信息论与编码习题参考答案

第一章 单符号离散信源

1.1 同时掷一对均匀的子，试求：
(1)“2 和 6 同时出现”这一事件的自信息量；
(2)“两个 5 同时出现”这一事件的自信息量；
(3)两个点数的各种组合的熵；
(4)两个点数之和的熵；
(5)“两个点数中至少有一个是 1”的自信息量。

解：

样本空间：$N = c_6^1 c_6^1 = 6 \times 6 = 36$

$(1)P_1 = \frac{n_1}{N} = \frac{2}{36} \therefore I(a) = -\log P_1 = \log 18 = 4.17bit$

$(2)P_2 = \frac{n_2}{N} = \frac{1}{36} \therefore I(a) = -\log P_2 = \log 36 = 5.17bit$

(3)信源空间：

X	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
P(X)	1/36	2/36	2/36	2/36	2/36	2/36
X	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)	
P(x)	1/36	2/36	2/36	2/36	2/36	
X	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)		
P(x)	1/36	2/36	2/36	2/36		
X	(4,4)	(4,5)	(4,6)			
P(x)	1/36	2/36	2/36			
X	(5,5)	(5,6)		(6,6)		
P(x)	1/36	2/36		1/36		

$$\therefore H(x) = 15 \times \frac{2}{36} \times \log \frac{36}{2} + 6 \times \frac{1}{36} \times \log 36 = 4.32bit$$

(4)信源空间：

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

$$\therefore H(x) = \frac{2}{36} \times \log 36 + \frac{4}{36} \times \log \frac{36}{2} + \frac{6}{36} \times \log \frac{36}{3} + \frac{8}{36} \times \log \frac{36}{4} + \frac{10}{36} \times \log \frac{36}{5} + \frac{6}{36} \times \log \frac{36}{6} = 3.71bit$$

$$(5) \quad P_3 = \frac{n_3}{N} = \frac{11}{36} \therefore I(a) = -\log P_3 = \log \frac{36}{11} = 1.17bit$$

1.2 如有 6 行、8 列的棋型方格，若有两个质点 A 和 B，分别以等概落入任一方格内，且它们的坐标分别为（Xa，Ya），（Xb，Yb）,但 A，B 不能同时落入同一方格内。
（1）若仅有质点 A，求 A 落入任一方格的平均信息量；
（2）若已知 A 已落入，求 B 落入的平均信息量；
（3）若 A，B 是可辨认的，求 A，B 落入的平均信息量。
解：

$$(1)\because A\text{落入任一格的概率}: P(a_i)=\frac{1}{48}\ \therefore I(a_i)=-\log P(a_i)=\log 48$$

$$\therefore \mathrm{H}(a)=-\sum_{i=1}^{48}P(a_i)\log P(a_i)=\log 48=5.58bit$$

$$(2)\because \text{在已知}A\text{落入任一格的情况下,B落入任一格的概率是}: P(b_i)=\frac{1}{47}$$

$$\therefore I(b_i)=-\log P(b_i)=\log 47$$

$$\therefore \mathrm{H}(b)=-\sum_{i=1}^{48}P(b_i)\log P(b_i)=\log 47=5.55bit$$

$$(3)AB\text{同时落入某两格的概率是}P(AB_i)=\frac{1}{48}\times\frac{1}{47}$$

$$\therefore I(AB_i)=-\log P(AB_i)$$

$$H(AB_i)=-\sum_{i=1}^{48\times 47}P(AB_i)\log P(AB_i)=\log(48\times 47)=11.14bit$$

1.3 从大量统计资料知道,男性中红绿色盲的发病率为 7%,女性发病率为 0.5%.如果你问一位男士：“你是否是红绿色盲？”他的回答可能是：“是”，也可能“不是”。问这两个回答中各含有多少信息量？平均每个回答中各含有多少信息量？如果你问一位女士，则她的答案中含有多少平均信息量？
解：
对于男士：
回答“是”的信息量：$I(m_y)=-\log P(m_y)=-\log 7\%=3.84bit$
回答“不是”的信息量：$I(m_n)=-\log P(m_n)=-\log 93\%=0.105bit$
平均每个回答信息量：$\mathrm{H}(m)=-P(m_y)\times\log P(m_y)-P(m_n)\times\log P(m_n)$
$=\text{-}7\%\times\log 7\%\ \text{-}\ 93\%\times\log 93\%=0.366bit$
对于女：
回答“是”的信息量：$I(w_y)=-\log P(w_y)=-\log 0.5\%$
回答“不是”的信息量：$I(m_n)=-\log P(m_n)=-\log 99.5\%$
平均每个回答信息量：$\mathrm{H}(m)=-P(w_y)\times\log P(w_y)-P(w_n)\times\log P(w_n)$
$=\text{-}0.5\%\times\log 0.5\%\ \text{-}\ 99.5\%\times\log 99.5\%=0.0454bit$

1.4 某一无记忆信源的符号集为｛0，1｝，已知 $p_0 = \frac{1}{3}$，$p_1 = \frac{2}{3}$。

（1） 求符号的平均信息量；

（2） 由 1000 个符号构成的序列，求某一特定序列（例如有 m 个“0”,（1000-m）个“1”）的自信量的表达式；

（3） 计算（2）中序列的熵。

解：

⑴ $H(x) = -p_0 \log p_0 - p_1 \log p_1 = -\frac{1}{3}\times\log\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\times\log\frac{2}{3} = 0.918 \quad bit/symble$

⑵ $I(A) = -m\log p_0 - (1000-m)\log p = -m\log\frac{1}{3} - (1000-m)\log\frac{2}{3} \quad bit$

⑶ $H(A) = 1000H(X) = 1000\times 0.918 = 918 \quad \text{bit/sequence}$

$$H(A) = -\sum_{i=1}^{m} p_0 \log p_0 - \sum_{i=1}^{1000-m} p_1 \log p_1 = -\frac{m}{3}\log\frac{1}{3} - \frac{2(1000-m)}{3}\log\frac{2}{3}$$

1.5 设信源 X 的信源空间为：

$$[x \bullet p]:\begin{cases} \text{X:} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ p(\text{X}) & 0.17 & 0.19 & 0.18 & 0.16 & 0.18 & 0.3 \end{cases}$$

求信源熵，并解释为什么 H(X)>log6，不满足信源熵的极值性。

解：

$$\begin{aligned} H(X) &= -\sum_{i=1}^{6} p(a_i)\log p(a_i) \\ &= -0.17\log 0.17 - 0.19\log 0.19 - 2\times 0.18\log 0.18 - 0.16\log 0.16 - 0.3\log 0.3 \\ &= 2.725 \quad \text{bit/symble} \end{aligned}$$

可见$\text{H(X)} = 2.725 > \log 6 = 2.585$ 不满足信源熵的极值性，

这是因为信源熵的最大值是在$\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$ 的约束条件下求得的，但是本题中

$\sum_{i=1}^{6} p_i = 1.18$不满足信源熵最大值成立的约束条件，所以$\text{H(X)} > \log 6$。

1.6 为了使电视图象获得良好的清晰度和规定的对比度，需要用 5×10^5 个像素和 10 个不同的亮度电平，并设每秒要传送 30 帧图象，所有的像素是独立的，且所有亮度电平等概出现。求传输此图象所需要的信息率（bit/s）。

解：

由于亮度电平等概出现，由熵的极值性：

每个像素的熵是：$\text{H}(x_0) = \sum_{i=1}^{10} p(a_i)\log p(a_i) = \log 10 = 3.322 \quad \text{bit/pels}$

每帧图像的熵是：$\text{H}(X) = 5\times10^5 \times \text{H}(x_0) = 5\times10^5\times 3.322 = 1.661\times10^6 \ \text{bit/frame}$

$\therefore$ 所需信息速率为：$\text{R} = r(frame/s)\times H(X)(bit/frame) = 30\times 1.661\times10^6 = 4.983\times10^7 \quad \text{bit/s}$

1.7 设某彩电系统，除了满足对于黑白电视系统的上述要求外，还必须有 30 个不同的色彩度。试证明传输这种彩电系统的信息率要比黑白系统的信息率大 2.5 倍左右。

证:

增加30个不同色彩度,在满足黑白电视系统要求下,每个色彩度需要10个亮度,

所以每个像素需要用$30\times 10=300$bit量化

$\therefore$ 每个像素的熵是：$\mathrm{H}(x_1)=\sum_{i=1}^{300}p(b_i)\log p(b_i)=\log 300\mathrm{bit/pels}$

$\because \dfrac{\mathrm{H}(x_1)}{\mathrm{H}(x_0)}=\dfrac{\log 300}{\log 10}=2.477\approx 2.5$

$\therefore$ 彩色电视系统每个像素信息量比黑白电视系统大2.5倍作用,所以传输相同的图形,彩色电视系统信息率要比黑白电视系统高2.5倍左右.

1.8 每帧电视图像可以认为是由 3×10^5 个像素组成，所以像素均是独立变化，且每像素又取 128 个不同的亮度电平，并设亮度电平是等概出现。问每帧图像含有多少信息量？若现在有一个广播员，在约 10000 个汉字中选 1000 个字来口述这一电视图像，试问若要恰当地描述此图像，广播员在口述中至少需要多少汉字？

解:

每帧图象所含信息量:

$H(X)=3\times 10^5\times H(x)=3\times 10^5\times \log 128=2.1\times 10^6\mathrm{bit/symble}$

每个汉字所出现概率$p=\dfrac{1000}{10000}=0.1$

$\therefore$ 每个汉字所包含信息量$:\mathrm{H(c)}=-\log p$

描述一帧图像需要汉字数$n, H(X)\le nH(c)$

$n\ge \dfrac{H(X)}{H(c)}=\dfrac{2.1\times 10^6}{-\log 0.1}=6.322\times 10^5/\mathit{frame}$

$\therefore$ 最少需要6.322×10^5个汉字

1.9 给定一个概率分布$(p_1,p_2,...,p_n)$和一个整数 m，$0\le m\le n$。定义$q_m=1-\sum_{i=1}^{m}p_i$，证明：

$H(p_1,p_2,...,p_n)\le H(p_1,p_2,...,p_m,q_m)+q_m\log(n-m)$。并说明等式何时成立？

证：

先证明$f(x)=-x\log x(x>0)$为凸函数，如下：

$\because\ f''(x)=(-x\log x)''=-\dfrac{\log e}{x}$ 　　又$x>0$

$\therefore\ f''(x)=(-x\log x)''=-\dfrac{\log e}{x}<0$ 即$f(x)=-x\log x(x>0)$为凸函数。

又$\because H(p_1,p_2,...,p_n)=-\sum_{i=1}^{m}p_i\log p_i-\sum_{i=m+1}^{n}p_i\log p_i$

由凸函数的性质，变量函数的平均值小于变量的算术平均值的函数，可得：

$$-\sum_{i=m+1}^{n} p_i \log p_i = -(n-m)\frac{\sum_{i=m+1}^{n} f(p_i)}{n-m} \le -(n-m) f(\frac{\sum_{i=m+1}^{n} p_i}{n-m}) = -(n-m)\frac{\sum_{i=m+1}^{n} p_i}{n-m}\log\frac{\sum_{i=m+1}^{n} p_i}{n-m} = -q_m \log\frac{q_m}{n-m}$$

即$-\sum_{i=m+1}^{n} p_i \log p_i \le -q_m \log q_m + q_m \log(n-m)$

当且仅当$p_{m+1} = p_{m+2} = ... = p_n$时等式成立。

$\therefore H(p_1, p_2, ..., p_n) = -\sum_{i=1}^{m} p_i \log p_i - \sum_{i=m+1}^{n} p_i \log p_i \le -\sum_{i=1}^{m} p_i \log p_i - q_m \log q_m + q_m \log(n-m)$

$\because H(p_1, p_2, ..., p_m, q_m) = -\sum_{i=1}^{m} p_i \log p_i - q_m \log q_m$

$\because H(p_1, p_2, ..., p_n) \le H(p_1, p_2, ..., p_m, q_m) + q_m \log(n-m)$

当且仅当$p_{m+1} = p_{m+2} = ... = p_n$时等式成立。

1.10 找出两种特殊分布:

$p_1 \geqslant p_2 \geqslant p_3 \geqslant \ldots \geqslant p_n$，$p_1 \geqslant p_2 \geqslant p_3 \geqslant \ldots \geqslant p_m$,使 $H(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n)=H(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_m)$。

解：$H(p_1, p_2, ..., p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i = H(q_1, q_2, ..., q_m) = -\sum_{i=1}^{m} q_i \log q_i$

1.15 两个离散随机变量 X 和 Y，其和为 Z＝X＋Y，若 X 和 Y 统计独立，求证：

(1) H(X)≤H(Z), H(Y)≤H(Z)

(2) H(XY)≥H(Z)

证明：

设X、Y的信源空间为：

$$[\mathrm{X}\bullet P]:\begin{cases}\mathrm{X} & a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_r \\ P(X) & p_1 \quad p_2 \quad \dots \quad p_r\end{cases} \qquad [\mathrm{Y}\bullet P]:\begin{cases}\mathrm{Y} & b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_s \\ P(Y) & q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_s\end{cases}$$

又X,Y统计独立

$$\therefore H(Z) = -\sum_{k=1}^{t} pz_k \log pz_k \le -\sum_{\mathrm{i}=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} p(a_i+b_j)\log p(a_i+b_j) \le -\sum_{\mathrm{i}=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(p_i\cdot q_j)\log(p_i\cdot q_j) = H(XY)$$

$$又H(Z)＝-\sum_{k=1}^{t} pz_k \log pz_k \ge -(\sum_{\mathrm{i}=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} p_i q_j)\cdot\log(\sum_{\mathrm{i}=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} p_i q_j) + \ge$$

$$= -\sum_{\mathrm{i}=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(p_i \log(p_i+q_j)) - \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} q_j \log(p_i+q_j)$$

$$\ge -\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} q_j \log(p_i+q_j) \ge -\sum_{j=1}^{s} q_j \log(q_j)$$

第二章 单符号离散信道

2.1 设信源$[\mathrm{X}\bullet P]:\begin{cases}\mathrm{X} & a_1 \quad a_2 \\ P(X) & 0.7 \quad 0.3\end{cases}$ 通过一信道，信道的输出随机变量 Y 的符号集

$Y:\{b_1,b_2\}$,信道的矩阵：

$$[P] = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} b_1 & b_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 5/6 & 1/6 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \end{array}$$

试求：

(1) 信源 X 中的符号α_1和α_2分别含有的自信息量；

(2) 收到消息 Y＝b_1，Y＝b_2后，获得关于α_1、α_2的互交信息量：I(α_1;b_1)、I(α_1;b_2)、I(α_2;b_1)、I(α_2;b_2)；

(3) 信源 X 和信宿 Y 的信息熵；

(4) 信道疑义度 H(X/Y)和噪声熵 H(Y/X)；

(5) 接收到消息 Y 后获得的平均互交信息量 I(X;Y)。

解:

(1) $\mathrm{I}(a_1) = -\log p(a_1) = -\log 0.7 = 0.5415 \ bit$

$\mathrm{I}(a_2) = -\log p(a_{21}) = -\log 0.3 = 1.737 \ bit$

(2) $\mathrm{I}(a_1;b_1) = \log \frac{p(b_1|a_1)}{p(b_1)} = \log \frac{5/6}{0.7\times 5/6 + 0.3\times 1/4} = 0.34 \quad bit$

$\mathrm{I}(a_1;b_2) = \log \frac{p(b_2|a_1)}{p(b_2)} = \log \frac{1/6}{0.7\times 1/6 + 0.3\times 3/4} = -1.036 \quad bit$

$\mathrm{I}(a_2;b_1) = \log \frac{p(b_1|a_2)}{p(b_1)} = \log \frac{1/4}{0.7\times 5/6 + 0.3\times 1/4} = -0.766 \quad bit$

$\mathrm{I}(a_2;b_2) = \log \frac{p(b_2|a_2)}{p(b_2)} = \log \frac{3/4}{0.7\times 1/6 + 0.3\times 3/4} = 1.134 \quad bit$

(3)由上: $p(b_1) = \sum_{i=1}^{2} p(a_i)p(b_1|a_i) = \frac{79}{120}$

$p(b_2) = \sum_{i=1}^{2} p(a_i)p(b_2|a_i) = \frac{41}{120}$

$\therefore H(X) = -\sum_{i=1}^{2} p(a_i)\log p(a_i) = -(0.7\log 0.7 + 0.3\log 0.3) = 0.881 \ \text{bit/symble}$

$H(Y) = -\sum_{j=1}^{2} p(b_j)\log p(b_j) = -(\frac{79}{120}\log\frac{79}{120} + \frac{41}{120}\log\frac{41}{120}) = 0.926 \ \text{bit/symble}$

(4)$H(Y|X) = \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} p(a_i b_j)\log p(b_j|a_i) = \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} p(a_i)p(b_j|a_i)\log p(b_j|a_i) = 0.698 \ \text{bit/symble}$

又$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(X) - H(X|Y)$

$\therefore H(X|Y) = H(X) + H(Y|X) - H(Y) = 0.881 + 0.698 - 0.926 = 0.653 \quad \text{bit/symble}$

(5) $\therefore I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) = 0.926 - 0.698 = 0.228 \ \text{bit/symble}$

2.2 某二进制对称信道，其信道矩阵是：

$$[P] = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ 0 & 0.98 & 0.02 \\ 1 & 0.02 & 0.98 \end{array}$$

设该信道以 1500 个二进制符号/秒的速度传输输入符号。现有一消息序列共有 14000 个二进制符号，并设在这消息中 p(0)= p(1)=0.5。问从消息传输的角度来考虑，10 秒钟内能否将这消息序列无失真的传送完。

解:

由于二进制对称信道输入等概信源

$\therefore I(X;Y) = C = 1 - H(\varepsilon) = 1 + \varepsilon\log\varepsilon + (1-\varepsilon)\log(1-\varepsilon)$

$= 1 + 0.02\log 0.02 + 0.98\log 0.98 = 0.859 \quad \text{bit/symble}$

$\therefore$ 信道在10秒钟内传送14000个二进制符号最大码率为:

$C_t = C \times 14000\text{symble}/10\text{s} = 1201.98 \quad \text{bit/s}$

而输入信源码率为1500bit/s,超过了信道所能提供的最大码率,故不可能无失真传输.

2.3 有两个二元随机变量 X 和 Y，它们的联合概率为 P[X=0,Y=0]=1/8，P[X=0,Y=1]=3/8，P[X=1,Y=1]=1/8，P[X=1,Y=0]=3/8。定义另一随机变量 Z=XY，试计算：

(1) H(X),H(Y),H(Z),H(XZ),H(YZ),H(XYZ);

(2) H(X/Y),H(Y/X),H(X/Z),H(Z/X),H(Y/Z),H(Z/Y),H(X/YZ),H(Y/XZ),H(Z/XY);

(3) I(X;Y),I(X;Z),I(Y;Z),I(X;Y/Z),I(Y;Z/X),I(X;Z/Y)。

解:

$$\text{(1)由题意}:\ X\text{的分布}: p(X=0)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}; p(X=1)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}.$$

$$Y\text{的分布}: p(Y=0)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}; p(Y=1)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}.$$

$$Z=XY\text{的分布为}: X\text{的分布}: p(Z=0)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{7}{8}; p(Z=1)=\frac{1}{8}.$$

$$\text{且} p(X=0,Z=0)=p(X=0)=\frac{1}{2}; p(X=0,Z=1)=0; p(X=1,Z=0)=\frac{3}{8}; p(X=1,Z=1)=\frac{1}{8};$$

$$p(Y=0,Z=0)=p(Y=0)=\frac{1}{2}; p(Y=0,Z=1)=0; p(Y=1,Z=0)=\frac{3}{8}; p(Y=1,Z=1)=\frac{1}{8};$$

$$\therefore H(X)=-(\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log\frac{1}{2})=1 \quad \text{bit/symble};$$

$$H(Y)=-(\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log\frac{1}{2})=1 \quad \text{bit/symble}$$

$$H(Z)=-(\frac{7}{8}\log\frac{7}{8}+\frac{1}{8}\log\frac{1}{8})=0.544 \quad \text{bit/symble}$$

$$\begin{aligned} H(XZ) &= -\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} p(x_i z_k)\log p(x_i z_k) \\ &= -(p_{xz}(00)\log p_{xz}(00)+p_{xz}(10)\log p_{xz}(10)+p_{xz}(01)\log p_{xz}(01)+p_{xz}(11)\log p_{xz}(11)) \\ &= -\left[(\frac{1}{8}+\frac{3}{8})\log(\frac{1}{8}+\frac{3}{8})+\frac{3}{8}\log\frac{3}{8}+0+\frac{1}{8}\log\frac{1}{8}\right]=1.406\text{bit/symble} \end{aligned}$$

$$\text{由上面}X\text{、}Y\text{、}Z\text{的概率分布}: H(YZ)=H(XZ)=1.406\text{bit/symble}$$

$$(2)p(X=0|Y=0)=p_{xy}(0|0)=\frac{p_{xy}(00)}{p_y(0)}=\frac{1/8}{1/2}=\frac{1}{4};p_{xy}(1|0)=\frac{p_{xy}(10)}{p_y(0)}=\frac{3/8}{1/2}=\frac{3}{4};$$

$$p_{xy}(0|1)=\frac{p_{xy}(01)}{p_y(1)}=\frac{3/8}{1/2}=\frac{3}{4};p_{xy}(1|1)=\frac{p_{xy}(11)}{p_y(1)}=\frac{1/8}{1/2}=\frac{1}{4}.$$

$$\therefore H(X|Y)=-\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}p(x_iy_j)\log p(x_i|y_j)$$

$$=-\left[p_{xy}(00)\log p_{xy}(0|0)+p_{xy}(01)\log p_{xy}(0|1)+p_{xy}(10)\log p_{xy}(1|0)+p_{xy}(11)\log p_{xy}(1|1)\right]$$

$$=-(\frac{1}{8}\times\log\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\times\log\frac{3}{4}+\frac{3}{8}\times\log\frac{3}{4}+\frac{1}{8}\times\log\frac{1}{4})=0.811\text{bit/symble}$$

$$\because I(X;Y)=H(X)-H(X|Y)=H(Y)-H(Y|X)\text{且}H(X)=H(Y)$$

$$\therefore H(Y|X)=H(X|Y)=0.811\text{bit/symble}$$

同理:

$$H(X|Z)=-\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}p(x_iz_k)\log p(x_i|z_k)=-\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}p(x_iz_k)\log\frac{p(x_iz_k)}{p(z_k)}$$

$$=-\left[p_{xz}(00)\log p_{xz}(0|0)+p_{xz}(01)\log p_{xz}(0|1)+p_{xz}(10)\log p_{xz}(1|0)+p_{xz}(11)\log p_{xz}(1|1)\right]$$

$$=-(\frac{1}{2}\times\log\frac{1/2}{7/8}+0+\frac{3}{8}\times\log\frac{3/8}{7/8}+\frac{1}{8}\times\log\frac{1/8}{1/8})=0.862\quad\text{bit/symble}$$

$$H(Z|X)=-\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}p(z_kx_i)\log p(z_k|x_i)=-\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}p(z_kx_i)\log\frac{p(z_kx_i)}{p(x_i)}$$

$$=-\left[p_{zx}(00)\log p_{zx}(0|0)+p_{zx}(01)\log p_{zx}(0|1)+p_{zx}(10)\log p_{zx}(1|0)+p_{zx}(11)\log p_{zx}(1|1)\right]$$

$$=-(\frac{1}{2}\times\log\frac{1/2}{1/2}+0+\frac{3}{8}\times\log\frac{3/8}{1/2}+\frac{1}{8}\times\log\frac{1/8}{1/2})=0.406\quad\text{bit/symble}$$

由X、Y、Z的概率: $H(Y|Z)=H(X|Z)=0.862\quad\text{bit/symble}$

$$H(Z|Y)=H(Z|X)=0.406\quad\text{bit/symble}$$

$$\because p_{xyz}(001)=p_{xyz}(101)=p_{xyz}(011)=p_{xyz}(110)=0$$

$$\therefore H(X|YZ)=-\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}p(x_iy_jz_k)\log p(x_i|y_jz_k)=-\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}p(x_iy_jz_k)\log\frac{p(x_iy_jz_k)}{p(y_jz_k)}$$

$$=-(p_{xyz}(000)\log\frac{p_{xyz}(000)}{p_{yz}(00)}+p_{xyz}(010)\log\frac{p_{xyz}(010)}{p_{yz}(10)}+p_{xyz}(100)\log\frac{p_{xyz}(100)}{p_{yz}(00)}+p_{xyz}(111)\log\frac{p_{xyz}(111)}{p_{yz}(11)})$$

$$=-(\frac{1}{8}\log\frac{1/8}{1/2}+\frac{3}{8}\log\frac{3/8}{3/8}+\frac{3}{8}\log\frac{3/8}{1/2}+\frac{1}{8}\log\frac{1/8}{1/8})=0.406\quad\text{bit/symble}$$

$$H(Y|XZ)=H(X|YZ)=0.406\quad\text{bit/symble}$$

$$\therefore H(Z|XY)=-\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}p(x_iy_jz_k)\log p(z_k|x_iy_j)=-\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}p(x_iy_jz_k)\log\frac{p(x_iy_jz_k)}{p(x_iy_j)}$$

$$=-(p_{xyz}(000)\log\frac{p_{xyz}(000)}{p_{xy}(00)}+p_{xyz}(010)\log\frac{p_{xyz}(010)}{p_{xy}(01)}+p_{xyz}(100)\log\frac{p_{xyz}(100)}{p_{xy}(10)}+p_{xyz}(111)\log\frac{p_{xyz}(111)}{p_{xy}(11)})$$

$$=-(\frac{1}{8}\log\frac{1/8}{1/8}+\frac{3}{8}\log\frac{3/8}{3/8}+\frac{3}{8}\log\frac{3/8}{3/8}+\frac{1}{8}\log\frac{1/8}{1/8})=0\quad\text{bit/symble}$$

(3)由上: $I(X;Y)=H(X)-H(X|Y)=1-0.811=0.189 \quad \text{bit/symble}$

$I(X;Z)=H(X)-H(X|Z)=1-0.862=0.138 \quad \text{bit/symble}$

$I(Y;Z)=H(Y)-H(Y|Z)=1-0.862=0.138 \quad \text{bit/symble}$

$I(X;Y|Z)=H(X|Z)-H(X|YZ)=0.862-0.406=0.456 \quad \text{bit/symble}$

$I(Y;Z|X)=H(Y|X)-H(Y|XZ)=0.811-0.406=0.405 \quad \text{bit/symble}$

$I(X;Z|Y)=H(X|Y)-H(X|YZ)=0.811-0.406=0.405 \quad \text{bit/symble}$

2.4 已知信源 X 的信源空间为

$$[X \bullet P]:\begin{cases} X: & a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \\ P(X): & 0.1 \quad 0.3 \quad 0.2 \quad 0.4 \end{cases}$$

某信道的信道矩阵为：

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.4 \\ 0.6 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.5 & 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.4 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array}$$

试求：

(1)“输入α_3，输出 b_2 的概率”;

(2)“输出 b_4 的概率”;

(3)“收到 b_3 条件下推测输入α_2”的概率。

解：

(1) $p(a_3;b_2)=p(a_3)p(b_2|a_3)=0.2\times0.2=0.04$

(2) $p(b_4)=\sum_{i=1}^{4}p(a_ib_4)=\sum_{i=1}^{4}p(a_i)p(b_4|a_i)=0.1\times0.4+0.3\times0.1+0.2\times0.2+0.4\times0.2=0.19$

(3) $p(b_3)=\sum_{i=1}^{4}p(a_ib_3)=\sum_{i=1}^{4}p(a_i)p(b_3|a_i)=0.1\times0.1+0.3\times0.1+0.2\times0.1+0.4\times0.4=0.22$

$$p(a_2|b_3)=\frac{p(a_2)p(b_3|a_2)}{p(b_3)}=\frac{0.3\times0.1}{0.22}=0.136$$

2.5 已知从符号 B 中获取关于符号 A 的信息量是 1 比特，当符号 A 的先验概率 P(A)为下列各值时，分别计算收到 B 后测 A 的后验概率应是多少。

(1) $P(A)=10^{-2}$;

(2) P(A)=1/32;

(3) P(A)=0.5。

解：

$$由题意 \because I(A;B)=\log\frac{p(A|B)}{p(A)}=1 \therefore p(A|B)=2p(A)$$

$$\therefore p(A)=10^{-2}时, p(A|B)=2\times10^{-2}$$

$$p(A)=1/32时, p(A|B)=1/16$$

$$p(A)=0.5时, p(A|B)=1$$

2.6 某信源发出 8 种消息，它们的先验概率以及相应的码字如下表所列。以 a_4 为例，试求：

消息	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
概率	1/4	1/4	1/8	1/8	1/16	1/16	1/16	1/16
码字	000	001	010	011	100	101	110	111

(1) 在 W_4＝011 中，接到第一个码字“0”后获得关于 a4 的信息量 $I(a_4;0)$；
(2) 在收到“0”的前提下，从第二个码字符号“1”中获取关于 a_4 的信息量 $I(a_4;1/0)$；
(3) 在收到“01”的前提下，从第三个码字符号“1”中获取关于 a_4 的信息量 $I(a_4;1/01)$；
(4) 从码字 W_4＝011 中获取关于 a_4 的信息量 $I(a_4;011)$。

解：

$$(1) I(a_4;0)=\log\frac{p(a_4|0)}{p(a_4)}=\log\frac{(1/8)/(1/4+1/4+1/8+1/8)}{1/8}=\log\frac{4}{3}=0.415\ \text{bit}$$

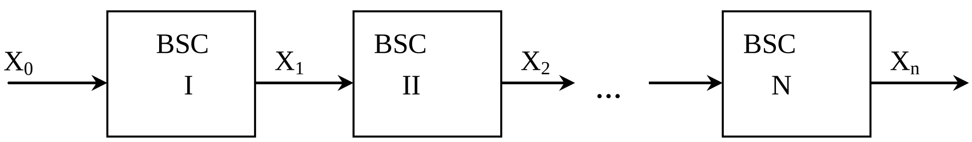
$$(2) I(a_4;1|0)=\log\frac{p(a_4|01)}{p(a_4|0)}=\log\frac{(1/8)/(1/8+1/8)}{(1/8)/(1/4+1/4+1/8+1/8)}=\log 3=1.585\ \text{bit}$$

$$(3) I(a_4;1|01)=\log\frac{p(a_4|011)}{p(a_4|01)}=\log\frac{1}{(1/8)/(1/8+1/8)}=\log 2=1\ \text{bit}$$

$$(4) I(a_4;011)=\log\frac{p(a_4|011)}{p(a_4)}=\log\frac{1}{1/8}=\log 8=3\ \text{bit}$$

2.13 把 n 个二进制对称信道串接起来，每个二进制对称信道的错误传输概率为 $p(0<p<1)$，试**证明**：整个串接信道的错误传输概率 $p_n=0.5[1-(1-2p)^n]$。再证明：$n\to\infty$时，$\lim I(X_0;X_n)=0$。

信道串接如下图所示：



解:

用数学归纳法证明:

当$n=2$时由:

$$[P_2]=\begin{bmatrix}1-p & p\\ p & 1-p\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1-p & p\\ p & 1-p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2p-2p^2 & 1-2p+2p^2\\ 1-2p+2p^2 & 2p-2p^2\end{bmatrix}$$

$$\therefore p_2=2p-2p^2=\frac{1}{2}[1-(1-2p)^2]$$

假设$n=k$时公式成立,则

$$[P_{k+1}]=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}[1+(1-2p)^k] & \frac{1}{2}[1-(1-2p)^k]\\ \frac{1}{2}[1-(1-2p)^k] & \frac{1}{2}[1+(1-2p)^k]\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1-p & p\\ p & 1-p\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}[1+(1-2p)^{k+1}] & \frac{1}{2}[1-(1-2p)^{k+1}]\\ \frac{1}{2}[1-(1-2p)^{k+1}] & \frac{1}{2}[1+(1-2p)^{k+1}]\end{bmatrix}$$

$$\therefore P_{k+1}=\frac{1}{2}[1-(1-2p)^{k+1}]$$

故$P_n=\frac{1}{2}[1-(1-2p)^n]$

$$\because 1-2p<1\ \therefore \lim_{n\to\infty}P_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}[1-(1-2p)^n]=\frac{1}{2}$$

设输入信源空间$X_0: p(X_0=0)=a, p(X_0=1)=1-a$(其中$0<a<1$)

则输出信源$X_\infty: p(X_\infty=0)=p(X_0=0)\bullet p(X_\infty=0|X_0=0)+p(X_0=0)\bullet p(X_\infty=0|X_0=1)=\frac{1}{2}$

$$p(X_\infty=1)=\frac{1}{2}$$

$\therefore p(x_\infty|x_0)=p(x_\infty)$($x_0$、$x_\infty$取0或1)

$$\therefore \lim_{n\to\infty}I(X_0;X_n)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}p(X_{0i}X_{\infty j})\log\frac{p(X_{\infty j}|X_{0i})}{p(X_{\infty j})}=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}p(X_{0i}X_{\infty j})\log\frac{p(X_{\infty j}|X_{0i})}{p(X_{\infty j})}$$

$$=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}p(X_{0i}X_{\infty j})\log 1=0$$

2.18 试求下列各信道矩阵代表的信道的信道容量：

(1)

$$[P_1]=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

(2)

$$[P_2]=\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \mathrm{b}_1 & \mathrm{b}_2 & \mathrm{b}_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

(3)

$$[P_3]=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccccccc} \mathrm{b}_1 & \mathrm{b}_2 & \mathrm{b}_3 & \mathrm{b}_4 & \mathrm{b}_5 & \mathrm{b}_6 & \mathrm{b}_7 & \mathrm{b}_8 & \mathrm{b}_9 & \mathrm{b}_{10} \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.3 \end{bmatrix} \end{array}$$

解：

(1)信道为一一对应确定关系的无噪信道

$\therefore C=\log r=\log 4=2 \quad \text{bit}/\text{symble}$

(2)信道为归并性无噪信道

$\therefore C=\log s=\log 3=1.585 \quad \text{bit/symble}$

(3)信道为扩张性无噪信道：

$\because C=\log r=\log 3=1.585 \quad \text{bit/symble}$

2.19 设二进制对称信道的信道矩阵为：

$$[P]=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \end{array}$$

(1) 若 p(0)=2/3，p(1)=1/3，求 H(X)，H(X/Y)，H(Y/X)和 I(X;Y)；

(2) 求该信道的信道容量及其达到的输入概率分布。

解:

$$(1)H(X)=-\sum_{i=1}^{2}p(x_i)\log p(x_i)=-(\frac{2}{3}\times\log\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\log\frac{1}{3})=0.9183 \quad \text{bit/symble}$$

$$p_y(0)=\sum_{i=1}^{2}p(x_i)p(y=0|x_i)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$$

$$p_y(1)=\sum_{i=1}^{2}p(x_i)p(y=1|x_i)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{5}{12}$$

$$H(Y)=-\sum_{j=1}^{2}p(y_j)\log p(y_j)=-(\frac{7}{12}\times\log\frac{7}{12}+\frac{5}{12}\times\log\frac{5}{12})=0.9799 \quad \text{bit/symble}$$

$$H(Y|X)=-\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}p(x_iy_j)\log p(y_j|x_i)=-\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}p(x_i)p(y_j|x_i)\log p(y_j|x_i)$$

$$=-(\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\log\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\log\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\log\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\log\frac{3}{4})=0.8113 \quad \text{bit/symble}$$

$$\therefore I(X;Y)=H(Y)+H(Y|X)=0.9799-0.8113=0.1686 \quad \text{bit/symble}$$

$$H(X|Y)=H(X)-I(X;Y)=0.9183-0.1686=0.7497 \quad \text{bit/symble}$$

(2)本信道为强对称信道

$$\therefore C=\log r-H(\varepsilon)-\varepsilon\log(r-1)=\log 2-H(0.25)-0.25\log 1=0.1887\text{bit}/\text{symble}$$

信源输入为等概分布,即$p(X=0)=p(X=1)=\frac{1}{2}$时达到信道容量$C$.

2.20 设某信道的信道矩阵为

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{array} \\ [P]=\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.6 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array}$$

试求:

(1) 该信道的信道容量 C;

(2) $I(a_3;Y)$;

(3) $I(a_2;Y)$。

解:

(1)本信道为强对称离散信道

$$\therefore C=\log r-H(\varepsilon)-\varepsilon\log(r-1)=\log 5-H(0.4)-0.4\log 4=0.551\text{bit/symble}$$

(2)、(3)$I(a_3;Y)=I(a_5;Y)=C=0.551\text{bit/symble}$

2.21 设某信道的信道矩阵为

$$[P]=\begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{b}_1 & \mathrm{b}_2 & \mathrm{b}_3 & \mathrm{b}_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \end{array}$$

试求：

(1)该信道的信道容量 C；

(2)I(a_1;Y)；

(3)I(a_2;Y)。

解:

⑴ 本信道为对称离散信道

$$\therefore C=\log s-H(p_1',p_2',p_3',p_4')=\log 4-H(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{6})=0.0817\mathrm{bit/symble}$$

$$(2)、(3)I(a_1;Y)=I(a_2;Y)=C=0.0817\mathrm{bit/bymble}$$

2.22 设某信道的信道矩阵为

$$[P]=\begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/8 \\ 1/4 & 1/2 & 1/8 & 1/8 \end{bmatrix}$$

试该信道的信道容量 C；

解:

此信道为准对称离散信道,且$s_1=2, s_2=2$

$$p(b_{11})=p(b_{21})=\frac{1}{r}\bullet[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}]=\frac{1}{2}\bullet\frac{3}{4}=\frac{3}{8}=p(b_l)_{l=1}$$

$$p(b_{12})=p(b_{22})=\frac{1}{r}\bullet[\frac{1}{8}+\frac{1}{8}]=\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{4}=\frac{1}{8}=p(b_l)_{l=2}$$

$$\therefore C=-\sum_{l=1}^{2}s_l\,p(b_l)\log p(b_l)-H(p_1',p_2',p_3',p_4')=-[2\times\frac{3}{8}\log\frac{3}{8}+2\times\frac{1}{8}\log\frac{1}{8}]-H(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{8})$$

$$=0.0612\mathrm{bit/symble}$$

2.23 求下列二个信道的信道容量，并加以比较(其中 0<p,q<1,p+q=1)

(1) $[P_1]=\begin{bmatrix} p-\delta & q-\delta & 2\delta \\ q-\delta & p-\delta & 2\delta \end{bmatrix}$

(2) $[P_2]=\begin{bmatrix} 2\delta & 0 & p-\delta & q-\delta \\ 0 & 2\delta & q-\delta & p-\delta \end{bmatrix}$

解:

(1)此信道为准对称离散信道,且$s_1=2, s_2=1$

$$p(b_l)_{l=1}=\frac{1}{r}\bullet(p-\delta+q-\delta)=\frac{1}{2}\bullet(p+q-2\delta)$$

$$p(b_l)_{l=2}=\frac{1}{r}\bullet(2\delta)=\frac{1}{2}\bullet 2\delta=\delta$$

$$\therefore C_1=-\sum_{l=1}^{2}s_l p(b_l)\log p(b_l)-H(p_1',p_2',p_3')$$

$$=-[2\times\frac{1}{2}\bullet(p+q-2\delta)\log\frac{1}{2}\bullet(p+q-2\delta)+\delta\log\delta]-H(p-\delta,q-\delta,2\delta)$$

$$=-(p+q-2\delta)\log\frac{p+q-2\delta}{2}+(p-\delta)\log(p-\delta)+(q-\delta)\log(q-\delta)+2\delta+\delta\log\delta$$

(2)此信道为准对称离散信道,且$s_1=2, s_2=2$

$$p(b_l)_{l=1}=\frac{1}{r}\bullet(2\delta+0)=\frac{1}{2}\bullet 2\delta=\delta$$

$$p(b_l)_{l=2}=\frac{1}{r}\bullet(p-\delta+q-\delta)=\frac{1}{2}\bullet(p+q-2\delta)$$

$$\therefore C_2=-\sum_{l=1}^{2}s_l p(b_l)\log p(b_l)-H(p_1',p_2',p_3',p_4')$$

$$=-[2\delta\log\delta+2\times\frac{1}{2}\bullet(p+q-2\delta)\log\frac{1}{2}\bullet(p+q-2\delta)]-H(p-\delta,q-\delta,2\delta,0)$$

$$=-(p+q-2\delta)\log\frac{p+q-2\delta}{2}+(p-\delta)\log(p-\delta)+(q-\delta)\log(q-\delta)+2\delta$$

由上面C_1、C_2表达式可知:$C_1\le C_2$且当$\delta=0$时等号成立.

2.27 设某信道的信道矩阵为

$$[P]=\begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & p_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_N \end{bmatrix}$$ 其中 P_1,P_2，…，P_N是 N 个离散信道的信道矩阵。令 C_1，C_2，…，C_N表示 N 个离散信道的容量。试证明，该信道的容量$C=\log\sum_{i=1}^{N}2^{c_i}$ 比特/符号，且当每个信道 i 的利用率 $p_i=2^{C_i-C}$(i＝1, 2, …, N)时达其容量 C。

证明:

设:P_m为l_m行$\times k_m$列$(m=1,2,\cdots N)$

由方程组$\sum_{j=1}^{s}p(b_j/a_i)\beta_j=\sum_{j=1}^{s}p(b_j/a_i)\log p(b_j/a_i)(i=1,2,\cdots r)\cdots\cdots\cdots(1)$

解出β_j可得$C=\log[\sum_{j=1}^{s}2^{\beta_j}]$(其中$s=\sum_{m=1}^{N}k_m, r=\sum_{m=1}^{N}l_m$)

由[P]特点,方程组(1)可以改写为:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{k_1} p(b^{p1}{}_j / a_i)\beta^{p1}{}_j = \sum_{j1=1}^{s} p(b^{p1}{}_j / a_i)\log p(b^{p1}{}_j / a_i) \\ \sum_{j=1}^{k_2} p(b^{p2}{}_j / a_i)\beta^{p2}{}_j = \sum_{j1=1}^{s} p(b^{p2}{}_j / a_i)\log p(b^{p2}{}_j / a_i) \\ \cdots \\ \sum_{j=1}^{k_N} p(b^{pn}{}_j / a_i)\beta^{pn}{}_j = \sum_{j1=1}^{s} p(b^{pn}{}_j / a_i)\log p(b^{pn}{}_j / a_i) \end{cases} \quad (i = 1,2,\cdots r)\cdots\cdots(2)$$

其中$C_m = \log[\sum_{j=1}^{k_m} 2^{\beta^{pm}{}_j}](m = 1,2,\cdots,N)$,即$\sum_{j=1}^{k_m} 2^{\beta^{pm}{}_j} = 2^{C_m}$

$$\therefore C = \log[\sum_{j=1}^{s} 2^{\beta_j}] = \log[\sum_{m=1}^{N}(\sum_{j=1}^{k_m} 2^{\beta^{pm}{}_j})] = \log[\sum_{m=1}^{N} 2^{C_m}]$$

且在各信道利用率为: $p_m = \sum_{j=1}^{k_m} 2^{(\beta^{pm}{}_j - C)} = 2^{(\sum_{j=1}^{k_m}\log 2^{\beta^{pm}{}_j} - C)} = 2^{(C_m - C)}(m = 1,2,\cdots,N)$

时取得信道容量$C = \log[\sum_{m=1}^{N} 2^{C_m}]$

第三章 多符号离散信源与信道

3.1 设 **X**＝$X_1X_2\cdots X_N$ 是平稳离散有记忆信源，试证明：

$H(X_1X_2\cdots X_N)=H(X_1)+ H(X_2/ X_1)+H(X_3/ X_1 X_2)+\cdots+H(X_N / X_1 X_2\cdots X_{N-1})$。

(证明详见 p161-p162)

3.2 试证明：$\log r \geqslant H(X) \geqslant H(X_2/ X_1) \geqslant H(X_3/ X_1 X_2) \geqslant\cdots\geqslant H(X_N / X_1 X_2\cdots X_{N-1})$。

证明:

由离散平稳有记忆信源条件概率的平稳性有:

$$p(a_{ik}/a_{i2}a_{i3}\cdots a_{ik-1})=p(a_{ik-1}/a_{i1}a_{i2}\cdots a_{ik-2})$$

$$\therefore H(X_k/X_1X_2\cdots X_{k-1})\le\sum_{i1=1}^{r}\cdots\sum_{ik-1=1}^{r}p(a_{i1}\cdots a_{ik-1})\left[-\sum_{ik=1}^{r}p(a_{ik}/a_{i1}a_{i2}\cdots a_{ik-1})\log p(a_{ik}/a_{i2}a_{i3}\cdots a_{ik-1})\right]$$

$$=-\sum_{i1=1}^{r}\cdots\sum_{ik-1=1}^{r}\sum_{ik=1}^{r}p(a_{i1}a_{i2}\cdots a_{ik-1}a_{ik})\log p(a_{ik}/a_{i2}a_{i3}\cdots a_{ik-1})$$

$$=-\sum_{i1=1}^{r}\cdots\sum_{ik-1=1}^{r}\sum_{ik=1}^{r}p(a_{i1}a_{i2}\cdots a_{ik-1}a_{ik})\log p(a_{ik-1}/a_{i1}a_{i2}\cdots a_{ik-2})$$

$$=-\sum_{i1=1}^{r}\cdots\sum_{ik-1=1}^{r}p(a_{i1}a_{i2}\cdots a_{ik-1})\log p(a_{ik-1}/a_{i1}a_{i2}\cdots a_{ik-2})$$

$$=H(X_{k-1}/X_1X_2\cdots X_{k-2})$$

重复应用上面式子可得:

$$H(X)\ge H(X_2/X_1)\ge H(X_3/X_1X_2)\ge\cdots H(X_N/X_1X_2\cdots X_{N-1})$$

又仅当输入均匀分布时，$H(X)$达到最大$\log r$，即$\log r\ge H(X)$

$$\therefore \log r\ge H(X)\ge H(X_2/X_1)\ge H(X_3/X_1X_2)\ge\cdots H(X_N/X_1X_2\cdots X_{N-1})$$

3.3 试证明离散平稳信源的极限熵:

$$H_\infty=\lim_{n\to\infty}H(X_N/X_1X_2X_{N-1})$$

(证明详见 p165-p167)

3.4 设随机变量序列(XYZ)是马氏链，且 X：{a_1, a_2,⋯, a_r}，Y：{b_1,b_2, ⋯,bs},Z:{c_1,c_2, ⋯,cL}。又设 X 与 Y 之间的转移概率为 $p(b_j/a_i)$(i=1,2, ⋯,r;j=1,2, ⋯,s)；Y 与 Z 之间的转移概率为 $p(c_k/b_j)$(k=1,2,⋯,L;j=1,2, ⋯,s)。试证明：X 与 Z 之间的转移概率：

$$p(c_k/a_i)=\sum_{j=1}^{s}p(b_j/a_i)p(c_k/b_j)$$

证明:

$$p(c_k / a_i) = p(Z = c_k / X = a_i)$$

$$= p(Z = c_k, \bigcup_{j=1}^{s} Y = b_j / X = a_i) = \sum_{j=1}^{s} p(Z = c_k, Y = b_j / X = a_i)$$

$$= \sum_{j=1}^{s} p(Y = b_j / X = a_i) P(Z = c_k / Y = b_j, X = a_i)$$

$$\because XYZ为Markov序列 \therefore P(c_k / b_j, a_i) = P(c_k / b_j)$$

$$\therefore p(c_k / a_i) = \sum_{j=1}^{s} p(Y = b_j / X = a_i) P(Z = c_k / Y = b_j)$$

3.5 试证明：对于有限齐次马氏链，如果存在一个正整数 n0≥1，对于一切 i，j＝1，2，…，r，都有 $p_{ij}(n_0)>0$，则对每个 j＝1，2，…，r 都存在状态极限概率：

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = p_j \ (j = 1,2,\cdots,r)$$

(证明详见:p171~175)

3.6 设某齐次马氏链的第一步转移概率矩阵为：

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} q & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & p \end{bmatrix} \end{array}$$

试求：

(1) 该马氏链的二步转移概率矩阵；

(2) 平稳后状态“0”、“1”、“2”的极限概率。

解：

$$(1)[P(2)] = [P][P] = \begin{bmatrix} q & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q^2 + pq & pq & p^2 \\ q^2 & 2pq & p^2 \\ q^2 & pq & pq + p^2 \end{bmatrix}$$

(2)由：

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & p \end{bmatrix}^T \bullet \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{bmatrix} \\ p(0) + p(1) + p(2) = 1 \\ p(i) > 0 (i = 0,1,2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(0) = \dfrac{q(1-p)}{1-pq} = \dfrac{q^2}{1-pq} \\ p(1) = \dfrac{(1-q)(1-p)}{1-pq} = \dfrac{pq}{1-pq} \\ p(0) = \dfrac{p(1-q)}{1-pq} = \dfrac{p^2}{1-pq} \end{cases}$$

3.7 设某信源在开始时的概率分布为 P{X_0=0}=0.6;P{ X_0=1}=0.3; P{ X_0=2}=0.1。第一个单位

时间的条件概率分布分别是：

$P\{X_1=0/X_0=0\}=1/3; P\{X_1=1/X_0=0\}=1/3; P\{X_1=2/X_0=0\}=1/3;$

$P\{X_1=0/X_0=1\}=1/3; P\{X_1=1/X_0=1\}=1/3; P\{X_1=2/X_0=1\}=1/3;$

$P\{X_1=0/X_0=2\}=1/2; P\{X_1=1/X_0=2\}=1/2; P\{X_1=2/X_0=2\}=0.$

后面发出的 Xi 概率只与 Xi-1 有关，有 $P(X_i/X_{i-1})=P(X_1/X_0)(i\geqslant 2)$试画出该信源的香农线图，并计算信源的极限熵 H∞。

解：

由题意，此信源为一阶有记忆信源：

且一步转移概率为：$[P]=\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$

$$\therefore [P(2)]=[P][P]=\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1/3 & 7/18 & 2/9 \\ 7/18 & 7/18 & 2/9 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$\therefore n_0=2$时二步转移概率均大于0，既有$pij(n_0=2)>0(i,j=1,2,3)$

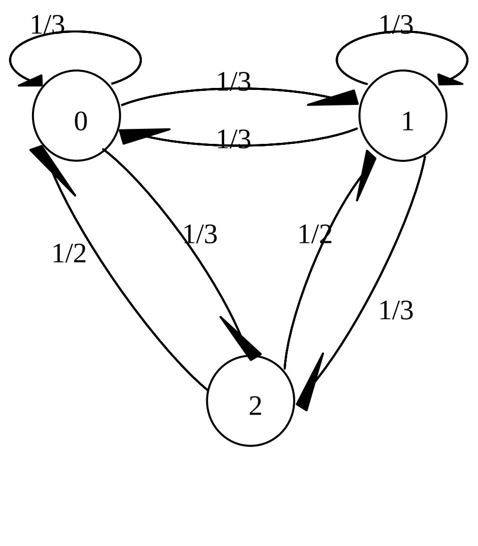
$\therefore$ 信源具有各态经历性，存在极限概率$p(S_i)(i=1,2,3)$

$$\text{由}\begin{cases} \begin{bmatrix} p(S_1) \\ p(S_2) \\ p(S_3) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}^T\bullet\begin{bmatrix} p(S_1) \\ p(S_2) \\ p(S_3) \end{bmatrix} \\ p(S_1)+p(S_2)+p(S_3)=1 \\ p(S_i)>0(i=1,2,3) \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} p(S_1)=\dfrac{3}{8} \\ p(S_2)=\dfrac{3}{8} \\ p(S_3)=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

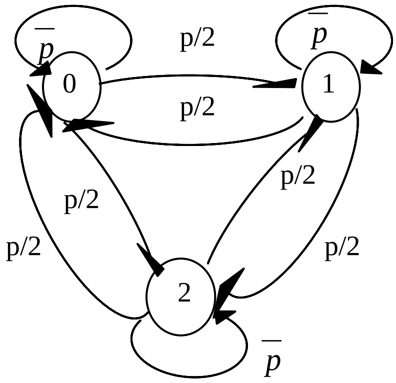
$$\therefore H_\infty=-\sum_{i=1}^{3}\sum_{j}p(S_i)p(S_j/S_i)\log p(S_j/S_i)$$

$$=-3\times(\frac{3}{8}\times\frac{1}{3}\log\frac{1}{3})-3\times(\frac{3}{8}\times\frac{1}{3}\log\frac{1}{3})-2\times(\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\log\frac{1}{2})=1.439\text{bit/symbl}$$

香农线图如下：



3.8 某一阶马尔柯夫信源的状态转移如下图所示，信源符号集为 X：{0,1,2}，并定义 $\bar{p}=1-p$



(1) 试求信源平稳后状态“0”、“1”、“2”的概率分布 p(0)、p(1)、p(2)；

(2) 求信源的极限熵 H_∞；

(3) p 取何值时 H_∞取得最大值。

解：

(1)由题意，此信源一步转移概率为：

$$[P]=\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \bar{p} & p/2 & p/2 \\ p/2 & \bar{p} & p/2 \\ p/2 & p/2 & \bar{p} \end{bmatrix}\end{array}$$

$\therefore n_0=1$时二步转移概率均大于0，既有$p_{ij}(n_0=1)>0(i,j=1,2,3)$

$\therefore$ 信源具有各态经历性，存在极限概率$p(S_i)(i=1,2,3)$

$$由\begin{cases}\begin{bmatrix} p(S_1) \\ p(S_2) \\ p(S_3) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \bar{p} & p/2 & p/2 \\ p/2 & \bar{p} & p/2 \\ p/2 & p/2 & \bar{p} \end{bmatrix}^T \bullet \begin{bmatrix} p(S_1) \\ p(S_2) \\ p(S_3) \end{bmatrix} \\ p(S_1)+p(S_2)+p(S_3)=1 \\ p(S_i)>0(i=1,2,3)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(S_1)=\dfrac{1}{3} \\ p(S_2)=\dfrac{1}{3} \\ p(S_3)=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

$$(2)\therefore H_\infty=-\sum_{i=1}^{3}\sum_{j} p(S_i)p(S_j/S_i)\log p(S_j/S_i)$$

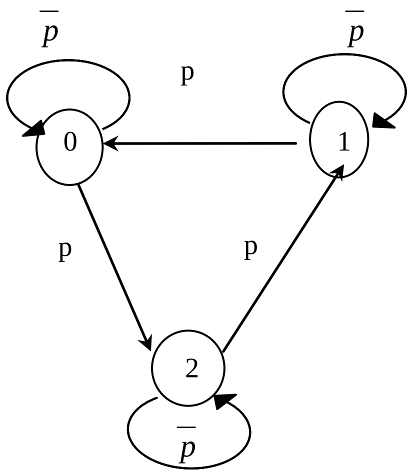
$$=-3\times(\frac{1}{3}\bar{p}\log\bar{p}+\frac{1}{3}\times\frac{p}{2}\log\frac{p}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{p}{2}\log\frac{p}{2})=-(\bar{p}\log\bar{p}+p\log\frac{p}{2})\text{bit/symbl}$$

$$(3)H_\infty=-(\bar{p}\log\bar{p}+p\log\frac{p}{2})=-(\bar{p}\log\bar{p}+\frac{p}{2}\log\frac{p}{2}+\frac{p}{2}\log\frac{p}{2})$$

$\because \bar{p}+\frac{p}{2}+\frac{p}{2}=1 \therefore$由熵的极限定理，当$\bar{p}=\frac{p}{2}=\frac{p}{2}=\frac{1}{3}$即$p=\frac{2}{3}$时$H_\infty$取得最大，且

$H_{\infty\max}=\log 3=1.585\text{bit/symble}$

3.9 某一阶马尔柯夫信源的状态转移如下图所示，信源符号集为 X：{0,1,2}。试求：
(1)试求信源平稳后状态“0”、“1”、“2”的概率分布 p(0)、p(1)、p(2)；
(2)求信源的极限熵 H_∞；
(3)求当 p=0,p=1 时的信息熵，并作出解释。



解:

(1)由题意，此信源一步转移概率为：

$$[P]=\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc}0 & 1 & 2\end{array} \\ \begin{array}{c}0\\1\\2\end{array} & \begin{bmatrix}\bar{p} & 0 & p \\ p & \bar{p} & 0 \\ 0 & p & \bar{p}\end{bmatrix}\end{array}$$

$\therefore$ 由状态转移图可知,此信源为不可约、非周期性、各态经历性信源

$\therefore$ 存在极限概率$p(S_i)(i=1,2,3)$

$$\text{由}\begin{cases}\begin{bmatrix}p(S_1)\\p(S_2)\\p(S_3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{p} & 0 & p\\ p & \bar{p} & 0\\ 0 & p & \bar{p}\end{bmatrix}^T\bullet\begin{bmatrix}p(S_1)\\p(S_2)\\p(S_3)\end{bmatrix} \\ p(S_1)+p(S_2)+p(S_3)=1 \\ p(S_i)>0(i=1,2,3)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p(S_1)=\dfrac{1}{3}\\ p(S_2)=\dfrac{1}{3}\\ p(S_3)=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

$$(2)\ \therefore H_\infty=-\sum_{i=1}^{3}\sum_j p(S_i)p(S_j/S_i)\log p(S_j/S_i)$$

$$=-(\frac{1}{3}\bar{p}\log\bar{p}+\frac{1}{3}\times p\log p+\frac{1}{3}\bar{p}\log\bar{p}+\frac{1}{3}\times p\log p+\frac{1}{3}\bar{p}\log\bar{p}+\frac{1}{3}\times p\log p)$$

$$=-(\bar{p}\log\bar{p}+p\log p)=H(p)\text{bit/symbl}$$

(3) $p=0$时, $H_\infty=H(0)=0\text{bit/symbl}$

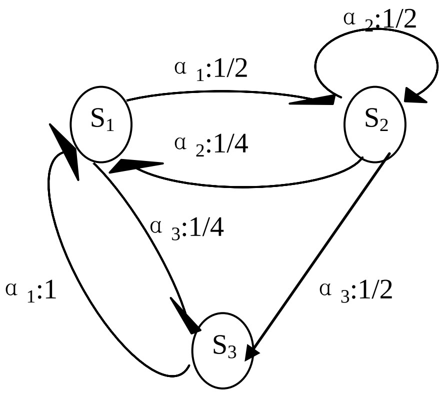
$p=1$时, $H_\infty=H(1)=0\text{bit/symbl}$

3.10 设某马尔柯夫信源的状态集合 S：$\{S_1S_2S_3\}$，符号集 X：$\{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\}$。在某状态 $S_i(i=1,2,3)$ 下发发符号 $\alpha_k(k=1,2,3)$的概率 $p(\alpha_k/S_i)$ (i=1,2,3; k=1,2,3)标在相应的线段旁,如下图所示.

(1) 求状态极限概率并找出符号的极限概率;

(2) 计算信源处在 $S_j(j=1,2,3)$状态下输出符号的条件熵 $H(X/S_j)$;

(3) 信源的极限熵 H_∞.



解:

(1)由题意，此信源一步转移概率为：

$$[P]=\begin{array}{c|ccc} & S_1 & S_2 & S_3 \\ S_1 & 0 & 3/4 & 1/4 \\ S_2 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ S_3 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$\therefore$由状态转移图可知,此信源为不可约、非周期性、各态经历性信源

$\therefore$ 存在极限概率$p(S_i)(i=1,2,3)$

$$由\begin{cases}\begin{bmatrix}p(S_1)\\p(S_2)\\p(S_3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&3/4&1/4\\0&1/2&1/2\\1&0&0\end{bmatrix}^T\bullet\begin{bmatrix}p(S_1)\\p(S_2)\\p(S_3)\end{bmatrix}\\ p(S_1)+p(S_2)+p(S_3)=1\\ p(S_i)>0(i=1,2,3)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p(S_1)=\dfrac{2}{7}\\p(S_2)=\dfrac{3}{7}\\p(S_3)=\dfrac{2}{7}\end{cases}$$

各符号极限概率为:

$$p(a_1)=\sum_{i=1}^{3}p(S_i/a_1)p(S_i)=\frac{2}{7}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{7}\times1=\frac{4}{7}$$

$$p(a_2)=\sum_{i=1}^{3}p(S_i/a_2)p(S_i)=\frac{2}{7}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{7}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{14}$$

$$p(a_3)=\sum_{i=1}^{3}p(S_i/a_3)p(S_i)=\frac{2}{7}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{7}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{14}$$

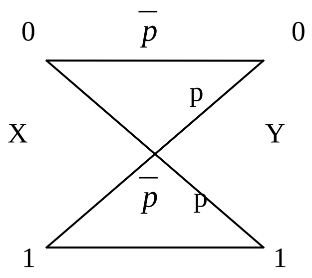
(2)$$H(X/S_1)=-\sum_{i=1}^{3}p(a_i/S_1)\log p(a_i/S_1)=-(\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\log\frac{1}{4})=1\text{bit}/\text{symble}$$

$$H(X/S_2)=-\sum_{i=1}^{3}p(a_i/S_2)\log p(a_i/S_2)=-(\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log\frac{1}{2})=1\text{bit}/\text{symble}$$

$$H(X/S_3) = -\sum_{i=1}^{3} p(a_i/S_3)\log p(a_i/S_3) = -\log 1 = 0\text{bit}/\text{symble}$$

$$\begin{aligned}
(3) \therefore H_\infty &= -\sum_{i=1}^{3}\sum_{j} p(S_i)p(S_j/S_i)\log p(S_j/S_i) \\
&= -[\frac{2}{7}\times(\frac{3}{4}\log\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\log\frac{1}{4})+\frac{3}{7}\times(\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log\frac{1}{2})+\frac{2}{7}\times\log 1] \\
&= 0.660\text{bit/symbl}
\end{aligned}$$

3.12 下图所示的二进制对称信道是无记忆信道,其中 $0<p,\bar{p}<1, p+\bar{p}=1, \bar{p}>>p$,试写出 N=3 次扩展无记忆信道的信道矩阵[P].



解:

将二进制对称无记忆信道N＝3次扩展后,信源输入符号集为:

$\alpha_i = (a_{i1}a_{i2}a_{i3})$,其中$a_{i1}$、$a_{i2}$、$a_{i3}\in\{0,1\}, i=1,2,\cdots 8$;

即:$\alpha_1=(000),\alpha_2=(001),\alpha_3=(010),\alpha_4=(011),\alpha_5=(100),\alpha_6=(101),\alpha_7=(110),\alpha_8=(111)$

输出符号集为:

$\beta_j = \{b_{j1}b_{j2}b_{j3}\}$,其中$b_{j1}$、$b_{j2}$、$b_{j3}\in\{0,1\}, j=1,2,\cdots 8$;

即:$\beta_1=(000),\beta_2=(001),\beta_3=(010),\beta_4=(011),\beta_5=(100),\beta_6=(101),\beta_7=(110),\beta_8=(111)$

$\therefore p(\beta_j/\alpha_i) = p(a_{i1}/b_{j1})\bullet p(a_{i2}/b_{j2})\bullet p(a_{i3}/b_{j3})$

故直接可以写出N＝3次扩展信道信道矩阵:

$$[P] = \begin{array}{c} \\ \\ \alpha_1=(000) \\ \alpha_2=(001) \\ \alpha_3=(010) \\ \alpha_4=(011) \\ \alpha_5=(100) \\ \alpha_6=(101) \\ \alpha_7=(110) \\ \alpha_8=(111) \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & \beta_7 & \beta_8 \\ (000) & (001) & (010) & (011) & (100) & (101) & (110) & (111) \end{array} \\
\begin{bmatrix}
\bar{p}^3 & \bar{p}^2p & \bar{p}^2p & \bar{p}p^2 & \bar{p}^2p & \bar{p}p^2 & \bar{p}p^2 & p^3 \\
\bar{p}^2p & \bar{p}^3 & \bar{p}p^2 & \bar{p}^2p & \bar{p}p^2 & \bar{p}^2p & p^3 & \bar{p}p^2 \\
\bar{p}^2p & \bar{p}p^2 & \bar{p}^3 & \bar{p}^2p & \bar{p}p^2 & p^3 & \bar{p}^2p & \bar{p}p^2 \\
\bar{p}p^2 & \bar{p}^2p & \bar{p}^2p & \bar{p}^3 & p^3 & \bar{p}p^2 & \bar{p}p^2 & \bar{p}^2p \\
\bar{p}^2p & \bar{p}p^2 & \bar{p}p^2 & p^3 & \bar{p}^3 & \bar{p}^2p & \bar{p}^2p & \bar{p}p^2 \\
\bar{p}p^2 & \bar{p}^2p & p^3 & \bar{p}p^2 & \bar{p}^2p & \bar{p}^3 & \bar{p}p^2 & \bar{p}^2p \\
\bar{p}p^2 & p^3 & \bar{p}^2p & \bar{p}p^2 & \bar{p}^2p & \bar{p}p^2 & \bar{p}^3 & \bar{p}^2p \\
p^3 & \bar{p}p^2 & \bar{p}p^2 & \bar{p}^2p & \bar{p}p^2 & \bar{p}^2p & \bar{p}^2p & \bar{p}^3
\end{bmatrix}
\end{array}$$

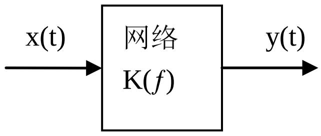
第五章 多维连续信源与信道

5.8 设 $X(f)$是时间函数 $x(t)$的频谱,而函数在 $T_1<t<T_2$ 区间以为的值均为零.试证:

$$X(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(\frac{n}{T})\frac{\sin(n\pi-\pi fT)}{n\pi-\pi fT}$$

(频域抽样定理,证明详见 p263-p265)

5.9 设随机过程 x(t)通过传递函数为 $K(f)$的线性网络,如下图所示.若网络的频宽为 F,观察时间为 T.试证明:输入随机过程的熵 h(X)和输出随机过程的熵 h(Y)之间的关系为:



$$h(Y)=h(X)+\sum_{n=1}^{FT}\log\left|K\left(\frac{n}{T}\right)\right|^2$$

(证明详见 p283-p287)

5.11 证明:加性高斯白噪声信道的信道容量:

$$C=\frac{N}{2}\log(1+\frac{\sigma_X^2}{\sigma_N^2})\quad \text{信息单位/N 维}$$

其中 N=2FT,6^2_X 是信号的方差(均值为零), 6^2_N 是噪声的方差(均值为零).
再证:单位时间的最大信息传输速率

$$C_t=F\log(1+\frac{\sigma_X^2}{N_0F})\quad \text{信息单位/秒}$$

(证明详见 p293-p297)

5.12 设加性高斯白噪声信道中,信道带宽 3kHz,又设{(信号功率+噪声功率)/噪声功率}=10dB. 试计算改信道的最大信息传输速率 C_t.

解:

$$\text{由题意有}:10\log\frac{S+N}{N}=10\therefore\frac{S+N}{N}=10\text{即}\frac{S}{N}=9$$

$$\therefore C_t=F\log(1+\frac{S}{N})=3000\times\log(1+9)=9965.78\quad \text{bit/s}$$

5.13 在图片传输中,每帧约有 2.25×106 个像素,为了能很好的重现图像,需分 16 个量度电平,并假设量度电平等概率分布,试计算每分钟传输一帧图片所需信道的带宽(信噪功率比为30dB).

解:

由题意用16个亮度电平来表示一个像素则需要4位二进制编码;

又由$C_t = F\log(1+\frac{S}{N})$得:

$$F = \frac{C_t}{\log(1+\frac{S}{N})} = \frac{C_t}{\log(1+10^{\frac{1}{10}(\frac{S}{N})_{\rm dB}})} = \frac{2.25\times10^6\times4\div60}{\log(1+10^3)} = 1.505\times10^4 = 15.05kHz$$

5.14 设电话信号的信息率为 5.6×10^4 比特/秒.在一个噪声功率谱为 N0=5×10^{-6}mW/Hz,限频F、限输入功率 P 的高斯信道中传送,若 F=4kHz,问无差错传输所需的最小功率 P 是多少 W?若

F→∞则 P 是多少 W?

解:

$$(1) F = 4kHz\text{时,实现无差错传输则} R \le F\log(1+\frac{P}{N_0F})$$

$$\text{取等号,即} R = F\log(1+\frac{P_{\min}}{N_0F})\text{得}$$

$$P_{\min} = N_0F(2^{\frac{R}{F}}-1) = 5\times10^{-6}\times10^{-3}\times4\times10^3\times(2^{\frac{5.6\times10^4}{4\times10^3}}-1) = 0.32766\text{W}$$

所以无差错传输所需要得最小功率$\mathrm{P}_{\min} = 0.32766\mathrm{W}$

$$(2) F\to\infty\text{时,由实现无差错传输则} R \le \lim_{F\to\infty} C_t = \frac{Px}{N_0\ln2}$$

$$\text{取等号,则} P_{\min} = RN_0\ln2 = 5.6\times10^4\times5\times10^{-6}\times10^{-3}\times\ln2 = 1.941\times10^{-4} = 0.1941\text{mW}$$

5. 15 已知一个高斯信道,输入信噪功率比为 3dB,频带为 3kHz,求最大可能传送的信息率是多少?若信噪比提高到 15dB,求理论上传送同样的信息率所需的频带.

解:

最大可能传输的速率为:

$$R = C_t = F\log(1+\frac{S}{N}) = F\log(1+10^{\frac{1}{10}(\frac{S}{N})_{\rm dB}}) = 3\times10^3\times\log(1+10^{\frac{3}{10}}) = 4748.05\ \text{bit/s}$$

$$\text{若}(\frac{S}{N})_{\rm dB} = 15\text{则} F = \frac{R}{\log(1+\frac{S}{N})} = \frac{4748.05}{\log(1+10^{\frac{15}{10}})} = 944.36\ \ \text{Hz}$$

5.17 设某加性高斯白噪声信道的通频带足够宽(F→∞),输入信号的平均功率 P_s=1W,噪声功率谱密度 N0=10^{-4}W/Hz,,若信源输出信息速率 Rt=1.5×10^4比特/秒.试问单位时间内信源输出的信息量是否全部通过信道?为什么?

解:

$$\because \lim_{F\to\infty} C_t = \frac{Ps}{N_0 \ln 2} = \frac{1}{10^{-4}\times\ln 2} = 1.4427\times 10^4\,\text{bit/s} < R_t = 1.5\times 10^4\,\text{bit/s}$$

即信源输出信息速率大于信道所能提供的最大传输速率,所以单位时间内信源输出的信息量不能全部通过信道,否则会产生失真.

第六章 无失真信源编码

6.3 设平稳离散有记忆信源 **X**=$X_1X_2\cdots X_N$,如果用 r 进制符号集进行无失真信源编码.试证明当 N→∞时,平均码长$\bar{n}$(每信源 X 的符号需要的码符号数)的极限值:

$$\lim_{N\to\infty}\bar{n} = H_{\infty r}$$

其中,$H_{\infty r}$表示 r 进制极限熵.

证明:

对于平稳离散有记忆信源$X = X_1X_2\cdots X_N$

$$H_\infty = \lim_{N\to\infty} H_N(X) = \lim_{N\to\infty}\frac{H(X)}{N} = \lim_{N\to\infty} H(X_N / X_1X_2\cdots X_N)$$

由平均码长界限定理

$$\frac{H(X)}{\log r} \le \bar{n}_X < \frac{H(X)}{\log r}+1$$

则$$\frac{H(X)}{N\times\log r} \le \frac{\bar{n}_X}{N} < \frac{H(X)}{N\times\log r}+\frac{1}{N}$$

$$\therefore \lim_{N\to\infty}\frac{H(X)}{N\times\log r} \le \lim_{N\to\infty}\frac{\bar{n}_X}{N} < \lim_{N\to\infty}\left(\frac{H(X)}{N\times\log r}+\frac{1}{N}\right)$$

即$$\frac{H_\infty}{\log r} \le \lim_{N\to\infty}\bar{n} < \frac{H_\infty}{\log r}$$

$$\therefore \lim_{N\to\infty}\bar{n} = \frac{H_\infty}{\log r} = H_{\infty r}$$

6.4 设某信源 S:{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6},其概率分布如下表所示,表中也给出了对应的码 1,2,3,4,5,6.

(1)试问表中哪些码是单义可译码?

(2)试问表中哪些码是非延长码?

(3)求出表中单义可译码的平均码长$\bar{n}$.

s_i	p_i	W(1)	W(2)	W(3)	W(4)	W(5)	W(6)

s_1	1/2	000	0	0	0	0	0
s_2	1/4	001	01	10	01	10	100
s_3	1/8	010	011	110	001	110	101
s_4	1/16	011	0111	1110	0001	1110	110
s_4	1/32	100	01111	11110	00001	1011	111
s_6	1/32	101	011111	111110	000001	1101	011

解:

(1)W(1)是定长非奇异码,单义可译,W(2)是延长码,单义可译, W(3)是即时码,单义可译;

(2) W(1)、W(3)是非延长码;

(3)

$$W(1):\bar{n}=\sum_{i=1}^{6}p_i n_i=\frac{1}{2}\times3+\frac{1}{4}\times3+\frac{1}{8}\times3+\frac{1}{16}\times3+\frac{1}{32}\times3+\frac{1}{32}\times3=3$$

$$W(2):\bar{n}=\sum_{i=1}^{6}p_i n_i=\frac{1}{2}\times1+\frac{1}{4}\times2+\frac{1}{8}\times3+\frac{1}{16}\times4+\frac{1}{32}\times5+\frac{1}{32}\times6=\frac{63}{32}$$

$$W(3):\bar{n}=\sum_{i=1}^{6}p_i n_i=\frac{1}{2}\times1+\frac{1}{4}\times2+\frac{1}{8}\times3+\frac{1}{16}\times4+\frac{1}{32}\times5+\frac{1}{32}\times6=\frac{63}{32}$$

6.5 某信源 S 的信源空间为:

$$[S\bullet \mathrm{P}]:\begin{cases}\mathrm{S}: & \mathrm{s}_1 & \mathrm{s}_2\\ \mathrm{P(S)}: & 0.2 & 0.8\end{cases}$$

(1) 若用 U:{0,1}进行无失真信源编码,试计算平均码长$\bar{n}$的下限值;

(2) 把信源 S 的 N 次无记忆扩展信源 S^N 编成有效码,试求 N=2,3,4 时的平均码长$\bar{n}$;

(3) 计算上述 N=1,2,3,4,这四种码的信息率.

解:

$$(1)H(S)=-\sum_{i=1}^{2}p(s_i)\log p(s_i)=-(0.2\times\log0.2+0.8\times\log0.8)=0.7219\text{bit}/symble$$

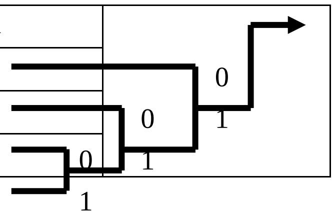
$$\therefore 由平均码长界限定理:\bar{n}\geq\frac{H(S)}{\log r}=\frac{0.7219}{\log 2}=0.7219$$

$$(2)N=2时$$

$$[S^2\bullet P]=\begin{cases}S^2 & S_{11} & S_{12} & S_{21} & S_{22}\\ P(S^2) & 0.04 & 0.16 & 0.16 & 0.64\end{cases}$$

对其进行 Huffman 编码:

码长	编码	信符	信符概率
1	0	S_{22}	0.64
2	10	S_{21}	0.16
3	110	S_{12}	0.16



3	111	S_{11}	0.08	

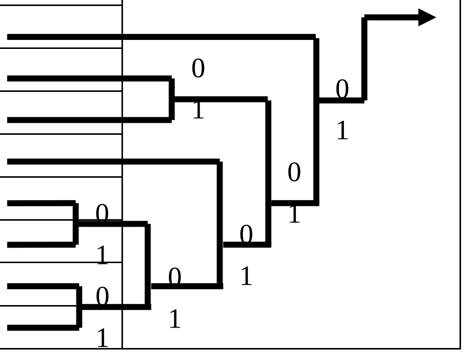
$$\therefore \bar{n}(2)=\sum_{i=1}^{4}p_in_i=0.64\times1+0.16\times2+0.16\times3+0.08\times3=1.68\ \text{码符号/2信源符号}$$

$$\bar{n}=\frac{\bar{n}(2)}{2}=\frac{1.68}{2}=0.84\quad\text{码符号/信源符号}$$

$N=3$时

$$[S^3\bullet P]=\begin{cases}S^2 & S_{111} & S_{112} & S_{121} & S_{122} & S_{211} & S_{212} & S_{221} & S_{222}\\ P(S^3) & 0.008 & 0.032 & 0.032 & 0.128 & 0.032 & 0.128 & 0.128 & 0.512\end{cases}$$

码长	编码	信符	信符概率
1	0	S_{222}	0.512
3	100	S_{221}	0.128
3	111	S_{212}	0.128
3	110	S_{122}	0.128
5	11100	S_{112}	0.032
5	11101	S_{121}	0.032
5	11110	S_{211}	0.032
5	11111	S_{111}	0.008



$$\therefore \bar{n}(3)=\sum_{i=1}^{8}p_in_i$$

$$=0.512\times1+0.128\times3+0.128\times3+0.128\times3+0.032\times5+0.032\times5++0.032\times5+0.008\times5$$

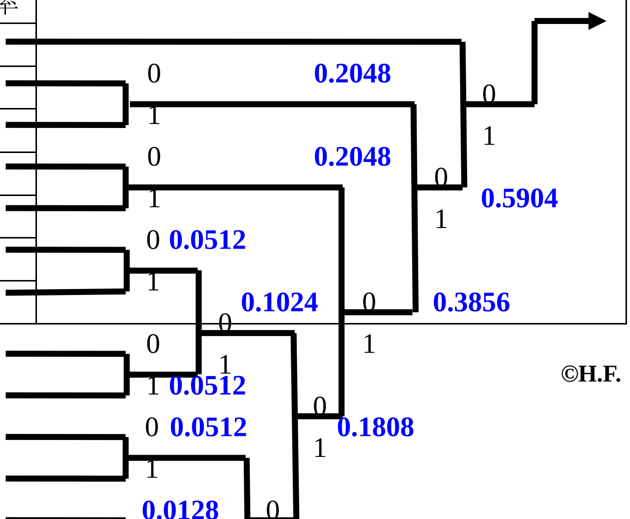
$$=2.184\quad\text{码符号/3信源符号}$$

$$\bar{n}=\frac{\bar{n}(3)}{3}=\frac{2.184}{3}=0.728\quad\text{码符号/信源符号}$$

$N=4$时

$$[S^3\bullet P]=\begin{cases}S^2 & S_{1111} & S_{1112} & S_{1121} & S_{1122} & S_{1211} & S_{1212} & S_{1221} & S_{1222}\\ P(S^3) & 0.0016 & 0.0064 & 0.0064 & 0.0512 & 0.0064 & 0.0512 & 0.0512 & 0.1024\\ \\ S^2 & S_{2111} & S_{2112} & S_{2121} & S_{2122} & S_{2211} & S_{2212} & S_{2221} & S_{2222}\\ P(S^3) & 0.0064 & 0.0256 & 0.0256 & 0.1024 & 0.0256 & 0.1024 & 0.1024 & 0.4096\end{cases}$$

码长	编码	信符	信符概率
1	0	S_{2222}	0.4096
3	100	S_{2221}	0.1024
3	101	S_{2212}	0.1024
4	1100	S_{2122}	0.1024
4	1101	S_{1222}	0.1024
6	111000	S_{2112}	0.0256
6	111001	S_{2121}	0.0256



6	111010	S_{2211}	0.0256	
6	111010	S_{1221}	0.0256	
6	111100	S_{1212}	0.0256	
6	111101	S_{1122}	0.0256	
7	1111100	S_{1112}	0.0064	
7	1111101	S_{1121}	0.0064	
7	1111110	S_{1211}	0.0064	
8	11111110	S_{2111}	0.0064	
8	11111111	S_{1111}	0.00016	

$$\therefore \bar{n}(4)=\sum_{i=1}^{16} p_i n_i$$

$$=0.4096\times 1+0.1024\times(3+3+4+4)+0.0256\times(6+6+6+6+6+6)$$

$$+0.0064\times(7+7+7)+0.0064\times 8+0.0016\times 8$$

$$=2.9632 \text{ 码符号/4信源符号}$$

$$\bar{n}=\frac{\bar{n}(4)}{4}=\frac{2.9632}{4}=0.7408 \text{ 码符号/信源符号}$$

(3)

$$N=1\text{时, 进行Huffman编码则}\bar{n}=1\ \therefore R=\frac{H(S)}{\bar{n}}=0.7219\text{bit}/\text{symble}$$

$$\text{若编码平均码长达到下限}\bar{n}=0.7129\text{时}, R=\frac{H(S)}{\bar{n}}=1\text{bit}/\text{symble}$$

$$N=2\text{时}, R=\frac{H(S)}{\bar{n}}=\frac{0.7219}{0.84}=0.8594\text{bit}/\text{symble}$$

$$N=3\text{时}, R=\frac{H(S)}{\bar{n}}=\frac{0.7219}{0.728}=0.9916\text{bit}/\text{symble}$$

$$N=4\text{时}, R=\frac{H(S)}{\bar{n}}=\frac{0.7219}{0.7408}=0.9745\text{bit}/\text{symble}$$

6.6 设信源 S 的信源空间为

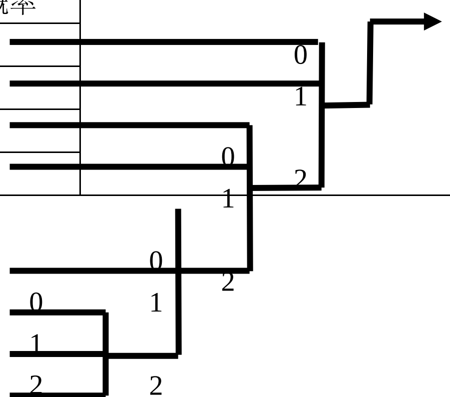
$$[S\bullet P]:\begin{cases} S: & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 & s_7 & s_8 \\ P(S): & 0.2 & 0.1 & 0.3 & 0.2 & 0.05 & 0.05 & 0.05 & 0.05 \end{cases}$$

符号集 U:{0,1,2},试编出有效码,并计算其平均码长 $\bar{n}$.

解:进行 Huffman 编码:

r=3,q=8,因为(q-r)mod(r-1)=5mod2=1≠0,所以插入 m=(r-1)- (q-r)mod(r-1)=2-1=1 个虚假符号,令其为 S_9,则:

码长	编码	信符	信符概率	
1	0	S_3	0.3	
1	1	S_1	0.2	
2	20	S_4	0.2	
2	21	S_2	0.1	



3	220	S_5	0.05	
3	221	S_6	0.05	
4	2220	S_7	0.05	
4	2221	S_8	0.05	
4	2222	S_9（不使用）	0	

$$\therefore \bar{n} = \sum_{i=1}^{8} p_i n_i$$

$$= 0.3\times1 + 0.2\times1 + 0.2\times2 + 0.1\times2 + 0.05\times3 + 0.05\times3 + +0.05\times4 + 0.05\times4$$

$$= 1.8 \quad \text{码符号/信源符号}$$

6.7 设信源 S 的 N 次扩展信源 S^N,用霍夫曼编码法对它编码,而码符号 U:{ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ },编码后所得的码符号可以看作一个新的信源

$$[U \bullet P]: \begin{cases} U: & a_1 & a_2 & \cdots & a_r \\ P(U): & p_1 & p_2 & \cdots & p_r \end{cases}$$

试证明:当 N→∞时, $\lim\limits_{N\to\infty} p_i = \dfrac{1}{r} (i = 1,2,\cdots, r)$.

证明:

对信源S的N次扩展信源S^N进行Huffam编码,得到的编码是无失真非延长有效码.
由平均码长的界限定理,有:

$$\frac{H(S^N)}{\log r} \le \bar{n}_N < \frac{H(S^N)}{\log r} + 1$$

则$\dfrac{H(S^N)}{N \times \log r} \le \dfrac{\bar{n}_N}{N} < \dfrac{H(S^N)}{N \times \log r} + \dfrac{1}{N}$　其中,为N次扩张信源每个符号需要的平均码长

$\therefore \dfrac{H(S)}{\log r} \le \bar{n} < \dfrac{H(S)}{\log r} + \dfrac{1}{N}$　其中$\bar{n}$为信源S每个符号所需要的平均码长

对上式各项求极限,不等式仍成立

$$\therefore \lim_{N \to \infty} \frac{H(S)}{\log r} \le \lim_{N \to \infty} \bar{n} < \lim_{N \to \infty} \left(\frac{H(S)}{\log r} + \frac{1}{N}\right)$$

$$\frac{H_\infty}{\log r} \le \lim_{N \to \infty} \bar{n} < \frac{H_\infty}{\log r}$$

$$\therefore \lim_{N \to \infty} \bar{n} = \frac{H_\infty}{\log r} = H_{\infty r}$$

同时由无失真信源编码定理,有

编码速率$R = \dfrac{\mathrm{H}(S^N)}{\bar{n}_N} = \dfrac{\mathrm{H}(S)}{\bar{n}}$

$$\therefore R_\infty = \lim_{N \to \infty} R = \lim_{N \to \infty} \frac{\mathrm{H}(S^N)}{\bar{n}_N} = \lim_{N \to \infty} \frac{\mathrm{H}(S)}{\bar{n}} = \frac{H_\infty}{\dfrac{H_\infty}{\log r}} = \log r \quad \text{bit/symble}$$

$\therefore$ 在$N \to \infty$时,编码速率即码符号集U每一符号所包含信源的平均信息量$R_\infty = \log r$,
可见,对于码符号集U,在$N \to \infty$时提供的信息量达到了最大$H_{\max}(U) = \log r$
由信源熵的最大值定理知,此时各符号等概出现:

$$\therefore \lim_{N \to \infty} p_i = \frac{1}{r} (i = 1, 2, \cdots, r)$$

6. 8 设某企业有四种可能出现的状态盈利、亏本、发展、倒闭, 若这四种状态是等概率的, 那么发送每个状态的消息量最少需要的二进制脉冲数是多少?又若四种状态出现的概率分别是:1/2, 1/8, 1/4, 1/8, 问在此情况下每消息所需的最少脉冲数是多少?应如何编码?

解:

设 S:{S_1=“盈利”,S_2=“亏本”,S_3=“发展”,S_4=“倒闭”},
(1)若四种情况等概率出现时,即 $p(S_1)=p(S_2)=p(S_3)=p(S_4)=0.25$ 时,用脉冲来表示各信息可视为对信源 S 进行编码,由平均码长界限定理知:

$$\bar{n} \ge \frac{H(S)}{\log r} = \frac{H(0.25, 0.25, 0.25, 0.25)}{\log 2} = 2 \quad \text{脉冲数/信源符号}$$

所以发送每个状态的信息最少需要 2 个二进制脉冲.
(2) $p(S_1)=1/2, p(S_2)=1/8, p(S_3)=1/4, p(S_4)=1/8$ 时,由平均码长界限定理:

$$\bar{n} \geq \frac{H(S)}{\log r} = \frac{H(\frac{1}{2},\frac{1}{8},\frac{1}{4},\frac{1}{8})}{\log 2} = \frac{7}{4} \quad \text{脉冲数/信源符号}$$

所以此情况下每消息所需的最少脉冲数是 1.75 个.

达到此下限时要求各消息对应码长 n_i 与出现概率 $p(S_i)$关系为:$p(S_i)=2^{-ni}$,则 $n_1=1,n_2=3,n_3=2,n_4=3$.

对信源进行 Huffman 编码:

码长	编码	信符	信符概率			
1	0	S_1	1/2	1/2	1/2	0
2	10	S_3	1/4	1/4	0	1
3	100	S_2	1/8 0	1/4	1 1/2	
3	101	S_2	1/8 1			

可见上面编码符号最小码长条件,可使发送每信息的脉冲数最少.

6. 9 设某信源的信源空间为:

$$[S \bullet P]: \begin{cases} S: & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 & s_7 \\ P(S): & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} & \frac{1}{64} & \frac{1}{64} \end{cases}$$

试用 U:{0,1}作码符号集,采取香农编码方法进行编码,并计算其平均码长 $\bar{n}$.

解:

码长	编码	信符	信符概率					
1	0	s_1	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2 0
2	10	s_2	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	
3	110	s_3	1/8	1/8	1/8	1/8 0		0 1 1/2
4	1110	s_4	1/16	1/16	1/16	1	1/4	1
5	11110	s_5	1/32	1/32 0	0 1	1/8		
6	111110	s_6	1/64 0	1	1/16			
6	111111	s_7	1/64 1	1/32				

$$\therefore \bar{n} = \sum_{i=1}^{7} p_i n_i$$

$$= \frac{1}{2}\times 1 + \frac{1}{4}\times 2 + \frac{1}{8}\times 3 + \frac{1}{16}\times 4 + \frac{1}{32}\times 5 + \frac{1}{64}\times 6 + \frac{1}{64}\times 6$$

$=1.96875$ 码符号/信源符号

第七章抗干扰信道编码

7.4 设有一离散信道，其信道矩阵为:

$$[P]=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

(1) 当信源 X 的概率分布为 $p(\alpha_1)=2/3$，$p(\alpha_2)=p(\alpha_3)=1/6$ 时，按最大后验概率准则选择译码函数，并计算其平均错误译码概率 P_{emin}.

(2) 当信源是等概信源时，按最大似然译码准则选择译码函数，并计算其平均错误译码概率 P_{emin}.

解：

(1)计算后验概率，有：

$$p(b_1)=\sum_{i=1}^{3}P(a_i)P(b_1|a_i)=\frac{5}{12},\quad p(b_2)=\sum_{i=1}^{3}P(a_i)P(b_2|a_i)=\frac{7}{24},\quad p(b_3)=\sum_{i=1}^{3}P(a_i)P(b_3|a_i)=\frac{7}{24};$$

$$\therefore P(a_1|b_1)=\frac{P(a_1)P(b_1|a_1)}{p(b_1)}=\frac{4}{5},\quad P(a_2|b_1)=\frac{P(a_2)P(b_1|a_2)}{p(b_1)}=\frac{1}{10},\quad P(a_3|b_1)=\frac{P(a_3)P(b_1|a_3)}{p(b_1)}=\frac{1}{10};$$

$$P(a_1|b_2)=\frac{P(a_1)P(b_2|a_1)}{p(b_2)}=\frac{4}{7},\quad P(a_2|b_2)=\frac{P(a_2)P(b_2|a_2)}{p(b_2)}=\frac{2}{7},\quad P(a_3|b_2)=\frac{P(a_3)P(b_2|a_3)}{p(b_2)}=\frac{1}{7};$$

$$P(a_1|b_3)=\frac{P(a_1)P(b_3|a_1)}{p(b_3)}=\frac{4}{7},\quad P(a_2|b_3)=\frac{P(a_2)P(b_3|a_2)}{p(b_3)}=\frac{1}{7},\quad P(a_3|b_3)=\frac{P(a_3)P(b_3|a_3)}{p(b_3)}=\frac{2}{7}.$$

$\therefore$ 取解码规则为：$\mathrm{F}(b_1)=a_1\quad \mathrm{F}(b_2)=a_1\quad \mathrm{F}(b_3)=a_1$

$$P_{e\min}=1-\sum_{j=1}^{3}p(b_j)p(a^*|b_j)=\frac{1}{3}$$

(2)由信道矩阵，取译码规则为：$\mathrm{F}(b_1)=a_1\quad \mathrm{F}(b_2)=a_2\quad \mathrm{F}(b_3)=a_3$

由于信源等概分布 $\therefore p_e=p_{e\min}=1-\sum_{j=1}^{3}p(a^{**})p(b_j|a^{**})=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i\neq **}p(a_i)p(b_j|a_i)=\frac{1}{2}$

7.5 某信道的输入符号集 X：{0，1/2，1}，输出符号集 Y：{0，1}，信道矩阵为：

$$[P]=\begin{array}{c}0\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{array}\begin{bmatrix}1&0\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ 0&1\end{bmatrix}$$

现有四个消息的信源通过这信道，设信息等概出现。若对信源进行编码，我们选这样一种码：$C:\{(x_1,x_2,1/2,1/2)\}$，$x_i=0,1(i=1,2)$

其码长 n=4，并选取这样的译码原则：$f(y_1,y_2,y_3,y_4)=(y_1,y_2,1/2,1/2)$

(1) 这样的编码后信息传输效率等于多少？

(2) 证明在选用的编码规则下，对所有码字有 $P_e=0$。

解：

(1) $\because$ 信道输入等概出现 $\because R=\dfrac{\log M}{N}=\dfrac{\log 4}{4}=0.5\quad \text{bit/symble}$

(2)证明：

$$\because P_e=\sum_{j=1}^{2}P(b_j)P_{e\,j}=\sum_{j=1}^{2}P(b_j)(1-P_{R\,j})=\sum_{j=1}^{2}P(b_j)(1-P\{X=F(b_j)=a_i/b_j\})$$

$$=P(0)(1-1)+P(1)(1-1)=0$$

$\therefore$ 在这样的译码原则下，对所以的码字P_e＝0。

7.6 考虑一个码长为 4 的二进制码，其码字为 w_1=0000；w_2=0011；w_3=1100；w_4=1111。若码字送入一个二进制对称信道（其单符号的误传概率为 p，p<0.01），而码字的输入是不等概率的，其概率为：$p(w_1)$=1/2，$p(w_2)$=1/8，$p(w_3)$=1/8，$p(w_4)$=1/4

试找出一种译码规则使平均错误概率 P_{emin}=P_e。

解：由于信道为二进制对称信道，所以先验概率等于后验概率，且 p<0.01，故可以根据信道输出的 2^4 个码字的最大后验概率选择译码规则，即可使平均错误概率 P_{emin}=P_e。

收到码字 \ 发送概率	w_1=0000	w_2=0011	w_3=1100	w_4=1111	译码规则
0000	$\frac{1}{2}\bar{P}^4$	$\frac{1}{8}P^2\bar{P}^2$	$\frac{1}{8}P^2\bar{P}^2$	$\frac{1}{4}P^4$	F(0000)=0000
0001	$\frac{1}{2}P\bar{P}^3$	$\frac{1}{8}P\bar{P}^3$	$\frac{1}{8}P^3\bar{P}$	$\frac{1}{4}P^3\bar{P}$	F(0001)=0000
0010	$\frac{1}{2}P\bar{P}^3$	$\frac{1}{8}P\bar{P}^3$	$\frac{1}{8}P^3\bar{P}$	$\frac{1}{4}P^3\bar{P}$	F(0010)=0000
0011	$\frac{1}{2}P^2\bar{P}^2$	$\frac{1}{8}\bar{P}^4$	$\frac{1}{8}P^4$	$\frac{1}{4}P^2\bar{P}^2$	F(0011)=0011
0100	$\frac{1}{2}P\bar{P}^3$	$\frac{1}{8}P^3\bar{P}$	$\frac{1}{8}P\bar{P}^3$	$\frac{1}{4}P^3\bar{P}$	F(0100)=0000
0101	$\frac{1}{2}P^2\bar{P}^2$	$\frac{1}{8}P^2\bar{P}^2$	$\frac{1}{8}P^2\bar{P}^2$	$\frac{1}{4}P^2\bar{P}^2$	F(0101)=0000
0110	$\frac{1}{2}P^2\bar{P}^2$	$\frac{1}{8}P^2\bar{P}^2$	$\frac{1}{8}P^2\bar{P}^2$	$\frac{1}{4}P^2\bar{P}^2$	F(0110)=0000
0111	$\frac{1}{2}P^3\bar{P}$	$\frac{1}{8}P\bar{P}^3$	$\frac{1}{8}P^3\bar{P}$	$\frac{1}{4}P\bar{P}^3$	F(0111)=1111
1000	$\frac{1}{2}P\bar{P}^3$	$\frac{1}{8}P^3\bar{P}$	$\frac{1}{8}P\bar{P}^3$	$\frac{1}{4}P^3\bar{P}$	F(1000)=0000
1001	$\frac{1}{2}P^2\bar{P}^2$	$\frac{1}{8}P^2\bar{P}^2$	$\frac{1}{8}P^2\bar{P}^2$	$\frac{1}{4}P^2\bar{P}^2$	F(1001)=0000
1010	$\frac{1}{2}P^2\bar{P}^2$	$\frac{1}{8}P^2\bar{P}^2$	$\frac{1}{8}P^2\bar{P}^2$	$\frac{1}{4}P^2\bar{P}^2$	F(1010)=0000
1011	$\frac{1}{2}P^3\bar{P}$	$\frac{1}{8}P\bar{P}^3$	$\frac{1}{8}P^3\bar{P}$	$\frac{1}{4}P\bar{P}^3$	F(1011)=1111
1100	$\frac{1}{2}P^2\bar{P}^2$	$\frac{1}{8}P^4$	$\frac{1}{8}\bar{P}^4$	$\frac{1}{4}P^2\bar{P}^2$	F(1100)=1100

1101	$\frac{1}{2}P^3\overline{P}$	$\frac{1}{8}P^3\overline{P}$	$\frac{1}{8}P\overline{P}^3$	$\frac{1}{4}P\overline{P}^3$	F(1101)=1111
1110	$\frac{1}{2}P^3\overline{P}$	$\frac{1}{8}P^3\overline{P}$	$\frac{1}{8}P\overline{P}^3$	$\frac{1}{4}P\overline{P}^3$	F(1110)=1111
1111	$\frac{1}{2}P^4$	$\frac{1}{8}P^2\overline{P}^2$	$\frac{1}{8}P^2\overline{P}^2$	$\frac{1}{4}\overline{P}^4$	F(1111)=1111

$$\therefore P_e = P_{e\min} = 1 - \sum_{j=1}^{16} P(b_j)P(a^*|b_j)$$

$$= 1 - (\frac{1}{2}\overline{P}^4 + \frac{1}{2}P\overline{P}^3 + \frac{1}{2}P\overline{P}^3 + \frac{1}{8}\overline{P}^4 + \frac{1}{2}P\overline{P}^3 + \frac{1}{2}P^2\overline{P}^2 + \frac{1}{2}P^2\overline{P}^2 + \frac{1}{4}P\overline{P}^3 + \frac{1}{2}P\overline{P}^3$$

$$+ \frac{1}{2}P^2\overline{P}^2 + \frac{1}{2}P^2\overline{P}^2 + \frac{1}{4}P\overline{P}^3 + \frac{1}{8}\overline{P}^4 + \frac{1}{4}P\overline{P}^3 + \frac{1}{4}P\overline{P}^3 + \frac{1}{4}\overline{P}^4)$$

$$= 1 - \overline{P}^4 - 3P\overline{P}^3 - 2P^2\overline{P}^2$$

7.7 设一离散无记忆信道，其信道矩阵为：

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(1) 计算信道容量 C；

(2) 找出一个长度为二的码，其信息传输率为 0.5log5（即五个字符），如果按最大似然译码准则设计译码器，求译码器输出端平均错误译码的概率 P_e（输入字符等概）；

(3) 有无可能存在一个长度为 2 的码而使每个码字的平均误译概率 $P_e^{(i)}=0$（i=1,2,3,4,5），也即使平均错译概率 $P_e=0$？如存在的话请找出来。

解：

(1) $\because r = s = 5$，且[P]为非奇异矩阵

$$\therefore \text{由} \sum_{j=1}^{5} p(b_j/a_i)\beta_j = \sum_{j=1}^{5} p(b_j/a_i)\log p(b_j/a_i) (i=1,2,3,4,5) \text{得}$$

$$\begin{cases} \beta_1+\beta_2=-2 \\ \beta_2+\beta_3=-2 \\ \beta_3+\beta_4=-2 \\ \beta_4+\beta_5=-2 \\ \beta_1+\beta_5=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1=-1 \\ \beta_2=-1 \\ \beta_3=-1 \\ \beta_4=-1 \\ \beta_5=-1 \end{cases} \Rightarrow C = \log\sum_{j=1}^{5} 2^{\beta_j} = \log\frac{5}{2} = 1.322 bit/symble$$

(2)

(3)

7.8 设有二个等概信息 A 和 B，对它们进行信道编码，分别以 w_1=000，w_2=111 表示。若二进制对称信道的正确传递概率 p`>>错误传递概率 p。试选择译码函数，并使平均错误概率 $P_e=P_{emin}$，写出 P_{emin} 的表达式。

解：

$$
[P]=\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccccc} 000 & 001 & 010 & 100 & 011 & 101 & 110 & 111 \end{array} \\
\begin{array}{c} 000 \\ 111 \end{array} & \begin{bmatrix} \underline{\overline{P}^3} & \underline{\overline{P}^2 P} & \underline{\overline{P}^2 P} & \underline{\overline{P}^2 P} & P^2\overline{P} & P^2\overline{P} & P^2\overline{P} & P^3 \\ P^3 & P^2\overline{P} & P^2\overline{P} & P^2\overline{P} & \underline{\overline{P}^2 P} & \underline{\overline{P}^2 P} & \underline{\overline{P}^2 P} & \underline{\overline{P}^3} \end{bmatrix}
\end{array}
$$

因为正确传递概率 p`>>错误传递概率 p，所以选择译码函数如下：

F(000)=F(010)=F(100) =F(001)=000

F(111)=F(011)=F(101) =F(110)=F(111)=111

$$P_e = P_{e\min} = \sum_{j=1}^{8}\sum_{i\neq *} P(w_i)P(b_j|w_i) = \frac{1}{2}(6\overline{P}^2P + 2\overline{P}^3) = 3\overline{P}^2P + \overline{P}^3$$

7.9 设离散无记忆信道的输入符号集 X：{0，1}，输出符号集 Y：{0，1，2}，信道矩阵为：

$$
[P]=\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}
\end{array}
$$

若某信源输出两个等概消息 s_1 和 s_2，现在用信道输入符号集中的符号对 s_1 和 s_2 进行信道编码，以 w_1=00 代表 s_1，w_2=11 代表 s_2。试写出能使平均错误译码概率 $P_e=P_{emin}$ 的译码规则，并计算 P_{emin}。

解：

由题意可得转移矩阵：

$$
[P]=\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccccccc} 00 & 01 & 02 & 10 & 11 & 12 & 20 & 21 & 22 \end{array} \\
\begin{array}{c} 00 \\ 11 \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{\overline{1}}{4} & \frac{\overline{1}}{8} & \frac{\overline{1}}{8} & \frac{\overline{1}}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{\overline{1}}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{\overline{1}}{4} & \frac{\overline{1}}{8} & \frac{1}{16} & \frac{\overline{1}}{8} & \frac{\overline{1}}{16} \end{bmatrix}
\end{array}
$$

$\therefore$ 取译码规则 $F(00)=F(01)=F(02)=F(10)=F(20)=00$

$$F(11)=F(12)=F(21)=F(22)=11$$

又输入等概 $\therefore P_e = P_{e\min} = \sum_{j=1}^{9}\sum_{r\neq **} P(w_i)P(b_j|w_i) = \frac{11}{32}$

7.10 设某信道的信道矩阵为：

$$[P]=\begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$$

其输入符号等概分布，在最大似然译码准则下，有三种不同的译码规则，试求之，并计算出它们对应的平均错误概率。

解：输入符号等概分布，在最大似然译码准则下，有三种不同的译码规则:

(1) $F(b_1)=\alpha_1$，$F(b_2)=\alpha_1$，$F(b_3)=\alpha_2$

(2) $F(b_1)=\alpha_1$，$F(b_2)=\alpha_2$，$F(b_3)=\alpha_2$

(3) $F(b_1)=\alpha_1$，$F(b_2)=\alpha_3$，$F(b_3)=\alpha_2$

$$\because P(b_2|a_1)=P(b_2|a_2)=P(b_2|a_3)$$

$$\therefore P_e=P_{e\min}=P_{e\min 1}=P_{e\min 2}=P_{e\min 3}=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i\neq **}P(a_i)P(b_j|a_i)=0.5667$$

第八章 限失真信源编码

8.1 设信源 X 的概率分布 P(X):{$p(\alpha_1)$, $p(\alpha_2)$, ⋯,$p(\alpha_r)$ },失真度为 d (α_i, β_j)≥0,其中(i=1,2,⋯,r;j=1,2,⋯,s).试证明:

$$\overline{D}_{\min}=\sum_{i=1}^{r}p(a_i)\{\min_j d(a_i,b_j)\}$$

并写出取得 $\overline{D}_{\min}$ 的试验信道的传输概率选取的原则,其中

$$\min_j d(a_i,b_j)=\min_j\{p(b_1/a_i),p(b_2/a_i),\cdots,p(b_S/a_i))\}$$

(证明详见:p468-p470)

8.2 设信源 X 的概率分布 P(X):{$p(\alpha_1)$, $p(\alpha_2)$, ⋯,$p(\alpha_r)$ },失真度为 d(α_i, β_j)≥0,其中(i=1,2,⋯,r;j=1,2,⋯,s).试证明:

$$\overline{D}_{\max}=\min_j\{\sum_{i=1}^{r}p(a_i)d(a_i,b_j)\}$$

并写出取得 $\overline{D}_{\max}$ 的试验信道传递概率的选取原则.

(证明详见:p477-p478)

8.5 设二元信源 X 的信源空间为:

$$[\mathrm{X}\bullet P]:\begin{cases}\mathrm{X} & 0 & 1\\ P(X) & \omega & 1-\omega\end{cases}$$

令 $\omega\leq 1/2$,设信道输出符号集 Y:{0,1},并选定汉明失真度.试求:

(1) D_{min},$R(D_{min})$;

(2) D_{max},$R(D_{max})$;

(3) 信源 X 在汉明失真度下的信息率失真函数 R(D),并画出 R(D)的曲线;

(4) 计算 R(1/8).

解：

(1)最小允许失真度：$D_{\min}=\sum_{i=1}^{2}p(a_i)\left\{\min_j d(a_i,b_j)\right\}=p(0)\bullet 0+p(1)\bullet 0=0$

则满足保真度$\overline{D}=D_{\min}=0$的信道矩阵

$$[P]=\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1\end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc}0 & 1\end{array} \\ \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\end{array}$$

$p(b_j/a_i)=0$或$p(b_j/a_i)=1(i=1,2)$,故此时$H(X/Y)=0$

$\therefore R(D_{\min})=R(0)=\min\{I(X;Y)\}=\min\{H(X)-H(X/Y)\}=H(X)=H(\omega)$

(2)$D_{\max}=\overline{D}'_{\min}=\min_j\left\{\sum_{i=1}^{2}p(a_i)d(a_i,b_j)\right\}=\min_j\{p(0)d(0,0)+p(1)d(1,0);p(0)d(0,1)+p(1)d(1,1)\}$

$\quad=\min_j\{p(1);p(0)\}=p(1)=\omega$

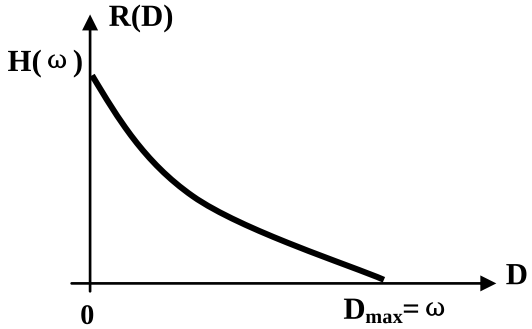
此时$I(X;Y)=0\ \therefore R(D_{\max})=R(\omega)=0$

(3)离散信源在汉明失真度下,$R(D)=H(X)-H(D)-D\log(r-1)$

$\therefore$对此信源$R(D)=H(X)-H(D)=H(\omega)-H(D)$

即$R(D)=\begin{cases}H(\omega)-H(D) & 0\le D<\omega\\ 0 & D\ge\omega\end{cases}$

由上，可得 R(D)曲线如下:



(4)R(1/8)=H(ω)-H(1/8)= H(ω)-0.5436 bit/symble

8.6 一个四进展等概信源

$$[U\bullet P]:\begin{cases}U & 0 & 1 & 2 & 3\\ P(U) & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{cases}$$

接收符号集 V:{0,1,2,3},其失真矩阵为:

$$[D]=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

(1) D_{min},R(D_{min});

(2) D_{max},R(D_{max});

(3) 试求 R(D), 并画出 R(D)的曲线(去 4 到 5 个点).

解:

(1)设输出符号集$Y:\{b_1,b_2\}$最小允许失真度：

$$D\min=\sum_{i=1}^{4}p(u_i)\left\{\min{}_j d(u_i,b_j)\right\}=p(0)\bullet 0+p(1)\bullet 0+p(2)\bullet 0+p(3)\bullet 0=0$$

则满足保真度$\overline{D}=D\min=0$的信道矩阵

$$[P]=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$p(b_j/u_i)=0$或$p(b_j/u_i)=1(i=1,2,3,4)$,故此时$H(U/Y)=0$

$$\therefore R(D_{\min})=R(0)=\min\left\{I(U;Y)\right\}=\min\left\{H(U)-H(U/Y)\right\}=H(U)=H(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})=2\text{bit}/\text{symble}$$

$$(2)D_{\max}=\overline{D}'_{\min}=\min_j\left\{\sum_{i=1}^{4}p(u_i)d(u_i,b_j)\right\}=\min_j\left\{\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right\}=\frac{3}{4}$$

此时U、Y相互独立,故$I(X;Y)=0\therefore R(D_{\max})=R(\omega)=0$

(3)离散信源在汉明失真度下,$R(D)=H(X)-H(D)-D\log(r-1)$

$\therefore$对此信源$R(D)=H(U)-H(D)-D\log 3=2-H(D)-D\log 3$

$$即R(D)=\begin{cases}2-H(D)-D\log 3 & 0\le D<\frac{3}{4}\\[2mm] 0 & D\ge\frac{3}{4}\end{cases}$$

可计算得:$D=0,R(0)=2\text{bit}/\text{symble};$

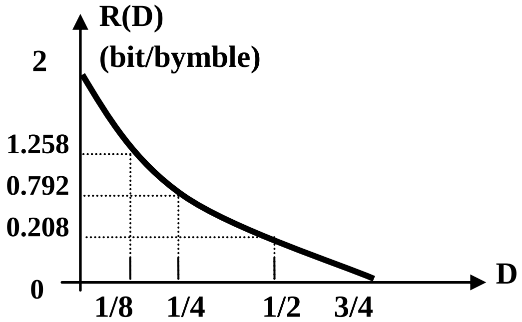
$$D=\frac{1}{8},R(\frac{1}{8})=1.258\text{bit}/\text{symble};$$

$$D=\frac{1}{4},R(\frac{1}{4})=0.792\text{bit}/\text{symble};$$

$$D=\frac{1}{2},R(\frac{1}{2})=0.208\text{bit}/\text{symble};$$

$$D=\frac{3}{4},R(\frac{3}{4})=0\text{bit}/\text{symble}$$

可得 R(D)曲线如下:



8.7 某二进制信源:

$$[\mathrm{U}\bullet P]:\begin{cases}\mathrm{U} & 0 & 1\\ P(U) & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\end{cases}$$

其失真矩阵为:

$$[D]=\begin{array}{c c}& \begin{matrix}0 & 1\end{matrix}\\ \begin{matrix}0\\1\end{matrix} & \begin{bmatrix}0 & a\\ a & 0\end{bmatrix}\end{array}$$

(1) 试求 D_{min},$R(D_{min})$;
(2) 试求 D_{max},$R(D_{max})$;
(3) 试求 R(D);

(1)设输出符号集$Y;\{b_1,b_2\}$

最小允许失真度：$D\min=\sum_{i=1}^{2}p(u_i)\{\min_j d(u_i,b_j)\}=p(0)\bullet 0+p(1)\bullet 0=0$

则满足保真度$\overline{D}=D\min=0$的信道矩阵

$$[P]=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$p(b_j/u_i)=0$或$p(b_j/u_i)=1(i=1,2)$,故此时$H(U/Y)=0$

$\therefore R(D_{\min})=R(0)=\min\{I(U;Y)\}=\min\{H(U)-H(U/Y)\}=H(U)=\log 2=1\text{bit/symble}$

(2)$D_{\max}=\overline{D}'_{\min}=\min_j\left\{\sum_{i=1}^{2}p(u_i)d(u_i,b_j)\right\}=\min_j\{p(0)d(0,0)+p(1)d(1,0);p(0)d(0,1)+p(1)d(1,1)\}$

$$=\min_j\{\mathrm{a}\cdot p(1);\mathrm{a}\cdot p(0)\}=\frac{\mathrm{a}}{2}$$

此时U、Y相互独立,$I(U;Y)=0\ \therefore R(D_{\max})=R(\frac{\mathrm{a}}{2})=0$

(3)平均失真度$\overline{D}=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}p(u_i)p(b_j/u_i)d(u_i,b_j)=a\sum_{i\neq j}p(a_i)p(b_j/a_i)$

$\because p_{ei}=\sum_{i\neq j}p(b_j/u_i)\ \therefore \overline{D}=a\sum_{i\neq j}p(u_i)p_{ei}=aP_e$,当失真度满足保真度准则时,$D=\overline{D}=aP_e$

由费诺不等式:$H(U/Y)\le H(P_e)+P_e\log(r-1)=H(\frac{D}{a})+\frac{D}{a}\log(r-1)$

$I(U;Y)=H(U)-H(U/Y)\ge H(U)-H(\frac{D}{a})-\frac{D}{a}\log(r-1)$

$\therefore$ 在D定义域中选取适当值可得$R(D)=\min\{I(U;Y)\}=H(U)-H(\frac{D}{d})-\frac{D}{d}\log(r-1)$

$\therefore$ 对此信源$R(D)=H(U)-H(\frac{D}{a})=1-H(\frac{D}{a})$

即$R(D)=\begin{cases}1-H(\dfrac{D}{d}) & 0\le D<\dfrac{a}{2}\\ 0 & D\ge\dfrac{a}{2}\end{cases}$

8.8 对于离散无记忆信源 U,其失真矩阵[D]中,如每行至少有一个元素为零,并每列最多只有一个元素为零,试证明 R(D)=H(U).

8.9 试证明对于离散无记忆信源,有 $R_N(D)=NR(D)$,其中 N 为任意正整数,$D>D_{min}$.

8.10 某二元信源 X 的信源空间为:

$$[X \bullet P]:\begin{cases} X & a_1 \quad a_2 \\ P(X) & \omega \quad 1-\omega \end{cases}$$

其中 ω<1/2,其失真矩阵为:

$$[D]=\begin{bmatrix} 0 & d \\ d & 0 \end{bmatrix}$$

(1) 试求 D_{min},$R(D_{min})$;

(2) 试求 D_{max},$R(D_{max})$;

(3) 试求 R(D);

(4) 写出取得 R(D)的试验信道的各传输概率;

(5) 当 d=1 时,写出与试验信道相对应得反向试验信道的信道矩阵.

解:

(1)最小允许失真度：$D\min=\sum_{i=1}^{2}p(a_i)\{\min_j d(a_i,b_j)\}=p(0)\bullet 0+p(1)\bullet 0=0$

则满足保真度$\overline{D}=D\min=0$的信道矩阵

$$[P]=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$p(b_j/a_i)=0$或$p(b_j/a_i)=1(i=1,2)$,故此时$H(X/Y)=0$

$\therefore R(D_{\min})=R(0)=\min\{I(X;Y)\}=\min\{H(X)-H(X/Y)\}=H(X)=H(\omega)$

(2)$D_{\max}=\overline{D}'_{\min}=\min_j\left\{\sum_{i=1}^{2}p(a_i)d(a_i,b_j)\right\}=\min_j\{p(0)d(0,0)+p(1)d(1,0);p(0)d(0,1)+p(1)d(1,1)\}$

$$=\min_j\{\mathrm{d}\cdot p(1);\mathrm{d}\cdot p(0)\}=\mathrm{d}\cdot p(1)=\mathrm{d}\omega$$

此时X、Y相互独立,$I(X;Y)=0\ \therefore R(D_{\max})=R(\omega)=0$

(3)平均失真度$\overline{D}=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}p(a_i)p(b_j/a_i)d(a_i,b_j)=d\sum_{i\neq j}p(a_i)p(b_j/a_i)$

$\because p_{ei}=\sum_{i\neq j}p(b_j/a_i)\ \therefore\overline{D}=d\sum_{i\neq j}p(a_i)p_{ei}=dP_e$,当失真度满足保真度准则时,$D=\overline{D}=dP_e$

由费诺不等式:$H(X/Y)\le H(P_e)+P_e\log(r-1)=H(\frac{D}{d})+\frac{D}{d}\log(r-1)$

$I(X;Y)=H(X)-H(X/Y)\ge H(X)-H(\frac{D}{d})-\frac{D}{d}\log(r-1)$

$\therefore$在D定义域中选取适当值可得$R(D)=\min\{I(X;Y)\}=H(X)-H(\frac{D}{d})-\frac{D}{d}\log(r-1)$

$\therefore$对此信源$R(D)=H(\omega)-H(\frac{D}{d})$

即$R(D)=\begin{cases}H(\omega)-H(\frac{D}{d}) & 0\le D<d\omega\\ 0 & D\ge d\omega\end{cases}$

(4)$I(X;Y)$取得$R(D)$时的试验信道的信道矩阵为:

$$[P_X]=\begin{bmatrix}\dfrac{\omega d^2-Dd-D\omega d+D^2}{\omega d^2-2D\omega d} & \dfrac{Dd-D\omega d-D^2}{\omega d^2-2D\omega d}\\ \dfrac{Dd\omega-D^2}{d^2-\omega d^2-2Dd+2Dd\omega} & \dfrac{d^2-\omega d^2-2Dd+Dd\omega+D^2}{d^2-\omega d^2-2Dd+2Dd\omega}\end{bmatrix}$$

检验:

$$p(y_1)=\sum_{i=1}^{2}p(x_i)p(y_1/x_i)=\omega\frac{\omega d^2-Dd-D\omega d+D^2}{\omega d^2-2D\omega d}+(1-\omega)\frac{Dd\omega-D^2}{d^2-\omega d^2-2Dd+2Dd\omega}=\frac{d\omega-D}{d-2D}$$

$$p(y_2)=\sum_{i=1}^{2}p(x_i)p(y_2/x_i)=\omega D+(1-\omega)(1-D)=\frac{d-d\omega-D}{d-2D}$$

$$p(x_1/y_1)=\frac{p(x_1)p(y_1/x_1)}{p(y_1)}=\frac{\omega\dfrac{\omega d^2-Dd-D\omega d+D^2}{\omega d^2-2D\omega d}}{\dfrac{d\omega-D}{d-2D}}=1-\frac{D}{d}$$

$$p(x_2/y_1)=\frac{p(x_2)p(y_1/x_2)}{p(y_1)}=\frac{(1-\omega)\dfrac{Dd\omega-D^2}{d^2-\omega d^2-2Dd+2Dd\omega}}{\dfrac{d\omega-D}{d-2D}}=\frac{D}{d}$$

$$p(x_1/y_2)=\frac{p(x_1)p(y_2/x_1)}{p(y_2)}=\frac{\omega\dfrac{Dd-D\omega d-D^2}{\omega d^2-2D\omega d}}{\dfrac{d-d\omega-D}{d-2D}}=\frac{D}{d}$$

$$p(x_2/y_2)=\frac{p(x_2)p(y_2/x_2)}{p(y_2)}=\frac{(1-\omega)\dfrac{d^2-\omega d^2-2Dd+Dd\omega+D^2}{d^2-\omega d^2-2Dd+2Dd\omega}}{\dfrac{d-d\omega-D}{d-2D}}=1-\frac{D}{d}$$

$$\begin{aligned}H(X/Y)&=-\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}p(b_j)p(a_i/b_j)\log p(a_i/b_j)\\&=-[p(y_1)p(x_1/y_1)\log p(x_1/y_1)+p(y_1)p(x_2/y_1)\log p(x_2/y_1)+\\&\quad p(y_2)p(x_1/y_2)\log p(x_1/y_2)+p(y_2)p(x_2/y_2)\log p(x_2/y_2)]\\&=-[p(y_1)(1-\frac{D}{d})\log(1-\frac{D}{d})+p(y_1)\frac{D}{d}\log\frac{D}{d}+p(y_2)(1-\frac{D}{d})\log(1-\frac{D}{d})+p(y_2)\frac{D}{d}\log\frac{D}{d}]\\&=-[p(y_1)+p(y_2)]\cdot[(1-\frac{D}{d})\log(1-\frac{D}{d})+\frac{D}{d}\log\frac{D}{d}]\\&=H(\frac{D}{d})\end{aligned}$$

$$\therefore I(X;Y)=H(X)-H(X/Y)=H(\omega)-H(\frac{D}{d})$$

实际上是先根据参数法或者直接按照课本$p487$求出"反向信道"矩阵,再由反推正向信道传输矩阵.

(5)由上面,$d=1$时与试验信道相对应的反向试验的信道矩阵为:

$$[P_Y]=\begin{bmatrix}1-\frac{D}{d} & \frac{D}{d}\\ \frac{D}{d} & 1-\frac{D}{d}\end{bmatrix}$$

8.14 设离散无记忆信源:

$$[\mathrm{U}\bullet P]:\begin{cases}\mathrm{U} & u_1 & \mathrm{u}_2 & \mathrm{u}_3\\ P(U) & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{cases}$$

其失真失真度为汉明失真度.

(1) 试求 D_{min},$R(D_{min})$,并写出相应试验信道的信道矩阵;

(2) 试求 D_{max},$R(D_{max})$, 并写出相应试验信道的信道矩阵;

(3) 若允许平均失真度 D=1/8,试问信源[U・P]的每一个信源符号平均最少由几个二进制码符号表示?

解:

(1)最小允许失真度:$D_{\min}=\sum_{i=1}^{3}p(u_i)\left\{\min{}_j d(u_i,b_j)\right\}=p(u_1)\bullet 0+p(u_2)\bullet 0++p(u_3)\bullet 0=0$

则满足保真度$\overline{D}=D_{\min}=0$的信道矩阵

$$[P]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$p(b_j/a_i)=0$或$p(b_j/u_i)=1(i=1,2,3)$,设输出符号集合Y,则此时$H(U/Y)=0$

$\therefore R(D_{\min})=R(0)=\min\{I(U;Y)\}=\min\{H(U)-H(U/Y)\}=H(U)=\log 3=1.585\mathrm{bit/symble}$

(2)$D_{\max}=\overline{D}'_{\min}=\min_j\left\{\sum_{i=1}^{3}p(a_i)d(a_i,b_j)\right\}=\min_j\{p(u_1));p(u_2);p(u_3)\}=\min_j\left\{\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right\}=\frac{1}{3}$

此时$I(U;Y)=0\ \therefore R(D_{\max})=R(\frac{1}{3})=0$

(3)离散信源在汉明失真度下,$R(D)=H(X)-H(D)-D\log(r-1)$

$\therefore$ 对此信源$R(D)=H(U)-H(D)-D\log 2=\log 3-H(D)-D$

$$即R(D)=\begin{cases}\log 3-H(D)-D & 0\le D<\frac{1}{3}\\ 0 & D\ge\frac{1}{3}\end{cases}$$

$D=\frac{1}{8}$时,$R(\frac{1}{8})=\log 3-H(\frac{1}{8})-\frac{1}{8}=0.9164\mathrm{bit/symble}$

则信源的每一个符号平均最少可以用0.9164个二进制码符号来表示.

8.15 设二元信源 X 的信源空间为:

$$[\mathrm{U}\bullet P]:\begin{cases}\mathrm{U} & \mathrm{u}_1 & \mathrm{u}_2\\ P(U) & \omega & 1\text{-}\omega\end{cases}$$

(ω<1/2),其失真度为汉明失真度.

若允许平均失真度 D=ω/2,试问每一个信源符号平均最少需要几个二进制码符号表示?

解:

离散信源在汉明失真度下, $R(D)=H(X)-H(D)-D\log(r-1)$

$\therefore$ 对此信源 $R(D)=H(U)-H(D)=H(\omega)-H(D)$

即 $R(D)=\begin{cases} H(\omega)-H(D) & 0\le D<\omega \\ 0 & D\ge\omega \end{cases}$

$\therefore D=\frac{1}{2}\omega$ 时

$$R(\frac{1}{2}\omega)=H(\omega)-H(\frac{1}{2}\omega)=-\frac{1}{2}\omega\log\omega-(1-\omega)\log(1-\omega)+\frac{1}{2}(2-\omega)\log(2-\omega)-\frac{1}{2}(3-\omega)$$

$\therefore$ 每个信源符号平均最少需要 $H(\omega)-H(\frac{1}{2}\omega)$ 个二进制码符号来表示.