

# 2019-2020 学年信息论 B 期末试题

学生所在系: \_\_\_\_\_ 姓名: \_\_\_\_\_ 学号: \_\_\_\_\_

$$\log 3 = 1.5850, \log 5 = 2.3219, \log 7 = 2.8074, \log 11 = 3.4594$$

1. (每题 4 分, 共 8 分) 选择题 (多选题)

(a) 设  $X, Y, Z$  为离散随机变量, 则以下不等式正确的是 ( )

$$(A) H(X, Y, Z) - H(X, Y) \leq H(X, Z) - H(X)$$

$$(B) I(X; Y) \geq I(X; Y | Z)$$

$$(C) H(X) < H(3X)$$

$$(D) I(X; Y, Z) \geq I(X; Y)$$

(b) 以下编码不可能是二元哈夫曼编码的是 ( )

$$(A) \{0, 10, 11\}$$

$$(B) \{00, 01, 10, 110\}$$

$$(C) \{01, 10\}$$

$$(D) \{1, 01, 10\}$$

2. (每题 4 分, 共 8 分) 判断题 (若判断为对, 简要说明或证明; 若判断为错, 简要说明或举出反例)

(a) 存在码长分别为 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3 的三元即时码。

(b) 一个方差为非零有限值的连续随机变量的微分熵总是有限的。

3. (每题 4 分, 共 8 分) 填空题

(a) 有三个二元离散随机变量  $X, Y, Z$ , 若要使得  $I(X; Y) = 0$  比特,  $I(X; Y | Z) = 1$  比特, 则  $X, Y, Z$  的联合概率分布为\_\_\_\_\_。(给出一个满足条件的例子即可)

(b) 由四个子信道构成的独立并联高斯信道的各子信道的噪声方差分别为 1, 2, 4, 8, 总功率限制为  $P = 6$ , 则总信道容量为  $C =$ \_\_\_\_\_。(给出表达式即可)

4. (10 分) 给定一个概率分布  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  和一个整数  $m (0 \leq m \leq n)$ . 定义  $q_m = 1 - \sum_{i=1}^m p_i$ , 证明:

$$H(p_1, p_2, \dots, p_n) \leq H(p_1, p_2, \dots, p_m, q_m) + q_m \log(n - m)$$

并说明何时等式成立.

5. (12 分) 随机变量  $X_1, X_2, X_3, X_4$  构成了马尔科夫链  $X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow X_4$ . 证明:

$$I(X_1; X_3) + I(X_2; X_4) \leq I(X_1; X_4) + I(X_2; X_3)$$

6. (10 分) 设  $\{X_i, i = 1, 2, \dots\}$  为时间不变的马尔可夫链, 初始状态的概率分布为  $P(X_1 = 1) = 0.5, P(X_1 = 2) = 0.25, P(X_1 = 3) = 0.25$ . 转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

请计算:

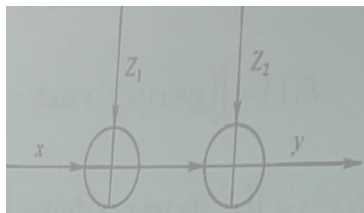
- (a) 联合熵  $H(X_1, X_2, X_3)$ 。  
 (b) 马尔可夫链的熵率。

7. (10 分) 设离散信源的概率分布为

$$\begin{bmatrix} S \\ P(S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 & s_7 & s_8 \\ 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.05 & 0.05 & 0.05 & 0.05 \end{bmatrix}$$

请给出该信源的三元哈夫曼编码, 并计算平均码长。要求给出两种编码方案, 平均码长相同, 但码长方差不同。

8. (10 分) 如图所示的信号和噪声模型，输入信号  $X$ 、噪声  $Z_1$  和  $Z_2$  都是均值为 0、方差为  $\sigma^2$  的高斯分布随机变量。 $X$  与  $Z_1$  和  $Z_2$  独立， $Z_1$  和  $Z_2$  的相关系数为  $\rho$ 。求：
- (a)  $X$  的微分熵。
  - (b) 随机变量  $Z_1 + Z_2$  的方差。
  - (c)  $Y$  的微分熵。
  - (d) 互信息  $I(X; Y)$ 。



9. (9 分) 通信系统通过带宽有限信道传输信息，信道受功率谱密度  $N_0/2 = 0.5 \times 10^{-8}$  瓦特/赫兹的加性高斯白噪声干扰，信号功率为  $P = 1$  瓦特
- (a) 若信道带宽为 3000 赫兹，求信道容量。
  - (b) 若信道无带宽限制，求信道容量。
  - (c) 若信道带宽变为  $1 \times 10^5$  赫兹，为保持与 (a) 相同的信道容量，此时的信号功率应该为多少瓦特？

10. (15 分) 设一二维二元信源  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$  由两个独立的伯努利分布的二元信源  $X_1, X_2$  构成, 其中  $X_1$  的概率分布为  $p_0 = 3/4, p_1 = 1/4$ ,  $X_2$  的概率分布为  $q_0 = 5/8, q_1 = 3/8$ . 每个二元信源的失真度量都是汉明失真度量。失真限制为总的失真限制, 即  $Ed(X_1, \hat{X}_1) + Ed(X_2, \hat{X}_2) \leq D$ , 求该二维二元信源的率失真函数。