量子物理习题课

2023/4/14

张家璇

用费马原理证明反射定律和折射定律。

略。见讲义11-12页

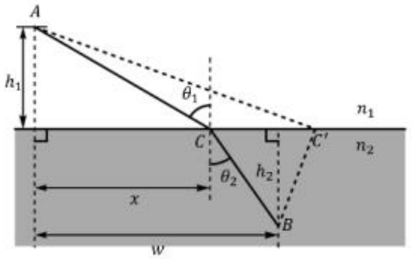


图 1-5 折射符合费马原理

对折射现象，设 A 点到界面的距离为h_1，B 点到界面的距离为h_2，A、B 两点的水平距离（平行于分界面的距离）为w。假若光线在 C 点发生折射，记 A、C 的水平距离为x，那么从 A 点到 B 点所需时间是

$$t=\frac{AC}{v_1}+\frac{CB}{v_2}=\frac{1}{v_1}\sqrt{h_1^2+x^2}+\frac{1}{v_2}\tag{1.11}$$

取微商得

$$\frac{dt}{dx}=\frac{x}{v_1\sqrt{h_1^2+x^2}}-\frac{w-x}{v_2\sqrt{h_2^2+(w-x)^2}}\tag{1.12}$$

耗时最少的路径满足

$$\frac{dt}{dx}=0\Leftrightarrow\frac{x}{v_1\sqrt{h_1^2+x^2}}=\frac{w-x}{v_2\sqrt{h_2^2+(w-x)^2}}\tag{1.13}$$

即

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1}=\frac{\sin\theta_2}{v_2}\tag{1.14}$$

$$n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2\tag{1.15}$$

因此符合折射定律的路径费时最少。

证明棱镜折射率n与最小偏向角$\delta_{\min}$的关系：

由几何关系：

$$\delta+\alpha=i_1+i_1',\quad \alpha=i_2+i_2', \tag{1}$$

折射定律：

$$n'\sin i_1=n\sin i_2,\quad n'\sin i_1'=n\sin i_2' \tag{2}$$

对（1）微分

$$0=\mathrm{d}i_1+\mathrm{d}i_1',\quad 0=\mathrm{d}i_2+\mathrm{d}i_2' \tag{3}$$

对（2）微分

$$n'\cos i_1\mathrm{d}i_1=n\cos i_2\mathrm{d}i_2,\quad n'\cos i_1'\mathrm{d}i_1'=n\cos i_2'\mathrm{d}i_2' \tag{4}$$

得到

$$\sin i_1\sin i_2'=\sin i_2\sin i_1' \tag{5}$$

$$\cos i_1\cos i_2'=\cos i_2\cos i_1' \tag{6}$$

所以

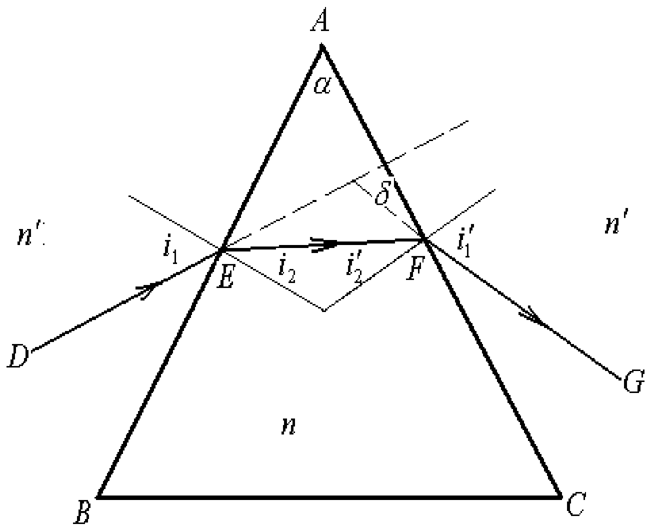
$$\cos(i_1+i_2')=\cos(i_1'+i_2) \tag{7}$$

$$\cos(i_1-i_2')=\cos(i_1'-i_2) \tag{8}$$

结合 i_1,i_1',i_2,i_2' 的范围和大小关系，得到：

$$i_1=i_1',\ i_2=i_2' \tag{9}$$

所以 $n/n'=\dfrac{\sin i_1}{\sin i_2}=\dfrac{\sin\frac{\alpha+\delta_{min}}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$



1. 设在阳光暴晒下，马路上方空气折射率随高度y的变化规律为

$$n(y) = n_0(1 + Ay),$$

$$A = 0.8 \times 10^{-6}\mathrm{m}^{-1}$$

一人站在马路上向前看，能看到多远？设此人眼睛离地面高度为 1.6m。

折射定律：

$$n(y)\sin\theta = constant = n(0)\sin\frac{\pi}{2},$$

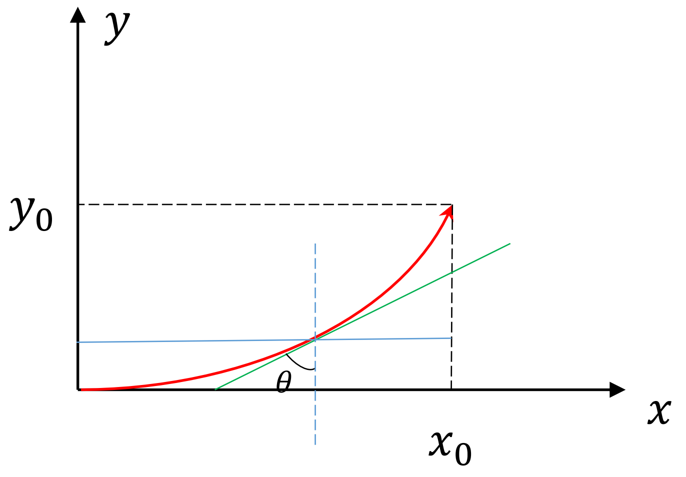
θ满足：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cot\theta$$

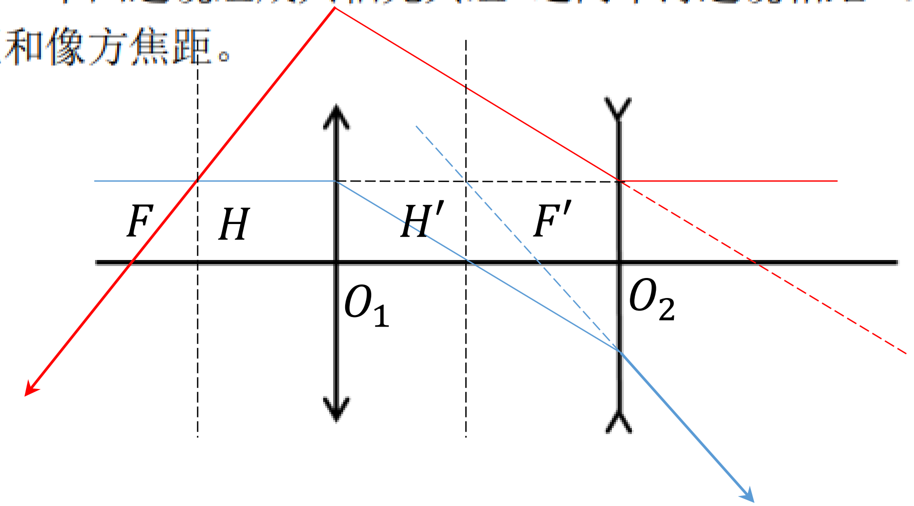
所以

$$x_0 = \int_0^{x_0}\mathrm{d}x = \int_0^{y_0}\tan\theta\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{y_0}\sqrt{\frac{1}{(1+Ay)^2-1}}\mathrm{d}y \approx \int_0^{y_0}\sqrt{\frac{1}{2Ay}}\mathrm{d}y = \sqrt{2y_0/A}$$



2. 一个凸透镜和一个凹透镜组成共轴光具组。这两个薄透镜相距 100cm，焦距均为 50cm。求系统的物方焦距和像方焦距。



平行于光轴的物方入射光线经过凸透镜汇聚于焦点，之后入射凹透镜：

$$\frac{1}{50}+\frac{1}{s'_1}=\frac{1}{-50}$$

$$s'_1=-25$$

平行于光轴的像方入射光线经过凹透镜，反向延长线汇聚于焦点，之后入射凸透镜：

$$\frac{1}{150}+\frac{1}{s'_2}=\frac{1}{50}$$

$$s'_2=75$$

由几何关系：

$$f=FH=25cm$$

$$f'=H'F=25cm$$

符号的确定参见讲义19-20页

5. 单色平面波在y-z平面内，沿着与y-轴夹角为30° 方向传播，写出它的标量波函数、复波函数和复振幅。

标量波函数：

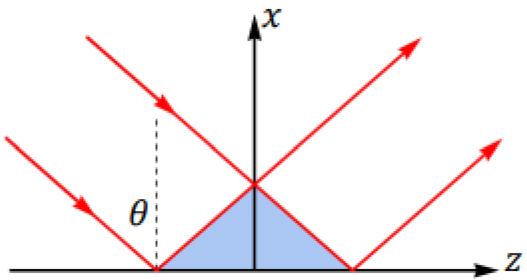
$$\psi(\vec{r},t) = A_0\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \phi_0)$$

复波函数：

$$\tilde{\psi}(\vec{r},t) = \widetilde{A_0}(\vec{r})e^{-i\omega t}$$

其中复振幅 $\widetilde{A_0}(\vec{r}) = A_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\phi_0)}$，$\vec{k}\cdot\vec{r} = \cos\frac{\pi}{6}ky + \sin\frac{\pi}{6}kz$

6.　如图，一列波矢量在x-z平面的平面波，入射后在的分界面$x=0$处发生反射。求反射波和入射波重叠区光矢量的复振幅。



入射波复波函数：

$$\widetilde{E_1}\,(\vec{r},t)=E_0\,e^{ik(z\sin\theta-x\cos\theta)}\,e^{-i(\omega t+\phi_0)}$$

反射波复波函数：

$$\widetilde{E_2}\,(\vec{r},t)=E_0\,e^{ik(z\sin\theta+x\cos\theta)}e^{-i(\omega t+\phi_0')}$$

在$x=0$平面上振动方程连续，所以：

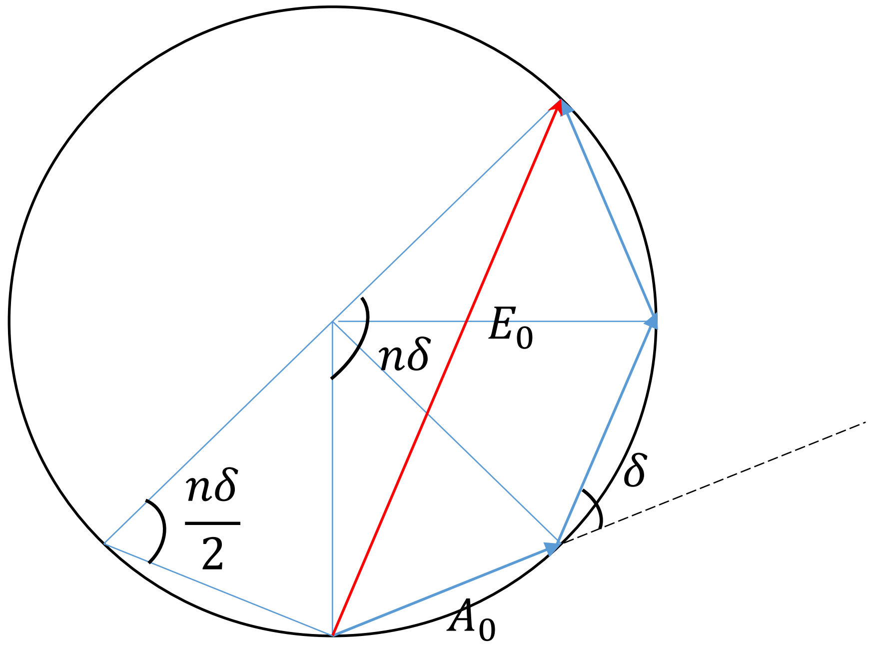
$$\phi_0=\phi_0'$$

得到：

$$\widetilde{E_1}\,(\vec{r},t)+\widetilde{E_2}\,(\vec{r},t)=2E_0\cos(kx\cos\theta)\,e^{ikz\sin\theta}e^{-i(\omega t+\phi_0)}$$

例：多光束干涉的复振幅解法

已知N，A_0，δ，求E_0



$$\tilde{E}_0 = A_0 + A_0 e^{i\delta} + A_0 e^{2i\delta} + \cdots = A_0 \frac{1-e^{in\delta}}{1-e^{i\delta}}$$

$$E_0 = |\tilde{E}_0| = A_0 \sqrt{\frac{(1-e^{in\delta})(1-e^{-in\delta})}{(1-e^{i\delta})(1-e^{-i\delta})}} = A_0 \frac{\sin\frac{N\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}$$

正弦定理：

$$E_0 = 2R\sin\frac{n\delta}{2}$$

$$A_0 = 2R\sin\frac{\delta}{2}$$

所以：

$$E_0 = A_0 \frac{\sin\frac{n\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}$$

- 1.3. 产生稳态干涉的相干光，必须来自同一发光原子、同一发射的波列，解释其理由。

  不同的原子，或同一原子不同次发光时，波列的振向、初相位随机变化。这导致在观测时间（一般较长）内，初相位之差是随机数，不能满足相干条件。

- 1.4. 用很薄的云母片覆盖在双缝实验的一条缝上，看到干涉条纹移动了 9 个条纹间距，求云母片的厚度。已知云母片折射率 $n = 1.58$，光源波长 550nm。

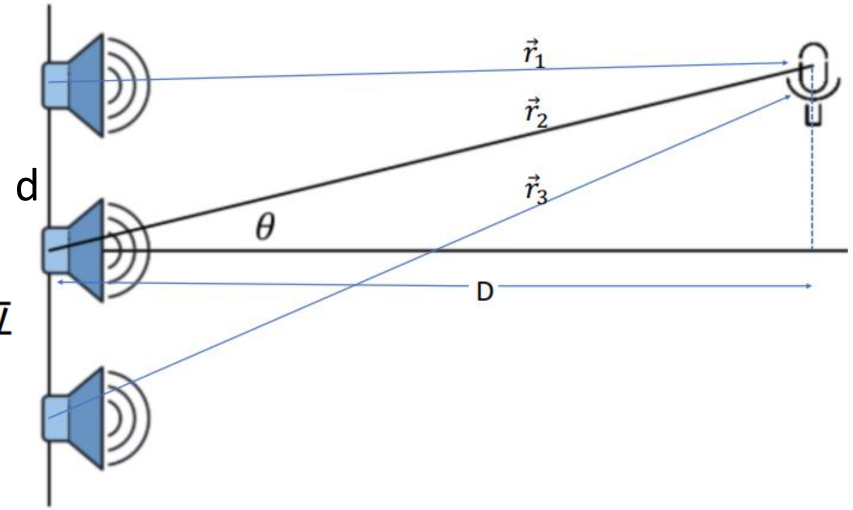
$$(n-1)d = 9\lambda \tag{1}$$

$$d = 9\lambda/(n-1) \approx 8.53\ \mu\text{m} \tag{2}$$

三个扬声器排成直线，相距 d，播放单频声音信号

$$s_j(t) = A\cos(\omega t + \phi_j), \quad j = 1, 2, 3$$

远处一个麦克风在夹角为 θ 的方向接收声音。欲使麦克风处消音，三个初相位 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 应该满足什么关系。



三列球面波在麦克风处的复振幅叠加等于零：

$$\frac{A}{r_1}e^{i(kr_1+\phi_1)} + \frac{A}{r_2}e^{i(kr_2+\phi_2)} + \frac{A}{r_3}e^{i(kr_3+\phi_3)} = 0$$

由几何关系以及$\frac{d}{r_2} \ll 1$：

$$r_1 = \sqrt{r_2^2\cos^2\theta + (r_2\sin\theta - d)^2} = r_2\sqrt{1 - 2\frac{d}{r_2}\sin\theta + (\frac{d}{r_2})^2} \approx r_2 - d\sin\theta,$$

$$r_3 \approx r_2 + d\sin\theta.$$

利用近似条件$\frac{1}{r_1}\approx\frac{1}{r_2}\approx\frac{1}{r_3}$，得到：

$$e^{i(kr_1+\phi_1)}+e^{i(kr_2+\phi_2)}+e^{i(kr_3+\phi_3)}=0$$

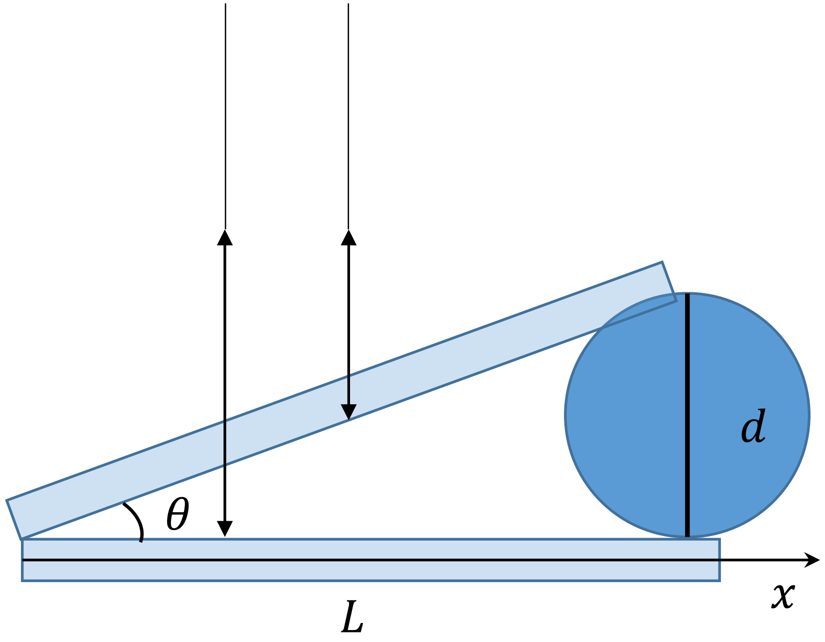
这三项的幅角依次相差$\frac{2}{3}\pi$的时候叠加为零：

$$\begin{cases}kr_2+\phi_2-kr_1-\phi_1=\frac{2}{3}\pi+n_1\pi\\ kr_3+\phi_3-kr_2-\phi_2=\frac{2}{3}\pi+n_2\pi\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}kr_1+\phi_1-kr_2-\phi_2=\frac{2}{3}\pi+n_1\pi\\ kr_3+\phi_3-kr_1-\phi_1=\frac{2}{3}\pi+n_2\pi\end{cases}$$

即：

$$\begin{cases}\phi_2-\phi_1=-kd\sin\theta+\frac{2}{3}\pi+n_1\pi\\ \phi_3-\phi_2=-kd\sin\theta+\frac{2}{3}\pi+n_2\pi\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}\phi_1-\phi_2=kd\sin\theta+\frac{2}{3}\pi+n_1\pi\\ \phi_3-\phi_1=-2kd\sin\theta+\frac{2}{3}\pi+n_2\pi\end{cases}$$

10. 两块平板玻璃叠合在一起，一端接触，在离接触线 12.5cm 处用金属细丝垫在两板之间。用波长 546nm 的单色光垂直入射，测得条纹间距为 1.50mm。求细丝的直径。



x处发生干涉的两束光的光程差：

$$\Delta L = 2n_0 x\tan\theta + \frac{\lambda}{2}$$

亮条纹的位置x_m满足：

$$2n_0 x_m tan\theta + \frac{\lambda}{2} = m\lambda,\ \ m = 0,1,2,\dots$$

条纹间距：

$$\Delta x = x_{m+1} - x_m = \frac{\lambda}{2\tan\theta}$$

结合 $\tan\theta = d/L$，得到

$$d = \frac{\lambda L}{2\Delta x}$$

12. 在折射率为 1.5 的玻璃表面，镀上一层折射率为 1.30 的透明薄膜。对于 550nm 的黄绿光垂直入射的情形，为了增强透射光束强度，应使反射光干涉相消。求膜的厚度。

发生干涉的两束光的光程差：

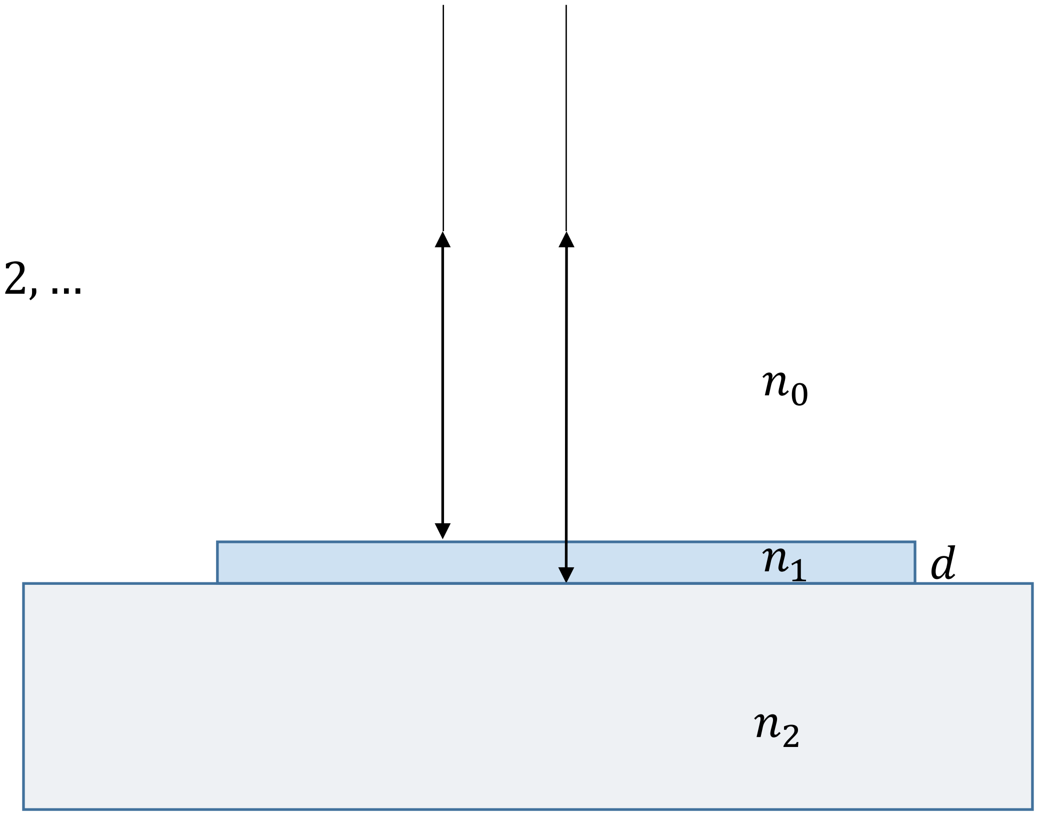
$$\Delta L = 2n_1 d$$

干涉相消条件：

$$2n_1 d = m\lambda + \frac{\lambda}{2}, \quad m = 0,1,2,\dots$$

取干涉最清晰的第零级（$m = 0$），得到：

$$d = \frac{\lambda}{4n_1}$$



13. 用波长 589.3nm 的钠黄光作为夫琅禾费单缝衍射的光源，测得第二极小到干涉图样中心的距离为 0.30cm。改用未知波长的单色光源，测得第三极小到中心的距离为 0.42cm。求未知波长。

单缝夫琅和费衍射的复振幅为：

$$E_0\mathrm{sinc}\alpha=\frac{E_0\sin\alpha}{\alpha},\quad 其中\alpha=\frac{\pi a x}{\lambda z}$$

暗条纹位置满足：

$$\mathrm{sinc}\alpha=0，\ 即\frac{x}{z}=m\frac{\lambda}{a}，\quad m=0,1,2,\ldots$$

所以：

$$\frac{x_1}{z}=2\frac{\lambda_1}{a},\qquad \frac{x_2}{z}=3\frac{\lambda_2}{a}$$

得到

$$\lambda_2=\frac{2x_2}{3x_1}\lambda_1$$

- 1.10. 评估你的手机像素数目是否超过了镜头的光学衍射极限。估算所需的参数，如手机摄像头模组的光圈系数、像素、CMOS 图像传感器的尺寸等，请自行在网络上搜索。

  以 HUAWEI Mate 40 Pro 为例，超感知摄像头参数：8192*6144 像素，F/1.9 光圈，1/1.28 英寸传感器。(光圈 F = 镜头焦距 f/镜头直径 D, 1 英寸传感器对角线长度为 16mm。)

传感器长宽比为 4：3，则传感器宽度为 $1/1.28 \times 16mm \times \frac{3}{5} = 7.5\mathrm{mm}$
镜头的空间分辨率为 $\Delta x' = 7.5\mathrm{mm}/6144 = 1.22\mu\mathrm{m}/\mathrm{pixel}$
衍射极限空间分辨率

$$\Delta x = f\Delta\theta = f\frac{1.22\lambda}{D} = 1.22F\lambda \tag{17}$$

要使计算的镜头分辨率不超过光学衍射极限，

$$\Delta x' \geq \Delta x \tag{18}$$

$$\lambda \leq \frac{1\mu m}{F} = 526.3\mathrm{nm} \tag{19}$$

可见光波长范围为 390-760nm，即仅对于波长小于 526.3nm 的光，官方给出的分辨率才未超过光学衍射极限。

- 1.14. 四个偏振片依次前后排列。每个偏振片的透振方向，均相对于前一偏振片沿顺时针方向转过 30° 角。不考虑吸收、反射等光能损失，则透过此偏振片系统的光强是入射光强的多少倍?

  对于线偏光入射，设偏振方向与第一个偏振片的透振方向夹角为 θ，则透过此偏振系统的光强是入射光强的 $(\cos\theta\cos^3 30^\circ)^2 = \frac{27}{64}\cos^2\theta$ 倍

- 1.15. 有一空气-玻璃界面，光从空气一侧入射时，布儒斯特角是 58°，求光从玻璃一侧入射时的布儒斯特角。

$$\tan\theta_{b1} = \frac{n_2}{n_1} \tag{22}$$

$$\tan\theta_{b2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{\tan\theta_{b1}} \tag{23}$$

$$\theta_{b2} = 32^\circ \tag{24}$$

- 1.18. 热核爆炸中火球的温度可达 $10^7\mathrm{K}$，
(1) 求辐射最强的波长；
(2) 这种波长的光子能量是多少?

$$\lambda_m = \frac{b}{T} = \frac{2.898 \times 10^{-3}\mathrm{m} \cdot \mathrm{K}}{10^7\mathrm{K}} = 0.2898\mathrm{nm} \tag{25}$$

$$\frac{hc}{\lambda} = 6.86 \times 10^{-16}\mathrm{J} = 4.29 \times 10^3\mathrm{eV} \tag{26}$$