2023.10.20 第十次作业

卢科政　夏业志

2023 年 11 月 8 日

题目 1. (课本 2.34) 图中 $C_1 = 3.0mF, C_2 = 3.0mF, C_3 = 4.0mF$，接到 $300V$ 的电源上。求 (1) 各电容器极板上的电量和电势差;(2) 系统总的能量。

解答. (1)

C_2 与 C_3 并联，可以等效为 $C_{23} = C_2 + C_3 = 7mF$，而且 C_{23} 与 C_1 串联，所以 C_{23} 与 C_1 所带电荷量相同。可得下列等式：

$$\frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_{23}} = U \tag{1}$$

可得 $Q = 0.63C$，所以 C_1 所带电荷量为 $0.63C$。因为 C_2, C_3 并联，所以两者 U_2 相同，因此有：

$$C_2U_2 + C_3U_2 = Q = 0.63C \tag{2}$$

可得 $U_2 = 90V$，可得 C_2 所带电荷量为 $0.27C$，C_3 所带电荷量为 $0.36C$。

$$U_1 = U - U_2 = 210V \tag{3}$$

所以，极板电势差分别为 $U_1 = 210V, U_2 = U_3 = 90V$，电容器极板上的电量为 $Q_1 = 0.63C, Q_2 = 0.27, Q_3 = 0.36C$。

(2)

总能量为：

$$W = \frac{1}{2}\Sigma C_i U_i^2 = 94.5J \tag{4}$$

题目 2. (课本 2.36) 已知在内半径为 R_1、外半径为 R_2 的接地金属球壳内部充满着均匀空间电荷密度 ρ。求:(1) 系统的静电能;(2) 球心处的电势。

解答. (1)

由高斯定理可知：

$$4\pi r^2 E = \frac{4}{3\epsilon_0}\pi(r^3 - R_1^3)\rho \tag{5}$$

$$\Longrightarrow E = \frac{\rho}{3\epsilon_0 r^2}(r^3 - R_1^3) \tag{6}$$

内外金属球壳的电势差为：

$$\Delta U = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho}{3\epsilon_0 r^2}(r^3 - R_1^3)dr = \frac{\rho}{6\epsilon_0 R_2}(R_2^2 - 3R_1^2R_2 + 2R_1^3) \tag{7}$$

因为金属球壳接地，所以 $U_2=0$，所以球心处的电势为：

$$U_1 = U_2 - \Delta U = \frac{\rho}{6\epsilon_0 R_2}(3R_1^2R_2 - 2R_1^3 - R_2^2) \tag{8}$$

r 处的电势为：

$$\varphi(r) = \int_r^{R_2} -\frac{\rho}{3\epsilon_0 r^2}(r^3 - R_1^3)dr = -\frac{\rho}{3}(\frac{1}{2}R_2^2 + \frac{R_1^3}{R_2} - \frac{1}{2}r^2 - \frac{R_1^3}{r}) \tag{9}$$

静电能为：

$$W = \frac{1}{2}\int_{R_2}^{R_1} \varphi(r)4\pi r^2\rho dr = \frac{2\pi\rho}{3\varepsilon_0}(\frac{3}{5}R_1^5 - \frac{1}{3}R_1^3R_2^2 + \frac{1}{15}R_2^5 - \frac{R_1^6}{3R_2}) \tag{10}$$

注记. 这道题题意不明确, 在此给出一个和答案相近的理解, 批改时不判对错.

题目 3. (课本 2.38) 一个半径为 a 的带电球，其体电荷密度在球内随离球心距离 r 的变化关系为 $\rho = Ar^{1/2}$，式中 A 为常数。求:(1) 球内和球外各处的电场;(2) 球内和球外各处的电势;(3) 该球的自能;(4) 球体的等效电容。

解答. (1)

半径为 $r(r<a)$ 的同心球内电荷量为：

$$q(r) = \int_0^r \rho 4\pi r^2 dr = \frac{8}{7}\pi A r^{7/2} \tag{11}$$

由高斯定理易知，当 $r<a$ 时：

$$E(r) = \frac{q(r)}{4\pi r^2\epsilon_0} = \frac{2A}{7\epsilon_0}r^{3/2} \tag{12}$$

当 $r>a$ 时：

$$E(r) = \frac{q(a)}{4\pi r^2\epsilon_0} = \frac{2A}{7\epsilon_0}\frac{a^{7/2}}{r^2} \tag{13}$$

注意标注 E 的方向。

(2)

积分可得：

$$U_{out}(r) = \int_r^\infty \frac{2A}{7\epsilon_0}\frac{a^{7/2}}{r^2}dr = \frac{2A}{7\epsilon_0}\frac{a^{7/2}}{r} \tag{14}$$

$$U_{in}(r) = U_{out}(a) + \int_r^a \frac{2A}{7\epsilon_0}r^{3/2}dr = \frac{A}{\epsilon_0}(\frac{2}{5}a^{5/2} - \frac{4}{35}r^{5/2}) \tag{15}$$

(3)

自能为：

$$W = \frac{1}{2}\int_0^a \rho U_{in}(r)4\pi r^2 dr = \frac{4}{21}\frac{\pi A^2}{\epsilon_0}a^6 \tag{16}$$

(4)

由公式 $W = \frac{Q^2}{2C}$ 可知：

$$C = \frac{Q^2}{2W} = \frac{24}{7}\pi\epsilon_0 a \tag{17}$$

题目 4. (补充作业题) 圆柱形电容器是由半径为 R_1 的直导线和与它同轴的导体圆筒构成，圆筒内径为 R_2，长为 l。其间充满了介电常数为 ϵ 的介质。设沿轴线单位长度上，导线带电量为 λ，圆筒带电量为 $-\lambda$。略去边缘效应，求:(1) 介质中的电场强度、电位移矢量;(2) 极化强度、极化电荷密度和介质内外表面的极化电荷面密度;(3) 导线与圆筒的电势差;(4) 电容 C。

解答. (1). 由高斯定理 $\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_0$:

$$D \cdot 2\pi r l = \lambda l$$

解得：$\vec{D} = \frac{\lambda}{2\pi r}\vec{e_r}$, 则 $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r}\vec{e_r}$

(2). 极化强度

$$\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0\vec{E} = \frac{\lambda(\epsilon - \epsilon_0)}{2\pi\epsilon r}\vec{e_r}$$

极化电荷体密度为 0

内表面的极化电荷面密度为:

$$\sigma_1 = -P(R_1) = -\frac{\lambda(\epsilon - \epsilon_0)}{2\pi\epsilon R_1}\vec{e_r}$$

外表面的极化电荷面密度为:

$$\sigma_2 = P(R_2) = \frac{\lambda(\epsilon - \epsilon_0)}{2\pi\epsilon R_2}\vec{e_r}$$

(3). 导线与圆筒的电势差为:

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} ln\frac{R_2}{R_1}$$

(4). 电容为:

$$C = Q/U = (\lambda l)/(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon} ln\frac{R_2}{R_1}) = \frac{2\pi\epsilon l}{ln\frac{R_2}{R_1}}$$