2023.12.1 第 19 次作业

卢科政　夏业志

2023 年 12 月 17 日

题目 1. (6.3 题) 一根无限长直导线通有电流 $I = I_0 sin(\omega t)$，在它旁边有一个与导线平行的矩形线圈，长为 l，宽为 (b-a)，仅考虑传导电流。求：(1) 在线圈上的感应电动势；(2) 若线圈以一匀速 v 离开导线，则线圈上的电动势为多少？(3) 如果线圈的总电阻为 R，为保持线圈匀速运动，需要给线圈加多大的力？(图见书 P413)

解答. (1). 由安培环路定理，可以计算出距离直导线为 r 的位置处的磁场:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

以电流顺时针方向为正:

$$\Phi = \int_a^b B(r) l dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi} l \cdot ln(\frac{b}{a})$$

利用电磁感应定律:

$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 l}{2\pi} ln(\frac{b}{a}) I_0 \omega cos(\omega t)$$

(2). 电动势由两部分构成:

动生电动势部分:

$$\epsilon_1 = -(vl \cdot B(b+vt) - vl \cdot B(a+vt)) = -\frac{\mu_0 I_0 l}{2\pi} sin(\omega t) v (\frac{1}{b+vt} - \frac{1}{a+vt})$$

感生电动势部分:

$$\epsilon_2 = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 l}{2\pi} ln(\frac{b+vt}{a+vt}) I_0 \omega cos(\omega t)$$

总的电动势为:

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 = -\frac{\mu_0 I_0 l}{2\pi}(\omega cos(\omega t) ln(\frac{b+vt}{a+vt}) + sin(\omega t)\frac{(a-b)v}{(a+vt)(b+vt)})$$

(3). 线圈中的电流为:

$$I_R = \frac{\epsilon}{R} = \epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 = -\frac{\mu_0 I_0 l}{2\pi R}(\omega cos(\omega t) ln(\frac{b+vt}{a+vt}) + sin(\omega t)\frac{(a-b)v}{(a+vt)(b+vt)})$$

则为了使受力平衡，施加的力为 (以向左为正方向):

$$F = -(I_R l B(b+vt) - I_R l B(a+vt)) = \frac{(\mu_0 I_0 l)^2 sin(\omega t)}{(2\pi)^2 R} \cdot \frac{a-b}{(a+vt)(b+vt)} \cdot [\omega cos(\omega t) ln(\frac{b+vt}{a+vt}) + sin(\omega t)\frac{(a-b)v}{(a+vt)(b+vt)}]$$

题目 2. (6.9 题) 一个滑动导线电路平面被垂直安置在板上，如图所示，假设导线上所有电阻 R 都集中在底部，导轨摩擦力可以忽略，均匀磁场与平面垂直，导轨的质量为 m，长度可以忽略，均匀磁场与平面垂直，导轨的质量为 m, 长度为 l。(1). 证明滑动导轨的收尾速度为 $v_T = mgR/(B^2l^2)$;(2). 如果磁场与平面成 θ 角，收尾速度又为多少? (图见书 P414)

解答. (1). 达到收尾速度时导轨的重力与安培力平衡，之后便处于受力平衡状态:

$$mg = IBl$$

电流 I 由动生电动势产生:

$$I = \frac{\epsilon}{R} = \frac{Blv}{R}$$

联立上述两式得到:

$$v = mgR/(B^2l^2)$$

(2). 将 B 分解为沿着平面和垂直于平面的两部分，只有垂直于平面的 $B_{\pm} = Bsin\theta$ 对安培力和电动势有影响，力平衡条件变为:

$$mg = IlBsin\theta$$

电流 I:

$$I = \frac{\epsilon}{R} = \frac{vlBsin\theta}{R}$$

联立两式得:

$$v = \frac{mgR}{B^2l^2sin^2\theta}$$

题目 3. (6.14 题) 半径为 R 的圆柱形空间存在均匀的随时间线性变化的磁场，$B = B_0 + kt$，k 为常数，如图所示，在这个横截面上有一根长为 2R 的导体，其中长度为 R 的部分在圆柱面内，另一半在外面，求 ab 导体上的感应电动势 U_{ab} 和导体 ac 上的感应电动势 U_{ac}。(图见书 P414)

解答. 圆内的涡旋电场:

$$E(r) \cdot 2\pi r = -\frac{\partial B}{\partial t} \cdot \pi r^2 \Rightarrow E(r) = -\frac{k}{2}r, r < R$$

圆外的涡旋电场:

$$E(r) \cdot 2\pi r = -\frac{\partial B}{\partial t} \cdot \pi R^2 \Rightarrow E(r) = -\frac{kR^2}{2r}, r > R$$

则:

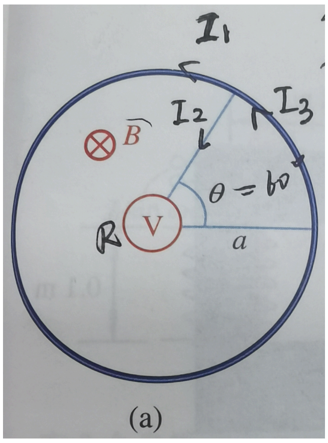
$$U_{ac} = -\int_a^c \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_a^c (-\frac{k}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}R}{2cos(\theta)})cos(\theta)dl = \frac{\sqrt{3}}{4}kR^2$$

$$U_{cb} = -\int_c^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_c^b \frac{kR^2}{2}\frac{1}{r}cos\theta dl = \int_c^b \frac{kR^2}{2}\frac{1}{r}cos\theta rd\theta = \frac{kR^2}{2}\Delta\theta_{bc} = \frac{k\pi R^2}{12}$$

$$U_{ac} = U_{ac} + U_{cb} = \frac{3\sqrt{3}+\pi}{12}kR^2$$

题目 4. (6.15 题) 半径为 a, 电阻为 r 的均匀细导线首尾相接形成一个圆。现将电阻为 R(且 r=9R) 的伏特计以及电阻可以忽略的导线，按照图 (a) 和图 (b) 所示的方式分别与脚点相连接。这两点之间的弧线所对的圆心角为 $\theta = \pi/3$。若在垂直圆平面的方向上有均匀变化的磁场，已知磁感应强度随时间的变化率为 k。(1). 图 (a) 中伏特计的读数为多少？(2) 图 (b) 中伏特计的读数为多少？(图见书 P415)

解答.



(a)

(1). 如图所示，利用基尔霍夫定律:

$$\begin{cases} I_3 = I_1 + I_2 \\ I_1 \cdot 15R/2 + I_3 \cdot 3R/2 = k\pi R^2 \\ I_1 \cdot 3R/2 + I_2 \cdot R = k\pi R^2/6 \end{cases}$$

解得:$I_2 = 0$

则伏特表读数为 $U_a = 0$

(2). 三个电流的方向依然如图 a 中的假设，利用基尔霍夫霍夫定律:

$$\begin{cases} I_3 = I_1 + I_2 \\ I_1 \cdot 15R/2 + I_3 \cdot 3R/2 = k\pi R^2 \\ I_3 \cdot 3R/2 + I_2 \cdot R = k(\frac{\pi}{6}R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}R^2) \end{cases}$$

解得：$I_2R = -\frac{\sqrt{3}}{9}kR^2$

则伏特表读数为 $U_b = \frac{\sqrt{3}}{9}kR^2$