sim N\left(1, \sigma^2\right)$$

已知 $P(H_i) = 1/2 \ (i = 0,1)$。将样本 x 通过一个平方器，它的输出与输入之间满足 $y = ax^2$。采用最小错误概率判决对 y 进行判决，求判决规则。

解：由 $y = ax^2$，可以求得 y 的概率密度函数表达式为：

$$f(y) = \frac{1}{2a\sqrt{\frac{y}{a}}}\left[f_x(\sqrt{\frac{y}{a}}) + f_x(-\sqrt{\frac{y}{a}}) \right]$$

可得：$f(y \mid H_0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2ay\pi}} e^{-\frac{y}{2a\sigma^2}}$

$$f(y\mid H_1)=\frac{1}{2\sigma\sqrt{2ay\pi}}\left[e^{-\frac{(\sqrt{\frac{y}{a}}-1)^2}{2\sigma^2}}+e^{-\frac{(-\sqrt{\frac{y}{a}}-1)^2}{2\sigma^2}}\right]$$

判决准则为：

$$\frac{f(y|H_1)}{f(y|H_0)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{P(H_0)}{P(H_1)}=1$$

化简得到判决规则为：

$$\ln(e^{\frac{\sqrt{\frac{y}{a}}}{\sigma^2}}+e^{-\frac{\sqrt{\frac{y}{a}}}{\sigma^2}})\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\ln 2+\frac{1}{2\sigma^2}$$

3-5 二元通信系统观测模型为

$$H_0: x=-1+n$$
$$H_1: x=1+n$$

其中n是零均值，方差为$\sigma_n{}^2=0.5$的高斯白噪声，若两种假设的先验概率相等，判决风险函数为

$$C_{00}=1, C_{11}=1, C_{10}=5, C_{01}=5$$

求贝叶斯判决规则和平均风险。

解：H_0假设下$x\sim N(-1,0.5)$

H_1假设下$x\sim N(1,0.5)$

H_0假设下$x\sim N(-1,0.5)$

$$\frac{f(x|H_1)}{f(x|H_0)}=\exp(\frac{2x}{\sigma_n^2})\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{P(H_0)(C_{10}-C_{00})}{p(H_1)(C_{01}-C_{11})}$$

$$e^{4x}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}1=th\Rightarrow x\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}0=th'$$

$$P(D_0|H_0)=\int_{-\infty}^{0}f(x|H_0)dx=\Phi(\sqrt{2})$$

$$P(D_1|H_0)=1-P(P(D_0|H_0)=1-\Phi(\sqrt{2})$$

$$P(D_0|H_1)=\int_{0}^{+\infty}f(x|H_1)dx=1-\Phi(\sqrt{2})$$

$$P(D_1|H_1)=1-P(P(D_0|H_1)=\Phi(\sqrt{2})$$

$$\therefore \overline{C}=P(H_0)[C_{00}P(D_0|H_0)+C_{10}P(D_1|H_0)]+P(H_1)[C_{01}P(D_0|H_1)+C_{11}P(D_1|H_1)]$$
$$=5-4\Phi(\sqrt{2})=1.3148$$

3-7　二元假设如下：

$$H_0: \quad x = n$$
$$H_1: \quad x = A + n$$

式中，A 为常数，噪声 n 的概率密度函数为

$$f_n(n) = \frac{1}{\pi C} \frac{1}{1 + (n / C)^2} \qquad -\infty < n < +\infty$$

若 $P(H_i) = 1/2 \ (i = 0,1)$。

证明：（1）最小错误概率检验的判决规则为：如果 $x \geq A/2$，判为 H_1，反之，判为 H_0。

（2）错判概率为 $P_e = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan(\frac{A}{2C})$

解：（1） $f(x \mid H_0) = \frac{1}{\pi C} \frac{1}{1 + (x / C)^2}$，$f(x \mid H_1) = \frac{1}{\pi C} \frac{1}{1 + ((A + x) / C)^2}$

判决准则为：

$$\frac{f\left(x \middle| H_1\right)}{f\left(x \middle| H_0\right)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P\left(H_0\right)}{P\left(H_1\right)} = 1$$

化简得到判决规则：$x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} A / 2$

（2）错判概率为：

$$p_e = p(H_0) \int_{-\infty}^{A/2} f(x \mid H_0) dx + p(H_1) \int_{A/2}^{+\infty} f(x \mid H_1) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan(\frac{A}{2C})$$

3-8 在实际情况中，我们得到的两种假设下观测值的概率密度函数是离散的。如果在概率密度函数中使用冲激函数，同样可以推导似然比检验。假定在二元假设下得到的观测值服从泊松分布：

$$\begin{cases} P(x = n \mid H_0) = \dfrac{m_0^x}{x!} \exp(-m_0) \\ P(x = n \mid H_1) = \dfrac{m_1^x}{x!} \exp(-m_1) \end{cases} \qquad n = 0,1,2,...$$

若 $m_1 > m_0, P(H_0) = P(H_1)$，试证明：

（1） 似然判决规则是 $x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{m_1 - m_0}{\ln m_1 - \ln m_0}$;

（2） 虚警概率为 $\alpha = 1 - \exp(-m_0) \sum_{n=0}^{n_0 - 1} \frac{(m_0)^n}{n!}$，漏警概率 $\beta = \exp(-m_1) \sum_{n=0}^{n_0 - 1} \frac{(m_1)^n}{n!}$，其中

$n_0 = \left\lceil \frac{m_1 - m_0}{\ln m_1 - \ln m_0} \right\rceil$ 表示对 $\frac{m_1 - m_0}{\ln m_1 - \ln m_0}$ 向上取整数。

证明：（1） $\lambda(x)=\dfrac{P(x=n\,|\,H_1)}{P(x=n\,|\,H_0)}=\dfrac{\dfrac{m_1^x}{x!}\exp(-m_1)}{\dfrac{m_0^x}{x!}\exp(-m_0)}\mathop{\gtrless}\limits^{H_1}_{H_0}\dfrac{P(H_0)}{P(H_1)}=1$

$$(\frac{m_1}{m_0})^x\exp(m_0-m_1)\mathop{\gtrless}\limits^{H_1}_{H_0}1$$

$$\exp[x(\ln m_1-\ln m_0)]\mathop{\gtrless}\limits^{H_1}_{H_0}\exp(m_1-m_0)$$

$$\therefore x\mathop{\gtrless}\limits^{H_1}_{H_0}\frac{m_1-m_0}{\ln m_1-\ln m_0}$$

（2）

$$\alpha=1-P(D_0\,|\,H_0)=1-P(x=n<n_0\,|\,H_0)=1-\sum_{n=0}^{n_0-1}P(x=n\,|\,H_0)$$

$$=1-\sum_{n=0}^{n_0-1}\frac{m_0^n}{n!}\exp(-m_0)=1-\exp(-m_0)\sum_{n=0}^{n_0-1}\frac{(m_0)^n}{n!}$$

$$\beta=P(D_0\,|\,H_1)=P(x=n<n_0\,|\,H_1)=\sum_{n=0}^{n_0-1}P(x=n\,|\,H_1)$$

$$=\sum_{n=0}^{n_0-1}\frac{m_1{}^n}{n!}\exp(-m_1)=\exp(-m_1)\sum_{n-0}^{n_0-1}\frac{(m_1)^n}{n!}$$

其中$n_0=\left\lceil\dfrac{m_1-m_0}{\ln m_1-\ln m_0}\right\rceil$

3-9 设有如下二元假设

$$\begin{matrix}H_0: & x_i=n_i \\ H_1: & x_i=1+n_i\end{matrix}\quad i=1,2,\cdots,10$$

n_i是均值为 0，方差为 0.09 的高斯白噪声。现令虚警概率$\alpha=10^{-8}$，如判决规则定为

$$G=\sum_{i=1}^{10}x_i\mathop{\gtrless}\limits^{H_1}_{H_0}G_T$$

试求G_T的值以及相应的检测概率。

解：由条件得：$G\,|\,H_0\sim N(0,0.9)$，　$G\,|\,H_1\sim N(10,0.9)$

$$p_{fa}=p(G\,|\,H_0)=\int_{G_T}^{+\infty}f(G\,|\,H_0)dG=1-\Phi\left(\frac{G_T}{\sqrt{0.9}}\right)=10^{-8}$$

求得：$G_T=5.3241$

从而可求：

$$p_D = p(G|H_1) = \int_{G_T}^{+\infty} f(G|H_1)dG = 1-\Phi(\frac{G_T-10}{\sqrt{0.9}}) = 1-4.135\times10^{-7}$$

3-11 假设 $x_i(i=1,2,...,N)$ 是独立同分布的高斯随机变量，它们的概率密度函数为

$$f(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta}\exp\left\{-\frac{x_i^2}{2\delta^2}\right\}$$

则随机变量 $y=\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ 是自由度为 n 的 χ^2 分布

（1）二元假设如下：

$$\begin{aligned} H_0 &: n=2 \\ H_1 &: n=N \end{aligned}$$

假设 $C_{00}=C_{11}=0, C_{10}=C_{01}=1$，求极大极小准则下的判决规则；

（2）假定 H_1 中自由度数是一离散随机变量，其概率函数为如下两点分布

$$P(n=N)=P(n=M)=\frac{1}{2}$$

这种情况下的判决规则如何？

解：（1） $f(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta}\exp\left\{-\frac{x_i^2}{2\delta^2}\right\}$， $y=\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ 是自由度为 n 的 χ^2 分布

$$f(n) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}$$

$$H_0: n=2 \qquad f(y|H_0) = f(2) = \frac{1}{2\Gamma(1)} e^{-\frac{y}{2}}$$

$$H_1: n=N \qquad f(y|H_1) = f(N) = \frac{1}{2^{\frac{N}{2}}\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} y^{\frac{N}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}$$

极大极小准则： $\frac{f(y|H_1)}{f(y|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P_0(C_{10}-C_{00})}{(1-P_0)(C_{01}-C_{10})} = \frac{P_0}{1-P_0}$

$$\frac{1}{2^{\frac{N}{2}-1}\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} y^{\frac{N}{2}-1} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P_0}{1-P_0} \Rightarrow y \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \left[\frac{P_0}{1-P_0} 2^{\frac{N}{2}-1}\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)\right]^{\frac{2}{N-2}} = th'$$

P_0 满足极大极小方程：

$$\begin{aligned} &C_{10}\alpha(P_0) + C_{00}[1-\alpha(P_0)] = C_{01}\beta(P_0) + C_{11}(1-\beta(P_0)) \\ &\alpha(P_0) = \beta(P_0) \end{aligned}$$

$$\int_{th'}^{+\infty} f(y|H_0)dy = \int_{-\infty}^{th'} f(y|H_1)dy$$
$$\int_{th'}^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}dy = \int_{-\infty}^{th'} \frac{1}{2^{\frac{N}{2}}\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} y^{\frac{N}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}dy$$

（2） $f(y|H_0) = \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}$

$$f(y|H_1) = P(n=N)f(y,n) + P(n=M)f(y,n)$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{2^{\frac{N}{2}}\Gamma(N)} y^{\frac{N}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{2^{\frac{M}{2}}\Gamma(M)} y^{\frac{M}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}$$

$$\frac{f(y|H_1)}{f(y|H_0)} = \frac{1}{2^{\frac{N}{2}}\Gamma(N)} y^{\frac{N}{2}-1} + \frac{1}{2^{\frac{M}{2}}\Gamma(M)} y^{\frac{M}{2}-1} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P_0}{1-P_0} = th$$

P 满足 $\alpha(P_0) = \beta(P_0) \Rightarrow \int_{th'}^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}dy = \int_{-\infty}^{th'} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2^{\frac{N}{2}}\Gamma(N)} y^{\frac{N}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} + \frac{1}{2^{\frac{M}{2}}\Gamma(M)} y^{\frac{M}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}\right]dy$

th' 为 th 的函数。

3-12 观测值为 $y = \sum_{i=1}^{n} x_i$ ，其中 $x_i (i=1,2,...,N)$ 是独立同分布的高斯随机变量，它们的概率密度函数为

$$f(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}\right\}$$

样本数 N 服从 Poisson 分布的随机变量，

$$P(N=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{\lambda}, k=0,1,2,...$$

二元假设如下：

$$H_0 : N \ge 3$$
$$H_1 : N \le 2$$

求似然比检验统计量。

解：由题意知： $f_N(y) \sim N(0, N\sigma^2)$

$$F(h|H_1) = P(y' \le y|H_1) = P\left(\sum_{n=1}^{N} x_i \le y | N \le 2\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{2} P\left(\sum_{i=1}^{N} x_i \le y | N=n\right) P(N=n)$$

$$\therefore f(y|H_1) = \sum_{n=1}^{2} f_n(y)\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = \sum_{n=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{y^2}{2n\sigma^2}\right\}\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$$

$$f\left(y \mid H_0\right)=\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma} \exp\left\{-\frac{y^2}{2n\sigma^2}\right\} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$$

$$\therefore \lambda(x)=\frac{f\left(y \mid H_1\right)}{f\left(y \mid H_0\right)}=\frac{\sum_{n=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{n}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2n\sigma^2}\right\} \frac{\lambda^n}{n!}}{\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2n\sigma^2}\right\} \frac{\lambda^n}{n!}}$$

3-13 二元假设如下：

$$\left.\begin{aligned} H_0:\ f\left(x_i \middle| H_0\right)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2}\right) \\ H_1:\ f\left(x_i \middle| H_1\right)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\left(x_i-1\right)^2}{2}\right] \end{aligned}\right., \quad i=1,2,\cdots$$

已知$\alpha=\beta=0.1$， $P(H_i)=1/2\ (i=0,1)$。

（1）求序贯检测的判决规则。

（2）求序贯检测所需的平均样本数。

（3）若采用固定样本数的检测器，求满足性能要求所需的样本数。

解：（1）观测样本为 i 时的似然比函数为：

$$\lambda(\vec{x_i})=\prod_{j=1}^{i} \frac{f(\vec{x_i} \mid H_1)}{f(\vec{x_i} \mid H_0)}=\frac{\exp[-\sum_{j=1}^{i} \frac{(x_j-1)^2}{2}]}{\exp[-\sum_{j=1}^{i} \frac{x_j{}^2}{2}]}=\exp[\sum_{j=1}^{i} x_j-\frac{i}{2}]$$

取对数： $\ln \lambda(\vec{x_i})=\sum_{j=1}^{i} x_j-\frac{i}{2}$

$th_1=\frac{1-\beta}{\alpha}=9$， $th_0=\frac{1-\alpha}{\beta}=\frac{1}{9}$

$\ln th_0=-2.197$， $\ln th_1=2.197$

对数似然比判决规则为：

$$\begin{cases} \ln \lambda\left(\vec{\mathbf{x}}_i\right) \geq 2.197 & \text{判为} H_1 \\ \ln \lambda\left(\vec{\mathbf{x}}_i\right) \leq -2.197 & \text{判为} H_0 \\ -2.197<\ln \lambda\left(\vec{\mathbf{x}}_i\right)<2.197 & \text{接收下一个数据} \end{cases}$$

（2） $\ln \lambda(x)=x-\frac{1}{2}$

$$E\left\{\ln \lambda(x) \mid H_0\right\}=\int_{-\infty}^{\infty} \ln \lambda(x) f(x \mid H_0) dx=-\frac{1}{2}$$

$$E\{\ln\lambda(x)\mid H_1\}=\int_{-\infty}^{\infty}\ln\lambda(x)f(x\mid H_1)dx=\frac{1}{2}$$

$$E\{N|H_1\}\approx\frac{(1-\beta)\ln th_1+\alpha\ln th_0}{E\{\ln\lambda(x)|H_1\}}=3.515$$

$$E\{N|H_0\}\approx\frac{\alpha\ln th_1+(1-\alpha)\ln th_0}{E\{\ln\lambda(x)|H_0\}}=3.515$$

$$E\{N\}=\frac{\alpha\ln th_1+(1-\alpha)\ln th_0}{E\{\ln\lambda(x)|H_0\}}P(H_0)+\frac{(1-\beta)\ln th_1+\alpha\ln th_0}{E\{\ln\lambda(x)|H_1\}}P(H_1)=3.515$$

所以 N=4

（3）假设固定样本数为 N，似然比判决准则为：

$$\lambda\left(\vec{\mathbf{x}}_N\right)=\frac{f(x_1,x_2,\cdots,x_i|H_1)}{f(x_1,x_2,\cdots,x_i|H_0)}=\prod_{j=1}^{N}\frac{f(x_j|H_1)}{f(x_j|H_0)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{p(H_0)}{p(H_1)}$$

$$\ln\lambda(\vec{x}_N)=\sum_{j=1}^{N}x_j-\frac{N}{2}$$

判决规则为：

$$G=\ln\lambda(\vec{x}_N)=\sum_{j=1}^{N}x_j-\frac{N}{2}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}0$$

化简后有 $\bar{x}=\frac{\sum_{j=1}^{N}x_j}{N}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{1}{2}$

新变量 $\bar{x}$ 的分布为 $f(\bar{x}\mid H_1)\sim N(1,\frac{1}{N})$， $f(\bar{x}\mid H_0)\sim N(0,\frac{1}{N})$。

由虚警和漏警条件：

$$p(D_1\mid H_0)=\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}f(\bar{x}\mid H_0)d\bar{x}\le 0.1$$

$$p(D_0\mid H_1)=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}}f(\bar{x}\mid H_1)d\bar{x}\le 0.1$$

经查表得 $N\ge 6.656$
故 N=7。

3-14 在二元参量的统计检测中，两个假设下的信号分别为：

$$H_0: x\sim N(0,\sigma_n^2)$$
$$H_1: x\sim N(m,\sigma_n^2)$$

其中m是信号的参量。

（1）试给出m为确定量时的似然比判决（$m>0$和$m<0$时的判决规则不同）；

（2）m为随机参量，其概率密度函数为

$$f(m)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_m^2}}\exp\left(-\frac{m^2}{2\sigma_m^2}\right)$$

求此时的似然比判决规则；

（3）m为$[m_0,m_1]$上的均匀分布的随机参量，求此时的似然比判决规则。

解：（1）m为确定参量时

$$f\left(x\,|\,H_0\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

$$f\left(x\,|\,H_1\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n}\exp\left\{-\frac{\left(x-m\right)^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

$$\therefore\lambda\left(x\right)=\frac{f\left(x\,|\,H_1\right)}{f\left(x\,|\,H_0\right)}=\frac{\exp\left\{-\dfrac{\left(x-m\right)^2}{2\sigma_n^2}\right\}}{\exp\left\{-\dfrac{x^2}{2\sigma_n^2}\right\}}=\exp\left\{\frac{-m^2+2mx}{2\sigma^2}\right\}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{P(H_0)}{P(H_1)}$$

当$m>0$时，$x\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\dfrac{\sigma_n^2\cdot th}{m}+\dfrac{m}{2}$

当$m<0$时，$x\underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}}\dfrac{\sigma_n^2\cdot th}{m}+\dfrac{m}{2}$

（2）m为随机参量时：

$$f\left(x\,|\,H_0\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

$$f\left(x\,|\,H_1\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x\,|\,m,H_1\right)f\left(m\right)dm$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n}\exp\left\{-\frac{\left(x-m\right)^2}{2\sigma_n^2}\right\}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_m}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_m^2}\right\}dm$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sigma_m^2+\sigma_n^2}}\cdot\exp\left\{-\frac{x^2}{2\left(\sigma_m^2+\sigma_n^2\right)}\right\}$$

$$\therefore\lambda\left(x\right)=\frac{f(x\,|\,H_1)}{f(x\,|\,H_0)}=\frac{\sigma_n}{\sqrt{\sigma_m^2+\sigma_n^2}}\cdot\exp\left\{\frac{x^2\sigma_m^2}{2\sigma_n^2\left(\sigma_m^2+\sigma_n^2\right)}\right\}$$

由$\lambda\left(x\right)\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}=\dfrac{P(H_0)}{P(H_1)}=th$得

$$x^2 \overset{H_1}{\underset{H_0}{\gtrless}} \frac{2\sigma_n^2\left(\sigma_m^2+\sigma_n^2\right)}{\sigma_m^2}\left(\ln th+\ln\frac{\sqrt{\sigma_m^2+\sigma_n^2}}{\sigma_n}\right)$$

（3） m 为$\left[m_0,m_1\right]$上的均匀分布的随机参量时

$$f\left(x\,|\,H_0\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

$$f\left(x\,|\,H_1\right)=\int_{m_0}^{m_1} f\left(x\,|\,m,H_1\right)f(m)dm$$

$$=\int_{m_0}^{m_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n}\exp\left\{-\frac{\left(x-m\right)^2}{2\sigma_n^2}\right\}\cdot\frac{1}{m_1-m_0}dm$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n}\cdot\frac{1}{m_1-m_0}\int_{m_0}^{m_1}\exp\left\{-\frac{\left(x-m\right)^2}{2\sigma_n^2}\right\}dm$$

$$=\frac{1}{m_1-m_0}\left[\Phi\left(x-\sigma_n m_0\right)-\Phi\left(x-\sigma_n m_1\right)\right]$$

$$\therefore\lambda\left(x\right)=\frac{f(x\,|\,H_1)}{f(x\,|\,H_0)}=\frac{\sqrt{2\pi}\sigma_n e^{\frac{x^2}{2\sigma_n^2}}}{m_1-m_0}\left[\Phi\left(x-\sigma_n m_0\right)-\Phi\left(x-\sigma_n m_1\right)\right]\overset{H_1}{\underset{H_0}{\gtrless}} th$$

3-14 在二元参量的统计检测中，两个假设下的信号分别为：

$$H_0: x\sim N(0,\sigma_n^2)$$
$$H_1: x\sim N(m,\sigma_n^2)$$

其中m是信号的参量。

（1）试给出m为确定量时的似然比判决（$m>0$和$m<0$时的判决规则不同）；

（2）m为随机参量，其概率密度函数为

$$f(m)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_m^2}}\exp\left(-\frac{m^2}{2\sigma_m^2}\right)$$

求此时的似然比判决规则；

（3）m为$\left[m_0,m_1\right]$上的均匀分布的随机参量，求此时的似然比判决规则。

解：（1） m为确定参量时

$$f\left(x\,|\,H_0\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

$$f\left(x\,|\,H_0\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n}\exp\left\{-\frac{\left(x-m\right)^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

$$\therefore\lambda\left(x\right)=\frac{f\left(x\,|\,H_1\right)}{f\left(x\,|\,H_0\right)}=\frac{\exp\left\{-\frac{\left(x-m\right)^2}{2\sigma_n^2}\right\}}{\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right\}}=\exp\left\{\frac{-m^2+2mx}{2\sigma^2}\right\}\overset{H_1}{\underset{H_0}{\gtrless}}\frac{P(H_0)}{P(H_1)}$$

当 $m>0$ 时， $x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma_n^2 \cdot th}{m}+\frac{m}{2}$

当 $m<0$ 时， $x \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} \frac{\sigma_n^2 \cdot th}{m}+\frac{m}{2}$

（2） m 为随机参量时：

$$f\left(x \mid H_0\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

$$f\left(x \mid H_1\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x \mid m, H_1\right) f(m) dm$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_n^2}\right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_m} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_m^2}\right\} dm$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma_m^2+\sigma_n^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{x^2}{2\left(\sigma_m^2+\sigma_n^2\right)}\right\}$$

$$\therefore \lambda(x)=\frac{f(x \mid H_1)}{f(x \mid H_0)}=\frac{\sigma_n}{\sqrt{\sigma_m^2+\sigma_n^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{x^2\sigma_m^2}{2\sigma_n^2\left(\sigma_m^2+\sigma_n^2\right)}\right\}$$

由 $\lambda(x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}=\frac{P(H_0)}{P(H_1)}=th$ 得

$$x^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}-\frac{2\sigma_n^2\left(\sigma_m^2+\sigma_n^2\right)}{\sigma_m^2}\left(\ln th+\ln\frac{\sqrt{\sigma_m^2+\sigma_n^2}}{\sigma_n}\right)$$

（3） m 为 $[m_0, m_1]$ 上的均匀分布的随机参量时

$$f\left(x \mid H_0\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

$$f\left(x \mid H_1\right)=\int_{m_0}^{m_1} f\left(x \mid m, H_1\right) f(m) dm$$

$$=\int_{m_0}^{m_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_n^2}\right\} \cdot \frac{1}{m_1-m_0} dm$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \cdot \frac{1}{m_1-m_0} \int_{m_0}^{m_1} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_n^2}\right\} dm$$

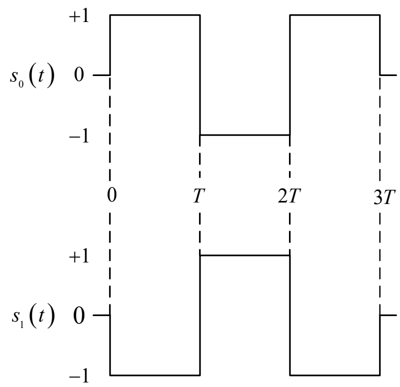
$$=\frac{1}{m_1-m_0}\left[\Phi\left(x-\sigma_n m_0\right)-\Phi\left(x-\sigma_n m_1\right)\right]$$

$$\therefore \lambda(x)=\frac{f(x \mid H_1)}{f(x \mid H_0)}=\frac{\sqrt{2\pi}\sigma_n e^{\frac{x^2}{2\sigma_n^2}}}{m_1-m_0}\left[\Phi\left(x-\sigma_n m_0\right)-\Phi\left(x-\sigma_n m_1\right)\right] \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} th$$

3-18 二元通信系统如下：

$$
\begin{aligned}
H_0:\ & x(t)=s_0(t)+n(t) \\
H_1:\ & x(t)=s_1(t)+n(t)
\end{aligned}
\quad 0 \le t \le 3T
$$

其中信号$s_0(t)$和$s_1(t)$如图3.34所示，$n(t)$是功率为$N_0/2$的加性高斯白噪声。假设两种假设的先验概率相等，求最小错误概率准则下的判决规则。若$E/N_0=4$，求错误判决概率。



信号波形

解：$f(x(t)\,|\,H_0)=F\exp\left\{-\dfrac{1}{N_0}\int_0^{3T}\left[x(t)-s_0(t)\right]^2dt\right\}$

$$f(x(t)\,|\,H_1)=F\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^{3T}\left[x(t)-s_1(t)\right]^2dt\right\}$$

判决准则为：

$$\ln\lambda(x(t))=\ln\frac{f(x(t)\,|\,H_1)}{f(x(t)\,|\,H_0)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\ln\frac{P(H_0)}{P(H_1)}=th'$$

因为$s_0(t)=-s_1(t)$

可得判决规则为：$\int_0^{3T}x(t)s_1(t)dt\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}0$

或$\int_0^{3T}x(t)s_0(t)dt\underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}}0$

（2）因为$s_0(t)=-s_1(t)$，所以$\rho=-1$

$$p_e=1-\Phi\left(\sqrt{(1-\rho)\frac{E}{N_0}}\right)=1-\Phi(\sqrt{8})=0.0023$$

3-19 在3-18题中，每个信号是一个“字”，每个字包含3个比特。假设我们每次

检测一个比特，若检测时最多只有一个比特出错，该字仍能被正确检测。那么
（1）每比特的错误概率是多少？
（2）若我们能纠正一个字中单个比特的错误，那么解码后字的错误检测概率是多少？
（3）将上面的结果与3-15中的结果进行比较。
解：（1）分析第一个比特，假设是位于[0,T]时间内接收到的信号，则

$$E_1 = \frac{1}{3}E, \rho = -1$$

$$\therefore P_e = 1 - \Phi\left(\sqrt{(1-\rho)E_1/N_0}\right) = 1 - \Phi\left(\sqrt{8/3}\right) = 0.0516$$

（2） $P = C_3^2 P_e^2 (1 - P_e) + P_e^3 = 0.0077$

（3）与 3-18 题相比，错误概率变大。

3.20 二元假设如下：

$$H_0: \ x(t) = n(t)$$
$$H_1: \ x(t) = s(t) + n(t) \quad 0 \le t \le T$$

式中， $\{n(t)\}$ 是均值为 0，均方差为 σ_n^2 的窄带高斯噪声，$\{s(t)\}$ 是均值为 0、均方差为 σ_s^2 的窄带高斯过程。将 $x(t)$ 通过一包络检波，对包络检波输出作出判决。

（1）采用包络检波输出的单样本时，若采用纽曼-皮尔逊准则，求判决规则。
（2）若采用包络检波输出的 N 个统计独立样本，求纽曼-皮尔逊准则下的判决规则。

解：（1） H_0 时，包络分布为瑞利分布：

$$f(y \mid H_0) = \frac{y}{\sigma_n^2} \exp\left[-\frac{y^2}{2\sigma_n^2}\right]$$

H_1 时，包络分布为瑞利分布：

$$f(y \mid H_1) = \frac{y}{\sigma_n^2 + \sigma_s^2} \exp\left[-\frac{y^2}{2(\sigma_n^2 + \sigma_s^2)}\right]$$

似然函数：

$$\lambda(y) = \frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2 + \sigma_s^2} \exp\left[\frac{\sigma_s^2 y^2}{2\sigma_n^2(\sigma_n^2 + \sigma_s^2)}\right] \mathop{\gtrless}\limits_{H_0}^{H_1} th$$

虚警概率

$\alpha = \int_{th'}^{+\infty} f(y \mid H_0) dy$ 求出 th'，而 $th = \frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2 + \sigma_s^2} \exp\left[\frac{\sigma_s^2 (th')^2}{2\sigma_n^2(\sigma_n^2 + \sigma_s^2)} \right]$

（2） $f(y_1, \cdots, y_N \mid H_0) = \prod_{i=1}^{N} f(\mid H_0) = \frac{\prod_{i=1}^{N} y_i}{\sigma_n^{2N}} \exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^{N} y_i^2}{2\sigma_n^2} \right]$

$$f(y_1, \cdots, y_N \mid H_1) = \prod_{i=1}^{N} f(\mid H_1) = \frac{\prod_{i=1}^{N} y_i}{\sigma_n^{2N} + \sigma_s^{2N}} \exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^{N} y_i^2}{2(\sigma_n^2 + \sigma_s^2)} \right]$$

似然函数：

$$\lambda(y) = \frac{f(y_1, \cdots, y_N \mid H_1)}{f(y_1, \cdots, y_N \mid H_0)} = \left(\frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2 + \sigma_s^2} \right)^N \exp\left[\frac{\sigma_s^2 \sum_{i=1}^{N} y_i^2}{2\sigma_n^2(\sigma_n^2 + \sigma_s^2)} \right] \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} th$$

虚警概率

$\alpha = \int_{th'}^{+\infty} f(y_1, \cdots, y_N \mid H_0) dy$ 求出 th'

3-21 二元频移键控系统如下：

$$\begin{aligned} H_0 &: x(t) = s_0(t) + n(t) \\ H_1 &: x(t) = s_1(t) + n(t) \end{aligned}, \quad 0 \le t \le T$$

式中，信号分别为 $s_0(t) = A\cos\left[(w_0 - \Delta w / 2) t \right]$ 和 $s_1(t) = A\cos\left[(w_0 + \Delta w / 2) t \right]$，

$w_0 >> \Delta w$ $w_0 T = k\pi$，（k 为整数），$n(t)$ 是均值为 0，功率谱密度为 $N_0 / 2$ 的高斯白噪声。

（1） 证明信号 $s_0(t)$ 与 $s_1(t)$ 之间的相关系数为 $\rho = \frac{\sin \Delta w T}{\Delta w T}$；

（2） 求使 $s_0(t)$ 与 $s_1(t)$ 正交的最小的 Δw 的值；

（3） 求使平均错判概率为最小的 Δw 的值；

（4） 比较 2）和 3）两种情况下接收机的平均错误概率。

解：（1）由题意得：

$$\rho = \frac{1}{E}\int_0^T s_0(t)s_1(t)dt$$
$$E = \frac{1}{2}\left(E_0 + E_1\right)$$
$$E_0 = \int_0^T s_0^2(t)dt = A^2\int_0^T \cos^2\left[\left(w_0 - \Delta w/2\right)t\right]dt$$
$$\because w_0 >> \Delta w$$
$$\therefore E_0 = \frac{A^2}{2}\int_0^T \left[\cos 2w_0 t + 1\right]dt = \frac{A^2}{2}T$$
对于二元频移键控系统

$w_0 - w_1 = \frac{n\pi}{T}, w_0 + w_1 = \frac{m\pi}{T}, m,n$均为整数

$$\int_0^T s_0(t)s_1(t)dt = A^2\int_0^T \cos[(w_0 - \Delta w/2)t]\cos[(w_0 + \Delta w/2)t]dt$$
$$= \frac{A^2}{2}\int_0^T \left[\cos\left(w_0 + w_1\right)t + \cos\Delta wt\right]dt$$
$$= \frac{A^2 \sin\Delta wT}{2\Delta wT}$$
$$\therefore \rho = \frac{\sin\Delta wT}{\Delta wT}$$

（2） $s_0(t)$ 与 $s_1(t)$ 正交 $\rho = 0$，则 $\rho = \frac{\sin\Delta wT}{\Delta wT} = 0 \Rightarrow \Delta wT = \pi \Rightarrow \Delta w = \frac{\pi}{T}$

（3）二元通信系统的平均错误判决概率：

$$P_e = \int_{\alpha/2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}dt = 1 - \Phi\left(\sqrt{(1-\rho)E/N_0}\right)$$
$$\frac{\partial\rho}{\partial\Delta w} = \frac{\cos\Delta wT\cdot\Delta wT^2 - \sin\Delta wT\cdot T}{\left(\Delta wT\right)^2} = 0$$
$$\Rightarrow \Delta wT = \tan\Delta wT$$

要使 P_e 最小，则 ρ 应去相应的最小值 $\rho = \frac{\sin\Delta wT}{\Delta wT}$

$$-1 \le \sin\Delta wT \le 0$$
$$\because \Delta wT = \tan\Delta wT$$
$$\therefore \Delta wT = 1.4302\pi$$
$$\Delta w = \frac{4.4931}{T}$$

（4）

可得（2）中的接收机的平均错误概率 $\overline{P_e} = 1 - \Phi\left(\sqrt{E/N_0}\right)$，（3）中的接收机的平均错误概率 $\overline{P_e} = 1 - \Phi\left(\sqrt{1.1275E/N_0}\right)$

3-22 考虑图 3.35 所示的线性反馈系统

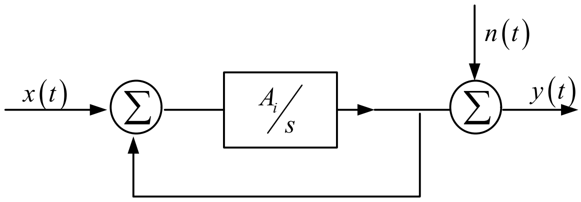


图 3.35

其中 $x(t)$ 是已知的确定信号，$n(t)$ 是均值为 0、功率谱密度为 $\frac{N_0}{2}$ 的高斯白噪声，$y(t)$ 的观测区间为 $[0,T]$。在 H_1 为真时 $A_i=A_1$，在 H_0 为真时 $A_i=A_0$，且 $A_0\neq A_1$。

（1）求 $y(t)$ 似然比检验的检验统计量。

（2）若 $P(H_i)=1/2\ (i=0,1)$；$x(t)=\delta(t)$，$T=\infty$，求平均错误概率。

解：（1）设递归系统的输出为 $x_i(t)$，则可得 $\frac{A_i}{s}\left(X(s)-X_i(s)\right)=X_i(s)$，即 $X_i(s)=\frac{A_iX(s)}{s+A_i}$，又有 $L^{-1}\left\{\frac{A_i}{s+A_i}\right\}=A_ie^{-A_it}u(t)$，则 $x_i(t)=\left(A_ie^{-A_it}u(t)\right)*x(t)$，最终可得接收信号 $y(t)=x_i(t)+n(t)$。该假设检验问题为：$y(t)=\begin{cases}x_0(t)+n(t), & H_0\\ x_1(t)+n(t), & H_1\end{cases}$，由相关接收机，其似然比检验统计量为 $G=\int_0^T\left[x_1(t)-x_0(t)\right]y(t)dt-\frac{1}{2}\int_0^T\left[x_1^2(t)-x_0^2(t)\right]dt$，门限为 $\frac{N_0}{2}\ln th$。

（2）$x(t)=\delta(t)$ 时，可得 $x_0(t)=A_0e^{-A_0t}u(t)$ 及 $x_1(t)=A_1e^{-A_1t}u(t)$，则有

$$E_0=\int_0^{+\infty}x_0^2(t)dt=\int_0^{+\infty}A_0^2e^{-2A_0t}dt=\frac{A_0}{2}，同理 E_1=\int_0^{+\infty}x_1^2(t)dt=\frac{A_1}{2}。$$

$$E=\frac{1}{2}(E_0+E_1)=\frac{A_0+A_1}{4}，\quad \rho=\frac{1}{E}\int_0^{\infty}x_1(t)x_0(t)dt=\frac{4A_0A_1}{(A_0+A_1)^2}，$$

则平均错误概率 $P_e=1-\Phi\left(\sqrt{(1-\rho)E/N_0}\right)=1-\Phi\left(\sqrt{\frac{(A_0-A_1)^2}{4N_0(A_0+A_1)}}\right)$。

3-23 设线性调频矩形脉冲信号为

$$s(t)=A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)\cos\left(\omega_0+\frac{\mu t^2}{2}\right)$$

其中$\mathrm{rect}(\bullet)$为矩形函数，$\mathrm{rect}(x)=1,\ |x|<1/2$；$\mu$为调频系数。线性调频信号的包络是宽度为$\tau$的矩形脉冲；信号的瞬时频率是随时间线性变化的。线性调频信号的瞬时频率为$\omega=\dfrac{d\varphi}{dt}=\omega_0+\mu t$。

在脉冲宽度τ内，信号的角频率由$\omega_0-\mu t/2$变化到$\omega_0+\mu t/2$；调频带宽$B=\mu\tau/2\pi$；线性调频信号的重要参数是时宽带宽积D，表示为$D=B\tau=\mu\tau^2/2\pi$。

（1）求线性调频信号的频谱函数$S(\omega)$。

（2）求匹配滤波器的系统函数$H(j\omega)$。

（3）求匹配滤波器的输出信号$s_o(t)$和输出信噪比SNR。

解：（1）

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}s(t)e^{-j\omega t}dt$$
$$=A\int_{-\tau/2}^{\tau/2}\cos(\omega_0 t+\frac{ut^2}{2})e^{-j\omega t}dt$$

（2）

$$H(j\omega)=S^*(\omega)e^{-j\omega t_o}$$

（3）

$$s_o(t)=\int_0^T h(\tau)s(t-\tau)d\tau=\int_0^T s(T-\tau)s(t-\tau)d\tau$$

$SNR_o=\dfrac{2E}{N_0}$，其中$E=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|S(\omega)|^2d\omega$

3-24 三元通信系统：

$$\begin{aligned}H_0:&\ x(t)=n(t)\\ H_1:&\ x(t)=\sin\omega_0 t+n(t)\\ H_2:&\ x(t)=2\sin\omega_0 t+n(t)\qquad 0\le t\le T\end{aligned}$$

式中，$\{n(t)\}$是功率谱密度为$\dfrac{N_0}{2}$的高斯白噪声，ω_0都是常数；已知$P(H_i)=1/3\ (i=0,1,2)$。

（1）求最小错误概率准则下的判决规则。

（2）求三种假设下的条件正确判决概率。

解：

（1）令 $s_0(t)=0$， $s_1(t)=\sin\omega_0 t$， $s_2(t)=2\sin\omega_0 t$， $0\le t\le T$，

又有 $f\left(x(t)\,|\,H_i\right)=F\exp\left(-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left(x(t)-s_i(t)\right)^2 dt\right)$，则可得

$$\lambda_{ij}\left(x(t)\right)=\frac{\exp\left(-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left[x(t)-s_i(t)\right]^2 dt\right)}{\exp\left(-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left[x(t)-s_j(t)\right]^2 dt\right)},i\ne j，\quad th=\frac{P(H_j)}{P(H_i)}=1$$，取对数可得

$G_{ij}=\int_0^T\left[s_i(t)-s_j(t)\right]x(t)dt-\frac{1}{2}\int_0^T\left[s_i(t)-s_j(t)\right]^2 dt$ 大于等于 0 时判为 H_i，否则判为 H_j。

由于 $s_0(t)=0,s_2(t)=2s_1(t)$，可设 $G=\int_0^T x(t)\sin\omega_0 t dt$，

若判决为 H_0，则应有 $\begin{cases}G_{01}\ge 0\\G_{02}\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}G\le\frac{T}{4}\\G\le\frac{T}{2}\end{cases}\Rightarrow G\le\frac{T}{4}$，

若判决为 H_1，则应有 $\begin{cases}G_{10}\ge 0\\G_{12}\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}G\ge\frac{T}{4}\\G\le\frac{3T}{4}\end{cases}\Rightarrow\frac{T}{4}\le G\le\frac{3T}{4}$，

若判决为 H_2，则应有 $\begin{cases}G_{20}\ge 0\\G_{21}\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}G\ge\frac{T}{2}\\G\ge\frac{3T}{4}\end{cases}\Rightarrow G\ge\frac{3T}{4}$。

（2） $E(G\,|\,H_0)=E\left\{\int_0^T n(t)\sin\omega_0 t dt\right\}=0$， $Var(G\,|\,H_0)=E\left\{\left[\int_0^T n(t)\sin\omega_0 t dt\right]^2\right\}=\frac{N_0T}{4}$；

同理可得 $E(G\,|\,H_1)=\frac{T}{2}$， $Var(G\,|\,H_1)=\frac{N_0T}{4}$， $E(G\,|\,H_2)=T$， $Var(G\,|\,H_2)=\frac{N_0T}{4}$。

同时又可得 $f(G\,|\,H_i)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}Var(G\,|\,H_i)}\exp\left(-\frac{\left(G-E(G\,|\,H_i)\right)^2}{2Var^2(G\,|\,H_i)}\right)$，则三种假设下的条件正确判决概率为

$$P(D_0\,|\,H_0)=\int_{-\infty}^{\frac{T}{4}}f(G\,|\,H_0)dG=\Phi\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{N_0}}\right)$$；

$$P(D_1\,|\,H_1)=\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}}f(G\,|\,H_1)dG=2\Phi\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{N_0}}\right)-1$$；

$$P(D_2\,|\,H_2)=\int_{\frac{3T}{4}}^{+\infty}f(G\,|\,H_2)dG=\Phi\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{N_0}}\right)$$。

3-25 M元假设如下：

H_i： $x_i(t)=s_i(t)+n(t)$, $0\le t\le T, i=1,2,\cdots,M$

其中$s_i(t)=A_i\phi(t), A_i=(i-1)\Delta$，$\Delta$是常数；$\phi(t)$是确定函数，满足$\int_0^T\phi^2(t)dt=1$；$\{n(t)\}$是功率谱密度为$N_0/2$的高斯白噪声；已知$P(H_i)=1/M$ $(i=1,2,\cdots,M)$。求：

（1）最小错误概率最佳检测的判决规则，画出接收机框图，

（2）平均错误概率。

解：（1）M 元假设检验，先验概率相等。似然函数为：

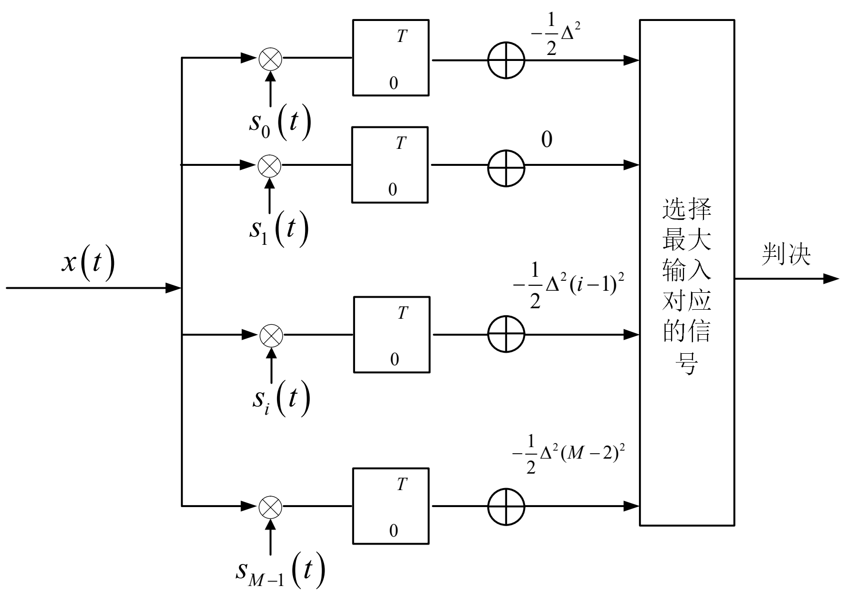
$$f(x(t)|H_i)=F\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left[x(t)-s_i(t)\right]^2dt\right\}$$

判决规则为： $\dfrac{f(x(t)|H_i)}{f(x(t)|H_j)}\ge 1, j=0,1,\cdots,M-1, j\ne i$，判决为$H_i$

代入似然比函数，得到

$$\int_0^T x(t)s_i(t)dt-\frac{(i-1)^2\Delta^2}{2}\ge\int_0^T x(t)s_j(t)dt-\frac{(j-1)^2\Delta^2}{2}, j=0,1,\cdots,M-1, j\ne i$$，判为H_i

接收框图：



（2）设检验统计量$G_i=\int_0^T x(t)s_i(t)dt-\dfrac{(i-1)^2\Delta^2}{2}$

$$G_i=\int_0^T x(t)s_i(t)dt-\frac{(\mathrm{i}\text{-}1)^2\Delta^2}{2}$$

$$\begin{aligned}E(G_i\mid H_j)&=E\left\{\int_0^T\left[s_j(t)+n(t)\right]s_i(t)dt\right\}-\frac{(\mathrm{i}\text{-}1)^2\Delta^2}{2}\\&=(i\text{-}1)(j\text{-}1)\Delta^2-\frac{(i\text{-}1)^2\Delta^2}{2}\\&\overset{\Delta}{=}E_{ij}\end{aligned}$$

$$G_i=\int_0^T x(t)s_i(t)dt-\frac{(\mathrm{i}\text{-}1)^2\Delta^2}{2}$$

$$\begin{aligned}Var(G_i\mid H_j)&=E\left\{\left[\int_0^T\left[s_j(t)+n(t)\right]s_i(t)dt-\frac{(\mathrm{i}\text{-}1)^2\Delta^2}{2}-E(G_i|H_j)\right]^2\right\}\\&=(i\text{-}1)^2\Delta^2\\&\overset{\Delta}{=}\sigma_i\end{aligned}$$

$$E(G_kG_l\mid H_j)=E\left\{\left[\int_0^T\left[s_j(t)+n(t)\right]s_k(t)dt-\frac{(\mathrm{k}\text{-}1)^2\Delta^2}{2}\right]\bullet\left[\int_0^T\left[s_j(t)+n(t)\right]s_l(t)dt-\frac{(\mathrm{l}\text{-}1)^2\Delta^2}{2}\right]\right\}$$ 定义

$\vec{G}_j=(G_0,G_1,\cdots,G_{M-1})|_{H_j},m_{\vec{G}_j}=\left(E(G_0),E(G_1),\cdots,\mathrm{E}(G_{M-1})\right)|_{H_j}$，则可求得

$$\mathbb{C}_G|_{H_j}=E\left\{\left(\vec{G}_j-m_{\vec{G}_j}\right)\left(\vec{G}_j-m_{\vec{G}_j}\right)^T\right\}$$

则假设 H_j 条件下的似然函数为

$$f(G_0,G_1,\cdots,\mathrm{G}_{M\text{-}1}|H_j)=\frac{1}{(2\pi)^{M/2}\left|\mathbb{C}_G|_{H_j}\right|^{1/2}}\exp\left[-\frac{\left(\vec{G}_j-m_{\vec{G}_j}\right)^T\mathbb{C}^{-1}{}_G|_{H_j}\left(\vec{G}_j-m_{\vec{G}_j}\right)}{2}\right]$$

服从一个 M 维的高斯向量的联合分布。

$$P(D_j|G_j=\mathrm{g},\mathrm{H}_j)=P(G_0<g,\cdots,G_{j\text{-}1}<g,\cdots,G_{M-1}<g|G_j=g,H_j)$$

$$=\underbrace{\int_{-\infty}^{g}\int_{-\infty}^{g}\cdots\int_{-\infty}^{g}}_{M-1\text{次}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f\left(G_0,G_1,\cdots,G_{M-1}|_{H_j}\right)dG_j\right)dG_0dG_1\cdots dG_{j\text{-}1}dG_{j+1}\cdots dG_{M-1}$$

$$\begin{aligned}\therefore P(D_j|\mathrm{H}_j)&=\int_{-\infty}^{\infty}P(D_j|G_j=g,H_j)\bullet f(G_j|H_j)|_{G_j=g}dg\\&=\int_{-\infty}^{\infty}P(D_j|G_j=g,H_j)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j}\exp\left(-\frac{(g\text{-}E_{ij})^2}{2\sigma_j^2}\right)dg\end{aligned}$$

则 $P_e=\sum_{j=0}^{M-1}\left(1\text{-}\mathrm{P}(D_j|H_j)\right)P(H_j)$

3-27 已知白噪声背景下的确知信号

$$s(t)=\begin{cases}A & 0\le t\le T\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

（1）匹配滤波器的输出峰值信噪比。
（2）若不用匹配滤波器，而用一个简化的线性滤波器

$$h(t)=\begin{cases}e^{-\alpha t} & 0\le t\le T\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求输出峰值信噪比，以及使输出峰值信噪比最大所对应的α值，并与（1）的匹配滤波器的性能作比较。
（3）若采用如下滤波器

$$h(t)=\begin{cases}e^{-\alpha t} & t\ge 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

求输出峰值信噪比，并证明此时的信噪比总是小于等于（2）中的信噪比。
（4）若采用高斯滤波器

$$h(t)=\frac{1}{\beta}\exp\left\{-\frac{(t-t_0)^2}{2\beta}\right\},\quad -\infty<t<\infty,\ t_0>0$$

（注意到当$t_0\gg\beta$时，上面的系统可以近似看作物理可实现的。）给出输出信噪比的表达式，并说明何时信噪比达到最大。

解：（1）$SNR_0=\dfrac{2E}{N_0},E=A^2T$

$$\therefore SNR_0=\frac{2A^2T}{N_0}$$

（2）$SNR_0=\dfrac{\left|s_0(t_0)^2\right|}{\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{N_0}{2}\left|H(jw)\right|^2dw}$

$$\begin{aligned}s_0(t)&=s(t)*h(t)\\&=\int_0^T s(\tau)h(t-\tau)d\tau\\&=\begin{cases}\dfrac{A}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha t}\right),0\le t\le T\\ \dfrac{A}{\alpha}\left(e^{-\alpha(t-T)}-e^{-\alpha T}\right),T<t\le 2T\end{cases}\end{aligned}$$

当$t=T$时，$s_0(t)$取得最大值$\dfrac{A}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha T}\right)$。

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{N_0}{2}\left|H\left(jw\right)\right|^2 dw=\frac{N_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}2\pi h^2\left(t\right)dt=\frac{N_0}{4\alpha}\left(1-e^{-2\alpha T}\right)$$

$$\therefore SNR_0=\frac{4A^2}{\alpha N_0}\bullet\frac{1-e^{-\alpha T}}{1+e^{-\alpha T}}$$

由 $\frac{dSNR_0}{d\alpha}=0$ 得 $\alpha=0$ 。 SNR_0 取得最大值。

$$\lim_{\alpha\to 0}SNR_0=\frac{2A^2T}{N_0}$$

当 $\alpha=0$ 时，与（1）输出的最大信噪比相等。
当 $\alpha>0$ 时，性能比（1）差。

（3）由（2）易得， $s_0\left(t\right)_{\max}=s_0\left(T\right)=\frac{A}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha T}\right)$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{N_0}{2}\left|H\left(jw\right)\right|^2 dw=\frac{N_0}{4\alpha}$$

$$\therefore SNR_{0\max}=\frac{4A^2}{\alpha N_0}\left(1-e^{-\alpha T}\right)^2$$

$$\because\left(1-e^{-\alpha T}\right)^2\le\frac{1-e^{-\alpha T}}{1+e^{-\alpha T}}$$

$$\therefore\frac{4A^2}{\alpha N_0}\left(1-e^{-\alpha T}\right)^2\le\frac{4A^2}{\alpha N_0}\bullet\frac{1-e^{-\alpha T}}{1+e^{-\alpha T}}$$

（4）由题意知

$$s_0\left(t\right)=\int_0^T A\frac{1}{\beta}e^{-\frac{\left(t-\tau-t_0\right)}{2\beta}}d\tau=A\sqrt{\frac{2\pi}{\beta}}\left[\Phi\left(\frac{t-t_0}{\sqrt{\beta}}\right)-\Phi\left(\frac{t-T-t_0}{\sqrt{\beta}}\right)\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}h^2\left(t\right)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\beta^2}e^{-\frac{\left(t-t_0\right)^2}{\beta}}dt=\sqrt{\frac{\pi}{\beta^3}}$$

$$s_0\left(t\right)_{\max}=s_0\left(\frac{T+2t_0}{2}\right)=A\sqrt{\frac{2\pi}{\beta}}\left[2\Phi\left(\frac{T}{2\sqrt{\beta}}\right)-1\right]$$

$\therefore$ 当 $t\text{=}t_0\text{+}\frac{T}{2}$ 时，信噪比达到最大，为

$$SNR_0=\frac{4A^2}{N_0}\sqrt{\pi\beta}\left[2\Phi\left(\frac{T}{2\sqrt{\beta}}\right)\text{-}1\right]^2$$

3-29 考虑多个射频脉冲的检测问题，

$$H_0:\ x_i\left(t\right)=n_i\left(t\right)$$
$$H_1:\ x_i\left(t\right)=A\sin\omega_c t+n_i\left(t\right)\quad 0\le t\le T\quad\left(i=1,2,\cdots,M\right)$$

其中$\frac{1}{f_c} << T$，$\left\{n(t)\right\}$是功率谱密度为$N_0/2$的高斯白噪声。求：

（1）采用纽曼-皮尔逊准则，求判决规则。

（2）当P_{fa}给定时，求检测器的检测概率。

（3）与单脉冲情况作比较。

解：（1）

似然比：

$$\lambda(x(t)) = \frac{f(x_1(t),\cdots,x_M(t)\,|\,H_1)}{f(x_1(t),\cdots,x_M(t)\,|\,H_0)}$$

$$= \prod_{i=1}^{M} \frac{F\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T \left[x_i(t) - A\sin\omega_c t\right]^2 dt\right\}}{F\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T x_i^2(t)\,dt\right\}}$$

$$= \exp\left[\frac{2}{N_0}\int_0^T A\sin\omega_c t\sum_{i=1}^{M} x_i(t)dt - \frac{1}{N_0}\sum_{i=1}^{M}\int_0^T (A\sin\omega_c t)^2 dt\right] \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} th$$

取对数：

$$\sum_{i=1}^{M}\int_0^T x_i(t) A\sin\omega_c t dt \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{MA^2T}{4} + \frac{N_0}{2}\ln th = th'$$

取检验统计量：

$$G = \sum_{i=1}^{M}\int_0^T x_i(t) A\sin\omega_c t dt$$

其均值方差分别为

$$E(G\,|\,H_0) = 0, Var(G\,|\,H_0) = \frac{N_0}{2}\cdot\frac{MA^2T}{2}$$

$$E(G\,|\,H_1) = \frac{MA^2T}{2}, Var(G\,|\,H_0) = \frac{N_0}{2}\cdot\frac{MA^2T}{2}$$

可得判决规则为$G \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} th'$，其中$th'$由$\int_{th'}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi N_0 MA^2 T}}\exp\left(-\frac{2G^2}{\frac{N_0 MA^2 T}{2}}\right)dG = \alpha$决定。

（2）由虚警概率

$$P_{fa} = \int_{th'}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi N_0 MA^2 T}}\exp\left(-\frac{2G^2}{\frac{N_0 MA^2 T}{2}}\right)dG = \alpha$$

可得门限

$$th' = \sqrt{\frac{MN_0A^2T}{4}}\Phi^{-1}(1-\alpha)$$

检测概率

$$P_0=\int_{th'}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(G-E_1)^2}{2\sigma^2}\right)dG$$
$$=1-\Phi(\frac{th'-E_1}{\sigma})$$
$$=1-\Phi(\frac{\sigma\Phi^{-1}(1-\alpha)-E_1}{\sigma})$$

其中，$\sigma^2=\frac{MN_0A^2T}{4}$，$E_1=\frac{MA^2T}{2}$

（3）单脉冲的检测概率：$P_0=1-\Phi(\Phi^{-1}(1-\alpha)-\sqrt{\frac{A^2T}{N_0}})$

多脉冲的检测概率：$P_0=1-\Phi(\Phi^{-1}(1-\alpha)-\sqrt{\frac{MA^2T}{N_0}})$

比较可知，多脉冲的检测概率更大。

3-30 考虑信号 $x(t)=1-\cos\omega_0 t\ \left(0\le t\le\frac{2\pi}{\omega_0}\right)$ 及功率谱密度为 $S_n(\omega)=\frac{\omega_1^2}{\omega^2+\omega_1^2}$ 的噪声，

（1）设 $T=\frac{2\pi}{\omega_0}$，用预白化方法求广义匹配滤波器。

（2）求最大输出信噪比。

解：

（1）对于 $S_n(\omega)=\frac{\omega_1^2}{\omega^2+\omega_1^2}$，$S_n^+(\omega)=\frac{\omega_1}{\omega_1+j\omega}$，$S_n^-(\omega)=\frac{\omega_1}{\omega_1-j\omega}$，则预白化系统函数为

$H_1(\omega)=\frac{1}{S_n^+(\omega)}=\frac{\omega_1+j\omega}{\omega_1}$，匹配滤波器传输函数为 $H_2(\omega)=\frac{X^*(\omega)}{S_n^-(\omega)}e^{-j\omega T}$，则广义匹配滤波器的传输函数为 $H(\omega)=H_1(\omega)H_2(\omega)=\frac{X^*(\omega)}{S_n(\omega)}e^{-j\omega T}=\left(1+\frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)X^*(\omega)e^{-j\omega T}$，则

$$h(t)=F^{-1}\{H(\omega)\}=F^{-1}\{X^*(\omega)e^{-j\omega T}\}+\frac{1}{\omega_1^2}F^{-1}\{\omega^2X^*(\omega)e^{-j\omega T}\}$$
$$=F^{-1}\{X^*(\omega)e^{-j\omega T}\}-\frac{1}{\omega_1^2}F^{-1}\{(j\omega)^2X^*(\omega)e^{-j\omega T}\}$$
$$=x^*(T-t)-\frac{1}{\omega_1^2}\frac{d^2}{d^2t}x^*(T-t)$$
$$=1-\cos\omega_0(T-t)-\frac{\omega_0^2}{\omega_1^2}\cos\omega_0(T-t)$$
$$=1-\frac{\omega_0^2+\omega_1^2}{\omega_1^2}\cos\omega_0\left(\frac{2\pi}{\omega_0}-t\right)=1-\frac{\omega_0^2+\omega_1^2}{\omega_1^2}\cos\omega_0(t)。$$

（2）广义匹配滤波器输出最大信噪比为$SNR_{\max}=\frac{s_o^2(t)}{E\left\{n_o^2(t)\right\}}$，

又$x(t)=1-\cos\omega_0 t$，则$X(\omega)=2\pi\delta(\omega)-\pi\left[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\right]$，可得

$SNR_{o\max}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|X(\omega)\right|^2}{S_n(\omega)}d\omega=2\pi+\frac{\pi}{2}\frac{\omega_0^2+\omega_1^2}{\omega_1^2}+\frac{\pi}{2}\frac{\omega_0^2+\omega_1^2}{\omega_1^2}=\frac{\pi\left(3\omega_1^2+\omega_0^2\right)}{\omega_1^2}$。

注：应改为接收时间为$\frac{2\pi}{\omega_0}$为佳。

3-31 考虑如下检测问题：

$$\begin{aligned}&H_0:\ x(t)=n(t)\\&H_1:\ x(t)=s(t)+n(t)\end{aligned}\quad 0\le t\le T$$

其中$n(t)$为零均值，功率谱密度为$N_0/2$的高斯白噪声，$s(t)$也是零均值高斯过程，自相关函数为$R_s(\tau)$。将接收信号$x(t)$展开成如下形式：

$$x(t)=\sum_{k=0}^{K}x_k\psi_k(t)=\sum_{k=0}^{K}(s_k+n_k)\psi_k(t)$$

其中$x_k=\int_0^T x(t)\psi_k(t)dt$，$\psi_k(t)$为$R_s(\tau)$的特征函数。

（1）证明x_k是相互统计独立的，并给出K个系数的似然函数。

（2）证明我们可以采用如下检验统计量：

$$G=\sum_{k=1}^{K}\frac{\lambda_k x_k^2}{2\lambda_k+N_0}$$

其中λ_k为$R_s(\tau)$相应得特征值。

（提示：$Var(s_k)=\lambda_k, Var(s_k+n_k)=\lambda_k+N_0/2$）

（3）求在各个假设下γ_T的均值和方差。

解：（1） 由题意知$x(t)$被进行 K-L 展开，函数集$\left\{\Psi_k(t),k=1,2,\cdots,K\right\}$是归一化正交函数集，$R_s(\tau)$是核函数，$\lambda_k$是第$k$个特征函数的特征值。

归一化正交函数集满足以下关系：

$\int_0^T\psi_i(t)\psi_j^*(t)dt=\delta_{ij}$

$$\int_0^T R_n(t_1-t_2)\psi_j(t_2)dt_2=\lambda_j\psi_j(t_1)$$

考虑 x_k 在 H_0 和 H_1 假设下的均值和方差

$$E\{x_k\}=E\left\{\int_0^T x(t)\psi_k(t)dt\right\}$$

$$E\{x_k\mid H_0\}=E\left\{\int_0^T n(t)\psi_k(t)dt\right\}=0$$

$$E\{x_k\mid H_1\}=E\left\{\int_0^T \left[s(t)+n(t)\right]\psi_k(t)dt\right\}=0$$

$$\begin{aligned}\therefore E&\left\{\left[x_i-E(x_i\mid H_0)\right]\left[x_j-E(x_j\mid H_0)\right]^*\right\}\\ &=\int_0^T\int_0^T R_n(t_1-t_2)\psi_i(t_1)\psi_j^*(t_2)dt_1dt_2\\ &=\frac{N_0}{2}\delta_{ij}\end{aligned}$$

同理，

$$E\left\{\left[x_i-E(x_i\mid H_1)\right]\left[x_j-E(x_j\mid H_1)\right]^*\right\}=\left(\frac{N_0}{2}+\lambda_i\right)\delta_{ij}$$

$\therefore$ 当 $i\neq j$ 时，$E\left\{\left[x_i-E(x_i)\right]\left[x_j-E(x_j)\right]^*\right\}=0$

$\therefore x_k$ 是互相统计独立的。

由上~~面推导可知~~

$$Var(x_k|H_0)=\frac{N_0}{2},Var(x_k|H_1)=\frac{N_0}{2}+\lambda_k$$

x_k 服从高斯分布，故 x_k 的概率密度函数为

$$f(x_k|H_0)=\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}}\exp\left(-\frac{x_k^2}{N_0}\right)$$

$$f(x_k|H_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\left(\frac{N_0}{2}+\lambda_k\right)}}\exp\left(-\frac{x_k^2}{2\left(\frac{N_0}{2}+\lambda_k\right)}\right)$$

k 个统计独立样本的似然函数为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_K\mid H_0)=\left(\frac{1}{\pi N_0}\right)^{\frac{K}{2}}\exp\left(-\frac{\sum_{k=1}^K x_k^2}{N_0}\right)$$

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_K\mid H_1)=\exp\left(-\sum_{k=1}^K\frac{x_k^2}{N_0+2\lambda_k}\right)\prod_{k=1}^K\frac{1}{\sqrt{\pi N_0+2\pi\lambda_k}}$$

（2）由（1）中公式，可得似然比判决式为

$$\lambda\left(x_1,x_2,\cdots,x_K\right)=\exp\left(\sum_{k=1}^{K}\frac{2\lambda_k x_k^2}{\left(N_0+2\lambda_k\right)N_0}\right)\prod_{k=1}^{K}\sqrt{\frac{N_0}{N_0+2\lambda_k}}\mathop{\gtrless}_{H_0}^{H_1} th=\frac{P\left(H_0\right)}{P\left(H_1\right)}$$

观察可知，取检验统计量

$$G=\sum_{k=1}^{K}\frac{\lambda_k x_k^2}{2\lambda_k+N_0}$$

得

$$G=\sum_{k=1}^{K}\frac{\lambda_k x_k^2}{2\lambda_k+N_0}\mathop{\gtrless}_{H_0}^{H_1} th'$$

$$th'=\frac{N_0}{2}\left[\ln th-\ln\left(\prod_{k=1}^{K}\sqrt{\frac{N_0}{N_0+2\lambda_k}}\right)\right]$$

故可取 G 为检验统计量。

（3）

$$E_1\{\gamma_T\}=E_1\left\{\sum_{k=1}^{K}\frac{\lambda_k x_k^2}{2\lambda_k+N_0}\right\}=\sum_{k=1}^{K}\frac{\lambda_k}{2\lambda_k+N_0}E_1\{x_k^2\}$$

$$E_1\{x_k^2\}=\lambda_k+\frac{N_0}{2}$$

$$E_1\{\gamma_T\}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\lambda_k$$

$$Var_1\{\gamma_T\}=Var_1\left\{\sum_{k=1}^{K}\frac{\lambda_k}{2\lambda_k+N_0}x_k^2\right\}=\sum_{k=1}^{K}\left(\frac{\lambda_k}{2\lambda_k+N_0}\right)^2 Var_1\{x_k^2\}$$

$$Var_1\{x_k^2\}=E_1\{x_k^4\}-\left[E_1\{x_k^2\}\right]^2=2\left[E_1\{x_k^2\}\right]^2=2\left(\lambda_k+\frac{N_0}{2}\right)^2$$

$$Var_1\{\gamma_T\}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}{\lambda_k}^2$$

$$E_0\{\gamma_T\}=E_0\left\{\sum_{k=1}^{K}\frac{\lambda_k x_k^2}{2\lambda_k+N_0}\right\}=\sum_{k=1}^{K}\frac{\lambda_k}{2\lambda_k+N_0}E_0\{x_k^2\}$$

$$E_0\{x_k^2\}=\frac{N_0}{2}$$

$$E_0\{\gamma_T\}=\sum_{k=1}^{K}\frac{\lambda_k N_0}{2\left(2\lambda_k+N_0\right)}$$

$$Var_0\{\gamma_T\}=Var_0\left\{\sum_{k=1}^{K}\frac{\lambda_k}{2\lambda_k+N_0}x_k^2\right\}=\sum_{k=1}^{K}\left(\frac{\lambda_k}{2\lambda_k+N_0}\right)^2 Var_0\{x_k^2\}$$

$$Var_0\{x_k^2\}=E_0\{x_k^4\}-\left[E_0\{x_k^2\}\right]^2=2\left[E_0\{x_k^2\}\right]^2=\frac{1}{2}N_0^2$$

$$Var_0\{\gamma_T\}=\sum_{k=1}^{K}\frac{\lambda_k^2 N_0^2}{2\left(2\lambda_k+N_0\right)^2}$$

3-32 二元假设如下：

$$\begin{aligned}&H_0:\ x(t)=n(t)\\&H_1:\ x(t)=s(t)+n(t)\end{aligned}\qquad 0\le t\le T$$

式中，$s(t)$是确知信号；$\{n(t)\}$是零均值，$R_n(\tau)=\sigma_0^2 e^{-\alpha|\tau|}$，若采用纽曼-皮尔逊准则及 K-L 展开最佳检测，求：最佳检测器检测性能计算公式。

解：

由$R_n(\tau)=\sigma_0^2 e^{-\alpha|\tau|}$，可得$S_n(\omega)=\dfrac{2\alpha\sigma_0^2}{\omega^2+\alpha^2}$，求解该有理核与本征函数$f_k(t)$的过程参考教材 P143 的例 3.6。

求解方程$\begin{cases}\dfrac{\gamma_k T}{2}\tan\dfrac{\gamma_k T}{2}=\dfrac{\alpha T}{2}, & k\text{为偶数}\\ \dfrac{\gamma_k T}{2}\cot\dfrac{\gamma_k T}{2}=-\dfrac{\alpha T}{2}, & k\text{为奇数}\end{cases}$，$k=1,2,\cdots$，可得$\gamma_k$的值，则$\lambda_k=\dfrac{2\alpha\sigma_0^2}{\gamma_k^2+\alpha^2}$。

由γ_k求解$\begin{cases}\alpha a_k-\gamma_k b_k=0\\ a_k\sigma_0^2\left(\gamma_i\sin\gamma_k T-\alpha\cos\gamma_k T\right)-b_k\sigma_0^2\left(\alpha\sin\gamma_k T+\gamma_k\cos\gamma_k T\right)=0\end{cases}$可得$a_k$与$b_k$的值，

从而由$f_k(t)=a_k\cos\gamma_k t+b_k\sin\gamma_k t$求得本征函数。

$x(t)$由 K-L 展开可得$x(t)=\sum\limits_k x_k f_k(t)$，系数$x_k=\int_0^T x(t)f_k^*(t)dt$，由本题的接收信号模型：

$s_0(t)=0$，$s_1(t)=s(t)$，则令$\eta_i(t)=\int_0^T s_i(\tau)R_n^{-1}(t-\tau)d\tau$，显见$\eta_0(t)=0$。

判决检验统计量为$G=\int_0^T\left(x(t)-\dfrac{1}{2}s_1(t)\right)\eta_1(t)dt-\int_0^T\left(x(t)-\dfrac{1}{2}s_0(t)\right)\eta_0(t)dt$

$=\int_0^T\left(x(t)-\dfrac{1}{2}s(t)\right)\eta_1(t)dt$。

$$\begin{cases}E\{G\mid H_1\}=\dfrac{1}{2}\int_0^T s_1(t)\eta_1(t)dt-\dfrac{1}{2}\int_0^T\left[2s_1(t)-s_0(t)\right]\eta_0(t)dt=\dfrac{1}{2}\int_0^T s(t)\eta_1(t)dt\\ E\{G\mid H_0\}=-\dfrac{1}{2}\int_0^T s_0(t)\eta_0(t)dt+\dfrac{1}{2}\int_0^T\left[2s_0(t)-s_1(t)\right]\eta_1(t)dt=-\dfrac{1}{2}\int_0^T s(t)\eta_1(t)dt\end{cases}$$

令$\sigma_G^2=\int_0^T\int_0^T\left[s_1(t)-s_0(t)\right]R_n^{-1}(t-x)\left[s_1(x)-s_0(x)\right]dtdx=\int_0^T\int_0^T s(t)R_n^{-1}(t-x)s(x)dtdx$，

可得$E\{G\mid H_1\}=\dfrac{1}{2}\sigma_G^2$，$E\{G\mid H_0\}=-\dfrac{1}{2}\sigma_G^2$，$Var\{G\mid H_1\}=Var\{G\mid H_0\}=\sigma_G^2$。

因此，G的条件概率密度分别为

$f(G|H_1)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_G^2}}\exp\left[-\left(G-\dfrac{1}{2}\sigma_G^2\right)^2\Big/2\sigma_G^2\right]$ $f(G|H_0)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_G^2}}\exp\left[-\left(G+\dfrac{1}{2}\sigma_G^2\right)^2\Big/2\sigma_G^2\right]$

第一类错误概率

$$P(D_1\mid H_0)=\int_0^\infty f(G|H_0)dG=\int_{\frac{\sigma_G}{2}}^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz$$

第二类错误概率

$$P(D_0\mid H_1)=\int_\infty^0 f(G|H_1)dG=\int_{-\infty}^{-\frac{\sigma_G}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz$$

综上，平均错误概率为

$$\overline{P}_e=\frac{1}{2}\left[P(D_1\mid H_0)+P(D_0\mid H_1)\right]=\int_{\frac{\sigma_G}{2}}^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz$$

$$=1-\Phi\left(\frac{\sigma_G}{2}\right)$$

注：加条件$P(H_0)=P(H_1)=\frac{1}{2}$。

3-33 在高斯白噪声中检测随机相位相位信号是经常遇到的一类问题。在雷达系统中，信号模型可以表示为

$$\begin{aligned} H_0: &\quad x(t)=n(t) \\ H_1: &\quad x(t)=A\sin(\omega_0 t+\theta)+n(t) \end{aligned},\quad 0\le t\le T$$

其中A为接收信号的振幅；频率ω_0已知，且满足$\omega_0 T=2n\pi$，n为整数；θ是$[0,2\pi)$上均匀分布的随机相位；噪声$n(t)$是零均值、功率谱密度为$N_0/2$的高斯白噪声。

（1）如果我们在对接收信号$x(t)$作相关运算时，把信号的相位θ作为零来处理，那么实际接收信号中的相位不为零，求作为相位θ函数的检测概率$P_D(\theta)$。并把结果同相位确实为零的结果进行比较。

（2）证明：无论信噪比多大，检测概率都有可能小于虚警概率，这取决于θ的实际取值。如果信号的相位θ不是随机的，而是非零未知的，甚至是非零已知的，把它作为零来处理，是否同样存在检测概率可能小于虚警概率的问题？

解：

（1）当把信号的相位θ作为零来处理时有：

$$\lambda(x(t))=\frac{f(x(t)|H_1)}{f(x(t)|H_0)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} th$$

即

$$\lambda(x(t))=\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left(A^2\sin^2 w_0 t-2Ax(t)\sin w_0 t\right)dt\right\}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} th$$

化简得

$$G=\int_0^T Ax(t)\sin w_0 t dt\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} th'=\frac{N_0}{2}\ln th+\frac{A^2T}{4}$$

当θ不为零时，为某一定值时，有

$$E(G|\theta,H_1)=E\left\{\int_0^T A\sin w_0 t\left[A\sin(w_0 t+\theta)+n(t)\right]dt\right\}=\frac{A^2T}{2}\cos\theta$$

$$\operatorname{var}(G|\theta,H_1)=\frac{A^2N_0T}{4}$$

检验统计量G在H_1假设下服从高斯分布，概率密度函数为

$$\therefore f(G|\theta,H_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{A^2N_0T}{4}}}\exp\left\{-\frac{\left(G-\frac{A^2T\cos\theta}{2}\right)^2}{2\times\frac{A^2N_{.0}T}{4}}\right\}$$

$$\therefore P_D(\theta)=1-\int_{-\infty}^{th'}f(G|\theta,H_1)dG$$

$$=1-\Phi\left(\frac{N_0\ln th+\frac{A^2T}{2}-A^2T\cos\theta}{\sqrt{A^2N_0T}}\right)$$

$\theta=0$时，$P_D(\theta)$达到最大值，$\therefore P_D(\theta)=1-\Phi\left(\frac{N_0\ln th-\frac{A^2T}{2}}{\sqrt{A^2N_0T}}\right)$

$\therefore P_D(\theta)\le P_D(0)$

（2） $E(G|\theta,H_0)=0$

$$\operatorname{var}(G|\theta,H_0)=\frac{A^2N_0T}{4}$$

检验统计量G在H_0假设下服从高斯分布，概率密度函数为

$$(G|\theta,H_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{A^2N_0T}{4}}}\exp\left\{-\frac{G^2}{2\times\frac{A^2N_{.0}T}{4}}\right\}$$

虚警概率为

$$P_{fa}=\int_{th'}^{\infty}f(G|\theta,H_0)dG=1-\Phi\left(\frac{N_0\ln th+\frac{A^2T}{2}}{\sqrt{A^2N_0T}}\right)$$

$\therefore$当$\cos\theta<0$时，$P_{fa}>P_D(\theta)$

3-34 M 元假设如下：

$$H_i:\ x(t)=Af_i(t)\cos(\omega_c t+\theta)+n(t),0\le t\le T,i=0,1,\cdots,M-1$$

式中A,ω_c是确定量；$f_i(t)$是慢变信号，θ是随机量，概率密度函数为

$f(\theta)=\frac{e^{\gamma\cos\theta}}{2\pi I_0(\gamma)}$；$\{n(t)\}$是功率谱密度为$N_0/2$的高斯白噪声；

$P(H_i)=1/M,i=0,1,\cdots,M-1$。若采用最小错误概率准则，请给出最佳检测器的构

成。（提示：$\int_0^{2\pi}\exp\left[(\gamma+q_c)\cos\theta-q_s\sin\theta\right]\frac{d\theta}{2\pi}=I_0\left\{\left[(\gamma+q_c)^2+q_s^2\right]^{1/2}\right\}$）

解：

记 $f_i(x)$ 为 H_i 下的概率密度：

$$\therefore f_i(x|\theta)=\exp\left\{-\frac{1}{N}\int_0^T\left[x(t)-Af_i(t)\cos(wt+\theta)\right]^2dt\right\}$$
$$=\exp\left\{-\frac{1}{N}\int_0^T x^2dt+\frac{A^2}{2}\int_0^T f_i^2(t)dt\right\}\bullet\exp\left\{A\left[\int_0^T f_i(t)x(t)\cos wt\cos\theta dt-\int_0^T f_i(t)x(t)\sin\theta\sin wtdt\right]\right\}$$

令 $$\begin{aligned}A\int_0^T f_i(t)x(t)\cos wtdt=q_c\\ A\int_0^T f_i(t)x(t)\sin wtdt=q_s\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x)&=\int_{<\theta>}f(x|\theta)f(\theta)d\theta\\ &=\int\frac{e^{r\cos\theta}}{2\pi I_0(r)}\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T\frac{A^2}{2}f_i^2(t)dt\right\}\bullet\exp(q_c\cos\theta-q_s\sin\theta)\\ &=I_0\left[(r+q_c)^2+q_s^2\right]^{1/2}\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T\frac{A^2}{2}f_i^2(t)dt\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x)&=\int_{<\theta>}f(x|\theta)f(\theta)d\theta\\ &=\int\frac{e^{r\cos\theta}}{2\pi I_0(r)}\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T\frac{A^2}{2}f_i^2(t)dt\right\}\bullet\exp(q_c\cos\theta-q_s\sin\theta)\\ &=I_0\left[(r+q_c)^2+q_s^2\right]^{1/2}\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T\frac{A^2}{2}f_i^2(t)dt\right\}\end{aligned}$$

3-35 *M*元非相干频移键控问题。

$$\begin{aligned}&H_0: x(t)=A_0\sin(\omega_0 t+\theta_0)+n(t)\\ &H_1: x(t)=A_1\sin(\omega_1 t+\theta_1)+n(t)\\ &\vdots\\ &H_{M-1}: x(t)=A_{M-1}\sin(\omega_{M-1}t+\theta_{M-1})+n(t)\end{aligned}$$

若每种假设的先验概率和代价函数相等，相位服从 $[0,2\pi)$ 上的均匀分布，$n(t)$ 是均值为零功率谱为 $\frac{N_0}{2}$ 高斯白噪声。

（1）若振幅相等，即 $A_i=A_0\quad i=1.2,\cdots M-1$，以最小错误概率准则设计接收机。

（2）如果接收机中滤波器的输出是统计独立的，求错误概率。

解：

（1）条件概率密度函数 $f(x(t)\,|\,\theta,H_i)=F\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left[x(t)-A_i\sin(\omega_i t+\theta_i)\right]^2dt\right\}$，

且最小错误概率准则下的判决规则为：$\dfrac{f\left(x(t)\mid H_i\right)}{f\left(x(t)\mid H_j\right)} \geq 1, j=1,2,\cdots M-1, j\neq i$时，判为

H_i。

则

$$\frac{f\left(x(t)\mid H_i\right)}{f\left(x(t)\mid H_j\right)}=\frac{\int_0^{2\pi} f\left(x(t)\mid\theta,H_i\right)f\left(\theta_i\right)d\theta_i}{\int_0^{2\pi} f\left(x(t)\mid\theta,H_j\right)f\left(\theta_j\right)d\theta_j}=\frac{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left[x(t)-A_i\sin\left(\omega_i t+\theta_i\right)\right]^2dt\right\}d\theta_i}{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left[x(t)-A_j\sin\left(\omega_j t+\theta_j\right)\right]^2dt\right\}d\theta_j}$$

由于 $A_i=A_0, i=1,2,\cdots M-1$，且由于 $2\pi/\omega_c \ll T, \int_0^T \sin^2\left(\omega_c+\theta\right)dt\approx T/2$，统计量为

$$\frac{f\left(x(t)\mid H_i\right)}{f\left(x(t)\mid H_j\right)}=\frac{e^{-\frac{A_0^2T}{2N_0}}\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T x^2(t)dt\right\}\int_0^{2\pi}\exp\left\{\frac{2A_0}{N_0}\int_0^T x(t)\sin\left(\omega_i t+\theta\right)dt\right\}\frac{d\theta}{2\pi}}{e^{-\frac{A_0^2T}{2N_0}}\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T x^2(t)dt\right\}\int_0^{2\pi}\exp\left\{\frac{2A_0}{N_0}\int_0^T x(t)\sin\left(\omega_j t+\theta\right)dt\right\}\frac{d\theta}{2\pi}}$$

$$=\frac{\int_0^{2\pi}\exp\left\{\frac{2A_0}{N_0}\int_0^T x(t)\sin\left(\omega_i t+\theta\right)dt\right\}\frac{d\theta}{2\pi}}{\int_0^{2\pi}\exp\left\{\frac{2A_0}{N_0}\int_0^T x(t)\sin\left(\omega_j t+\theta\right)dt\right\}\frac{d\theta}{2\pi}}$$

将上式中的指数项中的正弦函数展开，

$$\int_0^T x(t)\sin\left(\omega_i t+\theta\right)dt=\int_0^T x(t)\left[\sin\omega_i t\cos\theta+\cos\omega_i t\sin\theta\right]=\cos\theta\int_0^T x(t)\sin\omega_i t dt+\sin\theta\int_0^T x(t)\cos\omega_i t dt$$

令 $\begin{cases} a_i=q_i\sin\theta_{0i}=\int_0^T x(t)\sin\left(\omega_i t\right)dt \\ b_i=q_i\cos\theta_{0i}=\int_0^T x(t)\cos\left(\omega_i t\right)dt \end{cases}$

于是 $q_i^2=\left[\int_0^T x(t)\sin\omega_i t dt\right]^2+\left[\int_0^T x(t)\cos\omega_i t dt\right]^2\geq 0$

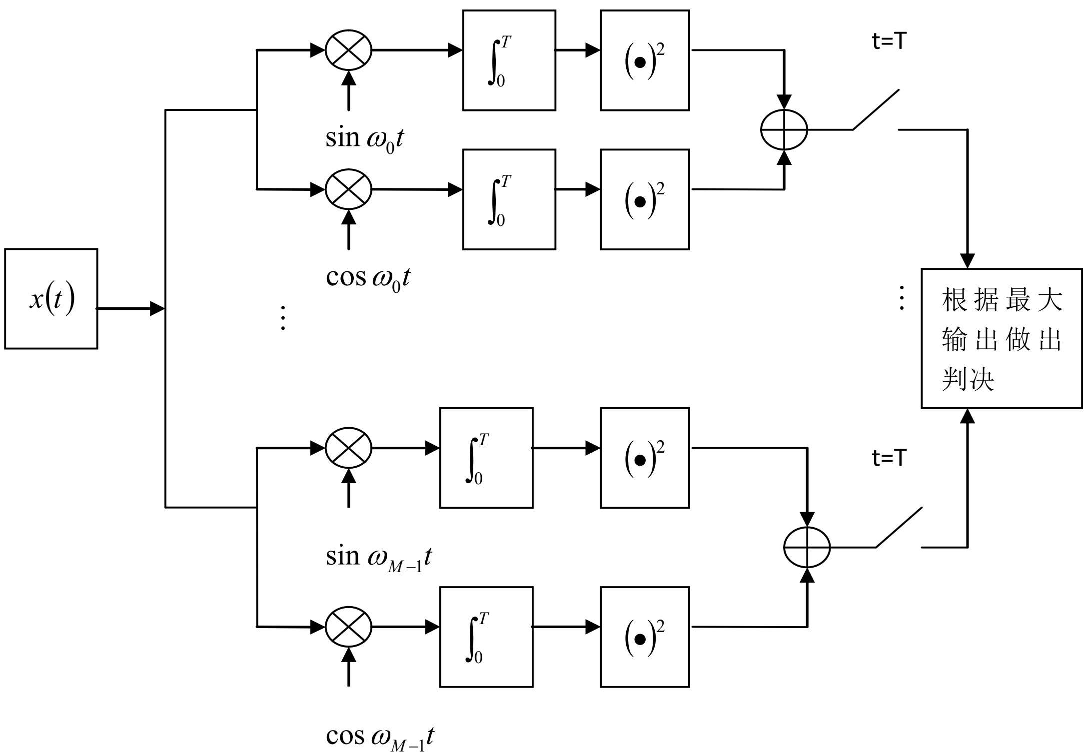
检验统计量变为

$$\lambda_{ij}=\frac{f\left(x(t)\mid H_i\right)}{f\left(x(t)\mid H_j\right)}=\frac{\int_0^{2\pi}\exp\left\{\frac{2A_0q_i}{N_0}\cos\left(\theta-\theta_{0i}\right)\right\}\frac{d\theta}{2\pi}}{\int_0^{2\pi}\exp\left\{\frac{2A_0q_j}{N_0}\cos\left(\theta-\theta_{0j}\right)\right\}\frac{d\theta}{2\pi}}=\frac{I_0\left(\frac{2A_0q_i}{N_0}\right)}{I_0\left(\frac{2A_0q_j}{N_0}\right)}$$

由前述的判决规则，$\lambda_{ij}\geq 1, j=1,2,\cdots M-1, j\neq i$，

可得 $I_0\left(\dfrac{2A_0q_i}{N_0}\right)\geq I_0\left(\dfrac{2A_0q_j}{N_0}\right)$，$j=1,2,\cdots M-1, j\neq i$，又由于 $I_0(\bullet)$ 为单调递增的，所以

最终的判决规则为 $q_i\geq q_j, j=1,2,\cdots M-1, j\neq i$



（2）参考教材 P153-P156，可求得 $f(q_i \mid H_i)$ 与 $f(q_j \mid H_i)$，$i \neq j$，则有

$$P(D_i \mid q_i = g, H_i) = P(q_0 < g, q_1 < g, \cdots, q_{i-1} < g, q_{i+1} < g, \cdots, q_{M-1} < g \mid q_i = g, H_i)$$

$$= \left[P(q_j < g \mid q_i = g, H_i)\right]^{M-1}$$

$$= \left[\int_0^g f(q_j \mid H_i) dq_j\right]^{M-1}, (j \neq i)$$

$$P_e = 1 - \sum_{i=0}^{M-1} P(D_i \mid H_i) P(H_i)$$

$$= 1 - P(D_i \mid H_i)$$

$$= 1 - \int_0^{+\infty} P(D_i \mid q_i = g, H_i) f(q_i = g \mid H_i) dg$$

$$= 1 - \int_0^{+\infty} \left[\int_0^g f(q_j \mid H_i) dq_j\right]^{M-1} f(q_i = g \mid H_i) dg, (j \neq i)$$

3-36 二元假设如下：

$$H_0:\ x(t) = s(t) + n(t)$$
$$H_1:\ x(t) = As(t) + n(t) \quad 0 \le t \le T$$

式中，$s(t)$ 是确知信号，$A \sim N(0, \sigma_n^2)$，$n(t)$ 是功率谱密度为 $N_0/2$ 的高斯白噪声；

已知$P(H_i)=1/2, i=0,1$。

若采用最小错误概率准则，求判决规则及错判概率。
解：由题意知

$$\lambda(x|A)=\frac{f(x|A,H_1)}{f(x|H_0)}=\exp\left\{\frac{1}{N_0}\int_0^T\left[\left(1-A^2\right)s^2(t)+2(A-1)x(t)s(t)\right]dt\right\}$$

$$\lambda(x)=1G\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}q_i\geq q_j, j=1,2,\cdots M-1, j\neq i$$

$$\therefore\lambda(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda(x|A)f(A)dA=\sqrt{\frac{N_0}{N_0+2\sigma_n^2\int_0^T s^2(t)dt}}\exp\left\{\frac{1}{N_0}\int_0^T s^2(t)dt-\frac{2}{N_0}\int_0^T s(t)x(t)dt+\frac{2\sigma_n^2\left(\int_0^T x(t)s(t)dt\right)^2}{2N_0\sigma_n^2\int_0^T s^2(t)dt+N_0^2}\right\}$$

平均最下错误判决准则为

$$\lambda(x)\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}th=\frac{P(H_0)}{P(H_1)}=1$$

设检验统计量为$G=\int_0^T s(t)x(t)dt$，则判决规则变为$G\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}th'$，$th'$为$\lambda(x)=1$的解。

$$E(G|H_0)=\int_0^T s^2(t)dt,\quad E(G|A,H_1)=A\int_0^T s^2(t)dt$$

$$\operatorname{var}(G|H_0)=\frac{N_0}{2},\quad \operatorname{var}(G|A,\ H_1)=\frac{N_0}{2}$$

$$\therefore f(G|H_0)=\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}}\exp\left\{-\frac{\left(G-\int_0^T s^2(t)dt\right)^2}{N_0}\right\}$$

$$f(G|A,H_1)=\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}}\exp\left\{-\frac{\left(G-A\int_0^T s^2(t)dt\right)^2}{N_0}\right\}$$

判决错误概率为：

$$P_e=P(H_0)P(D_1|H_0)+P(H_1)P(D_0|H_1)=\frac{1}{2}\left[P(D_1|H_0)+P(D_0|H_1)\right]$$

其中$P(D_0|H_1)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{th'}f(G|A,H_1)dGdA$，$P(D_1|H_0)=\int_{th'}^{\infty}f(G|H_0)dG$

3-39 M 元假设如下：

$$H_i:\ x(t)=A_0\cos(\omega_i t+\theta_i)+n(t),0\le t\le T,i=1,2,\cdots,M$$

已知 $P(H_i)=1/M,i=1,2,\cdots,M$ ； $\theta_i,i=1,2,\cdots,M$ 是均匀分布统计独立随机变量；

$A_0,\omega_i,i=1,2,\cdots,M$ 是确定量。若采用最小错误概率准则，求判决规则。

解：$f\left(x(t)/H_i,\theta_i\right)=F\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left[x(t)-A\cos(w_i t+\theta_i)\right]^2dt\right\}$

$\lambda(x(t))=\dfrac{\int_0^{2\pi}f\left(x(t)/H_i,\theta_i\right)\frac{d\theta_i}{2\pi}}{\int_0^{2\pi}f\left(x(t)/H_j,\theta_j\right)\frac{d\theta_j}{2\pi}}\ge\dfrac{P(H_i)}{P(H_j)}=1$ 对 $\forall j\ne i$ 成立，则判为 H_i

$$\int_0^{2\pi}f\left(x(t)/H_i,\theta_i\right)\frac{d\theta_i}{2\pi}=F\exp\left\{-\frac{A_0{}^2T}{2N_0}\right\}\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T x^2(t)dt\right\}\int_0^{2\pi}\exp\left\{\frac{2A_0}{N_0}\int_0^T x(t)\cos(w_i t+\theta_i)dt\right\}\frac{d\theta_i}{2\pi}$$

其中最后一项中 $\int_0^T x(t)\cos(w_i t+\theta_i)dt=\cos\theta_i\int_0^T x(t)\cos w_1 tdt-\sin\theta_i\int_0^T x(t)\sin w_1 tdt$

令 $\begin{cases}\int_0^T x(t)\cos w_i tdt=q_i\cos\theta\\ -\int_0^T x(t)\sin w_i tdt=q_i\sin\theta\end{cases}$ 则 $\int_0^T x(t)\cos(w_i t+\theta_i)dt=q_i\cos(\theta-\theta_i)$

其中 $q_i{}^2=\left[\int_0^T x(t)\cos w_i tdt\right]^2+\left[\int_0^T x(t)\sin w_i tdt\right]^2$

故 $\int_0^{2\pi}\exp\left\{\frac{2A_0}{N_0}\int_0^T x(t)\cos(w_i t+\theta_i)dt\right\}\frac{d\theta_i}{2\pi}=I_0\left(\frac{2A_0q_i}{N_0}\right)$

则 $\lambda(x(t))=\dfrac{I_0\left(\frac{2A_0q_i}{N_0}\right)}{I_0\left(\frac{2A_0q_j}{N_0}\right)}\ge1$ 时判为 H_i

又 $I_0(x)$ 为单调递增函数，故判决规则可化为 $q_i\ge q_j$ 对 $\forall j\ne i$ 成立，判为 i。

3-40 考虑在带宽为 W，功率谱密度为 $N_0/2$ 的窄带高斯白噪声中的窄带信号检测问题。窄带信号复包络 $\tilde{s}(t)=A\tilde{s}_0(t)e^{j\theta}$ ；式中，A 是瑞利分布随机变量，

$$f(A)=\frac{A}{\sigma^2}\exp\left\{-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right\}A\ge0\ ;$$

θ 是均匀分布随机变量，$f(\theta)=1/2\pi$ 。

二元假设如下：

$$\begin{aligned} H_0: &\ \tilde{x}(t)=\tilde{n}(t) \\ H_1: &\ \tilde{x}(t)=A\tilde{s}_0(t)e^{j\theta}+\tilde{n}(t) \end{aligned},0\le t\le T$$

若采用纽曼-皮尔逊准则，求判决规则。

解：$\lambda\left(x(t)/A\right)=\dfrac{\int_0^{2\pi} f\left(x(t)/\theta,H_1\right)\dfrac{d\theta}{2\pi}}{f\left(x(t)/H_0\right)}$

其中

$$\int_0^{2\pi} f\left(x(t)/\theta,H_1\right)\frac{d\theta}{2\pi}=F\int_0^{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left[x(t)-A\sin\left(w_c t+\theta\right)\right]^2 dt\right\}\frac{d\theta}{2\pi}$$

$$=F\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T x^2(t)dt\right\}\exp\left\{-\frac{A^2T}{2N_0}\right\}I_0\left(\frac{2Aq}{N_0}\right)$$

故 $\lambda\left(x(t)/A\right)=\exp\left\{-\dfrac{A^2T}{2N_0}\right\}I_0\left(\dfrac{2Aq}{N_0}\right)$

则平均似然比

$$\lambda\left(x(t)\right)=\int_0^{+\infty} f\left(x(t)/A\right)f(A)dA=\int_0^{+\infty}\frac{A}{\sigma^2}\exp\left\{-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right\}\exp\left\{-\frac{A^2T}{2N_0}\right\}I_0\left(\frac{2Aq}{N_0}\right)dA$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{A}{\sigma^2}\exp\left\{-\frac{A^2}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{T}{N_0}\right)\right\}I_0\left(\frac{2Aq}{N_0}\right)dA$$

由于 $\int_0^{+\infty} xe^{-vx^2}I_0(ux)dx=\dfrac{1}{2v}e^{\frac{u^2}{4v}}$ 有判决规则

$$\lambda\left(x(t)\right)=\frac{N_0}{N_0+T\sigma^2}\exp\left[\frac{2\sigma^2q^2}{N_0\left(N_0+T\sigma^2\right)}\right]\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}th_0$$

$$\Rightarrow\ln\left(\frac{N_0}{N_0+T\sigma^2}\right)+\frac{2\sigma^2q^2}{N_0\left(N_0+T\sigma^2\right)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\ln th_0$$

等效判决准则为 $q\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}th'$ （1）

其中 $th'=\sqrt{\dfrac{N_0\left(N_0+T\sigma^2\right)}{2\sigma^2}\ln\left[\dfrac{th_0\left(N_0+T\sigma^2\right)}{N_0}\right]}$

根据纽曼—皮尔逊准则，门限 th' 由虚警概率 P_{fa} 确定

$f\left(q/H_0\right)$ 服从莱斯分布（具体推导见书上 P154~P155）

则 $f\left(q/H_0\right)=\dfrac{4q}{N_0T}\exp\left\{-\dfrac{2q^2}{N_0T}\right\}$

可得 $P_{fa}=\int_{th'}^{+\infty} f\left(q/H_0\right)dq=\int_{th'}^{+\infty}\frac{4q}{N_0T}\exp\left\{-\frac{2q^2}{N_0T}\right\}dq=\exp\left\{-\frac{2th'^2}{N_0T}\right\}$ （2）

综上所述根据（2）式及 P_{fa} 的值确定检测门限 th' 的值，再由（1）式进行判决。

3-43 考虑一个多脉冲的检测问题：

$$\begin{aligned}&H_0:\quad x_i(t)=n_i(t)\\&H_1:\quad x_i(t)=A_i\cos(\omega_c t+\theta_i)+n_i(t)\end{aligned}\quad i=1,\cdots,M,\quad 0\le t\le T$$

式中，$n_i(t)$ 是独立同分布的功率谱密度为 $N_0/2$ 的高斯白噪声；θ_i 是在 $[0,2\pi)$ 均匀分布的相互不相关的随机变量，ω_c 是确定量。

（1）假定 A_i 是离散随机变量，已知 $P(A_i=0)=1-p,P(A_i=A_0)=p$；若采用纽曼-皮尔逊准则，求判决规则。并给出 $A_0\to 0$ 时的似然比形式。

（2）假定 A_i 具有概率密度函数

$$f(A_i)=(1-p)\delta(A_i)+p\frac{A_i}{A_0^2}\exp\left\{\frac{-A_i^2}{2A_0^2}\right\}$$

若采用纽曼-皮尔逊准则，求判决规则以及检测概率 P_D，并给出 $A_0\to 0$ 时的似然比形式。

解：(1)在振幅 A_i 给定的条件下，条件似然比为：$\lambda\left(x_i(t)\,|\,A_i\right)=\exp\left(-\frac{A_i^2T}{2N_0}\right)I_0\left(\frac{2A_i}{N_0}q_i\right)$，

$q_i^2=\left[\int_0^T x_i(t)\sin w_c tdt\right]^2+\left[\int_0^T x_i(t)\cos w_c tdt\right]^2$，又 $P(A_i=0)=1-p,P(A_i=A_0)=1-p$

平均似然比为：

$$\begin{aligned}\lambda\left(x_i(t)\right)&=\lambda\left(x_i(t)\,|\,A_i=0\right)(1-p)+\lambda\left(x_i(t)\,|\,A_i=A_0\right)p\\&=1-p+p\bullet\exp\left(-\frac{A_0^2T}{2N_0}\right)I_0\left(\frac{2A_0}{N_0}q_i\right)\end{aligned}$$

M 个独立同分布的脉冲似然比为：

$$\begin{aligned}\lambda\left(x(t)\right)&=\prod_{i=1}^{M}\lambda\left(x_i(t)\right)\\&=\prod_{i=1}^{M}\left[1-p+p\bullet\exp\left(-\frac{A_0^2T}{2N_0}\right)I_0\left(\frac{2A_0}{N_0}q_i\right)\right]\end{aligned}$$

纽曼—皮尔逊准则下的判决规则为：$\lambda\left(x(t)\right)\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} th$。其中，门限$th$由虚警概率$P\left(D_1 \mid H_0\right)$确定。

判决规则为：

$$\prod_{i=1}^{M}\left[1-p+p\bullet\exp\left(-\frac{A_0^2T}{2N_0}\right)I_0\left(\frac{2A_0}{N_0}q_i\right)\right]\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} th$$

$A_0\to 0$时，$\lambda\left(x(t)\right)\overset{A_0\to 0}{=}\prod_{i=1}^{M}[1\text{-}p\text{+}p]\text{=}1$

（2）由题意知

$$\lambda\left(x_i(t)\right)\text{=}\int_0^{\infty}\lambda\left(x_i(t)|A_i\right)f\left(A_i\right)dA_i$$

$$=1-p+\frac{N_0p}{N_0+A_0^2T}\exp\left[\frac{2A_0^2q_i^2}{N_0\left(N_0+A^2T\right)}\right]$$

$$\therefore\lambda\left(x(t)\right)=\prod_{i=1}^{M}\lambda\left(x_i(t)\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{M}\left[1-p+\frac{N_0p}{N_0+A_0^2T}\exp\left[\frac{2A_0^2q_i^2}{N_0\left(N_0+A^2T\right)}\right]\right]$$

纽曼—皮尔逊准则下的判决规则为：

$\lambda\left(x(t)\right)\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} th$，其中，门限$th$由虚警概率$P\left(D_1 \mid H_0\right)$确定。

$A_0\to 0$时，$\lambda\left(x(t)\right)\overset{A_0\to 0}{=}\prod_{i=1}^{M}[1\text{-}p\text{+}p]\text{=}1$。

4-5 二元假设如下：

$$\begin{cases}H_0: & x_i=n_i\\ H_1: & x_i=\mu+n_i\end{cases}$$

其中$\mu>0$，噪声n_i是独立同分布的，其概率密度函数为

$$f_n(n)=\begin{cases}1 & -1\le n\le 1\\ 0 & other\end{cases}$$

求符号检测器相对于线性检测器的 ARE 。

解：若采用线性检测器，设有 N_1 个观测样本，检测统计量记为 $G_1=\sum_{i=1}^{N_1}x_i$ ；

若采用符号检测器，设有 N_2 个观测样本，检测统计量记为 $G_2=\sum_{i=1}^{N_2}U\left(x_i\right)$ ；

当 N_1 ， N_2 足够大时，由大数定律 G_1 , G_2 均近于高斯分布，根据结论（4.2.50）有

$$ARE_{2,1}\approx 4\sigma^2 f_n^2\left(0\right)=\frac{1}{3}$$

即采用线性检测器更优。

4-7 二元假设如下：

$$\begin{cases} H_0: \ x_i=n_i \\ H_1: \ x_i=\mu+n_i \end{cases} \quad i=1,2,\cdots,10$$

其中 $\mu>0$ ，噪声 n_i 服从对称分布。现取得的两组观测样本值为：

$$\begin{array}{l} 6.2,\ -4.4,\ 6.5,\ 4.1,\ \ 7.7,\ 1.4,\ \ 1.5,\ -0.3,\ 8.0,\ 2.6\quad ; \\ 2.4,\quad\ 6.0,\ 5.1,\ 4.2,-0.5,\ 0.7,-0.2,\ -0.6,\ 5.5,\ 4.0 \end{array}$$

若采用秩检测器，并取 $\alpha=0.15$ ，试分别给出相应的判决。

解 采用秩检测器时，检测统计量记为 $G=\sum_{i=1}^{N}R_iU\left(x_i\right)$ 。

判决准则为： $G\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}th$

由 $p\left(G\ge th/H_0\right)=\dfrac{m}{2^N}\le\alpha=0.15$ ，得 $m\approx 154$ ， $th\approx 38$

将两组分别排序，计算得 $G_1=48>th$ ， $G_2=49>th$

故均判为 H_1 有信号。

4-15 二元假设如下：

$$\begin{cases} H_0: \ x=n \\ H_1: \ x=A+n \end{cases} , \quad A>0$$

若噪声 n 的概率密度函数属于以下一类函数集合：

$$F=\left\{q(x)\middle|q(x)=(1-\varepsilon)p(x)+\varepsilon h(x),h(x)\in H\right\}$$

$0\le\varepsilon<1$，H是任意概率密度函数集合，$p(x)$为拉氏分布，应用纽曼—皮尔逊准则检测，求其完整的 Robust 检测。

解： $p_0(x)=p(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}\sigma}\exp\left(-\dfrac{\sqrt{2}|x|}{\sigma}\right)$

$$p_1(x)=p(x-A)=\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\exp\left(-\frac{\sqrt{2}|x-A|}{\sigma}\right)$$

最不利函数对$\left(q_0^*(x),q_1^*(x)\right)$为

$$q_0^*(x)=\begin{cases}(1-\varepsilon)p_0(x) & \dfrac{p_1(x)}{p_0(x)}<C'' \\ \dfrac{1}{C''}(1-\varepsilon)p_1(x) & \dfrac{p_1(x)}{p_0(x)}\ge C''\end{cases}$$

$$q_1^*(x)=\begin{cases}(1-\varepsilon)p_1(x) & \dfrac{p_1(x)}{p_0(x)}>C' \\ C'(1-\varepsilon)p_0(x) & \dfrac{p_1(x)}{p_0(x)}\le C'\end{cases}$$

其中选择$0\le C'\le C''<+\infty$应保证$\int q_0^*(x)dx=1$、$\int q_1^*(x)dx=1$。

相应的判决规则，为

$$\gamma(x)\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}th$$

其中th为判决门限，由α确定，即$R\left(q_0^*,\phi^*\right)=E\left\{\phi^*\middle|q_0^*\right\}=\int_{th'}^{+\infty}q_0^*(x)dx=\int_{th}^{+\infty}\gamma(x)dx=\alpha$。

$\gamma(x)$为下式表示的单样本对数似然比

$$\gamma(x)=\begin{cases}\ln C' & \ln\dfrac{p_1(x)}{p_0(x)}\le\ln C' \\ \ln\dfrac{p_1(x)}{p_0(x)} & \ln C'<\ln\dfrac{p_1(x)}{p_0(x)}\le\ln C'' \\ \ln C'' & \ln\dfrac{p_1(x)}{p_0(x)}>\ln C''\end{cases}$$

令$a'=\ln C'$和$a''=\ln C''$，则

$$\gamma(x)=\begin{cases} a' & |x|-|x-A|\le\frac{\sigma}{\sqrt{2}}a' \\ \frac{\sqrt{2}}{\sigma}\left(|x_i|-|x_i-A|\right) & \frac{\sigma}{\sqrt{2}}a'<|x|-|x-A|\le\frac{\sigma}{\sqrt{2}}a'' \\ a'' & |x|-|x-A|>\frac{\sigma}{\sqrt{2}}a'' \end{cases}$$

5-2 若观测方程为 $x_i=s+n_i\ \left(i=1,2,\cdots,N\right)$，其中信号 $s\sim N\left(0,\sigma_s^2\right)$，噪声 $n_i\sim N\left(0,\sigma_n^2\right)\left(i=1,2,\cdots,N\right)$独立同分布，且信号与噪声满足$E\left\{sn_i\right\}=0$。求$s$的最大后验概率估计$\hat{s}_{MAP}$。

解：

依题意，以信号s为条件的观测样本的概率密度函数为

$$f\left(x_1,\cdots,x_N \mid s\right)=\frac{1}{\left(2\pi\sigma_n^2\right)^{N/2}}\exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-s\right)^2}{2\sigma_n^2}\right]$$

信号 s 的概率密度函数为 $f\left(s\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_s}\exp\left(-\frac{s^2}{2\sigma_s^2}\right)$

则由上面两式可得

$$\frac{\partial}{\partial s}\ln f\left(x_1,\cdots,x_N \mid s\right)=\frac{\partial}{\partial s}\left\{\ln\left[\frac{1}{\left(2\pi\sigma_n^2\right)^{N/2}}\exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-s\right)^2}{2\sigma_n^2}\right\}\right]\right\}$$

$$=\frac{\partial}{\partial s}\left[\ln\frac{1}{\left(2\pi\sigma_n^2\right)^{N/2}}-\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-s\right)^2}{2\sigma_n^2}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\ln f\left(s\right)=\frac{\partial}{\partial s}\left\{\ln\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_s}\exp\left(-\frac{s^2}{2\sigma_s^2}\right)\right]\right\}$$

$$=\frac{\partial}{\partial s}\left[\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_s}-\frac{s^2}{2\sigma_s^2}\right]$$

$$=-\frac{s}{\sigma_s^2}$$

最大后验概率准则为 $\hat{\theta}_{MAP}=\max_{\theta} f\left(\theta \mid \mathbf{x}\right)$，即 $\left[\frac{\partial}{\partial\theta}f\left(\theta \mid \mathbf{x}\right)\right]\Big|_{\theta=\hat{\theta}_{MAP}}=0$，又可表示为 $\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f\left(\mathbf{x} \mid \theta\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f\left(\theta\right)\right]\Big|_{\theta=\hat{\theta}_{MAP}}=0$，将之前结果带入其中可得 $\hat{s}_{MAP}=\frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2+N\sigma_s^2}\sum_{i=1}^{N}x_i$ 。

5-4 已知观测信号 $x(t)=A\cos(\omega_0 t+\theta)+n(t)\ (0\le t\le T)$，式子中 $n(t)$ 是零均值，功率谱为 $\frac{N_0}{2}$ 的高斯白噪声，θ 是在 $[0,2\pi)$ 上均匀分布的随机变量，求 A 的最大似然估计和估计量的均方误差。

解：

$x(t)=A\cos(\omega_0 t+\theta)+n(t)$

$x(t)$ 的似然函数为：

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta) + n(t)$$

$$f(x \mid A,\theta) = F \cdot \exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T [x(t) - A\cos(\omega_0 t + \theta)]^2 dt\right\}$$

$$= F \cdot \exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T [x^2(t)dt - 2\int_0^T x(t)A\cos(\omega_0 t + \theta)dt + A^2\int_0^T \cos^2(\omega_0 t + \theta)dt]\right\}$$

$$= F \cdot \exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T [x^2(t)dt + \frac{2A}{N_0}\int_0^T x(t)\cos(\omega_0 t + \theta)dt - \frac{A^2 T}{2N_0}\right\}$$

因为 $f(\theta) = \dfrac{1}{2\pi}$， $0 \le \theta \le 2\pi$

所以

$$f(x \mid A) = \int_0^{2\pi} f(x \mid A,\theta) f(\theta) d\theta$$

$$= F \cdot \exp\{-\frac{A^2 T}{2N_0}\}\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T [x^2(t)dt\right\} I_0(\frac{2Aq}{N_0})$$

其中

$$q^2 = \left[\int_0^T x(t)\sin\omega_0 t dt\right]^2 + \left[\int_0^T x(t)\cos\omega_0 t dt\right]^2$$

$$\ln f(x \mid A) = \ln F - \frac{A^2 T}{2N_0} - \frac{1}{N_0}\int_0^T x^2(t)dt + \ln I_0(\frac{2Aq}{N_0})$$

令 $$\frac{\partial \ln f(x \mid A)}{\partial A} = 0 \Rightarrow -\frac{AT}{N_0} + \frac{\partial}{\partial A} I_0(\frac{2Aq}{N_0}) + 0 \qquad （1）$$

假设 SNR, 即 $\dfrac{2Aq}{N_0}$ 足够大，则 $I_0(\dfrac{2Aq}{N_0}) \approx \dfrac{2Aq}{N_0}$

$$(1) \Rightarrow -\frac{AT}{N_0} + \frac{2q}{N_0} = 0 \Rightarrow \hat{A}_{ML} = \frac{2q}{T}$$

由 $q^2 = \left[\int_0^T x(t)\sin\omega_0 t dt\right]^2 + \left[\int_0^T x(t)\cos\omega_0 t dt\right]^2$

知 $f(q) = \dfrac{q}{\sigma_T^2}\exp(-\dfrac{1}{2\sigma_T^2}(q^2 + \dfrac{A^2 T^2}{4})) I_0(\dfrac{qAT}{2\sigma_T^2})$

所以 $E_q = \int_0^{+\infty} q f(q) dq \simeq AT\left(\int_0^{+\infty} \dfrac{q^3}{\sigma_T^4} e^{-\frac{q^2}{2\sigma_T^2}} dq\right) e \xrightleftharpoons{x=\frac{q}{\sigma_T}} AT\int_0^{+\infty} x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \dfrac{1}{2}AT$

所以 $E(\hat{A}_{ML}) = \dfrac{2}{T}E(q) = \dfrac{2}{T}\cdot\dfrac{1}{2}AT = A$ （无偏估计）

$$\operatorname{var}(q)=\sigma_T^2=\frac{N_0T}{4},\quad \operatorname{var}(\hat{A}_{ML})=\frac{4}{T^2}\bullet\frac{N_0T}{4}=\frac{N_0}{T}$$

5-5 考虑信号 $x(t)=A\cos(\omega_1 t+\theta)+B\sin(\omega_2 t+\phi)+n(t)$，其中 A 和 B 已知，θ 与 ϕ 统计独立且均在区间 $(0,2\pi)$ 上均匀分布，$n(t)$ 是功率谱密度为 $N_0/2$ 的高斯白噪声。设 $\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega_1 t+\theta)\sin(\omega_2 t+\phi)dt=0$。求 ω_1，ω_2 的最大似然估计。

解：

以信号 $s(t)=A\cos(\omega_1 t+\theta)+B\sin(\omega_2 t+\varphi)$ 为条件的观测样本的概率密度函数为

$$f(x(t)\,|\,\omega_1,\omega_2)$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}F\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left[x(t)-A\cos(\omega_1 t+\theta)-B\sin(\omega_2 t+\varphi)\right]^2dt\right\}\frac{d\theta}{2\pi}\frac{d\varphi}{2\pi}$$

$=$

$$F\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T x^2(t)dt-\frac{T\left(A^2+B^2\right)}{2N_0}\right\}\int_0^{2\pi}\exp\left\{\frac{2A}{N_0}\int_0^T x(t)\cos(\omega_1 t+\theta)dt\right\}\frac{d\theta}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left\{\frac{2B}{N_0}\int_0^T x(t)\sin(\omega_2 t$$

$$\int_0^T x(t)\cos(\omega_1 t+\theta)dt=\cos\theta\int_0^T x(t)\cos\omega_1 tdt-\sin\theta\int_0^T x(t)\sin\omega_1 tdt=q_1\cos(\theta-\theta_{01}),$$

其中 $\begin{cases}q_1\cos\theta_{01}=\int_0^T x(t)\cos\omega_1 tdt\\ q_1\sin\theta_{01}=-\int_0^T x(t)\sin\omega_1 tdt\end{cases}$，

即 $q_1^2=\left[-\int_0^T x(t)\sin\omega_1 tdt\right]^2+\left[\int_0^T x(t)\cos\omega_1 tdt\right]^2$，

$$\int_0^T x(t)\sin(\omega_2 t+\varphi)dt=\sin\varphi\int_0^T x(t)\cos\omega_2 tdt+\cos\varphi\int_0^T x(t)\sin\omega_2 tdt=q_2\cos(\varphi-\theta_{02})$$

，其中 $\begin{cases}q_2\cos\theta_{02}=\int_0^T x(t)\sin\omega_2 tdt\\ q_2\sin\theta_{02}=-\int_0^T x(t)\cos\omega_2 tdt\end{cases}$，即

$$q_2^2=\left[\int_0^T x(t)\sin\omega_2 tdt\right]^2+\left[-\int_0^T x(t)\cos\omega_2 tdt\right]^2,$$

则有 $f(x(t)\,|\,\omega_1,\omega_2)$

$$=F\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T x^2(t)\,dt-\frac{T\left(A^2+B^2\right)}{2N_0}\right\}I_0\left(\frac{2Aq_1}{N_0}\right)I_0\left(\frac{2Aq_2}{N_0}\right),$$

由最大似然估计准则$\left.\frac{\partial}{\partial\theta}f(\mathbf{x}\mid\theta)\right|_{\theta=\hat{\theta}_{ML}}=0$，则$\omega_1,\omega_2$的最大似然估计$\hat{\omega}_{1ML},\hat{\omega}_{2ML}$应分别满足条件：

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\omega_1}I_0\left(\frac{2Aq_1}{N_0}\right)\Bigg|_{\omega_1=\hat{\omega}_{1ML}}=0\\&\frac{\partial}{\partial\omega_2}I_0\left(\frac{2Aq_2}{N_0}\right)\Bigg|_{\omega_2=\hat{\omega}_{2ML}}=0\end{aligned}$$

。

5-7 观测信号$x(t)=s(t-\tau)\cos\omega(t-\tau)+n(t)\quad(0\le t\le T)$，式中$n(t)$是均值为 0、功率谱为$\frac{N_0}{2}$的高斯白噪声，当$s(t)=A\exp\left(\frac{-t^2}{2T}\right)$时，求$\tau$和$\omega$的最大似然估计。

解：（1）

以信号$s(t-\tau)\cos\omega(t-\tau)$为条件的观测样本的概率密度函数为

$f\left(x(t)\mid\tau,\omega\right)=F\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left[x(t)-s(t-\tau)\cos\omega(t-\tau)\right]^2dt\right\}$，则有

$\ln f\left(x(t)\mid\tau,\omega\right)=\ln F-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left[x(t)-s(t-\tau)\cos\omega(t-\tau)\right]^2dt$，

又 $s(t)=A\exp\left(\frac{-t^2}{2T}\right)$

则

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\ln f\left(x(t)\mid\tau,\omega\right)\Big|_{\tau=\hat{\tau}_{ML}}=-\frac{1}{N_0}\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\int_0^T\left[x(t)-A\exp\left(\frac{-(t-\tau)^2}{2T}\right)\cos\omega(t-\tau)\right]^2dt\right\}\Bigg|_{\tau=\hat{\tau}_{ML}}$$

=

$$-\frac{2A}{N_0}\int_0^T\left[x(t)-Ae^{-\frac{(t-\tau)^2}{2T}}\cos\omega(t-\tau)\right]e^{-\frac{(t-\tau)^2}{2T}}\left[\frac{t-\tau}{T}\cos\omega(t-\tau)+\omega\sin\omega(t-\tau)\right]dt\Bigg|_{\tau=\hat{\tau}_{ML}}$$

=0

（1）$\frac{\partial}{\partial\omega}\ln f\left(x(t)\,|\,\tau,\omega\right)|_{\omega=\hat{\omega}_{ML}}$

$$=-\frac{1}{N_0}\frac{\partial}{\partial\omega}\left\{\int_0^T\left[x(t)-A\exp\left(\frac{-(t-\tau)^2}{2T}\right)\cos\omega(t-\tau)\right]^2dt\right\}\Bigg|_{\omega=\hat{\omega}_{ML}}$$

$$=-\frac{2A}{N_0}\int_0^T\left[x(t)-Ae^{-\frac{(t-\tau)^2}{2T}}\cos\omega(t-\tau)\right]e^{-\frac{(t-\tau)^2}{2T}}(t-\tau)\sin\omega(t-\tau)\,dt\Bigg|_{\omega=\hat{\omega}_{ML}}=0$$

（2）由（1）与（2）可求得$\hat{\tau}_{ML},\hat{\omega}_{ML}$。

5-10 观测样本$x_i=\alpha+\beta s_i+n_i(i=1,2,3,...,10)$彼此独立。已知：

$s_i=i,i=1,...,10$

$x_1=1,x_2=2,x_3=1,x_4=4,x_5=6$
$x_6=6,x_7=8,x_8=9,x_9=12,x_{10}=15$ $\theta=[a_1,a_2,...,a_p,b_1,...,b_p]^T$

求α和β的最小二乘估计。

解：误差平方和

$$\xi(\hat{\alpha})=\sum_{i=1}^{N}(x_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}s_i)^2$$

则最小二乘估计量：

$$\frac{\partial}{\partial\hat{\alpha}}\xi(\hat{\alpha})\Big|_{\hat{\alpha}=\hat{\alpha}_{LS}}=-2\sum_{i=1}^{10}(x_i-\hat{\alpha})=0$$

$$\hat{\alpha}_{LS}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i=6.4$$

$$\frac{\partial}{\partial\hat{\beta}}\xi(\hat{\beta})\Big|_{\hat{\beta}=\hat{\beta}_{LS}}=-2\sum_{i=1}^{10}(x_i-\hat{\beta}s_i)s_i=0$$

$$\hat{\beta}_{LS}=\frac{\sum_{i=1}^{10}x_is_i}{\sum_{i=1}^{10}s_i^2}=\frac{476}{385}=1.236$$

5-11. 假定已知信号

$$s_1(t)=a_1\cos\omega t+a_2\cos2\omega t+...+a_p\cos p\omega t$$

$$s_2(t)=b_1\sin\omega t+b_2\sin 2\omega t+...+b_p\sin p\omega t$$

观测信号 $x(t)=s_1(t)+s_2(t)+n(t)$， $n(t)$ 是均值为 0、均方差为 1 的高斯白噪声。

1） 对 $a_{1,}...,a_{p,}b_{1,}..b_p$ 作最小二乘估计。

2） 求 $\tilde{\theta}_{LS}$ 的概率密度函数

解：（1）

$$\boldsymbol{\theta}=[a_{1,}a_{2,}...,a_{p,}b_{1,}..b_p]^T$$

$$\mathbf{h}(t)=[\cos wt,\cos 2wt,...\cos pwt,\sin wt,...,\sin pwt]$$

对于连续信号，

$$\xi(\boldsymbol{\theta})=\int_0^T[x(t)-\mathbf{h}(t)\boldsymbol{\theta}]^2dt$$

假设观察时间为一个周期 $T=2\pi/w$， 则

$$\frac{\partial\xi(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}}=\int_0^T-2\mathbf{h}^T(t)[x(t)-\mathbf{h}(t)\boldsymbol{\theta}]dt$$

令 $\dfrac{\partial\xi(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}}=0$， 得 $\int_0^T\mathbf{h}^T(t)x(t)dt=\int_0^T\mathbf{h}^T(t)\mathbf{h}(t)dt\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}$

又 $\int_0^T\mathbf{h}^T(t)\mathbf{h}(t)dt=diag(\dfrac{\pi}{w},\dfrac{\pi}{w},...,\dfrac{\pi}{w})$

$$\therefore\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}=\frac{w}{\pi}\int_0^T\mathbf{h}^T(t)x(t)dt$$

（2）由于 $x(t)=\mathbf{h}(t)\cdot\boldsymbol{\theta}+n(t)$， $n(t)$ 服从高斯分布，而 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}$ 是 $\mathbf{h}^T(t)x(t)$ 的积分，

故 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}$ 服从多维高斯分布。

由于

$$E(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS})=E[\frac{w}{\pi}\int_0^T\mathbf{h}^T(t)x(t)dt]=E[\frac{w}{\pi}\int_0^T\mathbf{h}^T(t)(\mathbf{h}(t)\cdot\boldsymbol{\theta}+n(t))dt]$$

$$=\frac{w}{\pi}\int_0^T\mathbf{h}^T(t)\mathbf{h}(t)\cdot\boldsymbol{\theta}dt+\frac{w}{\pi}\int_0^T\mathbf{h}^T(t)E(n(t))dt$$

$$=\frac{w}{\pi}\int_0^T\mathbf{h}^T(t)\mathbf{h}(t)dt\cdot\boldsymbol{\theta}$$

$$=\boldsymbol{\theta}$$

故 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}$ 是无偏估计， $n(t)$ 项与 $\mathbf{h}(t)\cdot\boldsymbol{\theta}$ 相互独立， $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}$ 的协方差矩阵为

$$C_{\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}} = E[(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS} - \boldsymbol{\theta})(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS} - \boldsymbol{\theta})^T]$$

$$= E[\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}^T] - \boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\theta}^T$$

$$= E\{\frac{w}{\pi}\int_0^T \mathbf{h}^T(t)(\mathbf{h}(t)\cdot\boldsymbol{\theta} + n(t))dt \cdot \frac{w}{\pi}\int_0^T (\mathbf{h}(t)\cdot\boldsymbol{\theta} + n(t))^T \mathbf{h}(t)dt\} - \boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\theta}^T$$

$$= (\frac{w}{\pi})^2 E[\int_0^T \mathbf{h}^T(t) n^2(t)\mathbf{h}(t)dt]$$

$$= (\frac{w}{\pi})^2 \int_0^T \mathbf{h}^T(t)\mathbf{h}(t)E(n^2(t))dt$$

由 $\int_0^T \mathbf{h}^T(t)\mathbf{h}(t)dt = diag(\frac{\pi}{w},\frac{\pi}{w},...,\frac{\pi}{w})$，可得

$$C_{\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}} = diag(\frac{w}{\pi},\frac{w}{\pi},...,\frac{w}{\pi}), C_{\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}}^{-1} = (\frac{\pi}{w},\frac{\pi}{w},...,\frac{\pi}{w})$$

则

$$f(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}) = \frac{1}{(2\pi)^p (w/\pi)^p}\exp[-\frac{(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS} - \boldsymbol{\theta})^T C_{\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS} - \boldsymbol{\theta})}{2}]$$

5-12 在乘性噪声和加性噪声中观测随机参数 s 为

$$x = \alpha_1 s + \alpha_2$$

其中

$$f(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_s}\exp\left\{-\frac{(s-m_s)^2}{2\sigma_s^2}\right\}$$

$$f(\alpha_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\frac{(\alpha_2-m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}$$

$$f(\alpha_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{(\alpha_2-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}$$

求 s 的线性最小均方误差估计，并把结果推广到 N 次独立观测样本。

解：（1）对单次观察样本

$$\hat{s}_{LMS} = E\{s\} + \text{cov}\{s,x\}\text{cov}^{-1}\{x,x\}\left[x - E\{x\}\right]$$

其中，

$$E\{s\} = m_s, E\{x\} = E\{\alpha_1 s + \alpha_2\} = m_1 m_s + m_2$$

$$\operatorname{cov}\{s,x\}=E\{(s-E\{s\})(x-E\{x\})\}$$
$$=E\{sx\}-E\{s\}E\{x\}=m_1\sigma_s^2$$
$$\operatorname{cov}\{x,x\}=E\{x^2\}-E^2\{x\}$$
$$=m_s^2\sigma_1^2+m_1^2\sigma_s^2+\sigma_1^2\sigma_s^2+\sigma_2^2$$

所以，得到

$$\hat{s}_{LMS}=m_s+\frac{m_1\sigma_s^2}{m_s^2\sigma_1^2+m_1^2\sigma_s^2+\sigma_1^2\sigma_s^2+\sigma_2^2}(x-m_1m_s-m_2)$$；

（2） 对N次独立观察样本

$$\hat{s}_{LMS}=E\{s\}+\operatorname{cov}\{s,\mathbf{x}\}\operatorname{cov}^{-1}\{\mathbf{x},\mathbf{x}\}[\mathbf{x}-E\{\mathbf{x}\}],\mathbf{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_N]^T$$

其中，

$$E\{s\}=m_s,E\{\mathbf{x}\}=(m_1m_s+m_2)[1,1,\cdots,1]^T$$

$$\operatorname{cov}\{s,\mathbf{x}\}=E\{(s-E\{s\})(\mathbf{x}-E\{\mathbf{x}\})^T\}$$
$$=E\{s\mathbf{x}^T\}-E\{s\}E\{\mathbf{x}^T\}=m_1\sigma_s^2[1,1,\cdots,1]$$

$$\operatorname{cov}\{\mathbf{x},\mathbf{x}\}=E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^T\}-E\{\mathbf{x}\}E^T\{\mathbf{x}\}=(c_{ij})_{N\times N}$$
$$c_{ij}=\begin{cases}m_s^2\sigma_1^2+m_1^2\sigma_s^2+\sigma_1^2\sigma_s^2+\sigma_2^2, i=j\\ m_1^2\sigma_s^2, \quad i\neq j\end{cases}$$

所以，有

$$\hat{s}_{LMS}=m_s+m_1\sigma_s^2[1,1,\cdots,1]\bullet(c_{ij})_{N\times N}^{-1}\bullet\left[\mathbf{x}-(m_1m_s+m_2)[1,1,\cdots,1]^T\right]$$
$$=m_s-\frac{Nm_1\sigma_s^2(m_1m_s+m_2)}{m_s^2\sigma_1^2+Nm_1^2\sigma_s^2+\sigma_1^2\sigma_s^2+\sigma_2^2}+\frac{m_1\sigma_s^2}{m_s^2\sigma_1^2+Nm_1^2\sigma_s^2+\sigma_1^2\sigma_s^2+\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{N}x_i$$

5-14

解：（1）

参照教材例 5.3，可知 $f(s|x_1,x_2,\cdots,x_i)$ 服从均值 $u=\frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2+i\sigma_s^2}\sum_{j=1}^{i}x_j$ ，方差 $\sigma_i^2=\frac{\sigma_n^2\sigma_s^2}{\sigma_n^2+i\sigma_s^2}$ 的高斯分布。其最小均方误差估计为

$$\hat{s}_{MS}(i)=\frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2+i\sigma_s^2}\sum_{j=1}^{i}x_j\text{，}\quad \hat{s}_{MS}(i-1)=\frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2+(i-1)\sigma_s^2}\sum_{j=1}^{i-1}x_j$$

则

$$\hat{s}_{MS}(i)=\frac{\sigma_n^2\hat{s}_{MS}(i-1)+\sigma_{i-1}^2x_i}{\sigma_n^2+\sigma_{i-1}^2}$$

（2）由$\sigma_i^2=\dfrac{\sigma_n^2\sigma_s^2}{\sigma_n^2+i\sigma_s^2}$，可得

$$\frac{1}{\sigma_i^2}=\frac{1}{\sigma_s^2}+\frac{i}{\sigma_n^2}$$

5-15 在λ一定的条件下随机变量x的概率密度函数为

$$f\left(x|\lambda\right)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\geq 0,\lambda\geq 0\\ 0 & \lambda<0\end{cases}$$

若λ的先验密度为

$$f\left(\lambda\right)=\begin{cases}\dfrac{\alpha^n}{\Gamma\left(n\right)}e^{-\lambda\alpha}\lambda^{n-1} & \lambda\geq 0\\ 0 & \lambda<0\end{cases}$$

其中α,n是常数。

1） 试求$\hat{\lambda}_{MAP}$与估计方差。

2）设N次观测下λ的估计量用$\hat{\lambda}_{map}\left(N\right)$表示，相应的估计方差为$\sigma^2\left(N\right)$，增加新的观测值$x_{N+1}$，试以$\hat{\lambda}_{MAP}\left(N\right)$，$\sigma^2\left(N\right)$，$x_{N+1}$表示$\hat{\lambda}_{MAP}\left(N+1\right)$。

解：（1）

$$\ln f\left(x\,|\,\lambda\right)=\begin{cases}\ln\lambda-\lambda x & x\geq 0,\lambda\geq 0\\ 0 & \lambda<0\end{cases}\text{，}\quad \ln f\left(\lambda\right)=\begin{cases}\ln\dfrac{\alpha^n}{\Gamma\left(n\right)}-\lambda\alpha+\left(n-1\right)\ln\lambda & \lambda\geq 0\\ 0 & \lambda<0\end{cases}\text{，}$$

则由最大后验准则$\left[\dfrac{\partial}{\partial\theta}\ln f\left(\mathbf{x}\,|\,\theta\right)+\dfrac{\partial}{\partial\theta}\ln f\left(\theta\right)\right]\Bigg|_{\theta=\hat{\theta}_{MAP}}=0$，可得

$$\left.\frac{1}{\lambda}-x-\alpha+\frac{n-1}{\lambda}\right|_{\lambda=\hat{\lambda}_{MAP}}=0\text{，}$$

可求得 $\hat{\lambda}_{MAP}=\dfrac{n}{x+\alpha}$ 。

$$E\left\{\left(\lambda-\hat{\lambda}_{MAP}\right)^2\right\}$$

$$=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left(\lambda-\frac{n}{x+\alpha}\right)^2 f\left(x,\lambda\right)d\lambda dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left(\lambda-\frac{n}{x+\alpha}\right)^2 f\left(x\mid\lambda\right)f\left(\lambda\right)d\lambda dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left(\lambda-\frac{n}{x+\alpha}\right)^2 \lambda e^{-\lambda x}\frac{\alpha^n}{\Gamma\left(n\right)}e^{-\lambda\alpha}\lambda^{n-1}d\lambda dx$$

$$=\frac{\alpha^n}{\Gamma\left(n\right)}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left(\lambda^2-\frac{2n\lambda}{x+\alpha}+\frac{n^2}{\left(x+\alpha\right)^2}\right)\lambda^n e^{-\lambda(x+\alpha)}d\lambda dx$$

$$=\frac{\alpha^n}{\Gamma\left(n\right)}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\Gamma\left(n+3\right)-2n\Gamma\left(n+2\right)+n^2\Gamma\left(n+1\right)}{\left(x+\alpha\right)^{n+3}}\right)dx$$

$$=\alpha^n\left[\left(n+2\right)\left(n+1\right)n-2n^2\left(n+1\right)+n^3\right]\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(x+\alpha\right)^{n+3}}dx$$

$$=\alpha^n\left(n^2+2n\right)\frac{1}{\left(n+2\right)\alpha^{n+2}}$$

$$=\frac{n}{\alpha^2}$$

（2） N 次(独立)观测下， $f\left(x_1,x_2,\ldots,x_N\mid\lambda\right)=\begin{cases}\lambda^N e^{-\lambda\sum\limits_{i=1}^{N}x_i} & x_i\ge 0,\lambda\ge 0\\ 0 & \lambda<0\end{cases}$ ，

$\ln f\left(x_1,x_2,\ldots x_N\mid\lambda\right)=\begin{cases}N\ln\lambda-\lambda\sum\limits_{i=1}^{N}x_i & x_i\ge 0,\lambda\ge 0\\ 0 & \lambda<0\end{cases}$ ， $\ln f\left(\lambda\right)=\begin{cases}\ln\dfrac{\alpha^n}{\Gamma(n)}-\lambda\alpha+\left(n-1\right)\ln\lambda & \lambda\ge 0\\ 0 & \lambda<0\end{cases}$

由最大后验准则 $\left.\left[\dfrac{\partial}{\partial\theta}\ln f\left(\mathbf{x}\mid\theta\right)+\dfrac{\partial}{\partial\theta}\ln f\left(\theta\right)\right]\right|_{\theta=\hat{\theta}_{MAP}}=0$ ，

可得 $\left.\dfrac{N}{\lambda}-\sum\limits_{i=1}^{N}x_i-\alpha+\dfrac{n-1}{\lambda}\right|_{\lambda=\hat{\lambda}_{MAP}}=0$ ，则可求得 $\hat{\lambda}_{MAP}\left(N\right)=\dfrac{N+n-1}{\alpha+\sum\limits_{i=1}^{N}x_i}$ 。

$$\sigma^2\left(N\right)=E\left\{\left(\lambda-\hat{\lambda}_{MAP}\left(N\right)\right)^2\right\}$$

$$=\int_0^{+\infty}\cdots\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left(\lambda-\frac{N+n-1}{\sum_{i=1}^{N}x_i+\alpha}\right)^2 f\left(x,\lambda\right)d\lambda dx_1dx_2\cdots dx_N$$

$$=\int_0^{+\infty}\cdots\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left(\lambda-\frac{N+n-1}{\sum_{i=1}^{N}x_i+\alpha}\right)^2 f\left(x\,|\,\lambda\right)f\left(\lambda\right)d\lambda dx_1dx_2\cdots dx_N$$

$$=\int_0^{+\infty}\cdots\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left(\lambda-\frac{N+n-1}{\sum_{i=1}^{N}x_i+\alpha}\right)^2 \lambda^N e^{-\lambda\sum_{i=1}^{N}x_i}\frac{\alpha^n}{\Gamma\left(n\right)}e^{-\lambda\alpha}\lambda^{n-1}d\lambda dx_1dx_2\cdots dx_N$$

$$=\frac{\alpha^n}{\Gamma\left(n\right)}\int_0^{+\infty}\cdots\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left(\lambda^2-\frac{2\left(N+n-1\right)\lambda}{\sum_{i=1}^{N}x_i+\alpha}+\left(\frac{N+n-1}{\sum_{i=1}^{N}x_i+\alpha}\right)^2\right)\lambda^{N+n-1}e^{-\lambda\left(\sum_{i=1}^{N}x_i+\alpha\right)}d\lambda dx_1dx_2\cdots dx_N$$

$$=\frac{\alpha^n}{\Gamma\left(n\right)}\int_0^{+\infty}\cdots\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\Gamma\left(N+n+2\right)-2\left(N+n-1\right)\Gamma\left(N+n+1\right)+\left(N+n-1\right)^2\Gamma\left(N+n\right)}{\left(\sum_{i=1}^{N}x_i+\alpha\right)^{N+n+2}}\right)dx_1dx_2\cdots dx_N$$

$$=\frac{\alpha^n\left(N+n+1\right)\Gamma\left(N+n\right)}{\Gamma\left(n\right)}\int_0^{+\infty}\cdots\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{N}x_i+\alpha\right)^{N+n+2}}\right)dx_1dx_2\cdots dx_N$$

$$=\frac{\alpha^n\left(N+n+1\right)\Gamma\left(N+n\right)}{\Gamma\left(n\right)}\frac{1}{\left(N+n+1\right)\left(N+n\right)\cdots\left(n+3\right)\left(n+2\right)\alpha^{n+2}}$$

$$=\frac{\left(n+1\right)n}{\left(N+n\right)\alpha^2}$$

即有$\begin{cases}\hat{\lambda}_{MAP}\left(N\right)=\dfrac{N+n-1}{\alpha+\sum_{i=1}^{N}x_i}\\ \sigma^2\left(N\right)=\dfrac{\left(n+1\right)n}{\left(N+n\right)\alpha^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\sum_{i=1}^{N}x_i=\dfrac{N+n-1}{\hat{\lambda}_{MAP}\left(N\right)}\\ N+n=\dfrac{\left(n+1\right)n}{\alpha^2\sigma^2\left(N\right)}\end{cases}$，

则对于$\hat{\lambda}_{MAP}(N+1)=\dfrac{N+n}{\alpha+\sum_{i=1}^{N}x_i+x_{N+1}}=\dfrac{\dfrac{(n+1)n}{\alpha^2\sigma^2(N)}}{\dfrac{\dfrac{(n+1)n}{\alpha^2\sigma^2(N)}-1}{\hat{\lambda}_{MAP}(N)}+x_{N+1}}$，

可得$\hat{\lambda}_{MAP}(N+1)=\dfrac{(n+1)n\hat{\lambda}_{MAP}(N)}{(n+1)n+\alpha^2\sigma^2(N)\left(\hat{\lambda}_{MAP}(N)x_{N+1}-1\right)}$

5-17 通过两个独立的信道估计随机参数s，已知s是均值为 0、方差为σ_s^2的高斯随机变量。得到的观测样本为：

$$x_1=s+n_1,\quad x_2=s+n_2$$

已知$f(n_i)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i}\exp\left\{-\dfrac{n_i^2}{2\sigma_i^2}\right\}$，$i=1,2$。

1） 求$\hat{s}_{MS}$和$\hat{s}_{MAP}$并计算估计的均方误差。

2） 如果s为非随机实数，求$\hat{s}_{ML}$，该估计值是否为有效估计并计算估计方差。

解：（1）

以信号s为条件的观测样本的概率密度函数为

$$f(x_1,x_2\,|\,s)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\frac{(x_1-s)^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(x_2-s)^2}{2\sigma_2^2}\right\},$$

又有$f(s)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_s}\exp\left\{-\dfrac{s^2}{2\sigma_s^2}\right\}$，则可得

$f(s\,|\,x_1,x_2)=\dfrac{f(x_1,x_2\,|\,s)f(s)}{\int_{(s)}f(x_1,x_2\,|\,s)f(s)ds}$，将前两式代入可知

$$(s\,|\,x_1,x_2)\sim N\left(\frac{\sigma_s^2\left(x_1\sigma_2^2+x_2\sigma_1^2\right)}{\sigma_1^2\sigma_2^2+\sigma_1^2\sigma_s^2+\sigma_2^2\sigma_s^2},\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_s^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2+\sigma_1^2\sigma_s^2+\sigma_2^2\sigma_s^2}\right),$$

则最小均方误差估计准则下的估计$\hat{s}_{MS}=\int_{(s)}f(s\,|\,x_1,x_2)f(s)ds=\dfrac{\sigma_s^2\left(x_1\sigma_2^2+x_2\sigma_1^2\right)}{\sigma_1^2\sigma_2^2+\sigma_1^2\sigma_s^2+\sigma_2^2\sigma_s^2}$

在最大后验概率准则下：$\left[\dfrac{\partial\ln f(x_1,x_2\,|\,s)}{\partial s}+\dfrac{\partial\ln f(s)}{\partial s}\right]\Bigg|_{s=\hat{s}_{MAP}}=0$，

计算得 $\hat{s}_{MAP}=\dfrac{\sigma_s^2\left(x_1\sigma_2^2+x_2\sigma_1^2\right)}{\sigma_1^2\sigma_2^2+\sigma_1^2\sigma_s^2+\sigma_2^2\sigma_s^2}$。

（2）s 为非随机实数时， 最大似然概率准则为 $\left.\dfrac{\partial \ln f\left(x_1,x_2\mid s\right)}{\partial s}\right|_{s=\hat{s}_{ML}}=0$

可求得 $\hat{s}_{ML}=\dfrac{\sigma_1^2x_2+\sigma_2^2x_1}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$。

且由公式 $f\left(x_1,x_2\mid s\right)=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\dfrac{\left(x_1-s\right)^2}{2\sigma_1^2}-\dfrac{\left(x_2-s\right)^2}{2\sigma_2^2}\right\}$ 及公式 $\hat{s}_{ML}=\dfrac{\sigma_1^2x_2+\sigma_2^2x_1}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$ 可推得 $\dfrac{\partial \ln f\left(x_1,x_2\mid s\right)}{\partial s}=\left(\dfrac{1}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)\left(\hat{s}_{ML}-s\right)$，故 $\hat{s}_{ML}$ 为有效估计，其方差为 Cramer-Rao 下界：$Var\left\{\hat{s}_{ML}\right\}=\dfrac{1}{E\left\{\left[\dfrac{\partial}{\partial s}\ln f\left(x_1,x_2\mid s\right)\right]^2\right\}}=\dfrac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$。

5-18 若观测方程为

$$x_i=s+n_i,\quad i=1,2,\dots,N$$

已知 n_i，$i=1,2,\dots,N$ 是均值为零，方差为 σ_n^2 的彼此独立高斯噪声，s 是均值为 0，方差为 σ_s^2 的高斯随机变量。

（1） 证明 $$\hat{s}_{MAP}=\hat{s}_{MS}=\frac{\sigma_S^2}{\sigma_S^2+\frac{\sigma_n^2}{N}}(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i)$$；

（2） 判断估计量是否为无偏估计量

（3） 求估计的方差，判断估计量是否为有效估计量

解：

（1）$\hat{s}_{MAP}$ 和 $\hat{s}_{MS}$ 的求法分别见 P222 和 P224，可得

$$\hat{s}_{MAP}=\hat{s}_{MS}=\frac{\sigma_S^2}{\sigma_S^2+\frac{\sigma_n^2}{N}}(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i)$$

（2）由于 $$E(\hat{s})=\frac{\sigma_S^2}{\sigma_S^2+\frac{\sigma_n^2}{N}}[\frac{1}{N}E(\sum_{i=1}^{N}x_i)]=0$$

而s的均值也为零，故有$E(\hat{s})=E(s)=0$，所以（1）中估计量为无偏估计量。

（3）依据 Cramer-Rao 规则，克拉美罗界给出了无偏估计的均方误差下界，而对单参量s而言，只需满足如下公式即可：

$$\frac{\partial \ln f\left(\boldsymbol{x} \mid s\right)}{\partial s}=K(s)\left(\hat{s}-s\right)\text{ , }\hat{s}=\hat{s}_{MAP}=\hat{s}_{MS}$$

$$\frac{\partial \ln f\left(\boldsymbol{x} \mid s\right)}{\partial s}=\frac{\partial}{\partial s}\ln f\left(x_1,\cdots,x_N \mid s\right)=\frac{\partial}{\partial s}\left\{\ln\left[\frac{1}{\left(2\pi\sigma_n^2\right)^{N/2}}\exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-s\right)^2}{2\sigma_n^2}\right\}\right]\right\}$$

$$=\frac{\partial}{\partial s}\left[\ln\frac{1}{\left(2\pi\sigma_n^2\right)^{N/2}}-\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-s\right)^2}{2\sigma_n^2}\right]=-\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-s\right)^2}{2\sigma_n^2}\right]=\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-s\right)}{\sigma_n^2}$$

而

$$\hat{s}-s=\frac{\sigma_S^2}{\sigma_S^2+\frac{\sigma_n^2}{N}}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i\right)-s=\frac{\sigma_S^2}{N\sigma_S^2+\sigma_n^2}\sum_{i=1}^{N}x_i-s$$

所以并不是有效估计。

6-5 观测信号为 $x(t)=s(t)+n(t)$， $x(t)$ 仅在负无穷当当前时刻有值，

（1）若信号 $s(t)$ 和噪声 $n(t)$ 互不相关，且它们的功率谱密度分别为

$S_S(\omega)=\frac{1}{1+\omega^2}$ 和 $S_n(\omega)=1$. 求对 $\frac{ds(t)}{dt}$ 进行估计的维纳滤波器。

（2）请问，$\frac{ds(t)}{dt}=\frac{d\hat{s}(t)}{dt}$ 是否成立？

解：（1）由题意知，$y(t)=\int_{-\infty}^{t}h(t-\tau)x(\tau)d\tau$， $h(t)$ 为物理可实现维纳滤波器

$$H(s)=\frac{1}{S_x^+(s)}[\frac{S_{gx}(s)}{S_x^-(s)}]^+$$

由于 $g(t)=\frac{ds(t)}{dt}$

$$R_{gx}(t_1-t_2)=E(g(t_1)g(t_2))$$

$$=\frac{d}{dt_1}E[s(t_1)x(t_2)]$$

$$=\frac{d}{dt_1}E[s(t_1)s(t_2)+s(t_1)n(t_2)]$$

$$=\frac{d}{dt_1}R_s(t_1-t_2)$$

$$=\frac{d}{d\tau}R_s(\tau)$$

$$R_{gx}(t_1-t_2)=E(g(t_1)\mathrm{x}(\mathrm{t}_2))$$

做拉氏变换得：

$$S_{gx}(s)=sS_s(s)=\frac{s}{1-s^2}$$

$$S_x(s)=\frac{1}{1-s^2}+1=\frac{(\sqrt{2}-s)(\sqrt{2}+s)}{1-s^2}$$

$$令\ \mathrm{H}_1(\mathrm{s})=\frac{S_{gx}(s)}{S^-{}_x(s)}=s\left(\frac{1}{1+s}+\frac{1}{(\sqrt{2}-s)}\right)\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\frac{1}{\sqrt{2}-s}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\frac{1}{s+1}$$

则 $H_1^+(s) = -\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}\dfrac{1}{s+1}$

又由于 $S_x^+(s) = \dfrac{(\sqrt{2}+s)}{(1+s)}$，得

$$H(s) = --\frac{1}{1+\sqrt{2}}\frac{1}{s+\sqrt{2}}$$

（2）由于 $G(s) = sS(s), \hat{G}(s) = -\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}\dfrac{1}{s+\sqrt{2}}X(s)$, $X(s)$ 中包含噪声频谱, 故其应该是一个随机变量, 而 $\dfrac{ds(t)}{dt}$ 应该为一确定波形, 故两者不能完全相同.

6-14 设有一个标量系统信号模型与观测模型分别为

$$x_{k+1} = (-1)^{2k+1} x_k$$

$$y_{k+1} = x_{k+1} + n_{k+1}$$

其中 x_0 是方差为 V_{x_0} 的零均值高斯分布随机变量；$\{n_{k+1}, \quad k \geq 0\}$ 是方差为 $V_{n_{k+1}}$ 的零均值白噪声序列，且与 x_0 不相关。试求 $\hat{x}_k$。

解：由状态空间模型知，$\Phi_k = (-1)^{2k+1} = -1$，$\Gamma = 0$，$H_{k+1} = 1$，$R_{k+1} = V_{n_{k+1}}$

初始条件：$\hat{x}_0 = 0$，$C_0 = V_{x_0}$

预测：$\hat{x}_{k+1}^- = \Phi_k \hat{x}_k = -\hat{x}_k$

预测误差的协方差：$C_{k+1}^- = \Phi_k C_k \Phi_k^T = C_k$

卡尔曼增益：$K_{k+1} = \dfrac{C_{k+1}^-}{C_{k+1}^- + R_{k+1}} = \dfrac{C_k}{C_k + V_{n_{k+1}}}$

更新：$\hat{x}_{k+1} = -\hat{x}_k + K_{k+1}\left(y_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-\right) = -\hat{x}_k + \dfrac{C_k}{C_k + V_{n_{k+1}}}\left(y_{k+1} + \hat{x}_k\right)$

其中，$C_{k+1} = (1 - K_{k+1})C_{k+1}^- = \dfrac{V_{n_{k+1}}}{C_k + V_{n_{k+1}}} C_k$

6-16 假设有一部雷达从 $k=1$ 秒开始，对一个运动目标的距离进行跟踪测量，若观测的间隔为一秒钟；雷达到运动目标的距离为 x_k； $\dot{x}_k$ =常数； $E\{x_0\}=0$， $Var\{x_0\}=V_{x_0}=10(km)^2$， $E\{\dot{x}_k\}=0$， $Var\{\dot{x}_0\}=V_{\dot{x}_0}=10(km/s)^2$， $Cov\{x_0,\dot{x}_0\}=0$，观测误差 $\{n_k,\quad k\geq 1\}$ 是与 x_0 和 $\dot{x}_0$ 均不相关的白噪声序列，并且有 $E\{n_k\}=0$， $Var\{n_k,n_j\}=V_{n_k}\delta_{kj}=0.1\delta_{kj}(km)^2$ ，则在获得了观测数据： $y_1=1.1(km)$， $y_2=2(km)$， $y_3=3.2(km)$， $y_4=3.8(km)$ 的情况下，利用卡尔曼滤波方法求距离 x_k 的最佳估计及其估计均方误差

解：令观测矢量为 $\mathbf{x}_k=[x_k,\dot{x}_k]^T$

则状态空间模型为： $\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{\Phi}_k\mathbf{x}_k$， $y_{k+1}=\mathbf{H}_k\mathbf{x}_k+\mathbf{n}_k$

其中， $\mathbf{\Phi}_k=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$， $\mathbf{H}_k=\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}$

初始值： $\hat{\mathbf{x}}_0=E\{\mathbf{x}_0\}=\begin{bmatrix}0&0\end{bmatrix}^T$， $\mathbf{C}_0=Var\{\mathbf{x}_0\}=\begin{bmatrix}10&0\\0&10\end{bmatrix}$， $R_k=0.1$

更新：

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}=\mathbf{\Phi_k}\hat{\mathbf{x}}_k+\mathbf{K}_{k+1}\left(y_{k+1}-\mathbf{H}_{k+1}\mathbf{\Phi}_k\mathbf{x}_k\right)$$

$$\mathbf{K}_{k+1}=\mathbf{\Phi}_k\mathbf{C}_k\mathbf{\Phi}_k^T\mathbf{H}_{k+1}^T\left(\mathbf{H}_{k+1}\mathbf{\Phi}_k\mathbf{C}_k\mathbf{\Phi}_k^T\mathbf{H}_{k+1}^T+R_{k+1}\right)^{-1}$$

$$\mathbf{C}_{k+1}=\left(\mathbf{I}-\mathbf{K}_{k+1}\mathbf{H}_{k+1}\right)\mathbf{\Phi}_k\mathbf{C}_k\mathbf{\Phi}_k^T$$

代入 $y_1=1.1$， $y_2=2$， $y_3=3.2$， $y_4=3.8$，得

x_k 的最佳估计 $\hat{x}_1=1.0945(km)$， $\hat{x}_2=1.9933(km)$， $\hat{x}_3=3.1448(km)$， $\hat{x}_4=3.9182(km)$

均方误差 $\mathbf{C}_k(1,1)$ 分别为 $0.0995(km)^2$， $0.0981(km)^2$， $0.0827(km)^2$， $0.0697(km)^2$

6-17 设有系统方程为

$$\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k+\mathbf{u}_k$$

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{H}\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{n}_{k+1}$$

其中

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = [1, 0]$$

；

$\{u_k，k \geq 0\}$和$\{n_{k+1}，k \geq 0\}$是均值为零的白噪声序列，与x_0独立，且有

$$Var\{\mathbf{u}_k\} = \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Var\{\mathbf{n}_{k+1}\} = \mathbf{R}_{k+1} = 2 + (-1)^{k+1}$$

而初始状态的方差阵$\mathbf{V}_{\mathbf{x}_0} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$，求卡尔曼增益$\mathbf{K}_k$。

解：

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{H}\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{n}_{k+1} \end{cases}$$

由卡尔曼滤波

$$\mathbf{C}_0 = \mathrm{var}\{\mathbf{x}_0\} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_1^- = \mathbf{\Phi}_k \mathbf{C}_0 \mathbf{\Phi}_k^{\mathrm{T}} + \mathbf{\Gamma} \mathbf{Q}_0 \mathbf{\Gamma}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 16 & 10 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{C}_1^- \mathbf{H}_1^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{H} \mathbf{C}_1^- \mathbf{H}^{\mathrm{T}} + \mathbf{R}_1 \right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{16}{17} \\ \frac{10}{17} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_1 = (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H}) \mathbf{C}_1^- = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} 16 & 10 \\ 10 & 87 \end{bmatrix}$$

$$\text{反复利用} \begin{cases} \mathbf{C}_{k+1}^- = \mathbf{\Phi} \mathbf{C}_k \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}} + \mathbf{Q} \\ \mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{C}_{k+1}^- \mathbf{H} \left(\mathbf{H} \mathbf{C}_{k+1}^- \mathbf{H}^{\mathrm{T}} + \mathbf{R}_{k+1} \right)^{-1} \\ \mathbf{C}_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}) \mathbf{C}_{k+1}^- \end{cases}$$

三式可以推到任意阶。

6-20 考虑连续时间系统的卡尔曼滤波问题。假定对标量信号 $s(t)$ 而言，其运动方程及观测方程分别为：

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t)$$
$$y(t) = x(t) + n(t)$$

其中，A为常数，u_k 为动态噪声，n_k 为观测噪声，且有

$$E\{u(t)\} = E\{n(t)\} = 0$$
$$E\{u(t)u(\tau)\} = V_u(t)\delta(t-\tau)$$
$$E\{n(t)n(\tau)\} = V_n(t)\delta(t-\tau)$$
$$E\{u(t)n(\tau)\} = 0$$

试推导连续卡尔曼滤波方程。

解：已知 $\mathbf{\Phi}_k = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ -0.1 & 0.8 \end{bmatrix}$，$\Gamma = [1 \quad 0]^T$，$\hat{\mathbf{x}}_0 = [3 \quad -3]$，$\mathbf{H}_k = [0 \quad 1]$，

$R_k = Q_k = 1$，$\mathbf{C}_0 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

则 $\hat{\mathbf{x}}_1^- = \mathbf{\Phi}_k \hat{\mathbf{x}}_0 = [2.4 \quad -2.7]^T$

$$\mathbf{C}_1^- = \mathbf{\Phi}_0 \mathbf{C}_0 \mathbf{\Phi}_0^T + \mathbf{\Gamma} \mathbf{Q}_1 \mathbf{\Gamma}^T = \begin{bmatrix} 4.25 & -0.28 \\ -0.28 & 0.68 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{C}_1^- \mathbf{H}_1^T \left(\mathbf{H}_1 \mathbf{C}_1^- \mathbf{H}_1^T + R_1 \right)^{-1} = \begin{bmatrix} \text{-}0.1667 & 0.4048 \end{bmatrix}^T$$

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = \hat{\mathbf{x}}_1^- + \mathbf{K}_1 \left(y_1 - \mathbf{H}_1 \hat{\mathbf{x}}_1^- \right) = \begin{bmatrix} 2.4 \\ \text{-}2.7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{-}0.1667 \\ 0.4048 \end{bmatrix} \left(y_1 + 2.7 \right)$$

$$\mathbf{C}_1 = \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_1 \mathbf{H}_1 \right) \mathbf{C}_1^- = \begin{bmatrix} 4.2033 & \text{-}0.1667 \\ \text{-}0.1667 & 0.4047 \end{bmatrix}.$$