信息论第三次小测解答

中国科学技术大学《信息论 A》006125.01 班助教组

2024 年 4 月 1 日

第 1 题

Compare $I(X;Y)$ *and* $I(f(X),g(Y))$ *when* f *and* g *are mapping.*

解:

$$
\begin{aligned}
&I(X;Y)-I(f(X);g(Y))\\
&=H(X)+H(Y)-H(X,Y)-H(f(X))-H(g(Y))+H(f(X),g(Y))\\
&=H(X,f(X))+H(Y,g(Y))-H(X,Y,f(X),g(Y))-H(f(X))-H(g(Y))+H(f(X),g(Y))\\
&=H(X|f(X))+H(Y|g(Y))-H(X,Y|f(X),g(Y))\\
&\geq H(X|f(X))+H(Y|g(Y))-H(X|f(X),g(Y))-H(Y|f(X),g(Y))\\
&\geq H(X|f(X))+H(Y|g(Y))-H(X|f(X))-H(Y|g(Y))\\
&=0
\end{aligned}
$$

第一个不等号由 $H(X,Y)\leq H(X)+H(Y)$ 保证，第二个不等号由条件减少熵保证。

另一种方法：$Y\rightarrow X\rightarrow f(X)$，$f(X)\rightarrow Y\rightarrow g(Y)$ 形成两个马尔可夫链，根据数据处理不等式得：$I(X;Y)\geq I(f(X);Y)\geq I(f(X);g(Y))$。 □

第 2 题

Compare $D(P_X||Q_X)$ *and* $D(P_{XY}||Q_{XY})$，其中 P_X 是 P_{XY} 的边缘分布，Q_X 是 Q_{XY} 的边缘分布。

解:

$$D(P_{XY}||Q_{XY})=\sum_{x,y}p(x,y)\log\frac{p(x,y)}{q(x,y)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_x \sum_y p(x,y) \log \frac{p(x,y)}{q(x,y)} \\
&\geq \sum_x (\sum_y p(x,y)) \log \frac{(\sum_y p(x,y))}{(\sum_y q(x,y))} \\
&= \sum_x (p(x)) \log \frac{p(x)}{q(x)} \\
&= D(P_X || Q_X)
\end{aligned}
$$

其中不等号由对数和不等式保证。 □

for nonnegative numbers $\{a_i\}_{i=1,\dots,n}$ and $\{b_i\}_{i=1,\dots,n}$,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \log \frac{a_i}{b_i} \geq a \log \frac{a}{b},$$

where $a = \sum_{i=1}^{n} a_i$, $b = \sum_{i=1}^{n} b_i$, with equality holding if and only if there exists c such that $a_i = cb_i$ for all i.

证明: 用 $p(i) = a_i/a$ 和 $q(i) = b_i/b$ 定义 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 上的概率函数 p 和 q. 这样

$$0 \leq D(p\|q) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a} \log_2 \left(\frac{a_i/a}{b_i/b}\right) = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^{n} a_i \log_2 \left(\frac{a_i}{b_i}\right) + \log_2 \left(\frac{b}{a}\right), \tag{1}$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \log_2 \left(\frac{a_i}{b_i}\right) \geq a \log_2 \left(\frac{a}{b}\right). \tag{2}$$

□

第 3 题

Show that $H(X,Y) + H(Y,Z) + H(Z,X) \geq 2H(X,Y,Z)$

解: 先证明:

$$
\begin{aligned}
H(X,Y) + H(Y,Z) &\geq H(X,Y,Z) + H(Y) \\
\Leftrightarrow H(X,Y) - H(Y) &\geq H(X,Y,Z) - H(Y,Z) \\
\Leftrightarrow H(X|Y) &\geq H(X|Y,Z)
\end{aligned}
$$

由于条件减少熵，命题获证。

$$H(X,Y) + H(Y,Z) \geq H(X,Y,Z) + H(Y) \tag{3}$$

$$H(Y,Z) + H(Z,X) \geq H(X,Y,Z) + H(Z) \tag{4}$$
$$H(Z,X) + H(X,Y) \geq H(X,Y,Z) + H(X) \tag{5}$$

从而：

$$\begin{aligned} 2(H(X,Y) + H(Y,Z) + H(Z,X)) &\geq 3H(X,Y,Z) + H(X) + H(Y) + H(Z) \\ &\geq 3H(X,Y,Z) + H(X,Y,Z) = 4H(X,Y,Z). \end{aligned}$$

两边除以 2，命题获证。 $\square$