中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

电　磁　学
(Electromagnetism)

第六章　电磁感应3

§6-4 暂态过程

- 非稳恒电路：电流随时间变化的电路

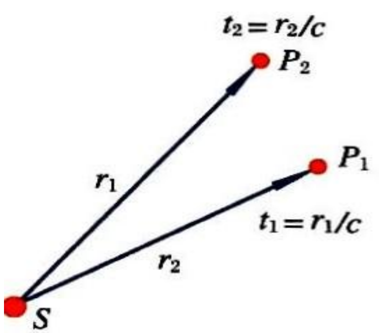
- 非稳恒电路的特点：

  - 电荷分布、电流分布随时间变化
  - 各点的瞬时电场、磁场不是由该时刻的电荷、电流分布决定；
  - 电路中的电场是库仑电场叠加感应电场,电压概念不再存在；
  - 电流不满足稳恒条件；
  - 基尔霍夫定律不成立

一、似稳电路与似稳条件

1、似稳电路

似稳电路：电路尺寸比较小，电源的变化传播到电路各处所需要的时间远远小于电源的变化周期。



$$Q_s(t)=Q_0\sin\omega t$$

$$\mathrm{E_1(t)}\leftrightarrow Q\left(t-t_1\right)$$

$$Q_0\sin\omega\left(t-\frac{r_1}{c}\right)=Q_0\sin\left(\omega t-\frac{2\pi}{T}t_1\right)\sim Q_0\sin\omega t$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathrm{E_1(t)}\leftrightarrow Q\left(t-t_1\right)\sim Q_0\sin\omega t\\&\mathrm{E_2(t)}\leftrightarrow Q\left(t-t_2\right)\sim Q_0\sin\omega t\end{aligned}}$$

- 电路中的电荷、电流分布随时间变化，但是各点的电场、电流都与电源同步变化
- 电场、磁场近似对应于同一时刻的电荷、电流分布，可视为在该时刻任意时刻的分布稳恒场

- 静电场的环路定理、稳恒条件瞬时成立

$$
\begin{cases}
\oint \vec{E}_{势}(t)\cdot d\vec{l} = 0 \\
\sum i(t) = 0
\end{cases}
$$

2、似稳条件（似稳判据）

设电路的尺寸为*l* ，电源变化的频率为*f*，电场的传播速度为*C*

$$\frac{1}{f} >> \frac{\ell}{c} \Rightarrow \frac{c}{f} >> \ell \Rightarrow \lambda >> \ell$$

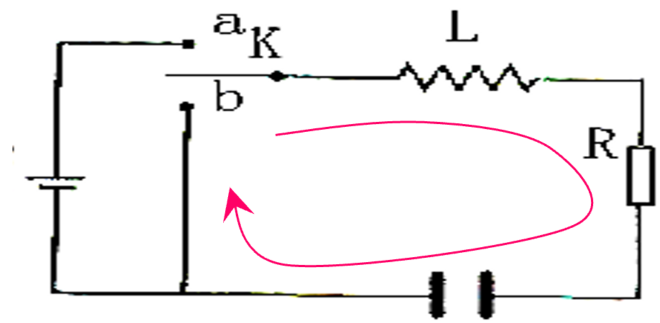
似稳条件：$\lambda >> \ell$

[例]市电(似稳电路尺寸)

$$\frac{3\times10^5}{50} = 6000(km) >> 600(km)$$

3、似稳电路方程：

I、欧姆定律：



$$\vec{j}=\sigma(\vec{E}+\vec{K})=\sigma\left(\vec{E}_{位}+\vec{E}_{旋}+\vec{K}\right)$$

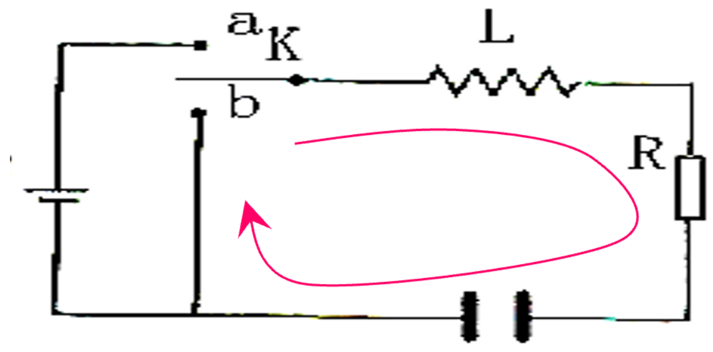
$$\therefore\quad \vec{E}_{位}=\frac{\vec{j}}{\sigma}-\vec{E}_{旋}-\vec{K}$$

II、环路定理：

$$\oint_{\ell}\vec{E}_{位}\cdot d\vec{l}=\int_{源}\vec{E}_{位}\cdot d\vec{l}+\int_{阻}\vec{E}_{位}\cdot d\vec{l}+\int_{容}\vec{E}_{位}\cdot d\vec{l}+\int_{感}\vec{E}_{位}\cdot d\vec{l}=0$$

III. 似稳电路的基本方程：

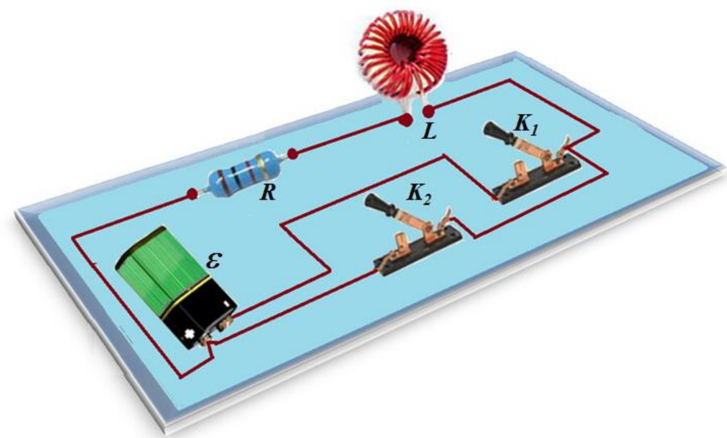
取电流方向为回路方向，得：



$$-\varepsilon + u_R + u_C + u_L = 0,$$

$$\varepsilon = IR + \frac{1}{C}\int I dt + \mathrm{L}\frac{dI}{dt}$$

二、*RL*电路的暂态过程

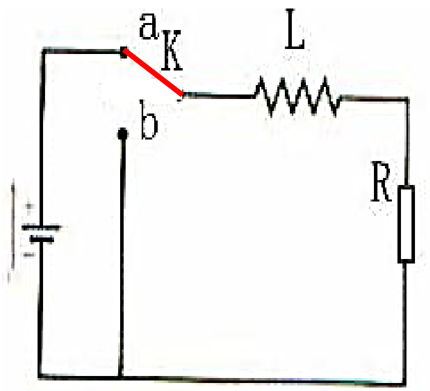


- **暂态过程:当直流电动势接入电路后，电流值从零增长到稳定值需要一个短暂的过程.**
- **RL电路特点:**

- **当电键K合到a点时，电路中的电流从零开始增长(充电)，在线圈中将产生感应电动势，从而产生感应电流，这个感应电流阻碍原电流的增长，使回路中的电流不能立即达到稳定值.**
- **当电流达到稳定值后，如突然把电键从*a*断开、合到*b*，即把电源电动势突然从电路中撤去，电路中的电流开始下降（放电），此时线圈中也将产生感应电动势，阻碍原电流的下降，所以回路中的电流也不能立即降为零。**

□ 充电过程

若电路中没有线圈，合上开关后回路中的电流：



$$I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$$

回路中有线圈时，合上开关后回路中的电流：

$$I = I(t)$$

线圈中的自感电动势：

$$\varepsilon_L = -L\frac{dI}{dt}$$

取电流方向为回路方向，由似稳电路的基本方程得：

$$\varepsilon = IR + L\frac{dI}{dt}$$

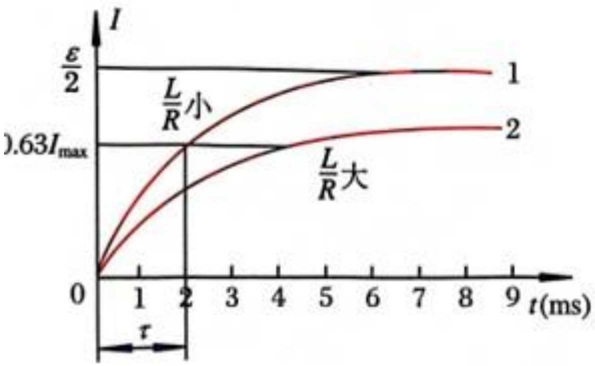
- 用分离变量法求解: $\dfrac{dI}{dt}=\dfrac{\varepsilon}{L}-\dfrac{R}{L}I=\dfrac{R}{L}\left(\dfrac{\varepsilon}{R}-I\right)$

  - 初始条件为: $I\big|_{t=0}=0$
  - 分离变量得: $dI\Big/(\dfrac{\varepsilon}{R}-I)=\dfrac{R}{L}dt$
  - 两边积分: $-\ln\left(\dfrac{\varepsilon}{R}-I\right)=\dfrac{R}{L}t+C_1$
  - 利用初始条件$t=0$, $I=0$, 得 $C_1=-\ln(\varepsilon/R)$

$$\ln\left(\frac{\varepsilon/R-I}{\varepsilon/R}\right)=-\frac{R}{L}t,\qquad \boxed{I=\frac{\varepsilon}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)}$$

- 令 $I_0=\dfrac{\varepsilon}{R},\ \tau=\dfrac{L}{R}$ 得：

$$I=I_0\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$



➢ 在RL电路的暂态过程中，**电流 I 以指数方式随时间t增长**，最后达到稳定值。

➢ 当$t=\tau=\dfrac{L}{R}$ 时，$I=I_0\left(1-e^{-1}\right)=0.63I_0$

τ：回路的**时间常数**；

意义：经过**时间τ**，电流达到稳定值的63%

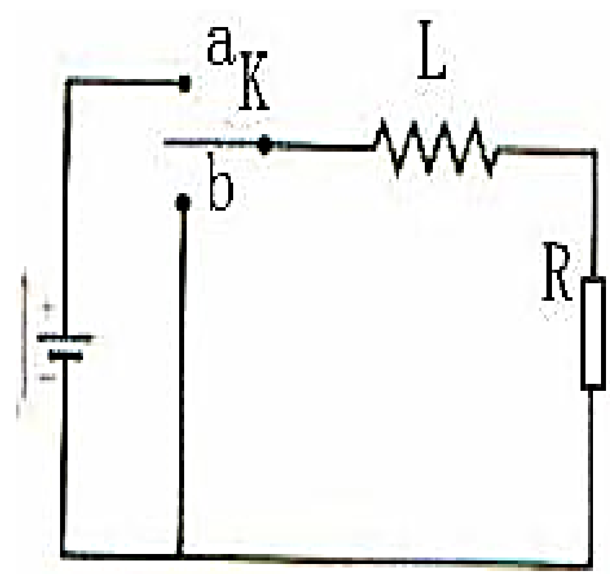
□ 放电过程

放电过程中，电流从 I_0 急剧下降，线圈中产生感应电动势，以阻碍电流的减少，回路方程为：

$$L\frac{dI}{dt}+IR=0$$

初始条件为： $I\big|_{t=0}=I_0$

方程的解为： $I(t)=I_0e^{-t/\tau}$



当电源电动势突然撤去后，回路中电流的变化规律，它**以指数的形式随时间下降，当t=τ时，电流下降到37%**。

一、载流线圈（组）的磁能

●线圈的自能

RL**电路放电过程**

$$I = I_0 e^{-t/\tau}$$

电阻消耗能量：

$$dQ = RI^2 dt = RI_0^2 e^{-2t/\tau} dt$$

$$Q = RI_0^2 \int_0^\infty e^{-2t/\tau} dt = -\frac{\tau}{2} RI_0^2 e^{-2t/\tau} \Big|_0^\infty = \frac{1}{2} LI_0^2$$

电阻上产生的焦耳热只可能来自线圈，所以电感线圈是一个储能元件。

RL电路充电过程： $$\boxed{\varepsilon = IR + L\frac{dI}{dt}}$$

$$\boxed{I\varepsilon = I^2R + \frac{1}{2}L\frac{dI^2}{dt} = I^2R + \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}LI^2)}$$

电源提供的能量，一部分转化为焦耳热，一部分克服线圈自感电动势所做的功。

当I：0→I_0时 $$\boxed{W_m = \int_0^{I_0} d(\frac{1}{2}LI^2) = \frac{1}{2}LI_0^2}$$

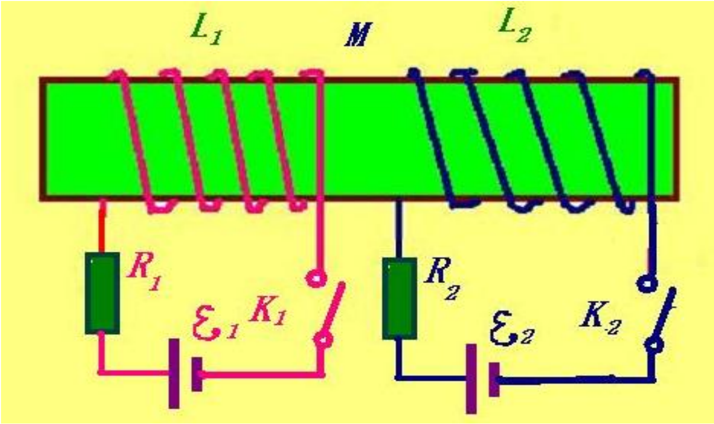
这部分磁能（自感磁能）被储存在线圈中，当撤去电源后转化成电阻的焦耳热。

自感磁能：电源克服线圈自感电动势所做的功。 $$\boxed{W_m = \frac{1}{2}LI_0^2}$$

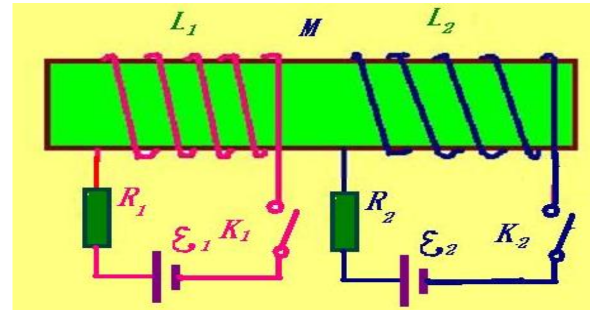
●线圈间的互能

当L_1和L_2单独存在时，自感磁能为：

$$\boxed{\begin{cases} W_{m1} = \dfrac{1}{2} L_1 I_1^2, \quad I_1 = \dfrac{\mathcal{E}_1}{R_1} \\ W_{m2} = \dfrac{1}{2} L_2 I_2^2, \quad I_2 = \dfrac{\mathcal{E}_2}{R_2} \end{cases}}$$



设L_1充满电后，闭合电路2，由于L_2的存在，在L_1回路中产生的电动势为：



$$\boxed{\varepsilon' = -M\frac{di_2}{dt}}$$

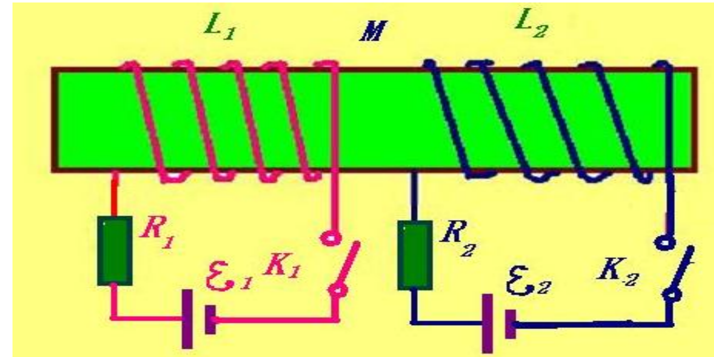
$$\boxed{-I_1\varepsilon' dt = I_1 M di_2}$$

当i_2从$0 \to I_2$时

$$\boxed{W = \int_0^{I_2} I_1 M di_2 = M I_1 I_2}$$

此方法不必另外计算I_1在L_2回路中的磁能。

若L_1、L_2同时充电



$$\varepsilon_{12} = -M\frac{di_2}{dt} \qquad \varepsilon_{21} = -M\frac{di_1}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad -i_1\varepsilon_{12}dt = i_1Mdi_2 \qquad -i_2\varepsilon_{21}dt = i_2Mdi_1$$

当i_1, i_2从$0 \to I_1, I_2$时

$$W = \int_0^{I_1,\ I_2}(i_1Mdi_2 + i_2Mdi_1)$$
$$= \int_0^{I_1I_2} Md(i_1i_2) = MI_1I_2$$

总能量：

$$
\begin{cases}
W_m = \dfrac{1}{2}L_1 I_1^2 + \dfrac{1}{2}L_2 I_2^2 + M I_1 I_2, \text{顺接} \\
W_m = \dfrac{1}{2}L_1 I_1^2 + \dfrac{1}{2}L_2 I_2^2 - M I_1 I_2, \text{逆接}
\end{cases}
$$

也可以写成对称形式：

$$
\begin{cases}
W_m = \dfrac{1}{2}L_1 I_1^2 + \dfrac{1}{2}L_2 I_2^2 + \dfrac{1}{2}M_{12} I_1 I_2 + \dfrac{1}{2}M_{21} I_2 I_1, \text{顺接} \\
W_m = \dfrac{1}{2}L_1 I_1^2 + \dfrac{1}{2}L_2 I_2^2 - \dfrac{1}{2}M_{12} I_1 I_2 - \dfrac{1}{2}M_{21} I_2 I_1, \text{逆接}
\end{cases}
$$

自感能不可能为负，互感能可正可负。

●载流线圈系统的磁能

$$\boxed{\varepsilon_i = -L_i \frac{dI_i}{dt} - \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} M_{ik} \frac{dI_k}{dt} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} L_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1n} \\ M_{21} & L_{22} & \cdots & M_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \cdots & L_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dI_1/dt \\ dI_2/dt \\ \vdots \\ dI_n/dt \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_i = -L_i \frac{dI_i}{dt} - \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} M_{ik} \frac{dI_k}{dt}$$

$$dW_i' = -\varepsilon_i I_i dt = L_i I_i dI_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} M_{ik} I_i dI_k$$

电源对N个线圈做的总功：

$$dW' = \sum_{i=1}^{n} L_i I_i dI_i + \sum_{i,k=1,k\neq i}^{n} M_{ik} I_i dI_k$$

$$M_{ik} I_i dI_k + M_{ki} I_k dI_i = M_{ik} d(I_i I_k)$$

$$dW' = \sum_{i=1}^{n} L_i I_i dI_i + \sum_{i,k=1,i<k}^{n} M_{ik} d(I_i I_k)$$

$$W' = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} L_i I_i^2 + \sum_{\substack{i,k=1 \\ i<k}}^{n} M_{ik} I_i I_k$$

该式即为n个线圈的总磁能

$$W_m = W' = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} L_i I_i^2 + \sum_{\substack{i,k=1\\ i<k}}^{n} M_{ik} I_i I_k$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} L_i I_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,k=1\\ i\neq k}}^{n} M_{ik} I_i I_k$$

记 $M_{ii} = L_i$

$$W_m = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} M_{ik} I_i I_k = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} M_{ik} I_i I_k$$

线圈 k 中电流的磁场通过线圈 i 的磁通量为：

$$\boxed{\Phi_{ki} = M_{ik} I_k = M_{ki} I_k}$$

记

$$\boxed{\Phi_i = \sum_{k=1}^{N} \Phi_{ki} = \sum_{k=1}^{N} M_{ki} I_k}$$

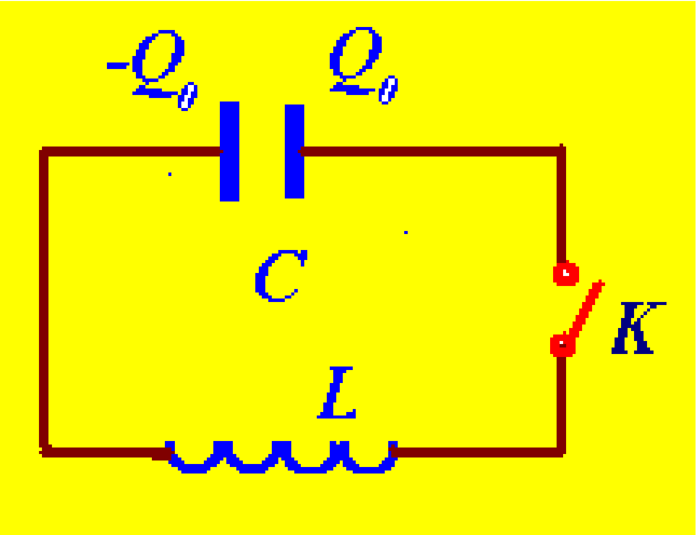
线圈系统的磁能

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} M_{ik} I_i I_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} I_i \Phi_i}$$

[例]一电容C蓄有电量Q_0，在t=0时刻接通K，经自感为L的线圈放电，求：

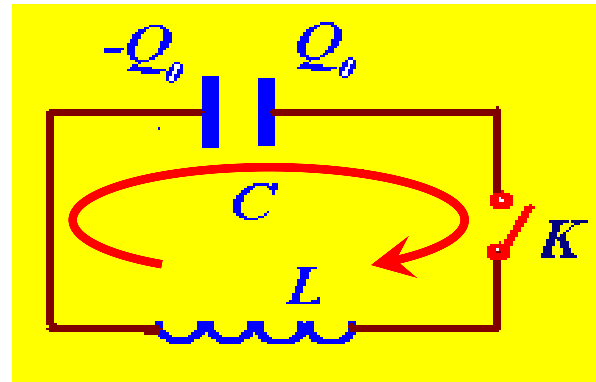
（1）L内磁场能量第一次等于C内电场能量的时刻t_1；

（2）L内磁场能量第二次达到极大值的时刻t_2。



[解]

$$\frac{Q}{C} = L\frac{dI}{dt}$$



两边对 t 求导，利用

$$I = -\frac{dQ}{dt}$$

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0$$

$$t = 0, \begin{cases} Q = Q_0 \\ I = 0 \end{cases}$$

解之得：

$$\begin{cases} Q = Q_0 \cos\left(\dfrac{t}{\sqrt{LC}}\right) \\[2ex] I = \dfrac{Q_0}{\sqrt{LC}} \sin\left(\dfrac{t}{\sqrt{LC}}\right) \end{cases}$$

$$I=\frac{Q_0}{\sqrt{LC}}\sin(\frac{t}{\sqrt{LC}}) \qquad Q=Q_0\cos(\frac{t}{\sqrt{LC}})$$

（1）L内磁能等于C内电能：

$$\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \Rightarrow \sin^2(\frac{t}{\sqrt{LC}})=\cos^2(\frac{t}{\sqrt{LC}})$$

第一次相等：

$$\frac{t_1}{\sqrt{LC}}=\frac{\pi}{4} \qquad t_1=\frac{\pi}{4}\sqrt{LC}$$

（2）L内磁能第二次达到极大值的时间为：

$$\frac{t_2}{\sqrt{LC}}=\frac{3}{2}\pi, \quad t_2=\frac{3\pi}{2}\sqrt{LC}$$

两个线圈系统

系统磁能:

$$W_m = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

互感磁能为:

$$W_{12} = M_{21} I_1 I_2 = \Phi_{21} I_2 = I_2 \iint_{S_2} \vec{B}_1(\vec{r}_2) \cdot d\vec{S}$$

均匀外场（或非均匀外场中的小线圈）

$$W_m = I \iint_{S} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = I\vec{B} \cdot \vec{S} = I\vec{S} \cdot \vec{B} = \vec{m} \cdot \vec{B}$$

N个线圈在外磁场中的磁能：

$$W_m = \sum_{i=1}^{N} I_i \int_{S_i} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$$

外磁场均匀，则

$$W_m = \vec{B} \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} I_i \vec{S}_i\right) = \sum_{i}^{N} \vec{m}_i \cdot \vec{B} = \vec{m}_t \cdot \vec{B}$$

线圈在均匀外场中的磁能

$$\boxed{W_m = \vec{m}_t \cdot \vec{B}}$$

§ 8.3 磁场的能量和能量密度

螺线管长l，面积S，体积V，介质μ_r

$$B=\mu_0\mu_r nI \qquad H=nI \qquad L=\frac{\Phi_m}{I}=\frac{NSB}{I}=\mu_0\mu_r n^2V$$

$$W_m=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}V\mu_0\mu_r n^2I^2=\frac{1}{2}VBH$$

$$\omega_m=\frac{W_m}{V}=\frac{1}{2}BH=\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$$

称**磁能密度**

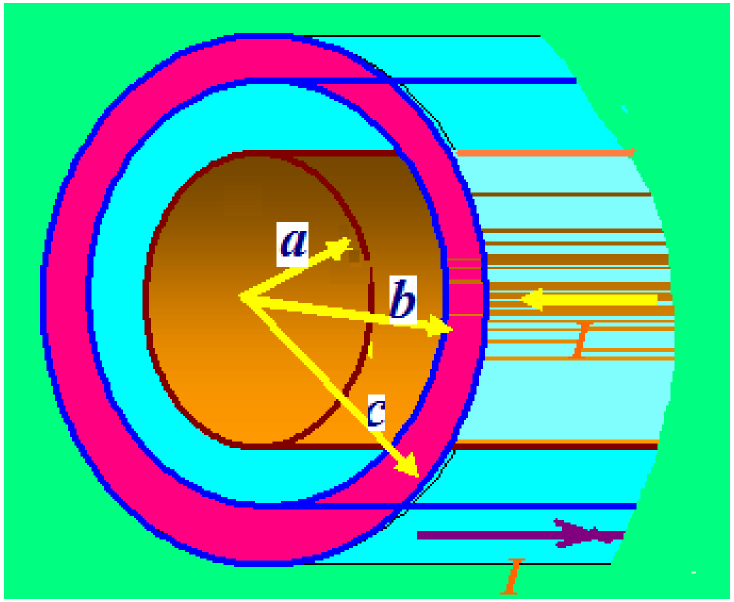
磁能密度：

$$\omega_m=\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$$

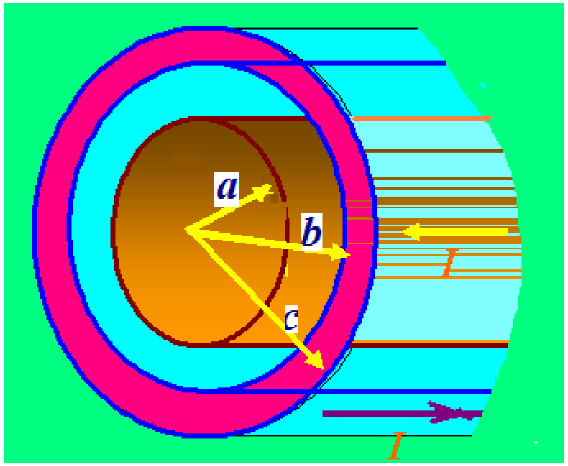
磁场的总能量：

$$W_m=\iiint_V \omega_m dV=\frac{1}{2}\iiint_V \vec{B}\cdot\vec{H}dV$$

[例] 一个同轴电缆，中心是半径为a实心导线，外部是内半径为b，外半径为c的导体圆筒，内外导体之间充满相对磁导率为μ_r的介质，电流在内外筒中等大反向且均匀分布，求该电缆单位长度上的自感。



[解] 由$W_m=LI^2/2$求自感，分4个区分别计算其磁能



（1） $0 \le r \le a, \mu_r = 1$

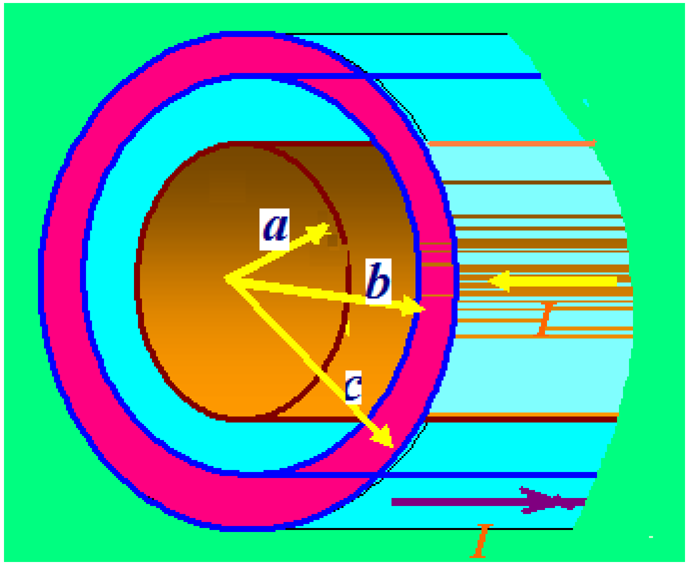
$$H_1 = \frac{1}{2\pi r}\left(\frac{I}{\pi a^2}\right)\pi r^2 = \frac{Ir}{2\pi a^2}$$

$$B_1 = \mu_0 H_1$$

$$\omega_m = \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 a^4}$$

$$W_{m1} = \int_0^a\int_0^{2\pi}\int_0^l \omega_{m1} r\,d\varphi\,dr\,dz = \frac{\mu_0 l}{16\pi} I^2$$

（2） $a \le r \le b,$



$$H_2 = \frac{I}{2\pi r}$$

$$B_2 = \frac{\mu_r \mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\omega_{m2} = \frac{\mu_0 \mu_r I^2}{8\pi^2 r^2}$$

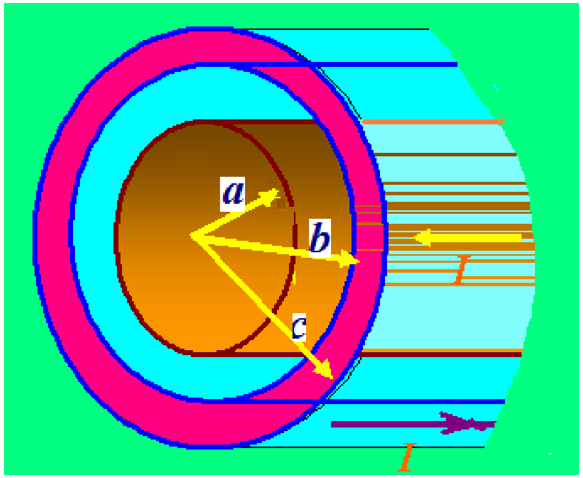
$$W_{m2} = \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^l \omega_{m2} r d\varphi dr dz = \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi} l I^2 \ln(\frac{b}{a})$$

（3） $b \le r \le c,$ 穿过半径为r的环路的总电流为：

$$\sum I = I - \frac{\pi(r^2 - b^2)}{\pi(c^2 - b^2)} I = \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} I$$

$$H_3 = \frac{I}{2\pi(c^2 - b^2)}\left(\frac{c^2}{r} - r\right)$$

$$B_3 = \mu_0 H_3$$

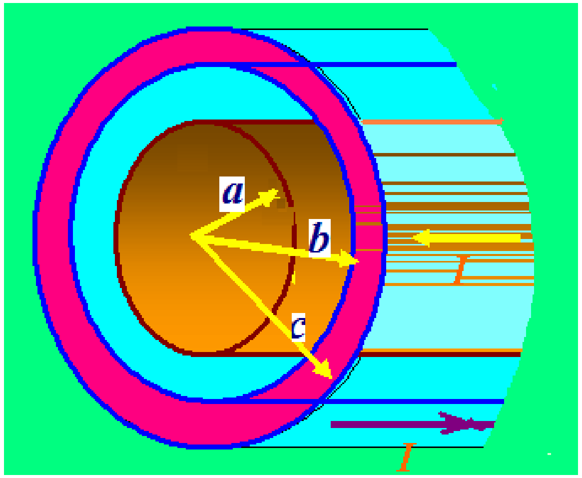


$$\omega_{m3} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 (c^2 - b^2)^2}\left(\frac{c^4}{r^2} - 2c^2 + r^2\right)$$

$$W_{m3} = \int_b^c r dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^l \omega_{m3} dz$$

$$= \frac{\mu_0 l I^2}{4\pi (c^2 - b^2)^2}\left(c^4 \ln\left(\frac{c}{b}\right) - \frac{1}{4}(c^2 - b^2)(3c^2 - b^2)\right)$$

（4） $r > c,$



穿过半径为r的环路的总电流为0

$$\therefore H_4 = 0$$

$$\therefore W_{m4} = 0$$

$$W_m = W_{m1} + W_{m2} + W_{m3} + W_{m4} = \frac{1}{2} L I^2$$

$$L = \frac{2W_m}{I^2}$$

单位长度的自感为：

$$L_0 = \frac{2W_m}{lI^2} = \frac{\mu_0}{2\pi}[\frac{1}{4} + \mu_r \ln(\frac{b}{a})$$
$$+ \frac{1}{(c^2 - b^2)^2}\left(c^4 \ln(\frac{c}{b}) - \frac{1}{4}(c^2 - b^2)(3c^2 - b^2)\right)$$

求自感系数的方法

（1）磁能法 $L = 2W_m / I^2$

●这种方法不会出错

●适用于解决磁场具有对称性的问题：

载有电流I的导体(或回路)产生的磁感强度是对称性分布时，磁场能密度ω_m也呈对称性，通过积分可以简便地求得整个磁场所具有的总能量。

（2）静态定义 $L=\Phi/I$

- 适合规则的简单的线圈回路
- 必须准确计算总磁通（即磁匝链数），否则会出错

（3）动态定义

$$L = -\frac{\varepsilon}{di/dt}$$

- 工程中常用这一方法测量电感；
- 测量时在回路中通已知变化率的电流，测出回路中的感应电动势ε_L时后计算L。