2023.10.18 第九次作业

卢科政　夏业志

2023 年 11 月 8 日

题目 1. (课本 2.21) 如图所示，在内外半径为 a,b 的球形电容器的两个极板之间的区域中，一半充满绝对介电常数为 ϵ_1，另一半充满绝对介电常数为 ϵ_2 的线性均匀介质。内外极板自由电荷带电量分别为 +Q 和-Q，求：(1) 两种介质中的电场强度;(2) 系统的电容。

解答. (1) 根据高斯定理 $\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_0$，取高斯面为半径 r 的同心球面:

$$D_1 \cdot 2\pi r^2 + D_2 \cdot 2\pi r^2 = Q$$

由于两极板的电势差相同，$E_1 = E_2$，根据 $D = \epsilon E$ 得到：

$$E = \frac{Q}{2\pi r^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)}$$

$\vec{E}$ 的方向是 $\vec{e}_r$ 方向。
(2) 两极板间的电势差为:

$$U = \int_a^b E dr = \frac{Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)}(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})$$

则系统的电容为:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)ab}{b - a}$$

题目 2. (课本 2.22) 如图所示 (图在课本上)，以导体球外充满两半无限电介质，介电常数分别为 ϵ_1 和 ϵ_2，介质界面为通过球心的无限平面。设导体球半径为 R，总电荷为 q，求空间电场分布和导体球表面的自由面电荷分布。

解答. 由高斯定理有：

$$2\pi r^2 \epsilon_1 E + 2\pi r^2 \epsilon_2 E = q \tag{1}$$

可得：

$$E = \frac{q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)r^2} \tag{2}$$

根据定义有：

$$D_1 = \epsilon_1 E = \frac{\epsilon_1 q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)r^2} \tag{3}$$

$$D_2 = \epsilon_2 E = \frac{\epsilon_2 q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)r^2} \tag{4}$$

$$\tag{5}$$

根据电位移矢量的物理意义可知：

$$\sigma_1 = D_1(a) = \frac{\epsilon_1 q}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)a^2} \tag{6}$$

$$\sigma_2 = D_2(a) = \frac{\epsilon_2 q}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)a^2} \tag{7}$$

$$\tag{8}$$

题目 3. (课本 2.27) 高压电缆的耐压问题。如课本图所示的电缆，半径为 a 的金属圆柱外包两层同轴的均匀介质层。其介电常数为 ϵ_1 和 ϵ_2，$\epsilon_2 = \epsilon_1/2$，两层介质的交界面半径为 b，整个结构被内径为 c 的金属屏蔽网包围。设 a 为已知，要使两层介质中的击穿场强都相等，且在两层介质的交界面上出现场强的极值，应该怎么选 b 和 c?

解答. 对于无限长圆柱，假设线电荷密度为 λ，则电场大小为 $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r}$，所以两个介质中最大场强分别为：

$$E_{1max} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_1 a} \tag{9}$$

$$E_{2max} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_2 b} \tag{10}$$

$$\tag{11}$$

由题目条件击穿场强相同可知 $E_{1max} = E_{2max}$，由此可得 $b = 2a$。

金属圆柱与金属屏蔽网之间的电势差为：

$$\Delta U = \int_a^b \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_1 r}dr + \int_b^c \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_2 r}dr = \frac{\lambda}{2\pi}(\frac{1}{\epsilon_1}\ln\frac{b}{a} + \frac{1}{\epsilon_2}\ln\frac{c}{b}) \tag{12}$$

可得 $\lambda = \frac{2\pi\Delta U}{\frac{1}{\epsilon_1}\ln 2 + \frac{1}{\epsilon_2}\ln\frac{c}{b}}$，则在交界面上的场强为：

$$E_{2max} = \frac{\Delta U}{\frac{1}{\epsilon_1}\ln 2 + \frac{1}{\epsilon_2}\ln\frac{c}{b}}\frac{1}{\epsilon_2 b} \tag{13}$$

场强最大时，上式的分母取最小值，即：

$$\frac{d}{db}(\frac{b}{\epsilon_1}\ln 2 + \frac{b}{\epsilon_2}\ln\frac{c}{b}) = 0 \tag{14}$$

可得：

$$c = \sqrt{2}ea \tag{15}$$

题目 4. (课本 2.29) 已知一个半径为 $1cm$ 的绝缘肥皂泡的电势为 $100V$，如果它收缩成半径为 $1mm$ 的液滴，它的静电能改变为多少?

解答. 先算绝缘肥皂泡的电荷量，肥皂泡所带电荷量为：

$$Q = 4\pi\epsilon_0 r_1 U = 1.11\times 10^{-10}C \tag{16}$$

此时肥皂泡的静电能为:

$$W_1 = \frac{1}{2}QU = 5.56 \times 10^{-9}J \tag{17}$$

肥皂泡收缩后，带电量不变，此时肥皂泡的静电能为:

$$W_2 = \frac{1}{2}QU = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 r_2} = 5.56 \times 10^{-8} \tag{18}$$

变化的静电能为:

$$\Delta W = W_2 - W_1 = 5 \times 10^{-8}J \tag{19}$$

静电能增大了 $5 \times 10^{-8}J$。

题目 5. (课本 2.31) 半径为 R 的雨滴 (假设雨滴是导体)，带有电量 Q，今将它打破成两个完全相同的雨滴，并分开到很远，静电能改变多少? 如果分成 n 个完全相同的小雨滴，最终分散到无限远处，则静电能又改变多少?

解答. 先计算一个雨滴的静电能:

$$W_0 = \frac{1}{2}UQ = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

(1) 当分裂成 2 个雨滴后，每个雨滴的电量变为 $\frac{1}{2}Q$，半径变为 $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}R$，这时系统的静电能变为:

$$W_2 = 2 \cdot \frac{(\frac{1}{2}Q)^2}{8\pi\epsilon_0(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}R)} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

静电能改变的大小为:

$$\Delta W = W_2 - W_0 = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}(\frac{1}{\sqrt[3]{4}} - 1)$$

(2) 当分裂成 n 个雨滴后，每个雨滴的电量变为 $\frac{1}{n}Q$，半径变为 $\frac{1}{\sqrt[3]{n}}R$，这时系统的静电能变为:

$$W_n = n \cdot \frac{(\frac{1}{n}Q)^2}{8\pi\epsilon_0(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}R)} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$$

静电能改变的大小为:

$$\Delta W = W_n - W_0 = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} - 1)$$