中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

电　磁　学
(Electromagnetism)

第五章 介质中的静磁场2

§ 5.3 介质的磁化规律

一、磁介质性质介绍

1.各向同性和各向异性

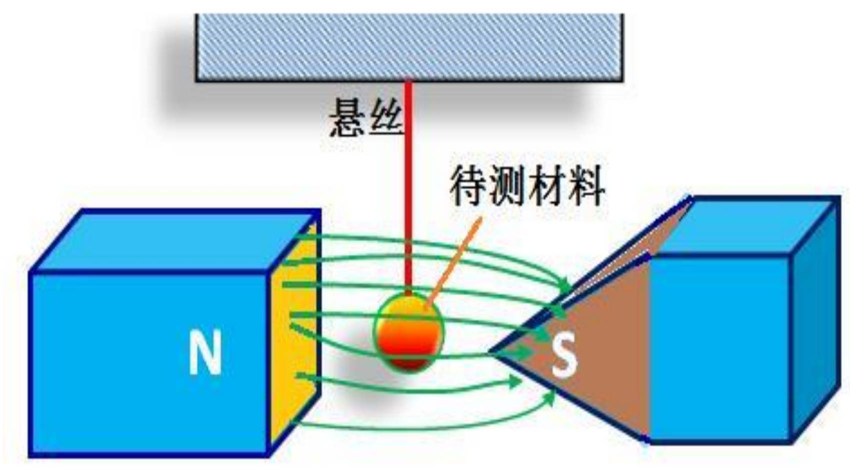
- 各向同性磁介质：　$\vec{M} \ // \vec{H}$

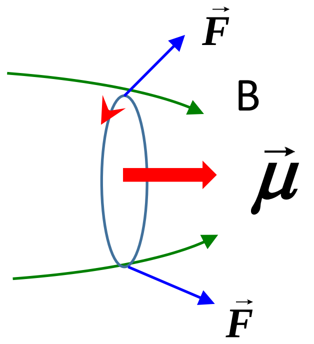
$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad \left(\vec{M}\text{单位体积的磁矩，} \ \chi_m\text{--磁化率}\right)$$

- 各向异性磁介质：**M和H的方向不一样**

各向异性磁介质的磁化率为张量.

2. 顺磁和抗磁





小线圈非均匀磁场中的梯度力：

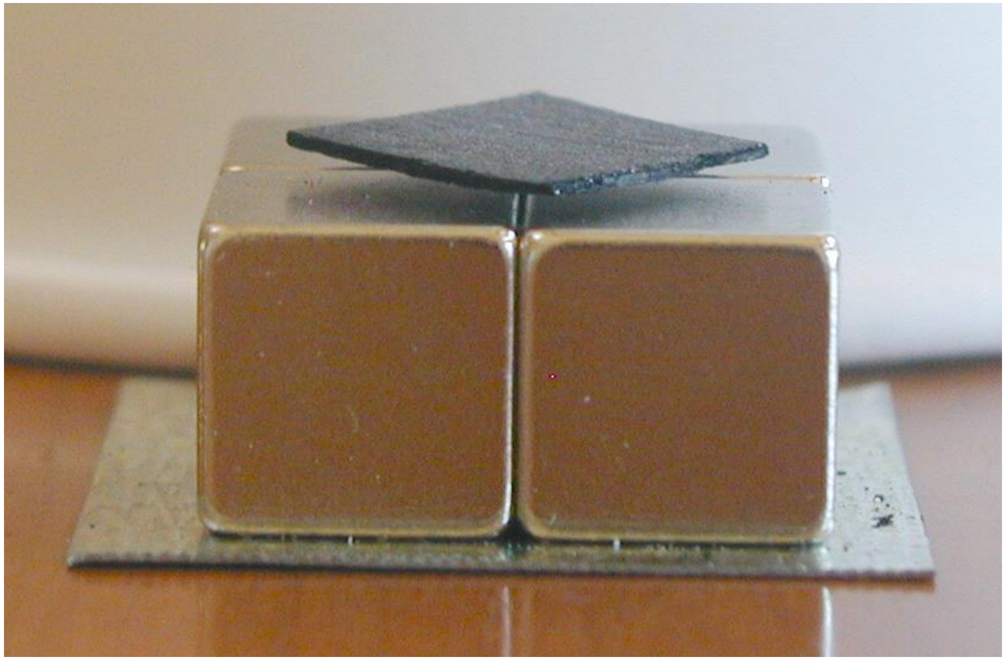
$$\vec{F}_{梯} = (\vec{\mu}\cdot\nabla)\ \vec{B}$$

顺磁：$\vec{\mathbf{M}}$平行于$\vec{\mathbf{B}}$

逆磁：$\vec{\mathbf{M}}$反平行于$\vec{\mathbf{B}}$

- **顺磁材料：介质被S极吸引**
- **抗磁材料：介质被S极排斥**

在自然界中，**大多数物质都具有抗磁性**，特别是有机材料和生物材料中，绝大部分为抗磁性的。



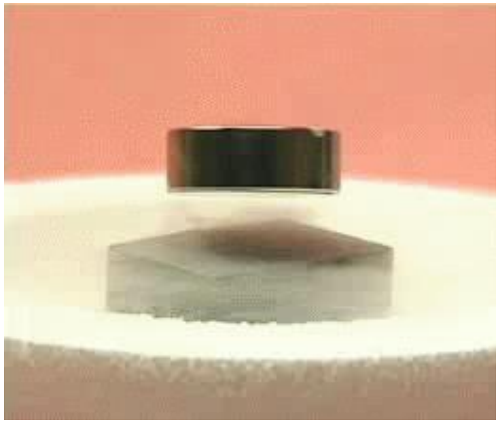
热解碳因抗磁特性“悬浮”

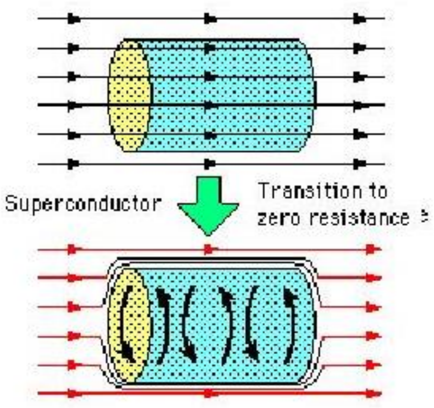
超导材料完全抗磁性

- 1911年Kamerling Onnes 发现超导电性

- 1933年迈斯纳和奥森费尔德发现，超导体放入磁场中时，超导体内的磁场完全为0，超导体外磁感应曲线弯曲而绕过超导体，即完全抗磁性。

- 在外磁场中超导体的表面产生感应的超导电流，它的附加磁感应强度将体内的磁感应强度完全抵消，但由于无电阻，表面超导电流将一直持续下去。一般超导表面磁场透入深度为10^{-4}～10^{-6} cm。

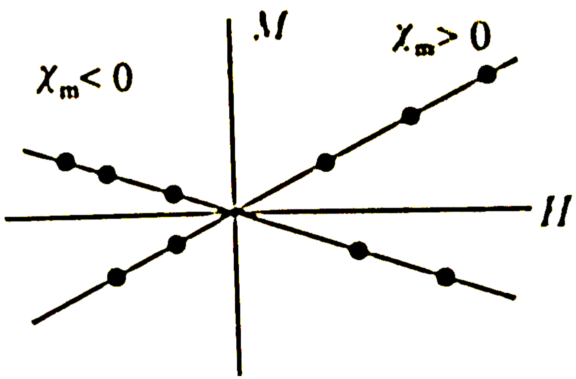


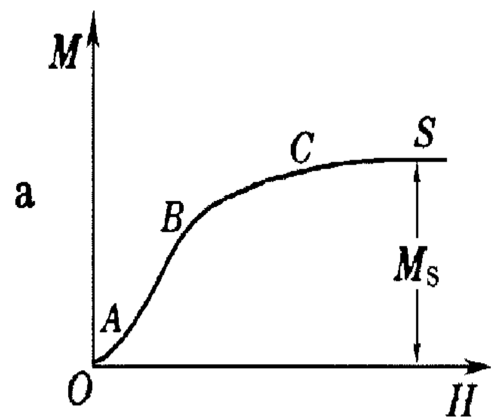


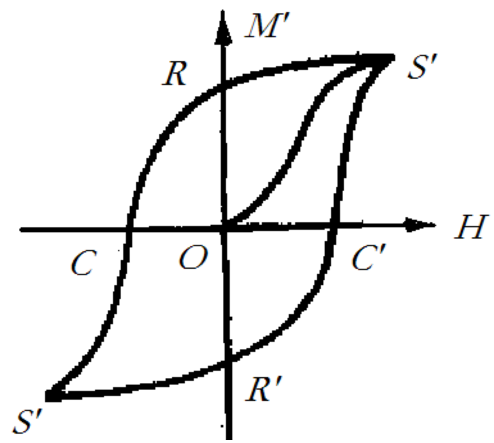
（3）线性与非线性

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

- 线性介质：χ_m是和磁场无关的常数
- 非线性介质：χ_m和磁场相关，是磁场的函数







二、磁化规律

- 磁化规律是磁场和物质相互作用的宏观描述，数学表示为*M*和*B*的函数关系
- 磁化规律决定于介质自身的电磁性质，一般通过实验测定
- 由于历史的原因，人们常用*M*和*H*之间的关系来表达介质的磁化规律

$$\boxed{\vec{M} = \vec{M}\left(\vec{H}\right)}$$ 磁化规律

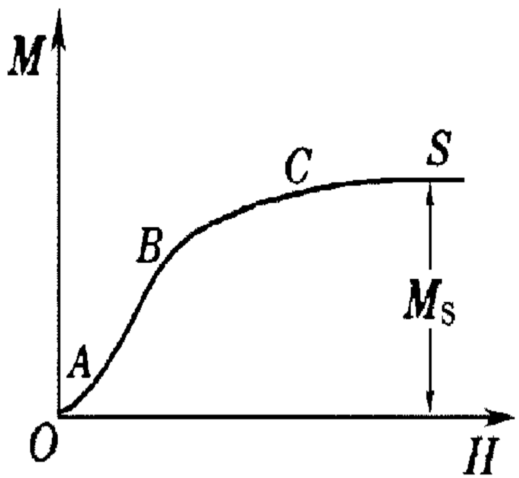
$$\vec{\mathrm{H}} = \frac{\vec{\mathrm{B}}}{\mu_0} - \vec{M} \rightarrow \boxed{\vec{B} = \vec{B}\left(\vec{\mathrm{H}}\right)}$$ 磁介质性能方程

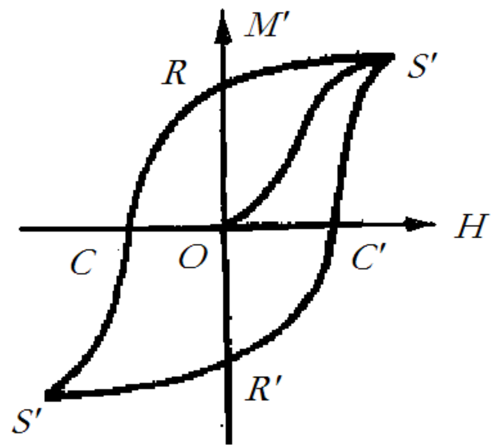
线性均匀各向同性介质： $\vec{B} = \mu\vec{\mathrm{H}}$

三、磁化曲线

磁化强度与磁场强度的关系曲线，通常通过实验测量获得。

a





四、磁介质分类 （只讨论均匀线性各项同性介质）

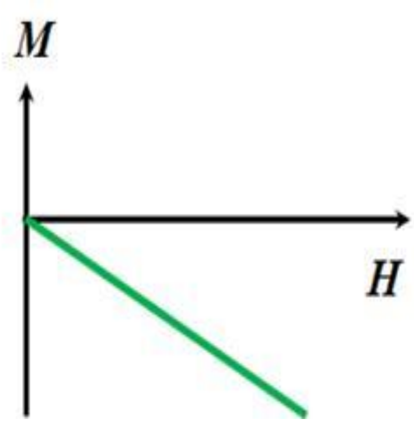
1. 弱磁质（磁化率绝对值远小于1）

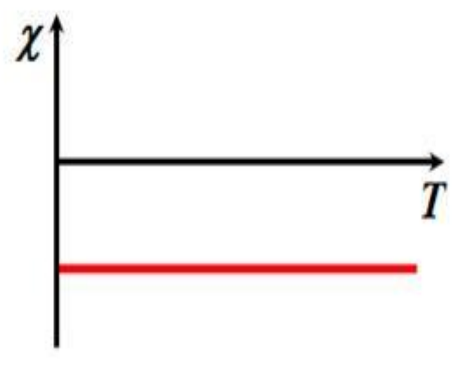
(1)抗磁质: $\chi_m < 0, \mu < \mu_0$ 。

(磁化率的绝对值约在 $10^{-5} \sim 10^{-7}$ 之间)

■抗磁质：铋、铜、银…

■抗磁质的磁化率为负，通常不随温度变化而改变。

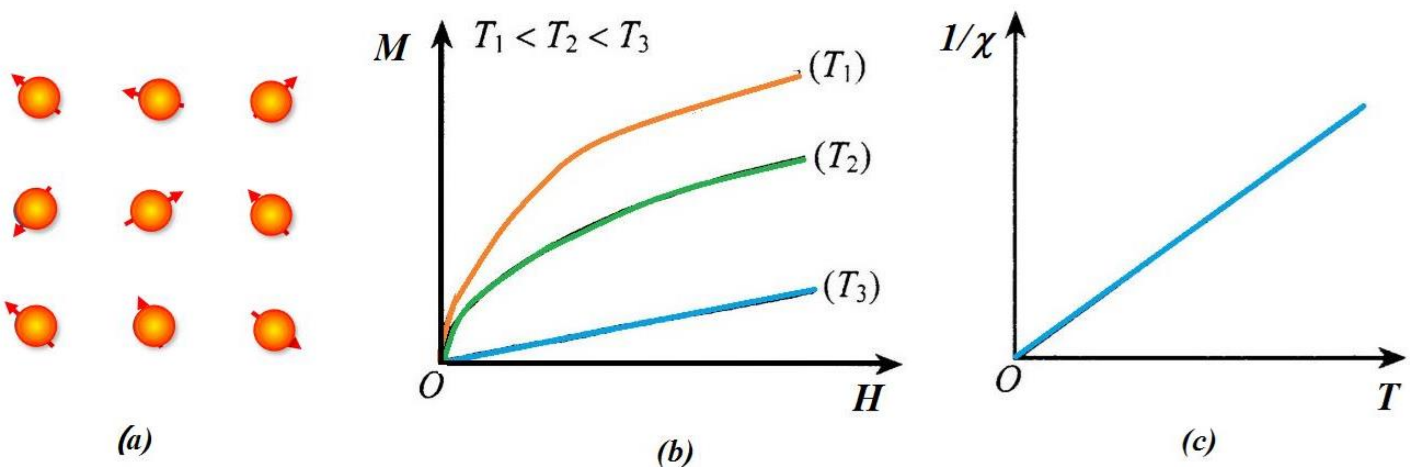




(2)顺磁质：$\chi_m>0,\ \mu>\mu_0$ （χ_m： $10^{-4}\sim10^{-5}$）

■顺磁性: 锰,铬,锂, 钠等

■顺磁质的磁化率一般随温度T降低而增大.



一般顺磁质的磁化率和温度的关系

- 居里定律： $$\boxed{\chi_m = \frac{C}{T}}$$

- 居里-外斯定律： $$\boxed{\chi_m = \frac{C}{T - T_C}}$$

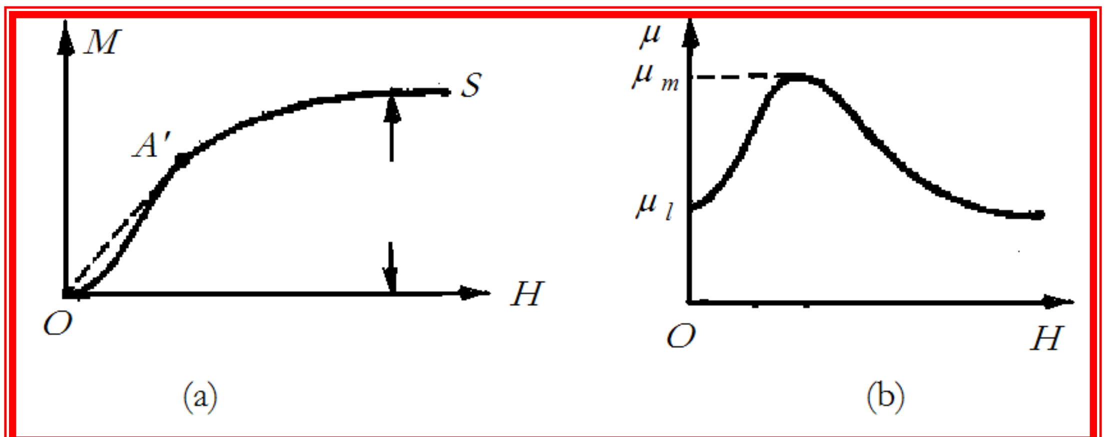
C（居里常数），T_c（顺磁居里温度）和材料性质有关的常数，可以通过实验测定。

2. 铁磁质

■ 铁磁质：铁、钴、镍(过渡族)，

钆、镝、钬（稀土族）…

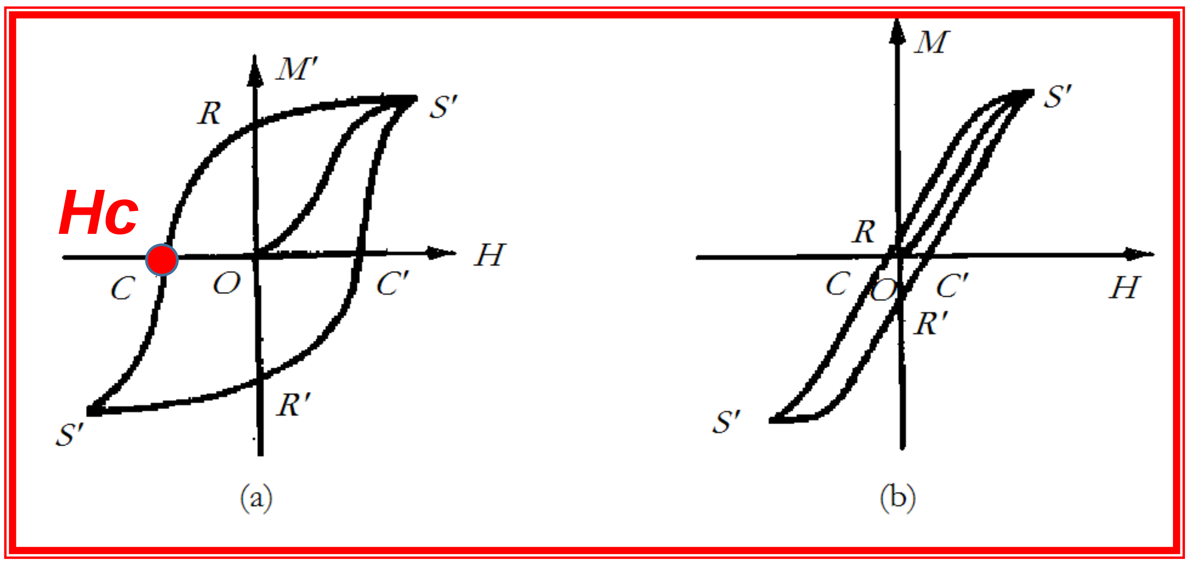
■ *M*的值相当大，*M*和*H*间的函数关系复杂，与磁化的历史有关。



(a)起始磁化曲线　　(b)μ-H 曲线

磁滞回线

- 闭合磁化曲线$SRCS'R'C'S$称为**磁滞回线**。
- 按照矫顽力H_c的大小，可把铁磁质划分为**硬磁材料**和**软磁材料**两大类。前者矫顽力大，磁滞回线较宽；后者矫顽力小，磁滞回线较窄。



■硬磁材料在外加磁场为零时仍保留较强的剩余磁化度，且不易退磁，适合于制作永久磁铁；而软磁材料则作为高导磁材料广泛应用于各种电子和电工设备之中。

■人造铁氧体，例如钡铁氧体、锶铁氧体等属于硬磁材料，锰锌铁氧体（Mn、Zn、Fe_2O_4按一定比例制成的晶体）、镍锌铁氧体等属于软磁材料。

■典型软磁材料，如纯铁、硅钢、坡莫合金（Ni/Fe合金）等，其最大的相对磁导率μ / μ_0 和磁化率χ_m位于之 10^3~10^5间，甚至更大；

典型的硬磁材料的剩余磁感应强度B_R，如碳钢为1 T，钕铁硼合金（Nd15B8Fe77）为1.23T，它们都具有强磁性。

■将铁磁质加热到高于其居里温度 T_c（或称居里点），其铁磁性消失，转变为顺磁性，磁化率与温度关系满足居里—外斯定律：

$$\chi_m = \frac{c}{T - T_c},$$

式中c为居里常数，T_c 为居里温度，二者通过实验确定。

铁、钴、镍的居里温度分别为1040 K、1395 K、628 K。

https://3g.163.com/v/video/VC5K6CVFN.html

§5.4 边值关系

一、边值关系

- **问题**

在实际问题中会碰到电流面模型、磁介质界面的情况，在这种界面两侧磁场将会出现间断

- **边值关系**

从静磁场的高斯定理和安培环路定理出发，磁场在磁介质界面上应满足的“交接”关系

1. 介质中的磁场方程

$$\begin{cases} \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_0 \\ \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

积分形式
边界突变时适用

微分形式
边界突变时不适用

介质性能方程:

$$\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}$$

均匀线性各向同性介质:

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$$

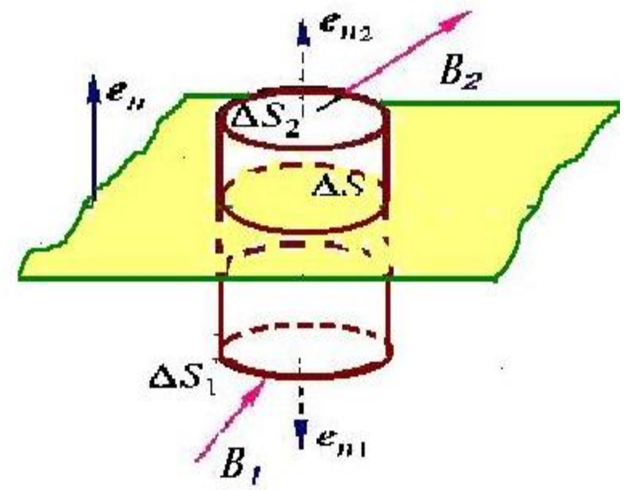
2. B的法向关系

作高斯面 $$\oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = (\iint_{S_1} + \iint_{S_2} + \iint_{S_3})\vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$

即:

$$-\vec{B}_1\cdot\vec{n}\Delta S + \vec{B}_2\cdot\vec{n}\Delta S = 0$$

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1)\cdot\vec{n} = 0$$



or $$B_{2n} = B_{1n}$$ 界面两侧的B的法向连续

3. H的切向关系

作一矩形边界

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \left(\int_a^b + \int_b^c + \int_c^d + \int_d^a\right)\vec{H}\cdot d\vec{l}$$

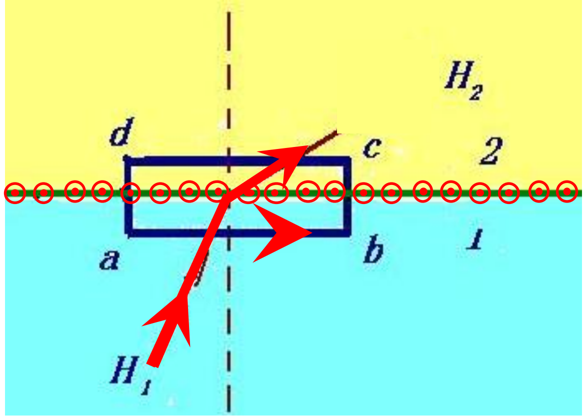
$$= -H_{2t}\Delta l + H_{1t}\Delta l = \sum I_0$$

$$I_0 = i_0 \Delta l$$

介质界面上

$$H_{1t} - H_{2t} = i_0$$

$$\vec{\boldsymbol{i}}_0 = \vec{\boldsymbol{n}} \times (\vec{\boldsymbol{H}}_2 - \vec{\boldsymbol{H}}_1),$$



若 $i_0 = 0$ $\quad \vec{n}\times(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0$

没有传导电流的界面两侧H的切向连续

界面电流关系

传导电流：

$$\vec{i}_0 = \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)$$

$$i_0 = H_{1t} - H_{2t}$$

磁化电流：

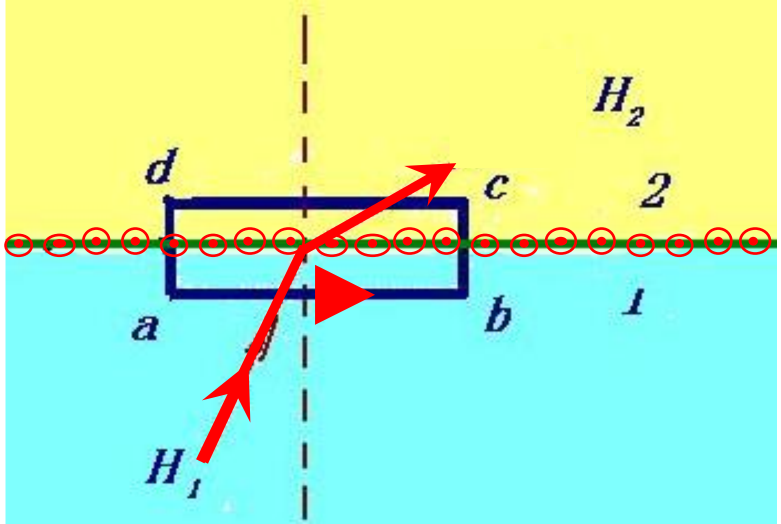
$$\vec{i}' = \vec{n} \times (\vec{M}_2 - \vec{M}_1).$$

$$i' = M_{1t} - M_{2t}$$

总电流：

$$\mu_0 \vec{i} = \vec{n} \times (\vec{B}_2 - \vec{B}_1).$$

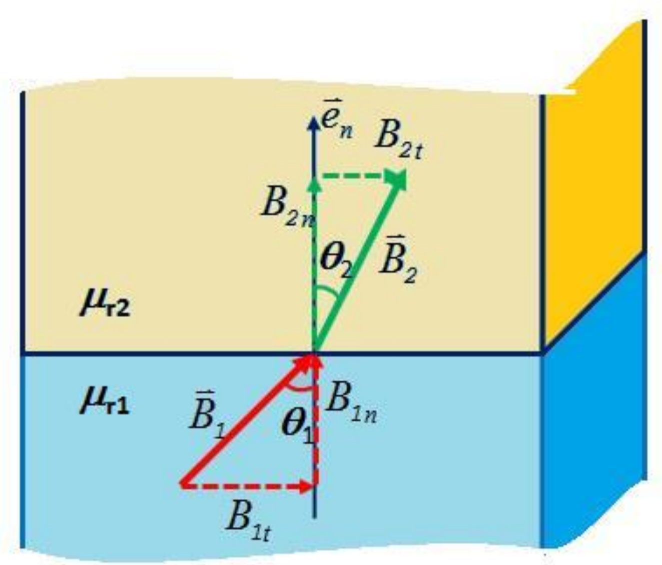
$$i = \frac{1}{\mu_0}\left(B_{1t} - B_{2t}\right)$$



4. 界面磁感应线“折射定理”

$$\begin{cases} B_{2n} = B_{1n} \\ H_{2\tau} = H_{1\tau} \\ \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_{2t} = \dfrac{\mu_2}{\mu_1} B_{1t} \\ H_{2n} = \dfrac{\mu_1}{\mu_2} H_{1n} \end{cases}$$

B_t和H_n不连续

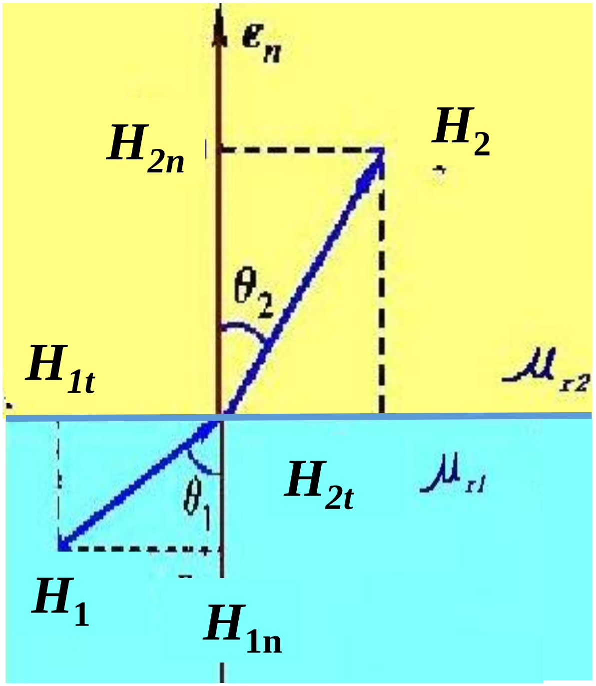


$$\frac{tg\theta_1}{tg\theta_2} = \frac{B_{1t}/B_{1n}}{B_{2t}/B_{2n}} = \frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

$$\frac{tg\theta_1}{tg\theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

同理，**若介质界面没有传导电流**，对H：

$$\frac{tg\theta_1}{tg\theta_2}=\frac{H_{1t}/H_{1n}}{H_{2t}/H_{2n}}=\frac{H_{2n}}{H_{1n}}=\frac{\mu_1}{\mu_2}$$



$$\frac{tg\theta_1}{tg\theta_2}=\frac{\mu_1}{\mu_2}$$

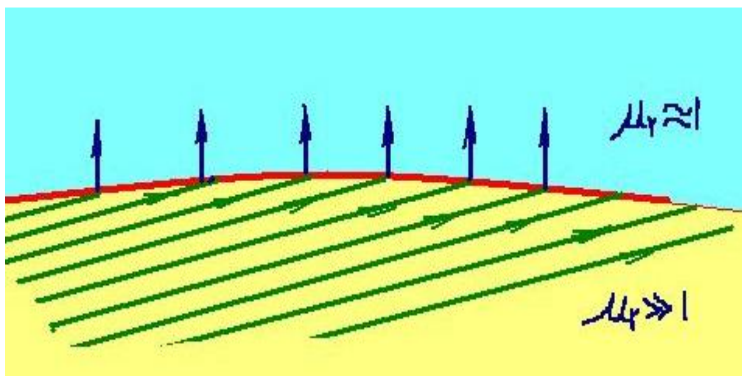
类似电场边界规律

$$\frac{tg\theta_1}{tg\theta_2}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

$$\boxed{tg\theta_1 / tg\theta_2 = \mu_1 / \mu_2}$$

若 $\mu_{r2} \approx 1$ (弱磁性介质),
$\mu_{r1} >> 1$ (铁磁性材料)

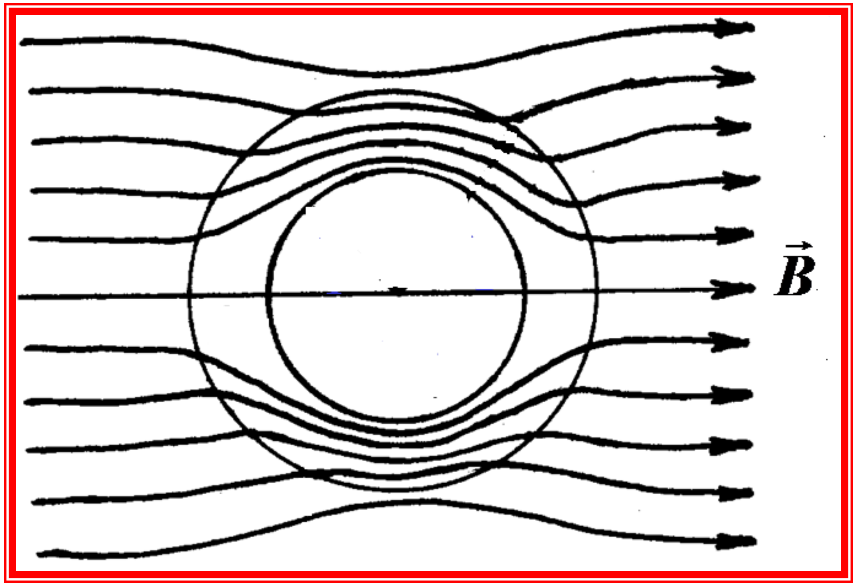
$$\begin{cases} \theta_2 \approx 0 \\ \theta_1 \approx 90^\circ \end{cases}$$

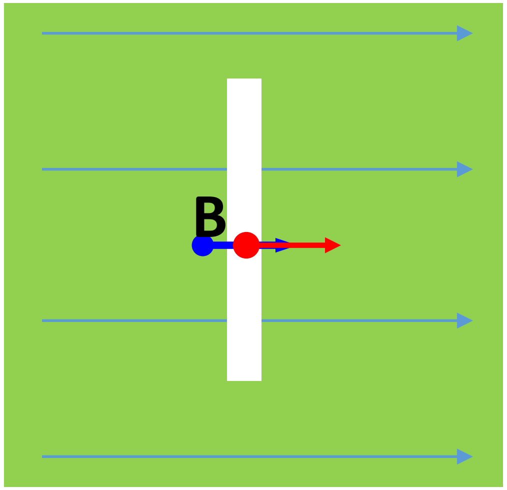


磁感应线几乎都集中在铁磁性介质内，漏磁很少。

磁屏蔽

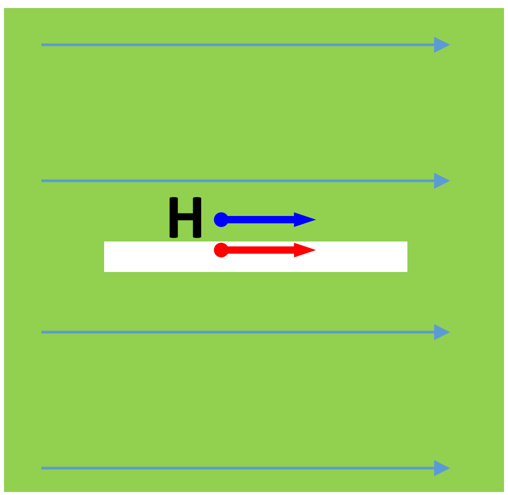
一高磁导率的软铁磁材料（相对磁导率大于10^3）作成的空腔置于外磁场中，磁感应线将密集于软铁磁材料的腔壳之中，极少泄漏进空腔内。空腔内的物体将几乎不受外磁场的影响，从而达到磁屏蔽的目的。





圆盘形空穴：磁介质中的B，因为B的法向分量连续，因此空穴中心的B等于磁介质中的B，因此空穴中心的磁场强度为

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

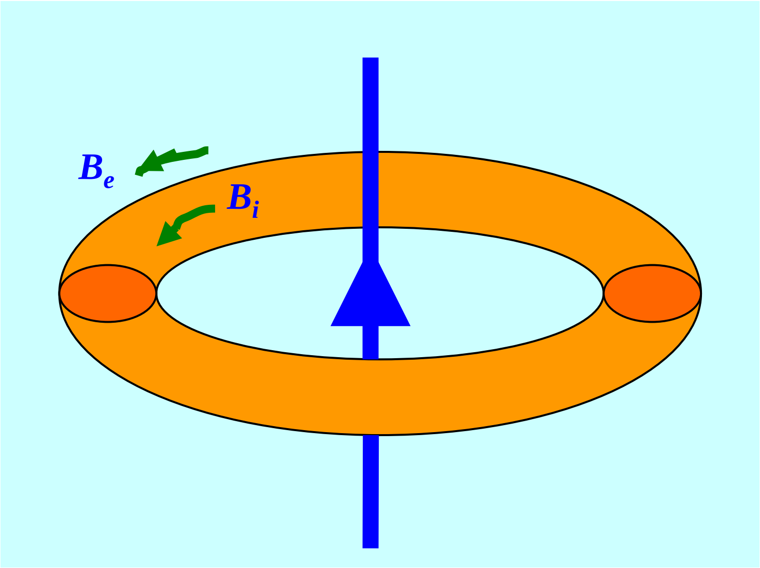


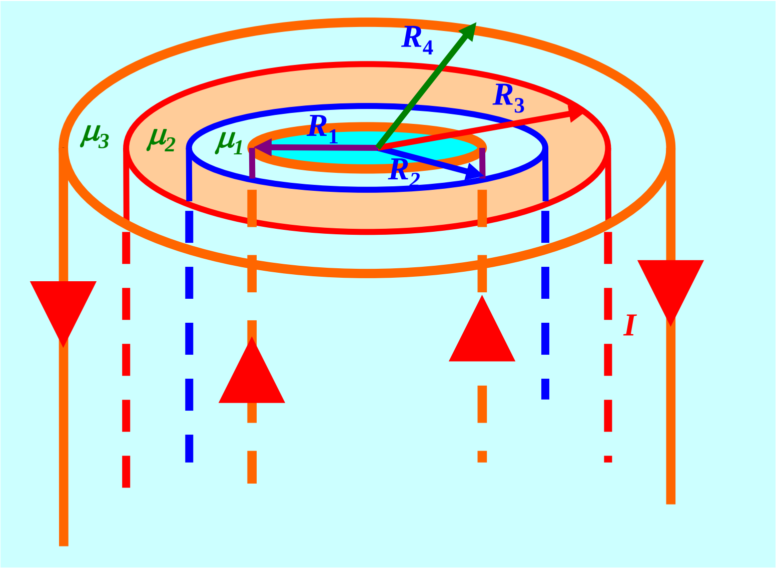
细棒形空穴：磁介质中的H，因为H的切向分量连续，因此空穴中心的H等于磁介质中的H，因此空穴中心的磁场强度为

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_r \mu_0}$$

二、两类特殊介质问题

1. 介质界面与磁感应线重合





分析：介质不影响传导电流分布，所以磁场强度分布和没有介质时一样

介质中 $$\vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{B}}_0 / \mu_0$$

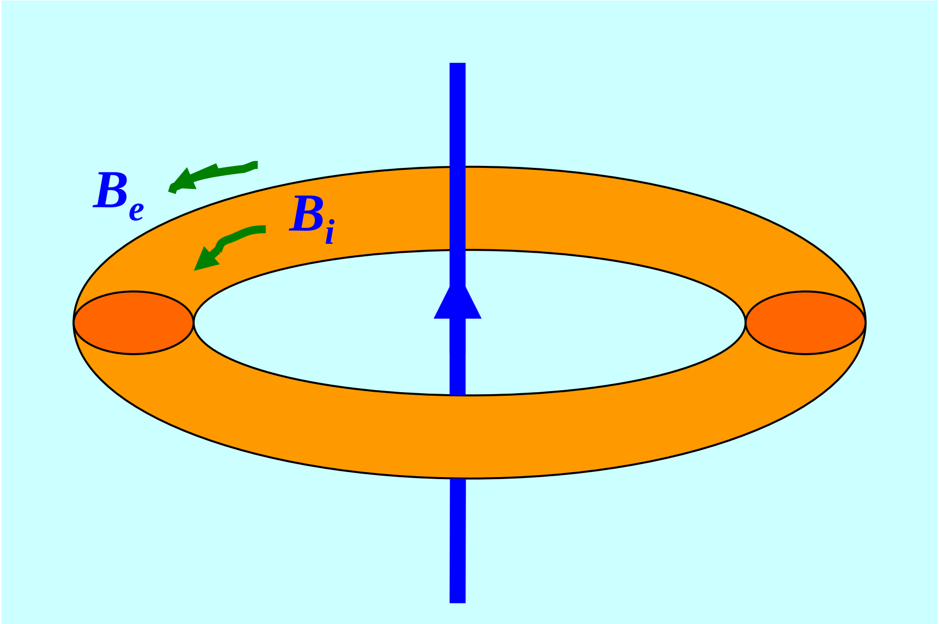
式中H为待求静磁场的磁场强度，B_0为传导电流（在真空中）产生的磁感应强度。只要已知传导电流的分布，即可算得B_0。特别对传导电流对称分布的情况：

$$\oint \vec{\mathbf{B}}_0 \cdot d\vec{l} = \mu_0 \Sigma I_0$$

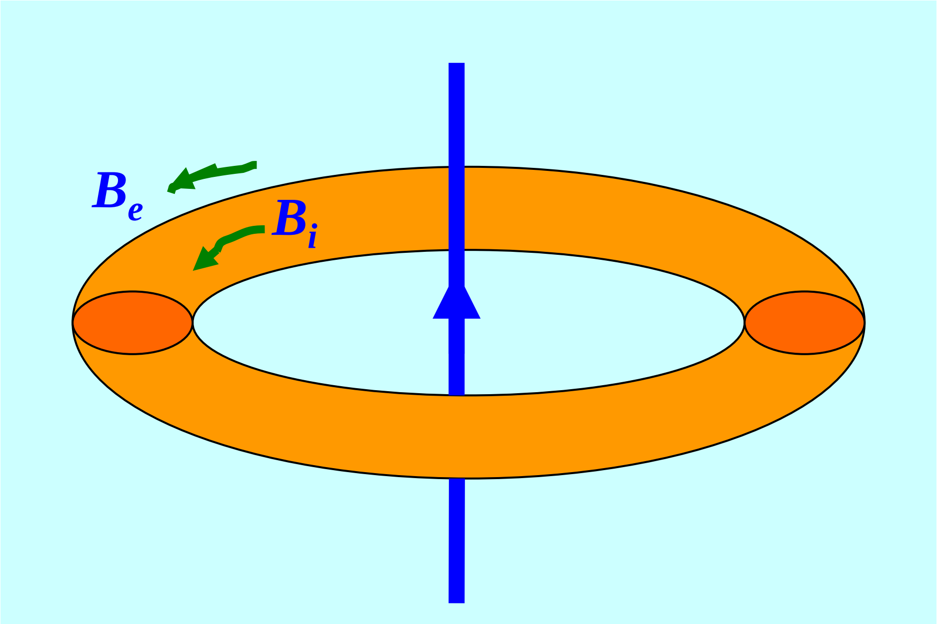
得到B_0 后分区计算介质内磁感应强度：

$$\vec{\mathbf{B}}_i = \mu_i \vec{\mathbf{H}} = \mu_i \vec{\mathbf{B}}_0 / \mu_0$$

[例]磁导率为μ一圆环状磁介质与一通电流 **I** 的无限长直载流导线共轴，求介质内外空间的磁感应强度的分布和介质表面的磁化电流。



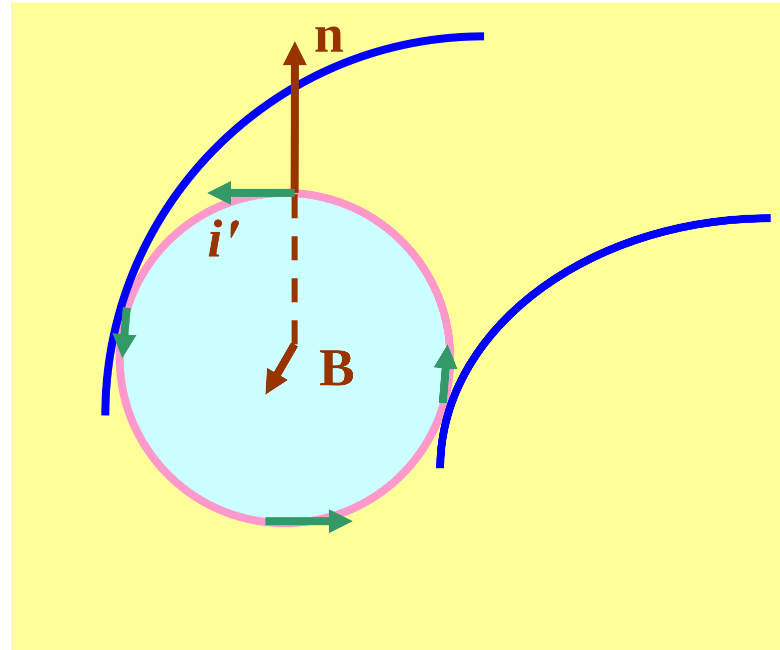
[解]无限长I产生的B_0方向是以I为轴的同心圆，分界面处$B_n=0$，本题属于介质界面和磁感应线平行（重合）的情况。



没有介质时 $B_o = \dfrac{\mu_o I}{2\pi r}$

介质内 $B_i = \dfrac{\mu_r \mu_0 I}{2\pi r}$

介质外 $B_e = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

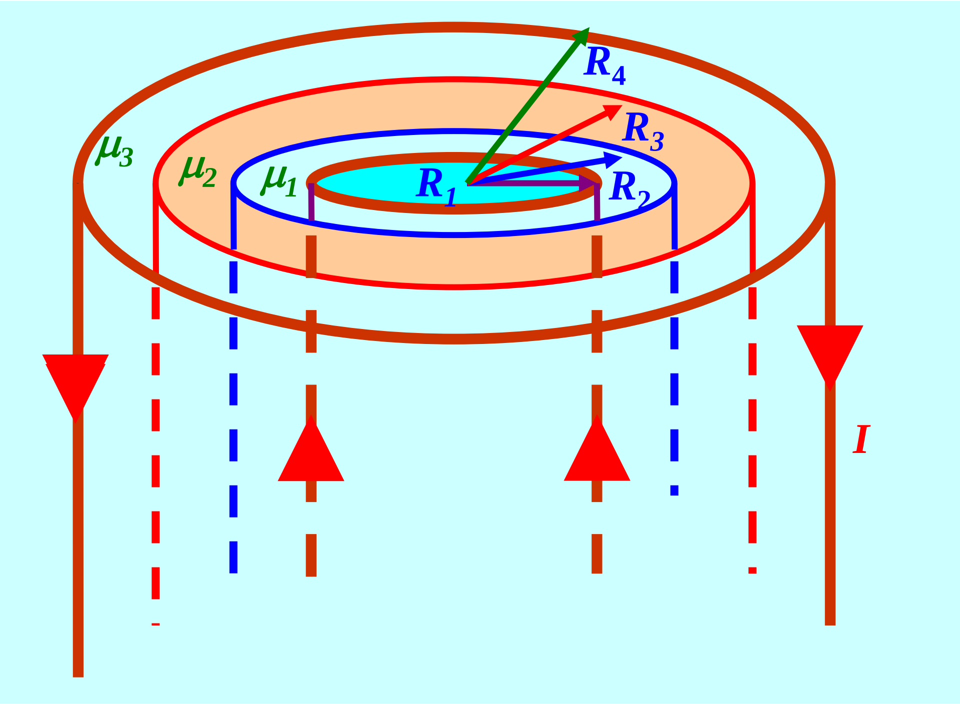


面磁化电流密度为

$$\vec{i}\,' = \vec{n}\times(\vec{M}_2 - \vec{M}_1) = \vec{M}_1\times\vec{n} = \chi_m \frac{\vec{B}_i}{\mu_i \mu_0}\times\vec{n} = \frac{(\mu_r - 1)}{2\pi r} I$$

i' **随r变化，方向沿小环切向**

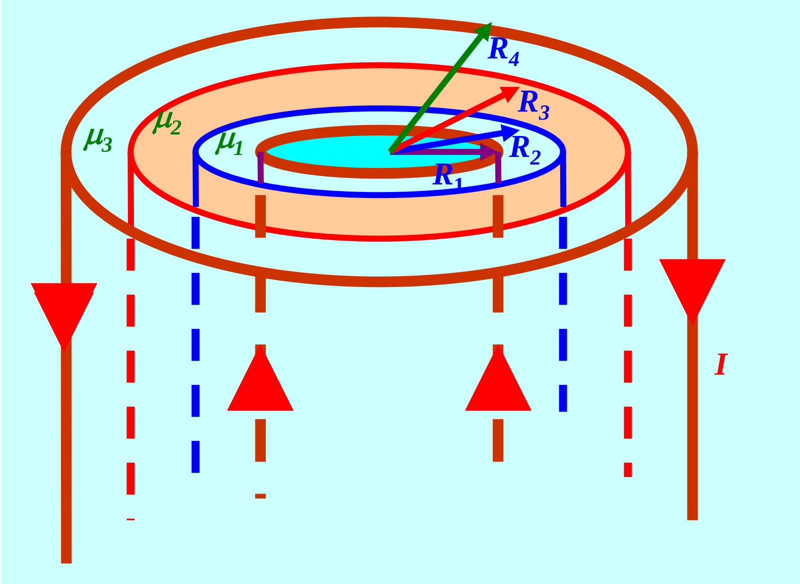
[例]如图，二同轴导体圆柱面通有反向的电流，二柱面间分层充满均匀介质，磁导率分别为μ_1、μ_2、μ_3，求各区域的B。



[解] 无介质时

$$B_0 = \begin{cases} 0, & r < R_1, r > R_4 \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}, & R_1 < r < R_4 \end{cases}$$

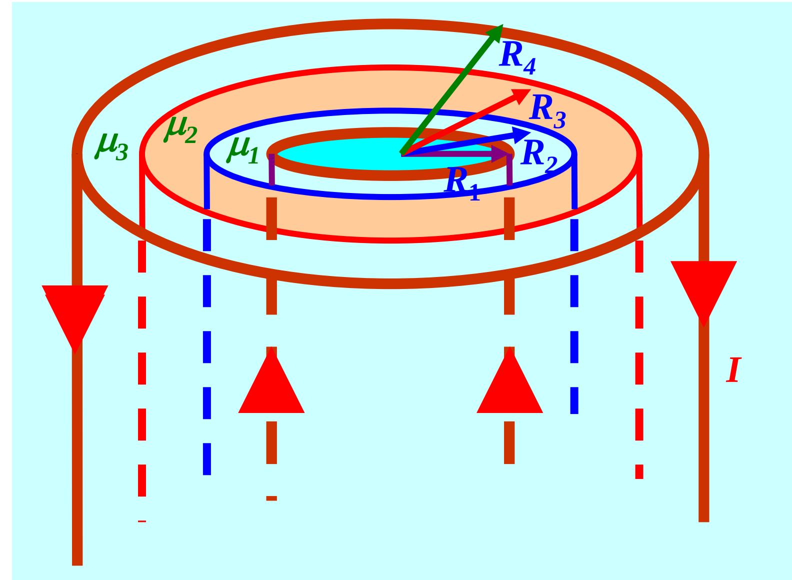
$$H = \frac{B_0}{\mu_0} = \begin{cases} 0, & r < R_1, r > R_4 \\ \dfrac{I}{2\pi r}, & R_1 < r < R_4 \end{cases}$$



各分区充满各种介质后，则

$$B(r) = \mu H_0 = \begin{cases} 0, & r < R_1, r > R_4 \\ \dfrac{\mu_1 I}{2\pi r}, & R_1 < r < R_2 \\ \dfrac{\mu_2 I}{2\pi r}, & R_2 < r < R_3 \\ \dfrac{\mu_3 I}{2\pi r}, & R_3 < r < R_4 \end{cases}$$

$$M(r)=\frac{B}{\mu_0}-\mathrm{H}_0=\begin{cases}0, & r<R_1, r>R_4\\ \dfrac{(\mu_1-\mu_0)I}{2\pi\mu_0 r}-, & R_1<r<R_2\\ \dfrac{(\mu_1-\mu_0)I}{2\pi\mu_0 r}, & R_2<r<R_3\\ \dfrac{(\mu_3-\mu_0)I}{2\pi\mu_0 r}, & R_3<r<R_4\end{cases}$$



$$\vec{i}\,'=(\vec{M}_1-\vec{M}_2)\times\vec{n}_{12}$$

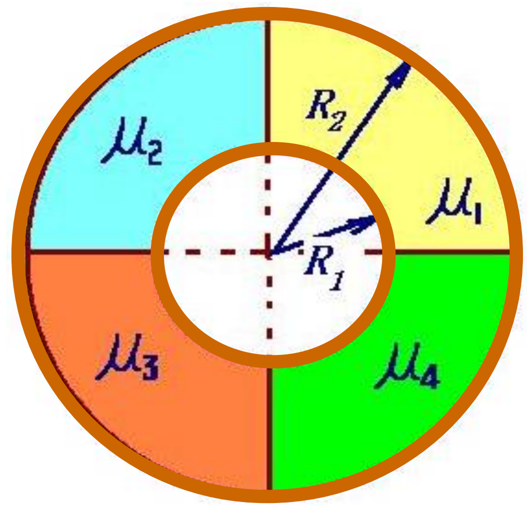
$$i\,'=\begin{cases}\dfrac{(\mu_1-\mu_0)I}{2\pi\mu_0 R_1}, & r=R_1\\ \dfrac{(\mu_2-\mu_1)I}{2\pi\mu_0 R_2}, & r=R_2\\ \dfrac{(\mu_3-\mu_2)I}{2\pi\mu_0 R_3}, & r=R_3\\ \dfrac{(\mu_0-\mu_3)I}{2\pi\mu_0 R_4}, & r=R_4\end{cases}$$

2. 介质界面与磁感应线垂直

- 磁化电流分布

$$\vec{i}\,'=\vec{n}\times\left(\vec{M}_2-\vec{M}_1\right)$$

$$\because \vec{M}=\chi_m\vec{H}=\frac{(\mu_r-1)}{\mu_r\mu_0}\vec{B}$$



在分界面，$B_1=B_2=B_n$，故在介-介分界面$M=M_n$

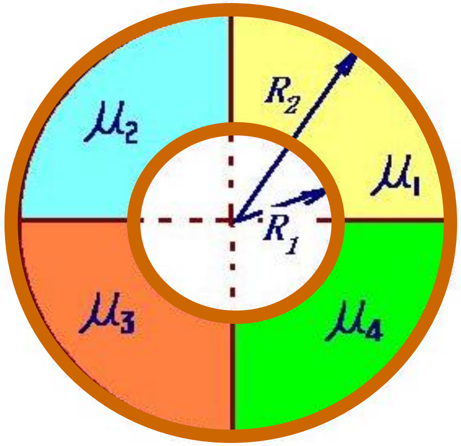
故 $i'=0$， 介质-介质分界面上无磁化电流

磁化电流仅出现在有传导电流出现的地方。

● 总电流分布

➢ 同一载流导体可能与多种磁介质毗连，不同毗连面上的磁化面电流各异

➢ 假定载流导体为超导体或内部磁场恒为零的理想导体



➢ 传导电流只分布于导体表面，且其分布会自动调整，最终恰好补偿磁化面电流的变化，维持总电流的分布形式不变，以实现导体内磁场恒等于零的条件。

● 电流分布分析的结果

所有电流分布在导体表面（导体-介质毗邻面），总电流（传导电流和磁化电流之和）分布形式不变，

介质引入后，只会改变磁感应强度的大小，磁感应强度的分布形式不变，所以磁感应强度应该为

$$\vec{\mathbf{B}} = \alpha \vec{\mathbf{B}}_0, \begin{cases} \vec{\mathbf{B}}_0 \text{--介质不存在时传导电流产生的磁场} \\ \alpha \text{--待求系数} \end{cases}$$

由安培环路定理定系数 α

$$\oint_L \vec{\mathbf{H}} \cdot d\vec{l} = \oint_L \frac{\vec{\mathbf{B}}}{\mu} \cdot d\vec{l} = \alpha \oint_L \frac{\vec{\mathbf{B}}_0}{\mu} \cdot d\vec{l} = \Sigma I_0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{\Sigma I_0}{\oint_L \frac{\vec{\mathbf{B}}_0}{\mu} \cdot d\vec{l}}$$

处理步骤：

- 去掉介质求出传导电流产生的磁场B_0

- 确定系数α

$$\alpha = \Sigma I_0 \Big/ \oint_L \frac{\vec{\mathbf{B}}_0}{\mu} \cdot d\vec{l}$$

L为围绕给定传导电流的任意闭合回路，磁导率μ在不同介质区取给定常数

- 求出介质存在时的磁场

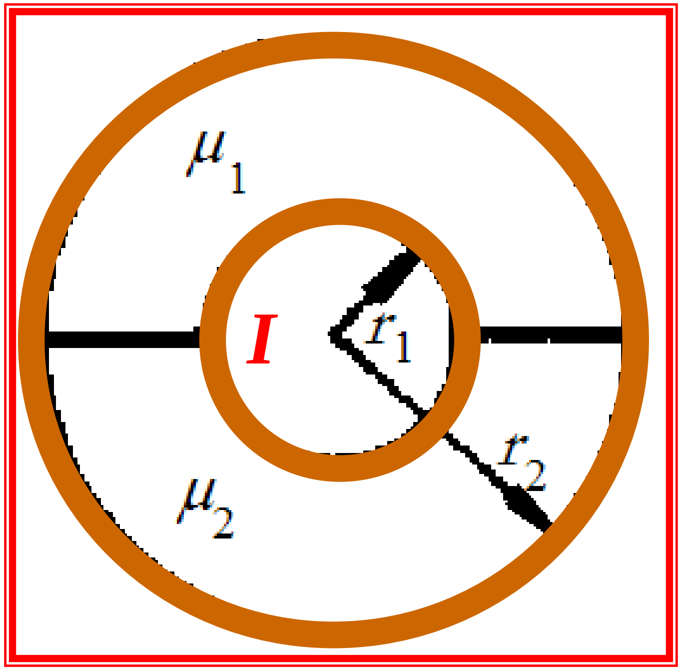
各介质内的磁感应强度：

$$\boxed{\vec{\mathbf{B}} = \alpha \vec{\mathbf{B}}_0}$$

磁场强度：

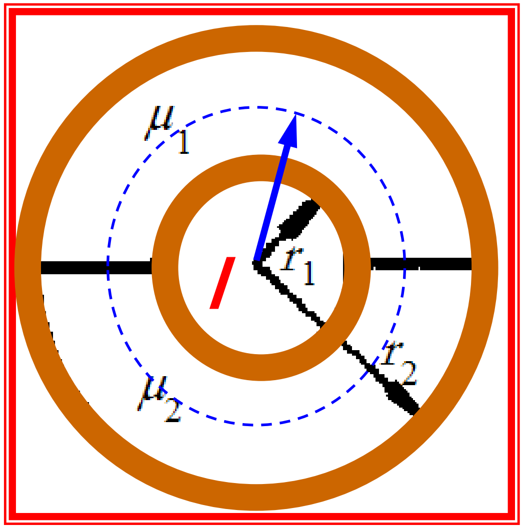
$$\boxed{\boldsymbol{H}_i = \frac{1}{\mu_i} \boldsymbol{B}}$$

[例]在一同轴电缆（内导体半径为 r_1，外导体的内半径为 r_2，两导体为理想导体）中填满磁导率为 μ_1和μ_2两种磁介质，各占一半空间，且介质界面为通过电缆轴的平面。设通过电缆的电流强度为I，求介质中的磁场分布和介质/导体毗连面上的面电流分布。



[解]本题属于磁介质界面与磁感应线垂直的情况。介质置入前的磁感应强度相对电缆轴线对称。取半径为r（$r_1 < r < r_2$）的圆回路，得:

$$\frac{B}{\mu_1}\pi r + \frac{B}{\mu_2}\pi r = I, \quad B = \frac{\mu_1\mu_2 I}{\pi(\mu_1+\mu_2)r}$$



介质1和介质2中的磁场强度为:

$$H_1 = \frac{B}{\mu_1} = \frac{\mu_2 I}{\pi(\mu_1+\mu_2)r}, \qquad H_2 = \frac{B}{\mu_2} = \frac{\mu_1 I}{\pi(\mu_1+\mu_2)r}$$

相应磁化强度为:

$$M_1 = \frac{1}{\mu_0}B - H_1 = \frac{\mu_2[(\mu_1/\mu_0)-1]I}{\pi(\mu_1+\mu_2)r} = \chi_{m1}\frac{\mu_2 I}{\pi(\mu_1+\mu_2)r}$$

$$M_2 = \frac{1}{\mu_0}B - H_2 = \frac{\mu_1[(\mu_2/\mu_0)-1]I}{\pi(\mu_1+\mu_2)r} = \chi_{m2}\frac{\mu_1 I}{\pi(\mu_1+\mu_2)r}$$

对于 $r<r_1$ 和 $r>r_2$，$B=H=M=0$。在 $r=r_1$ 处的磁化面电流和传导面电流密度为:

$$i_1' = \begin{cases} M_1|_{r=r_1} = \dfrac{\mu_2[(\mu_1/\mu_0)-1]I}{\pi(\mu_1+\mu_2)r_1}, & (\text{介质}1), \\ M_2|_{r=r_1} = \dfrac{\mu_1[(\mu_2/\mu_0)-1]I}{\pi(\mu_1+\mu_2)r_1}, & (\text{介质}2), \end{cases}$$

$$i_{01} = \begin{cases} H_1|_{r=r_1} = \dfrac{\mu_2 I}{\pi(\mu_1+\mu_2)r_1}, & (\text{毗连介质}1), \\ H_2|_{r=r_1} = \dfrac{\mu_1 I}{\pi(\mu_1+\mu_2)r_1}, & (\text{毗连介质}2), \end{cases}$$

$$\boxed{i_{01}+i_1'\big|_{r=r} = \frac{\mu_1\mu_2 I}{\pi(\mu_1+\mu_2)r_1}}$$

与此类似，在 $r=r_2$ 处有：

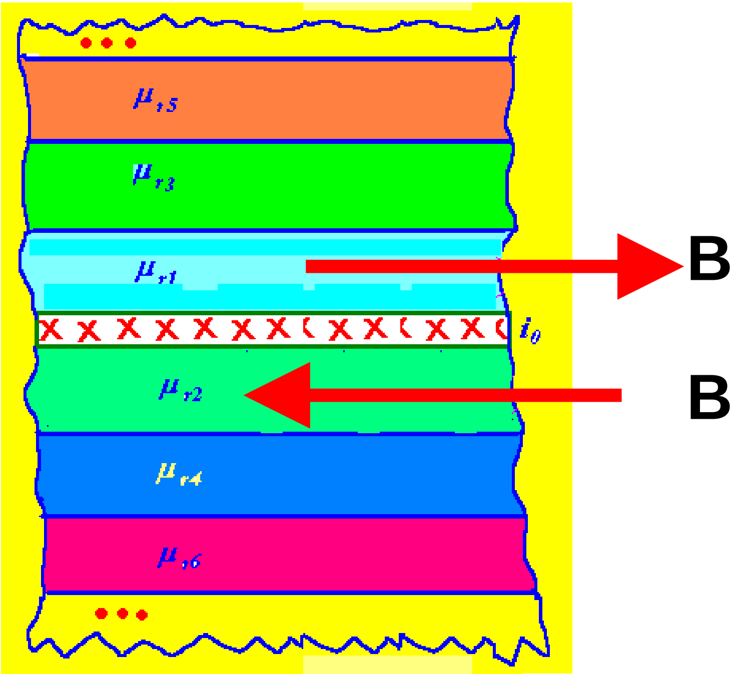
$$i_2' = \begin{cases} -M_1|_{r=r_2} = -\dfrac{\mu_2[(\mu_1/\mu_0)-1]I}{\pi(\mu_1+\mu_2)r_2}, & (\text{介质}1), \\ -M_2|_{r=r_2} = -\dfrac{\mu_1[(\mu_2/\mu_0)-1]I}{\pi(\mu_1+\mu_2)r_2}, & (\text{介质}2), \end{cases}$$

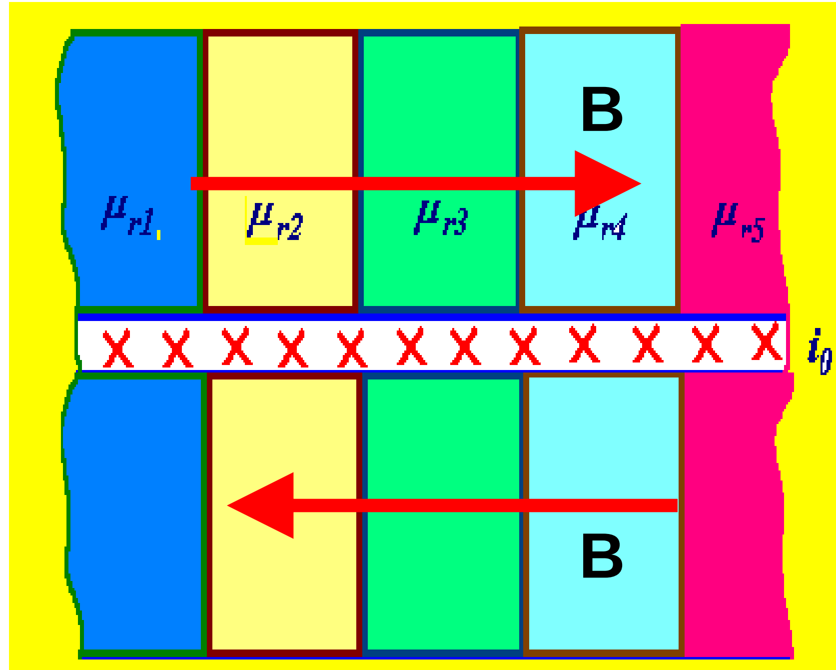
$$i_{02} = \begin{cases} -H_1|_{r=r_2} = -\dfrac{\mu_2 I}{\pi(\mu_1+\mu_2)r_2}, & (\text{毗连介质}1), \\ -H_2|_{r=r_2} = -\dfrac{\mu_1 I}{\pi(\mu_1+\mu_2)r_2}, & (\text{毗连介质}2), \end{cases}$$

$$\boxed{i_{02} + i_2'\big|_{r=r_2} = \frac{\mu_1\mu_2 I}{\pi(\mu_1+\mu_2)r_2}}$$

讨论:

- 这种方法的前提：假定导体或导线是内部磁场为零的超导体或理想导体，否则不能用上述方法求解。
- 介质的引入破坏了磁场强度H 的轴对称性，因此无法直接通过安培环路定理计算H。
- 由上述结果可见，在 $r = r_1$ 和 $r = r_2$ 处的磁化面电流和传导面电流密度分布都不均匀，但总面电流 （$i = i_0 + i'$）的分布却是均匀的。
- 总面电流分布的这种对称性决定了磁感应强度B的对称性。



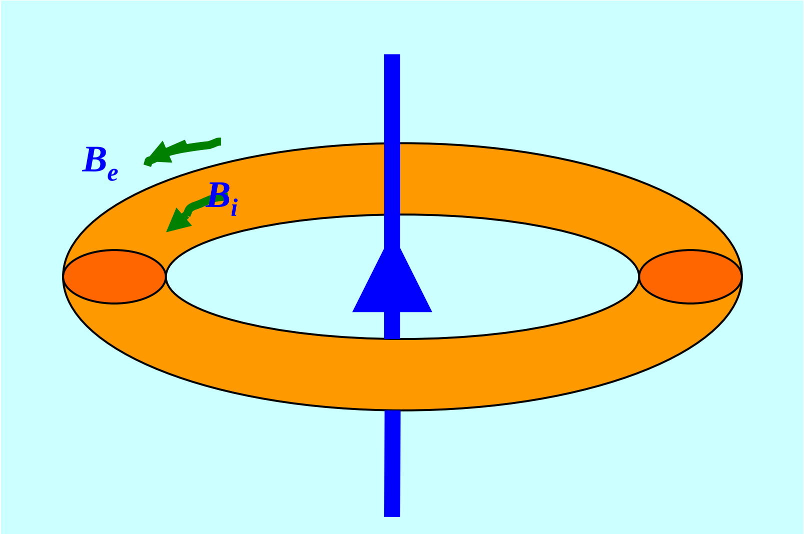


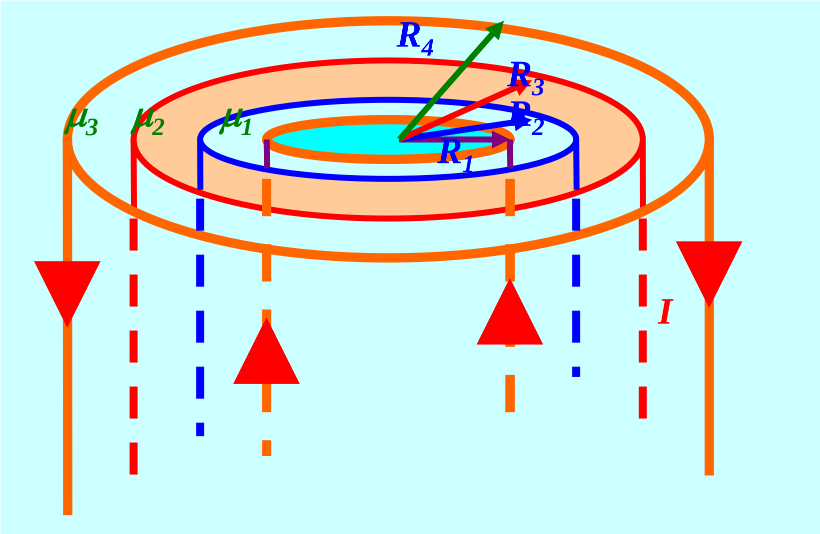
介质-介质界面有磁化电流，但是不影响传导电流的分布。

介质-介质界面无磁化电流，总电流分布均匀。

三、两类问题的边值关系讨论

1. 介质界面与磁感应线重合

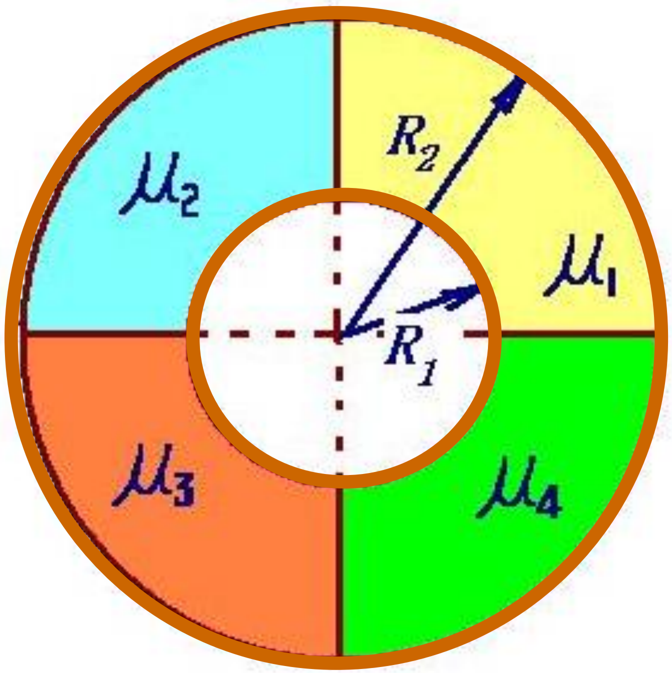




分界面处　$\vec{H}_{1t} = \vec{H}_{2t}$，

$\vec{H}$ 只有切向，所以　$\vec{H}_1 = \vec{H}_2$.

2. 介质分界面与B垂直



分界面处 $B_{1n}=B_{2n}$，

$\vec{B}$ 只有法向，所以 $\vec{B}_1=\vec{B}_2$.