第一章 矢量分析

即数学中的“场论”

主要内容：

§1.1 基本概念

§1.2 无旋场、无散场及矢量场的分解

§1.3 ∇算子的运算

§1.4 积分定理

§1.5 δ 函数

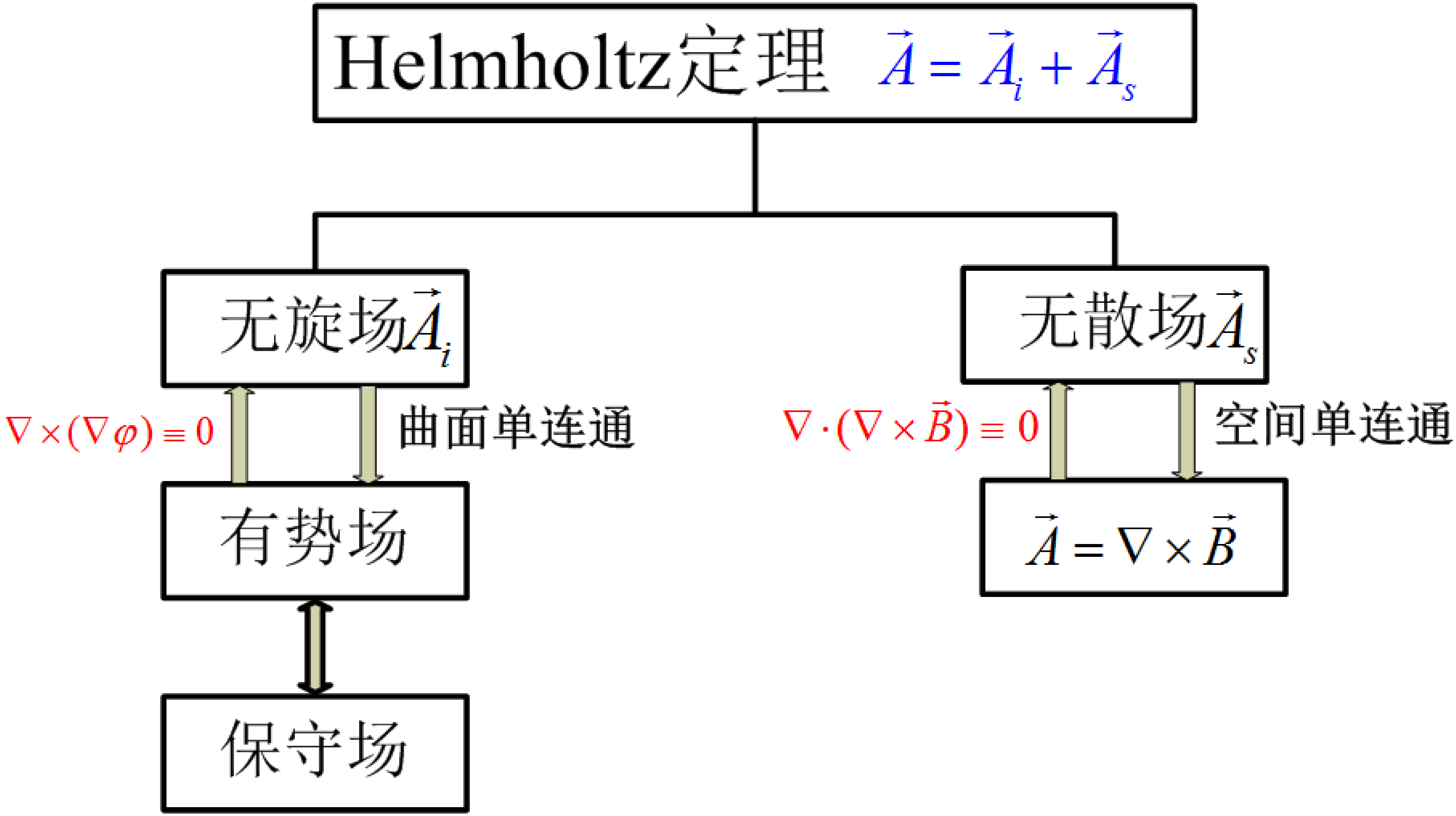
§1.1 基本概念

- 场
  - 标量场
    - 方向导数
      - 梯度
  - 矢量场
    - 通量
      - 散度
        - Guass定理
    - 环量
      - 旋度
        - Stockes定理

$$\int_V \nabla\cdot\vec{A}\,dV=\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}$$

$$\int_S (\nabla\times\vec{A})\cdot d\vec{S}=\oint_\ell \vec{A}\cdot d\vec{\ell}$$

§ 1.2 无旋场、无散场及矢量场的分解



§ 1.3 ▽算子的运算

二个矢量代数公式：

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{B}\cdot\vec{A})\vec{C}$$

或 $$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{C}\cdot\vec{B})\vec{A}$$

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})=\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$$

或 $$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}=(\vec{B}\times\vec{C})\cdot\vec{A}=(\vec{C}\times\vec{A})\cdot\vec{B}$$

记忆！

§ 1.3 ▽算子的运算

一、一阶▽算子的运算

$$\nabla = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

T(▽)：包含▽算子的表达式且对▽ 呈线性。

性质：

1)对于任何**T(▽)**，可将▽看作普通矢量进行矢量代数的恒等变换，所得结果不变。但在变换中不能改变▽算子对每个函数的作用性。必要时对不受▽算子作用的函数（包括微分时视为常数的函数）加注下标 c，以示其被视为常数。

§1.3 ▽算子的运算

2)如果T(▽)中▽的后面有二个函数相乘（包括数乘、点乘和叉乘）且它们都受到▽算子的作用，则T(▽)可表为二项之和：在一项中，其中一个函数视为常数，不受▽算子的作用；而在另一项中，另一个函数视为常数，不受▽算子的作用。

要点：▽为一矢量微分算子，合法的运算必须既符合矢量代数运算规则，又符合微分运算规则，其必须兼顾其矢量特性和微分特性。

§1.3 ▽算子的运算

二、二阶▽算子的运算

$$\nabla^2\varphi \qquad \nabla^2\vec{A} \qquad \nabla\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})$$

$$\nabla^2=\nabla\cdot\nabla$$

T(▽, ▽)：包含二阶▽算子的表达式且对每个▽算子呈线性。

运算规则：

T(▽, ▽) → T(∇_1, ∇_2) → 运算结束后，

$\nabla_1=\nabla_2=\nabla$

§1.4 积分定理

一、Gauss类（Gauss定理及可由其证明的定理）

二、Stokes类（Stokes定理及可由其证明的定理）

标量格林定理

第一定理：(1-85)

$$\int_V (\varphi\nabla^2\psi + \nabla\varphi\cdot\nabla\psi)dV$$

$$= \oint_S \varphi\nabla\psi\cdot d\vec{S} = \oint_S \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}dS$$

第二定理：(1-86)

$$\int_V (\varphi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\varphi)dV$$

$$= \oint_S (\varphi\nabla\psi - \psi\nabla\varphi)\cdot d\vec{S}$$

$$= \oint_S (\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n})dS$$

§ 1.5 δ函数

一、δ函数的定义及基本性质

定义：

1） $\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)=\begin{cases}\infty, & \vec{r}=\vec{r}_0\\ 0, & \vec{r}\neq\vec{r}_0\end{cases}$

2） $\int_V \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)dV=1, \quad \vec{r}_0\in V(\text{开域})$

$(=0, \quad \vec{r}_0\notin V(\text{闭域}))$

性质：

$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)=\delta(\vec{r}_0-\vec{r})$

$$\int_a^b \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)f(\vec{r})dV=\begin{cases}f(\vec{r}_0), & \vec{r}_0\in V(\text{开域})\\ 0, & \vec{r}_0\notin V(\text{闭域})\end{cases}$$

【验证步骤】:

1) $\vec{r}=\vec{r}_0$时;　　2) $\vec{r}\neq\vec{r}_0$时;

$$\int_V \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)dV$$

3) $=\int_V \delta(u_1-u_1^0)\delta(u_2-u_2^0)\delta(u_3-u_3^0)du_1du_2du_3$

$$(1)\quad -\nabla^2\frac{1}{r}=\nabla\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)=4\pi\delta(\vec{r})$$

$$(2)\quad \nabla\times\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)=0$$

正交曲线坐标系

	直角	圆柱	球
∇	√	×	×
$\nabla\cdot$	√	×	×
$\nabla\times$	√	×	×
∇^2	√	×	×
dS	√	√	√
dV	√	√	√

第二章 静电场

目录：

§2.1 真空中静电场的基本定律

库仑定律 $F=k\dfrac{qq'}{R^2}\hat{R}$

电场强度 $\vec{E}=\dfrac{q\vec{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$

叠加原理

体电荷分布 $\vec{E}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \dfrac{\rho(\vec{r}')\vec{R}}{R^3}dV'$

面电荷分布 $\rho_s(\vec{r}')dS'$

线电荷分布 $\rho_\ell(\vec{r}')d\ell'$

点电荷分布 $\rho(\vec{r})=q\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$

零级近似

基本方程

§ 2.1 真空中静电场的基本定律

库仑定律 $F = k\dfrac{qq'}{R^2}\hat{R}$

电场强度

$$\vec{E} = \frac{q\vec{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

$$\vec{E} = \frac{Q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + O(\frac{1}{r^3})$$

叠加原理

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \rho / \varepsilon_0 \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \end{cases}$$

零级近似

$$\begin{cases} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q / \varepsilon_0 \\ \oint_\ell \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \end{cases}$$

基本方程

§ 2.2 静电场的电位

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{E} = -\nabla \varphi$$

定义

电位降

性质

满足的方程

$$\nabla^2 \varphi = -\rho / \varepsilon_0$$ 泊松(Poisson)方程

特别，若 ρ=0，则

$$\nabla^2 \varphi = 0$$ 拉普拉斯(Laplace)方程

- 泊松方程形式解： **物理意义与等效思想：(不用记公式)**

- 无限大空间中，电荷分布在有限空间时，电位的解：

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{R} dV'$$

- 远区特性，零级近似的物理意义

§ 2.3 静电场问题求解方法概述

一、直接积分法：

二、高斯定理（＋迭加原理）

三、解泊松方程

解的唯一性问题：

当电荷分布在有限区域时，选$\varphi|_{\infty}=0$，则既选定了电位零点，又给出了无限远处的边界条件：无限远处没有电荷分布或电荷分布贡献为零。

当电荷分布至无限远处时，除选定电位零点外，必须根据所求解的具体问题给出无限远处的边界条件。

§ 2.4 电位的多极展开

一、单极项 φ_m（零级近似）

$$\varphi_m = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_V \rho(\vec{r}')dV' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \sim \frac{1}{r}, \qquad \vec{E}_m \sim \frac{1}{r^2}$$

二、偶极项 φ_d（一级近似）

$$\varphi_d = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}')(\vec{r}'\cdot\nabla)\frac{1}{r}dV' = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \sim \frac{1}{r^2}, \quad \vec{E}_d \sim \frac{1}{r^3}$$

其中，$\vec{p} = \int_V \rho(\vec{r}')\vec{r}'dV'$称为电荷分布的**电偶极矩**。

电偶极子：具有电偶极矩且产生的电位如上的电荷分布。**电偶极子的物理模型**、性质。

§ 2.5 存在介质时静电场的基本定律

◆介质极化、极化强度和极化电荷的概念和定义
◆存在介质时满足的基本方程、本构关系
◆边界条件

极化强度定义： $\vec{P} = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{\Delta \vec{p}}{\Delta V} = \dfrac{d\vec{p}}{dV}$

$\rho_b(\vec{r}) = -\nabla \cdot \vec{P}(\vec{r})$为（等效）体极化电荷密度；

$\rho_{sb}(\vec{r}) = \hat{n} \cdot \vec{P}(\vec{r})$ 为（等效）面极化电荷密度。

介质电中性： $Q_s + Q_{sb} = \int_V \rho_b dV + \oint_S \rho_{sb} dS = 0$

本构关系： $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

§ 2.5 存在介质时静电场的基本定律

◆介质极化、极化强度和极化电荷的概念和定义
◆存在介质时满足的基本方程、本构关系
◆边界条件

电位移矢量 $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho_f dV = Q_f$$

$$\oint_\ell \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

$$\vec{E} = -\nabla \varphi$$

§ 2.5 存在介质时静电场的基本定律

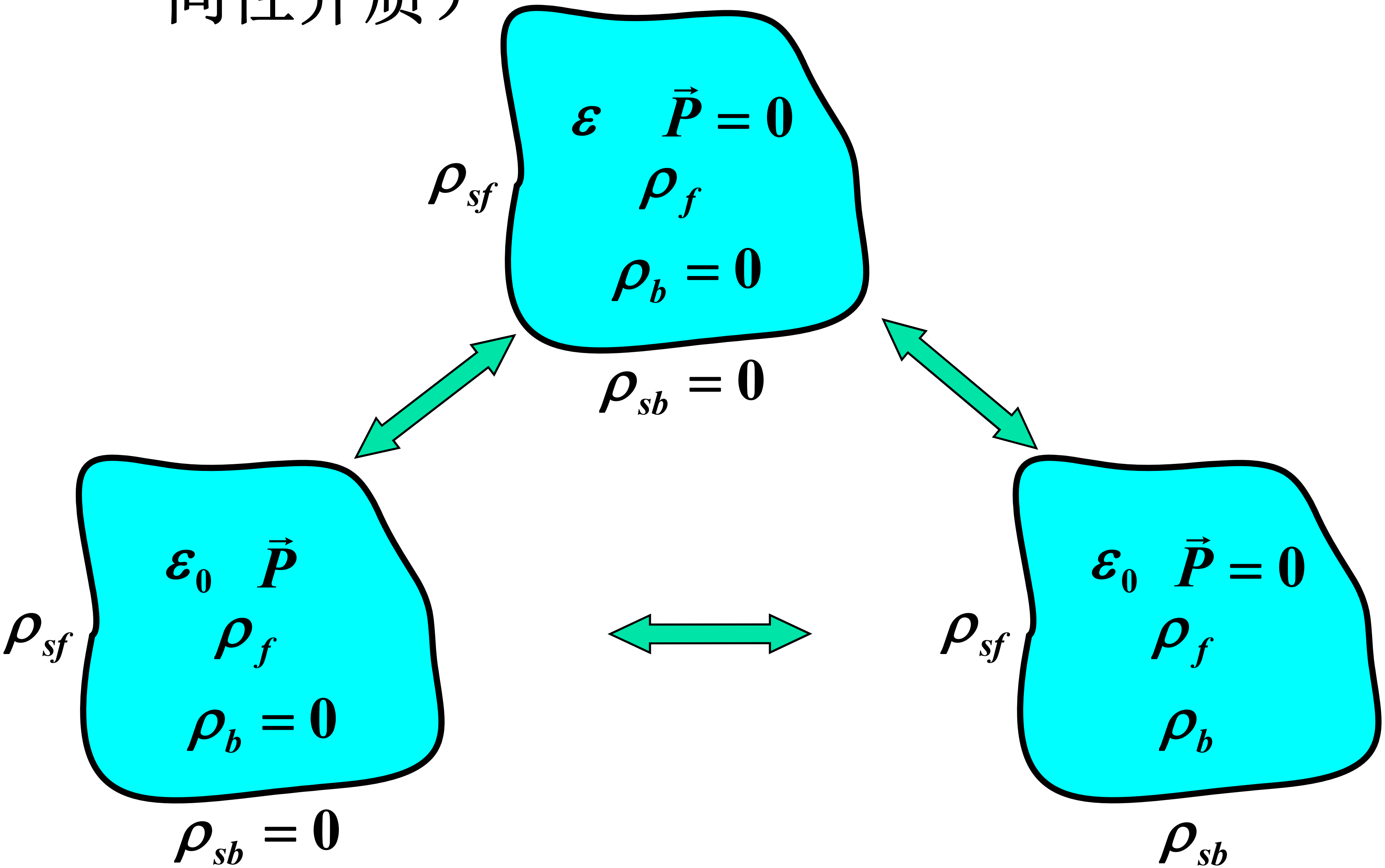
◆介质极化、极化强度和极化电荷的概念和定义
◆存在介质时满足的基本方程、本构关系
◆边界条件

$$\begin{cases} \hat{n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\rho_{sf} \\ \hat{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0 \end{cases}$$

特别，在导体外表面： $\begin{cases} \hat{n}\cdot\vec{D}=\rho_{sf} \\ \hat{n}\times\vec{E}=0 \end{cases}$

用电位表示： $\begin{cases} \varepsilon_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n}-\varepsilon_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}=\rho_{sf} \\ \varphi_1=\varphi_2 \end{cases}$

- ➢等效思想（三种模型）
- ➢介质的极化特性（尤其是线性均匀各项同性介质）



§ 2.5 存在介质时静电场的基本定律

存在介质时静电场问题的求解方法：

1）直接积分法：

仅限于线性均匀各向同性无限大介质。

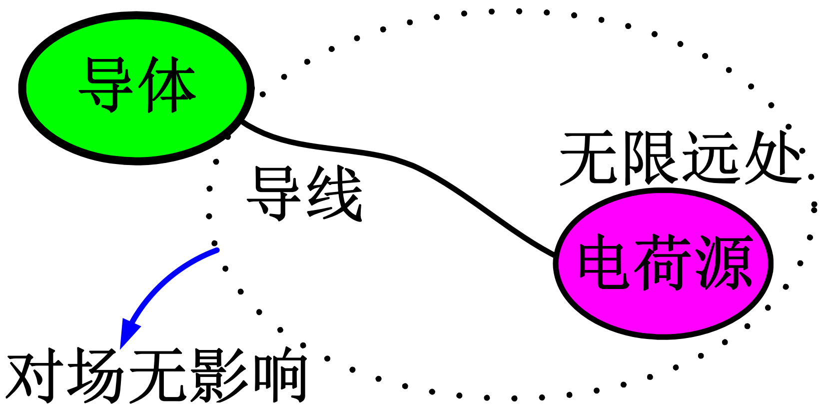
2） 高斯定理：

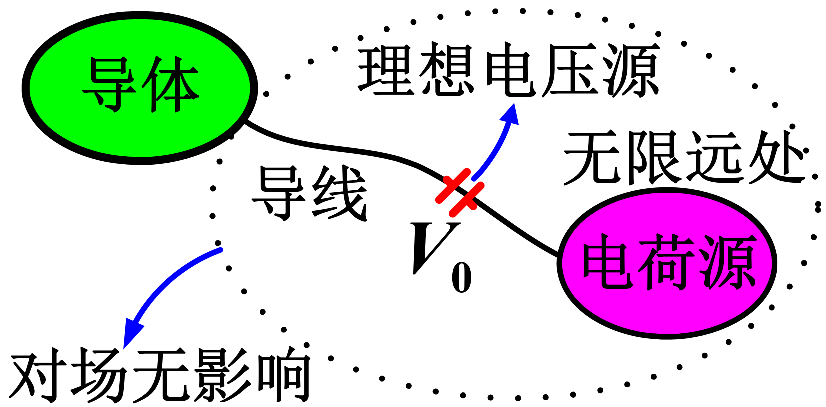
场的对称性、连续性、均匀性等分析：利用边界条件、介质极化的特点等。

3）解泊松方程

§2.6 静电场中的导体

- ➢基本概念和性质
- ➢理想化模型
- ➢导体系电容（定义和物理意义）、互易性





<u>导体接地</u>

<u>保持导体电位为V_0</u>

§ 2.7 静电场的能量

一、真空中静电场的能量

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \left|\vec{E}\right|^2 dV$$

二、介质中静电场的能量

物理含义

$$W = \frac{1}{2}\int_V \rho_f \varphi dV = \frac{1}{2}\int_V \vec{D}\cdot\vec{E}dV$$

$\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$称为静电场的能量密度。

第三章 静电场边值问题的求解方法

本章目录：

- 边值问题
  - 微分方程
    - $\nabla^2\varphi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon}$
    - $\nabla^2\varphi = 0$
  - 边界条件
    - 场域边界条件
      - 第一类边界条件
        - 已知场域边界上各点电位值 $\varphi|_S = f_1(s)$
      - 第二类边界条件
        - 已知场域边界上各点电位的法向导数 $\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S = f_2(s)$
      - 第三类边界条件
        - 一、二类边界条件的线性组合，即 $\left.(\varphi + \beta\dfrac{\partial\varphi}{\partial n})\right|_S = f_3(s)$
    - 介质交界处边界条件
      - $\varphi_1 = \varphi_2$
      - $\varepsilon_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \varepsilon_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n} = \rho_{sf}$
    - 自然边界条件
      - 参考点电位
      - $\lim\limits_{r\to\infty} r\varphi =$ 有限值

- 边值问题研究方法
  - 计算法
    - 解析法
      - 镜像法
      - 保角变换法
      - 分离变量法
      - 格林函数法
      - ····
    - 数值法
      - 有限差分法
      - 有限元法
      - 边界元法
      - 矩量法
      - 模拟电荷法
      - ····
  - 实验法
    - 实测法
    - 模拟法
      - 数学模拟法
      - 物理模拟法
      - ····
  - 作图法
    - 定性
    - 定量

§3.1 唯一性定理

✓概念
✓重要意义

意义：

- 指出了解唯一的条件；
- 给求解方法提供了自由度（只需找到一个解满足方程及边界条件即可）。

§3.2 镜像法

注意事项：

① 求解区域内不能做任何改变；

② 镜像电荷分布必须位于求解区域之外或边界上，即其产生的场在求解区域内必须满足拉普拉斯方程；

③ 镜像电荷分布不是唯一的；

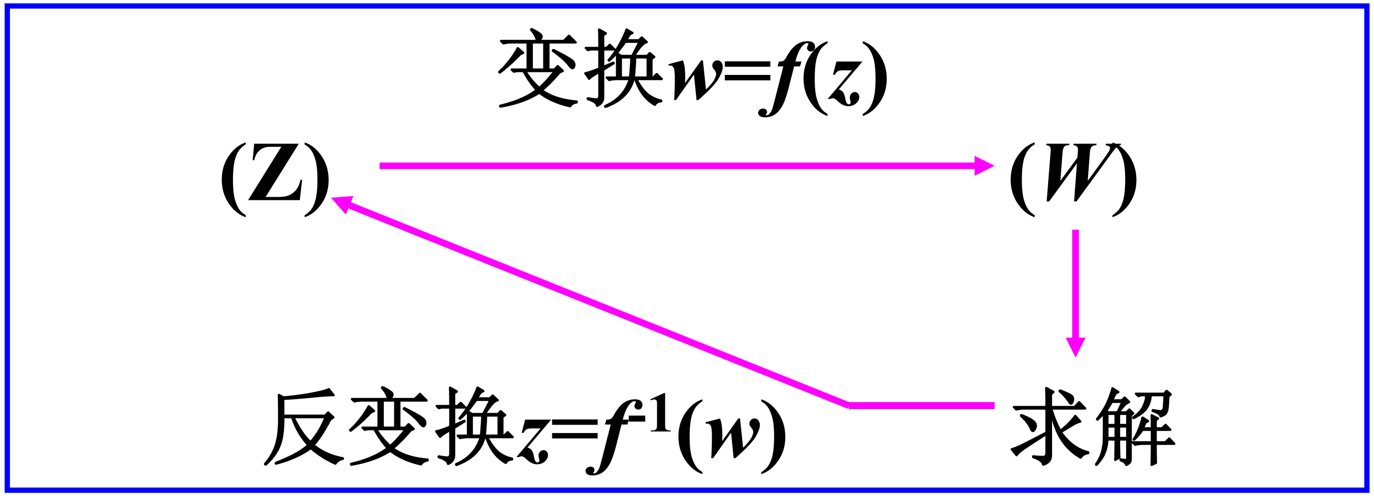
④ 解仅对求解区域$x > 0$有效，镜像电荷分布与求解区域之外和边界上电荷的实际分布方式无关；

⑤ 无限大接地导体前任意给定电荷分布所感应的面电荷分布均可用镜像电荷代替。

§3.3 解析函数法

- ➢基本概念
- ➢保角变换法（指数、对数、幂函数）

注意使用条件和单一性区域



§ 3.4 分离变量法

方程、边界条件齐次或非齐次：

“某一方向齐次”： 该方向所有边界条件均齐次。

“某一方向非齐次”： 该方向至少有一边界条件非齐次

分离变量法要点：

① 能直接求解的问题：

$\begin{cases}\text{齐次方程} \\ \text{边界条件仅在一个方向非齐次}\end{cases}$ （I）

§3.4 分离变量法

求解步骤:

分离变量

齐次方向求特征值和特征解（利用齐次边界条件）

通解

使通解满足非齐次方向边界条件

解

对于正交性公式，直角坐标系需自己记忆，圆柱和球坐标系会给出（只考课上所讲几种情况）

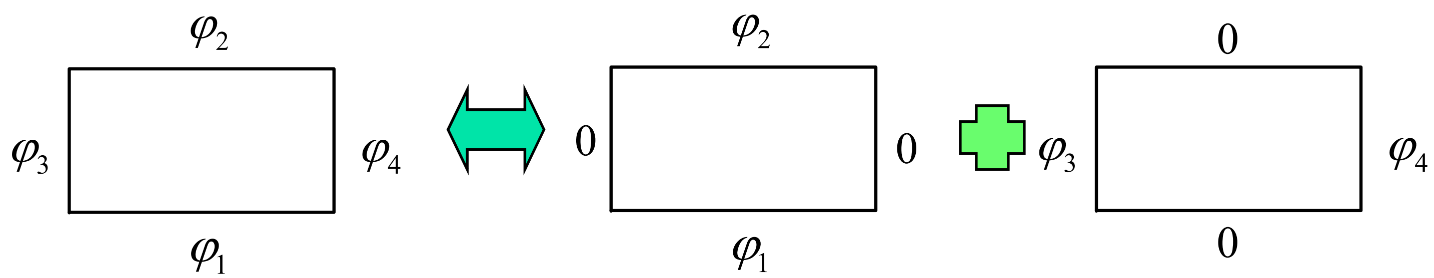
§ 3.4 分离变量法

② 齐次方程
一般非齐次边界条件 （II）

根据迭加原理分解，将问题（II）转化为问题（I）

（A）一般非齐次边界条件分解为若干个仅在一个方向非齐次的边界条件。

例：



（B）寻找齐次方程特解 φ_0，令$\varphi = \varphi_0 + \varphi'$，则$\nabla^2 \varphi' = 0$，并使得 φ'满足的边界条件仅在一个方向非齐次。

§ 3.4 分离变量法

③ 非齐次方程
一般非齐次边界条件

（ III ）

根据迭加原理分解，将问题（III）转化为问题（II）

（A）寻找非齐次方程特解 φ_0，令 $\varphi = \varphi_0 + \varphi'$，

则 $\nabla^2 \varphi' = 0$。

（B）分区：

适合于点、线、面电荷分布

例：点电荷

§ 3.5 格林函数法

➢基本思想及定义

基本思想：

先求点（线）电荷在齐次边界条件下的电位，然后再求任意电荷分布、任意非齐次边界条件下的电位。

定义：
$$\begin{cases} \nabla^2 G = -\delta(\vec{r}-\vec{r}\,'),\ \vec{r},\vec{r}\,' \in V \\ \text{齐次边界条件（}S\text{上）} \end{cases}$$

称$G(\vec{r},\vec{r}\,')$为格林函数

物理意义：

G/ε代表单位点（线）电荷在给定齐次边界条件下产生的电位。

§3.5 格林函数法

➢格林函数法的求解方法

- 镜像法
- 保角变换法+镜像法
- 分离变量法

第3.5章 恒定电流的电场

本章目录：

§ 3.5.1 恒定电流场的一般规律

§ 3.5.2 导电介质中的恒定电流场

- 电流和电流密度的定义以及它们之间的关系

$$I = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$\vec{J} = \rho_v \vec{v}$$

- 电荷守恒定律

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

- 焦耳定律

$$\frac{dP}{dV} = \vec{E} \cdot \vec{J}$$

$$P = \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV$$

➢恒定电流场的基本特性

➢基本方程和边界条件

① 由连续分布的运动电荷产生。

② 在相同运动轨道上每一类运动电荷的速度大小不随时间变化。

③ （每一类）运动电荷分布不随时间变化。

④ 电场不随时间变化。

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{D}=\rho_f \\ \nabla\times\vec{E}=0 \\ \nabla\cdot\vec{J}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=Q_f \\ \oint_\ell \vec{E}\cdot d\vec{\ell}=0 \\ \oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\rho_{sf} \\ \hat{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0 \\ \hat{n}\cdot(\vec{J}_2-\vec{J}_1)=0 \end{cases}$$

$$\vec{E}=-\nabla\varphi$$

§ 3.5.2 导电介质中的恒定电流场

- 欧姆定律 $\vec{J} = \sigma\vec{E}$
- 维持恒定电流场的条件
- 基本方程和边界条件
- 理想导体在恒定电流场中的特性
- 与静电场中导体的对偶性

$$\rho_f = 0$$

$$\nabla^2\varphi = 0$$

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

$$\sigma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \sigma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$$

导电介质中恒定电场的求解方法

一般求解漏电导

① $\underline{\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_f}$

线性均匀各向同性导电介质：

$$\rho_f = 0 \Rightarrow \nabla\cdot\vec{D} = 0 \Rightarrow \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = 0$$

$\underline{\int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = I}$

$$\nabla\cdot\vec{J} = 0 \Rightarrow \oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = 0$$

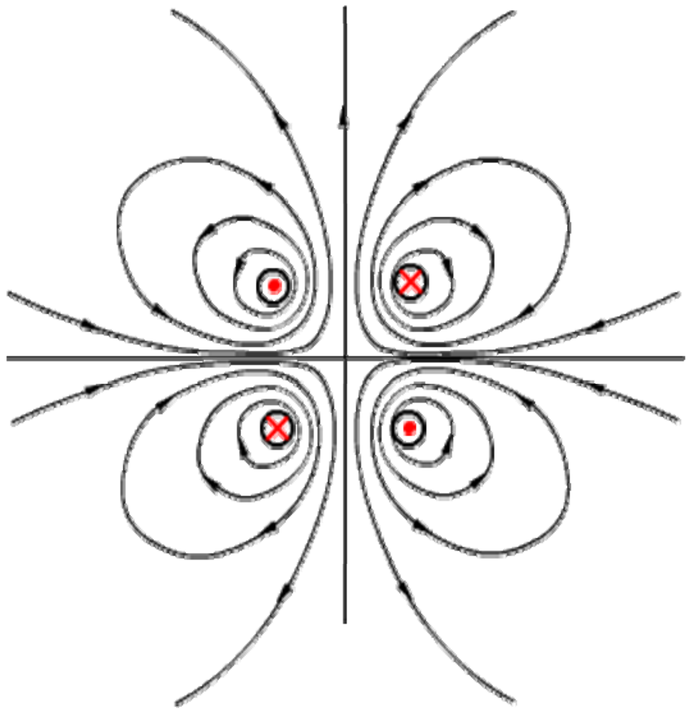
② 解方程

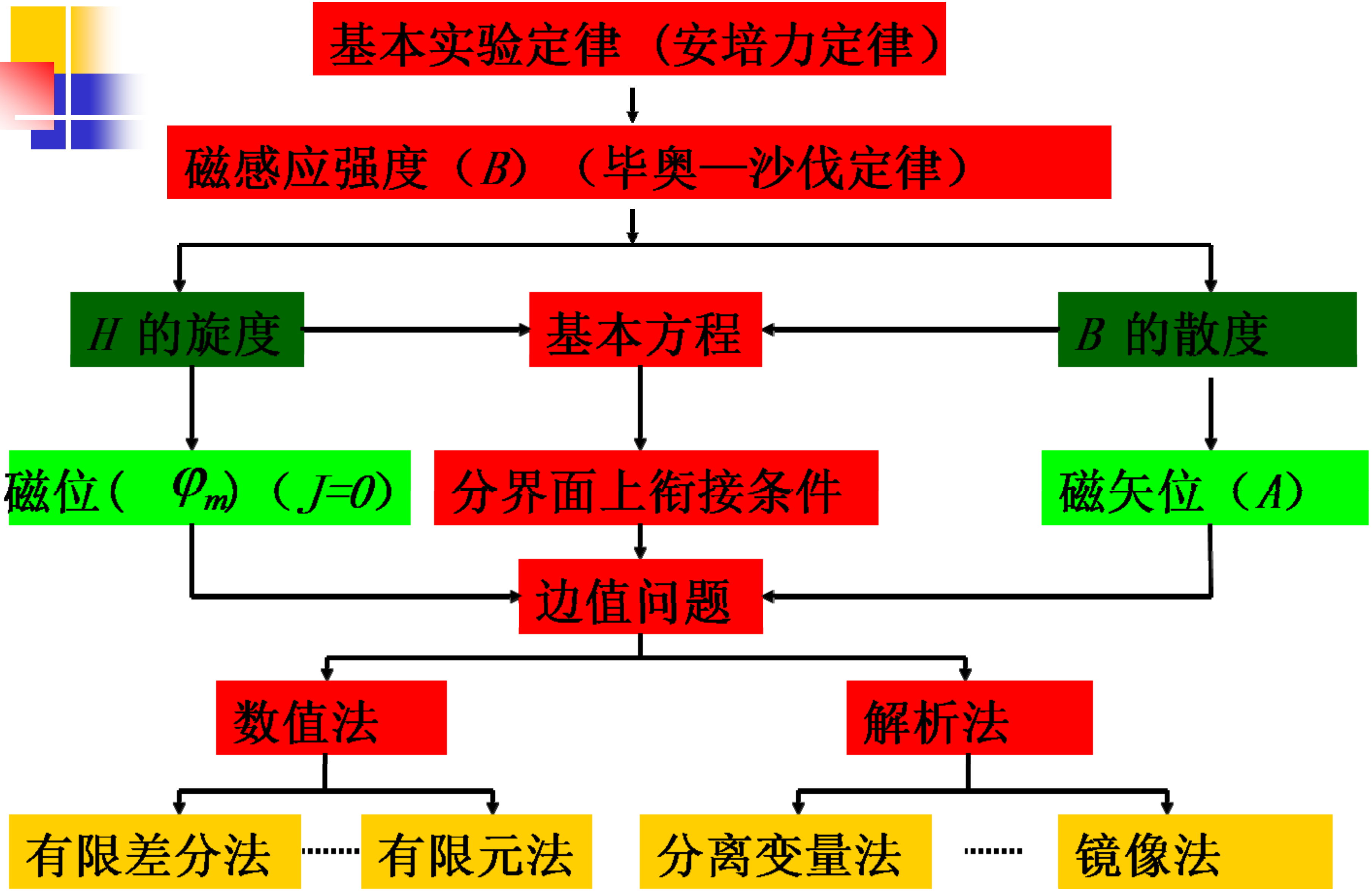
③ 利用电阻的串并联

④ 利用对偶性

第四章 恒定磁场

本章目录:




基本实验定律（安培力定律）
磁感应强度（B）（毕奥—沙伐定律）
H 的旋度
基本方程
B 的散度
磁位（ φm）（J=0）
分界面上衔接条件
磁矢位（A）
边值问题
数值法
解析法
有限差分法
有限元法
分离变量法
镜像法

恒定磁场知识结构框图

§4.1恒定磁场的基本规律

- ➢电流源与磁感应强度定义
- ➢比奥沙法尔定律
- ➢磁感应强度的远区特性（零级近似）
- ➢基本方程（有旋无散场）
- ➢洛伦兹力

毕奥—沙伐尔定律：体电流：$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J} \times \vec{R}}{R^3} dV'$

§4.1恒定磁场的基本规律

其基本方程为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = 0\text{（磁力线闭合，不中断）} \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}\text{（磁感应强度的旋度为电流密度）} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0\text{（磁场的高斯定律）} \\ \oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I\text{（静磁场的安培环路定律）} \end{cases}$$

洛仑兹力： $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

§ 4.2 矢量磁位

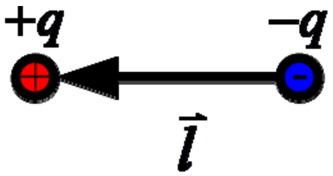
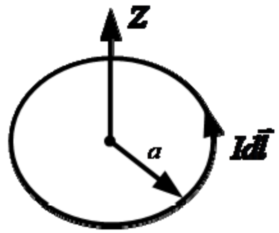
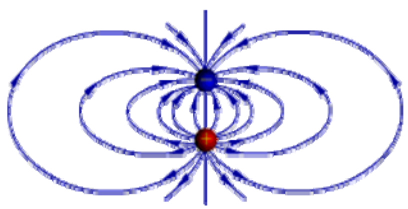
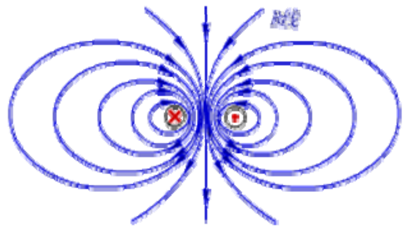
➢概念和由来

因为$\nabla\cdot\vec{B}=0 \Rightarrow \vec{B}=\nabla\times\vec{A}$

➢规范变换（库仑规范）

$$\nabla\bullet\vec{A}=0 \Rightarrow \vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}}{R}dV'$$

§ 4.3 矢量磁位的多极展开

	电偶极子	磁偶极子
模型	 $\vec{P}=q\vec{l}$	 $\vec{m}=\pi a^2 I\hat{z}$
条件	①$\vec{r}\to\infty$ 或②$l\to 0, q\to\infty$ 但$\lim\limits_{l\to 0} ql=P$	①$\vec{r}\to\infty$ 或②$a\to 0, I\to\infty$ 但$\lim\limits_{a\to 0}\pi a^2 I=m$
产生的电场与磁场		
电量	$\rho_b=-\nabla\bullet\vec{P}(r)$ $\rho_{sb}=\hat{n}\bullet\vec{P}(r)$	$\vec{J}_m=\nabla\times\vec{M}$ $\vec{J}_{sm}=\vec{M}\times\hat{n}$

§ 4.4 磁介质中的恒定磁场

恒定磁场的基本方程表示为

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$$ （磁通连续原理）

$$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l}=I_f$$ （安培环路定律）

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$ （无散）

$$\nabla\times\vec{H}=J_f$$ （有旋）

媒质的性能方程 $\vec{B}=\mu\vec{H}$

恒定磁场是有旋无散场，电流是激发磁场的涡旋源

介质交界处的边界条件

$$\hat{n}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0$$

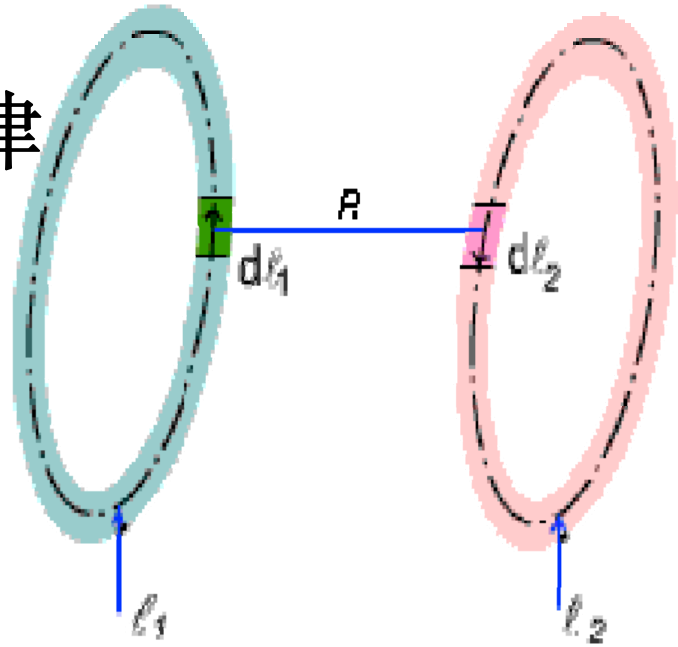
$$\hat{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{J}_{fs}$$

$$\vec{A}_1=\vec{A}_2$$

线性各项同性介质中的磁化电流只存在于介质交界面及介质中电流不为零的地方

第五章 电磁感应与磁场能量

本章目录：



§ 5.1法拉第电磁感应定律

基本概念和公式

$$\therefore \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

§ 5.2 电感的定义与计算

定义和性质（互易性）不做计算要求

磁通Φ和磁链ψ

互感与自感

性质：$M_{21}=M_{12}$（互易性），反映了场点与源点的对称性

计算互感的一般步骤：

$$I_1 \to \vec{H}_1 \to \vec{B}_1 \to \Phi_2 = \int_S \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} \to \Psi_2 \to M = \frac{\Psi_2}{I_1}$$

§ 5.3 磁场的能量

表达式和物理意义

$$\therefore W_m = \frac{1}{2}\int_V \vec{A}\cdot\vec{J}_f dV = \frac{1}{2}\int_V \vec{A}\cdot\left(\nabla\times\vec{H}\right)dV$$

$$= \frac{1}{2}\oint_S (\vec{H}\times\vec{A})d\vec{S} + \frac{1}{2}\int_V \vec{H}\cdot\vec{B}dV = \frac{1}{2}\int_V \vec{H}\cdot\vec{B}dV$$

单位：J（焦耳）

$\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}$称为磁场的能量密度，代表单位体积内存储的磁场能量

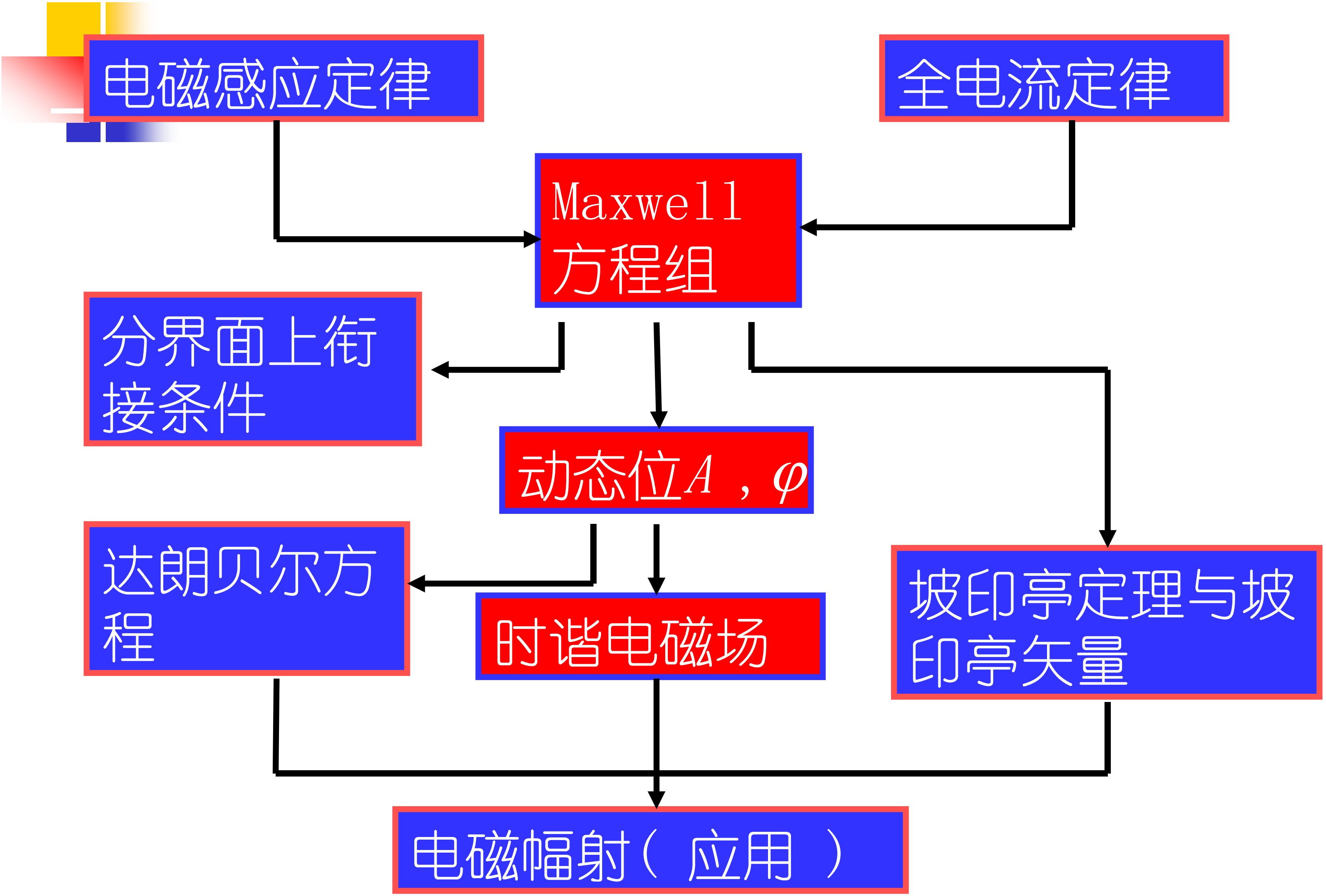
单位：J/m^2（焦耳每平方米）

上式表明磁能是以磁能密度的形式储存在整个场域中。

第六章 时变电磁场

本章目录：

$$
\begin{cases}
\nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\
\nabla \cdot \vec{B} = 0 \\
\nabla \cdot \vec{D} = \rho
\end{cases}
$$


电磁感应定律
全电流定律
Maxwell
方程组
分界面上衔
接条件
动态位A，φ
达朗贝尔方
程
时谐电磁场
坡印亭定理与坡
印亭矢量
电磁幅射（ 应用 ）

时变场知识结构框图

§6.1 麦克斯韦方程

麦克斯韦方程组：

$$
\begin{cases}
\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} & \text{全电流定律} \\
\nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{电磁感应定律} \\
\nabla \cdot \vec{B} = 0 & \text{磁通连续性原理} \\
\nabla \cdot \vec{D} = \rho & \text{高斯定律}
\end{cases}
$$

四个方程所反映的物理意义

- ✓全电流定律——表明传导电流和变化的电场都能产生磁场；
- ✓电磁感应定律——表明电荷和变化的磁场都能产生电场；
- ✓磁通连续性原理——表明磁场是无源场,磁力线总是闭合曲线；
- ✓高斯定律——表明电荷以发散的方式产生电场(变化的磁场以涡旋的形式产生电场)。

§ 6.1 麦克斯韦方程

$$\text{边界条件}\begin{cases} \hat{n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\rho_{sf} \\ \hat{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0 \\ \hat{n}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0 \\ \hat{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{J}_{sf} \end{cases}$$

- 麦克斯韦第一、二方程是独立方程，后面两个方程可以从中推得。
- 静态场和恒定场是时变场的两种特殊形式。

时谐电磁场

复数表达方式以及与实数表达之间的转换

$$A = A_m(\vec{r})\cos(wt + \varphi(\vec{r})) \underset{一一对应}{\overset{A=\mathrm{Re}(\dot{A}e^{jwt})}{\longleftrightarrow}} \dot{A}(\vec{r}) = A_m(\vec{r})e^{j\varphi(\vec{r})}$$

$$\vec{A} \underset{一一对应}{\overset{\vec{A}=\mathrm{Re}(\dot{\vec{A}}e^{jwt})}{\longleftrightarrow}} \dot{\vec{A}} = \dot{A}_x\hat{x} + \dot{A}_y\hat{y} + \dot{A}_z\hat{z}$$

时谐场麦氏方程组

$$\begin{cases} \nabla \times \dot{\vec{H}} = \dot{\vec{J}}_f + jw\dot{\vec{D}} \\ \nabla \times \dot{\vec{E}} = -jw\dot{\vec{B}} \\ \nabla \cdot \dot{\vec{B}} = 0 \\ \nabla \cdot \dot{\vec{D}} = \dot{\rho}_f \end{cases}$$

关于方程的四条说明

①由于二散度方程不独立，可由二旋度方程得到，所以相应地，交界处仅需考虑两个切向条件即可。

②理想导体的边界条件

③线性均匀各向同性导电介质（$\sigma \neq 0$）内部$\dot{\rho}_f = 0$

④电荷分布完全由电流分布决定（$w \neq 0$)。

§ 6.2 电磁场的位函数表示

- 矢量位和标量位的定义以及其与电磁场量之间的关系
- 规范变换（库仑规范、洛伦兹规范）
- 规范不变性

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \varphi$$

$\vec{A}$、φ称为动态位（potential of Kinetic State）

这样一个变换$[(\vec{A}、\varphi)\to(\vec{A}'、\varphi')]$，使得所表示的电磁场量不变，这样的位函数变换即为规范变换。

在适当的变换下，矢量位和标量位所描述的电磁场保持不变的性质$\to$规范不变性

用了位函数后，求解的场分量由原来的6个（$\vec{E}$、$\vec{B}$）变成了4个（$\vec{A}$、φ）

(1) 洛伦兹规范$\nabla\cdot\vec{A}+\mu\varepsilon\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=0$

$$\Rightarrow\begin{cases}\nabla^2\vec{A}-\varepsilon\mu\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu\vec{J}_f & \text{（矢量）}\\[2ex] \nabla^2\varphi-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\dfrac{\rho_f}{\varepsilon} & \text{（标量）}\end{cases}$$
称为达朗贝尔方程或波动方程

(2)库仑规范$\nabla\cdot\vec{A}=0$

§ 6.3 达朗贝尔方程的解

解的形式和物理意义

$$\varphi=\int_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\rho(\vec{r}',t-\frac{R}{C})dV'$$

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}',t-\frac{R}{C})}{R}dV'$$

* 达朗贝尔方程解的形式表明：t时刻的响应取决于 $(t-\frac{R}{C})$时刻激励源 的情况，故又称$\vec{A}$，φ为滞后位（Retarded Potential）

§ 6.4 波印亭定理

一般时变场和时谐场的表达形式，其中每一项的物理意义

$$\underbrace{-\oint_S \vec{S}\cdot d\vec{S}}_{\text{反映交换能量}} = \int_V \vec{J}\cdot\vec{E}dV + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_V wdV}_{\text{反映存储能量}} \qquad w = w_e + w_m$$

$$-\oint_S \dot{\vec{S}} \cdot d\vec{S} = \int_V \dot{P} dV + 2jw\int_V (\overline{w_m} - \overline{w_e}) dV$$

若设$\dot{\vec{J}} = \sigma\dot{\vec{E}}$（电流为传导电流），则可把上式分成两部分

①实部 $-\mathrm{Re}\{\oint_S \dot{\vec{S}} \cdot d\vec{S}\} = \mathrm{Re}\{\int_V \dot{P} dV\} = \frac{1}{2}\int_V \sigma \left|\dot{\vec{E}}\right|^2 dV$

表明：电磁场传输到体积V内的能量全部用来对运动电荷做功。

②虚部 $-\mathrm{Im}\{\oint_S \dot{\vec{S}} \cdot d\vec{S}\} = 2w\int_V (\overline{w_m} - \overline{w_e}) dV$

表明：虚部反映了电磁场存储的能量

§ 6.5 唯一性定理

一般时变场和时谐场唯一性定理包含的内容，知结论即可（反证法）

若给定

①$\mu(\vec{r})$、$\varepsilon(\vec{r})$、$\sigma(\vec{r})$或$\vec{J}_{运}$

②V内电磁场在某一时刻t_0的初值（$\vec{E}\big|_{t_0}$ 和 $\vec{H}\big|_{t_0}$）

③任意$t > t_0$时刻（边界）S上的（电场强度的切向分量）（$\hat{n}\times\vec{E}$)、或者（磁场强度的切向分量）（$\hat{n}\times\vec{H}$)、或者S上部分（$\hat{n}\times\vec{E}$)部 分（$\hat{n}\times\vec{H}$)

则麦克斯韦方程组在区域V内任意$t > t_0$时刻解唯一

§ 6.5 唯一性定理

设电流为传导电流$\dot{\vec{J}} = \sigma(\vec{r})\dot{\vec{E}}$，$\sigma \neq 0$

（时谐场往往不给定初始条件）

若给定：

①μ，ε，σ; ②S上的（$\hat{n}\times\dot{\vec{E}}$)或（$\hat{n}\times\dot{\vec{H}}$)

则麦克斯韦方程组在区域V内解唯一

§6.6 准静态场和准静态近似

知其形式和应用范围即可

§ 6.7 广义麦克斯韦方程组及对偶原理

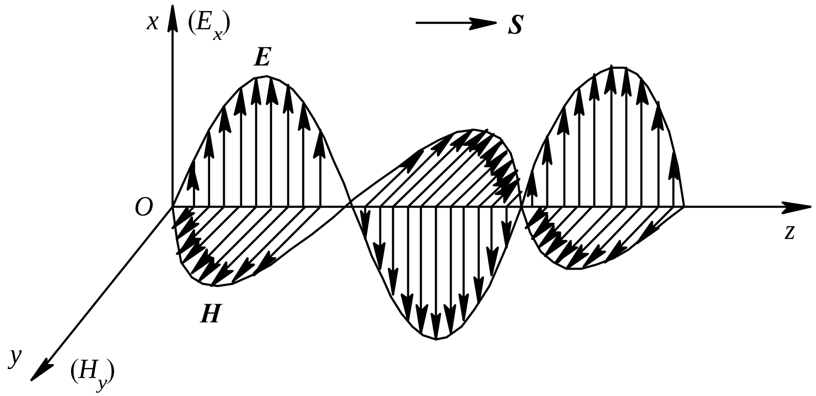
掌握概念

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\vec{J}_m - \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = \rho_m \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \end{cases}$$

边界条件
$$\begin{cases} \hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_s \\ \hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = -\vec{J}_{ms} \\ \hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \rho_{ms} \\ \hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_s \end{cases}$$

第七章 平面电磁波

本章目录：



平面波的概念，分类

- ✓1. 等相位面
- ✓2. 球面波：
- ✓3. 平面波：
- ✓4. 均匀平面波：
- ✓5. 非均匀平面波

§ 7.1 无损介质中的均匀平面波

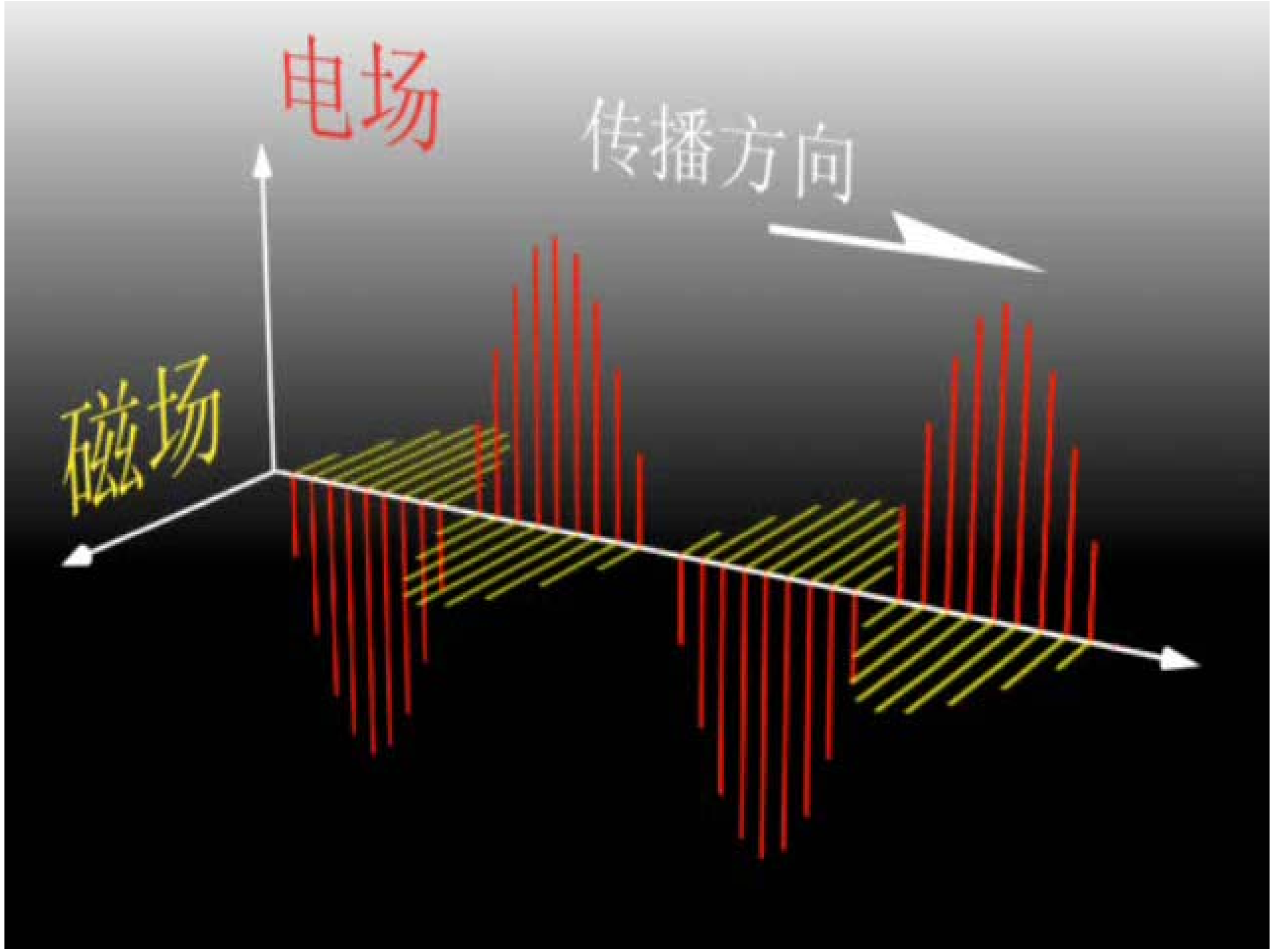
基本参量的定义和物理意义（波长、传播常数、相速度、波阻抗）

$$E_x^+(z,t) = E_{xm}^+ \cos(wt - kz + \varphi_x^+)$$

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{\lambda f} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{w\mu}{k} = \frac{k}{w\varepsilon}$$

$$\lambda = v_P T = \frac{v_P}{f} = \frac{2\pi}{k} = \frac{w}{k}\frac{1}{f}$$



无损介质中的均匀平面波的特点

$$\begin{cases} \dot{\vec{E}}^{\pm} = \pm \dfrac{k}{w\varepsilon} \dot{\vec{H}}^{\pm} \times \hat{z} = \eta \dot{\vec{H}}^{\pm} \times (\pm \hat{z}) \\ \dot{\vec{H}}^{\pm} = \pm \dfrac{k}{w\mu} \hat{z} \times \dot{\vec{E}}^{\pm} = \dfrac{1}{\eta} (\pm \hat{z}) \times \dot{\vec{E}}^{\pm} \end{cases}$$

§ 7.2有损介质中的均匀平面波

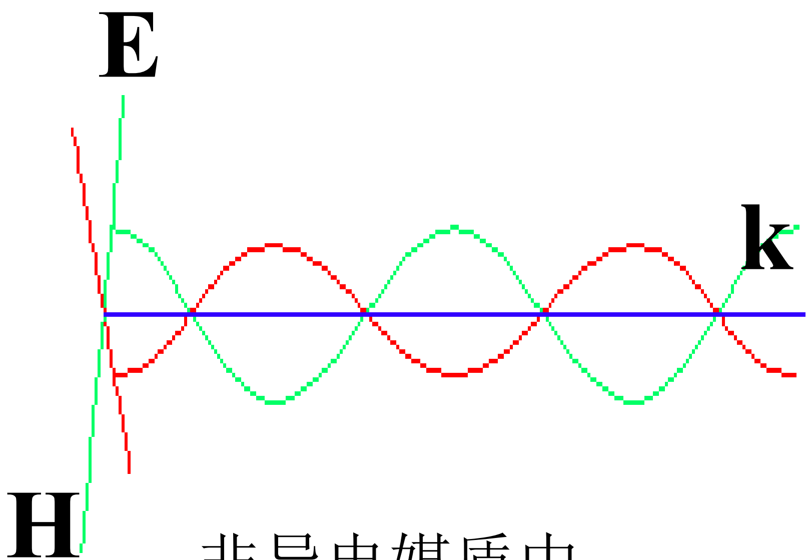
参量（衰减常数、相位常数、波阻抗）；特点，与无损介质中的不同之处；复杂的表达式无需记忆，用时会给出；基本概念

$$\varepsilon_k = \varepsilon + \frac{\sigma}{jw} = \varepsilon - j\frac{\sigma}{w} \qquad (\varepsilon, \mu, \sigma) \Leftrightarrow (\varepsilon_k, \mu)$$

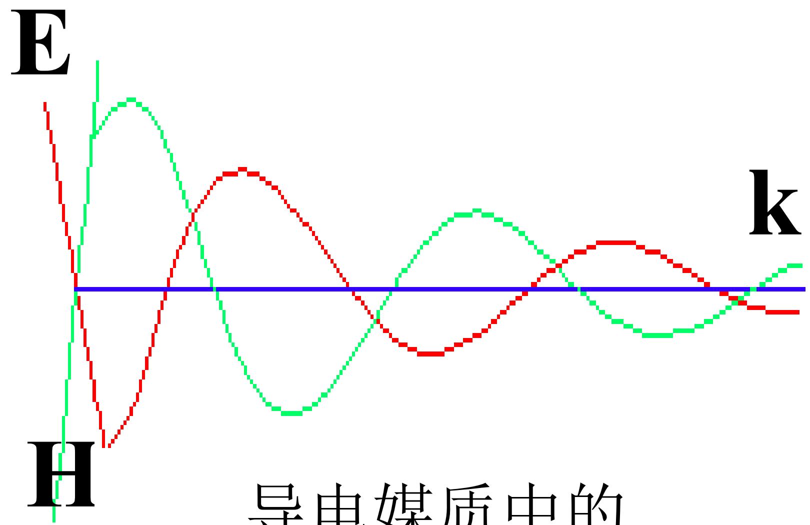
$$k = \beta - j\alpha$$

$\dfrac{\sigma}{w\varepsilon}$这项代表了传导电流与位移电流幅度大小之比（不考虑相位）

$$\begin{cases} \dot{\vec{E}}^{\pm} = \eta \dot{\vec{H}}^{\pm} \times (\pm \hat{z}) \\ \dot{\vec{H}}^{\pm} = \dfrac{1}{\eta}(\pm \hat{z}) \times \dot{\vec{E}}^{\pm} \end{cases}$$



非导电媒质中
的电场与磁场



导电媒质中的
电场与磁场

§7.3 均匀平面波的极化

概念与性质，会判断电磁波的极化方式

极化的定义：指空间的某一点的（总）电场强度矢量$\vec{E}$（或磁场强度$\vec{H}$）随时间变化的方式。

通常用$\vec{E}$（或$\vec{H}$）矢量端点随时间变化的轨迹来描述。

可分为：线极化、圆极化、椭圆极化三种

性质：

①任一线极化波可分解为两个大小相等、旋转方向相反的圆极化波之和。

②任何椭圆极化波可分解为两个旋转方向相反的圆极化波（大小不一定相等）

§ 7.4 色散现象：相速和群速

知什么是色散及其引起的后果即可；群速度的定义，与相速度的区别

电磁波的色散

相速和衰减常数随频率变化的现象（若无损，则只考虑相速）

不失真条件
$$\begin{cases} \alpha(w) \approx \alpha_0(w_0) \\ \beta(w) \approx \beta_0(w_0) + \left.\dfrac{d\beta}{dw}\right|_{w=w_0}(w-w_0) \end{cases}$$

定义群速度$v_g = \left.\dfrac{dw}{d\beta}\right|_{w=w_0}$：代表不失真条件下，波群的传播速度。群速度也代表电磁波的能量传播速度。

群速度与相速度之间的关系：

$$v_g = \frac{dw}{d\beta} = \frac{d\left(\beta v_p\right)}{d\beta} = \beta\frac{dv_p}{d\beta} + v_p = \beta\frac{dv_p}{dw}\frac{dw}{d\beta} + v_p$$

$$\Rightarrow v_g = \frac{v_p}{1-\beta\dfrac{dv_p}{dw}} = \frac{v_p}{1-\dfrac{w}{v_p}\dfrac{dv_p}{dw}}$$

§ 7.5 非均匀平面波

非均匀平面波主要是不能让$\vec{k}$的虚部为零（$\sigma=0$）或者虚部和实部的方向相同（$\sigma\neq 0$）。

$$\vec{k}=\vec{k}'-j\vec{k}'',\therefore e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}=e^{-\vec{k}''\cdot\vec{r}}e^{-j\vec{k}'\cdot\vec{r}}$$

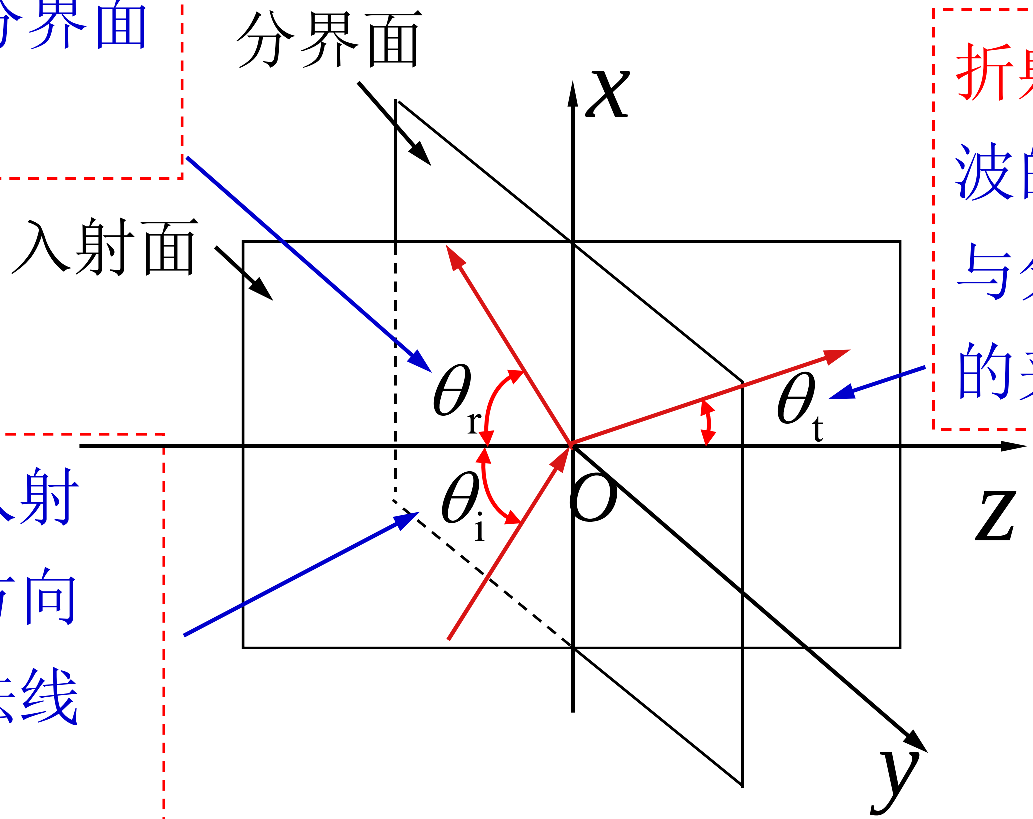
无损介质中的非均匀平面波等相位面和等振幅面正交（垂直）。

§ 7.6 平面波的反射和折射

- 基本概念与定义
- 反射和折射定律
- 全反射和全透射条件
- 菲涅尔公式
- 向理想导体平面投射后，总场的特点

§ 7.6 平面波的反射和折射

反射角：反射波的传播方向与分界面法线的夹角。



折射角：透射波的传播方向与分界面法线的夹角。

入射角：入射波的传播方向与分界面法线的夹角。

入射平面：由$\vec{k}_i$（入射波传播矢量）与介质交界处法向$\hat{n}$构成的平面

§ 7.6 平面波的反射和折射

①$\varphi_i = \varphi_r = \varphi_t$即$\vec{k}_i$，$\vec{k}_r$，$\vec{k}_t$，$\hat{n}$共面

②$\theta_i = \theta_r$，即反射角等于入射角$\rightarrow$反射定律

③$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t \rightarrow$折射定律

全透射条件：

（1）$n_1 = n_2$

（2）平行极化，布儒斯特角 入射$\theta_i = tg^{-1}\dfrac{n_2}{n_1}$

全反射条件：

$n_1 > n_2$（光密介质入射到光疏介质）

$\theta_i > \theta_c \arcsin\left(\dfrac{n_2}{n_1}\right)$时，全反射，折射波为非均匀平面波

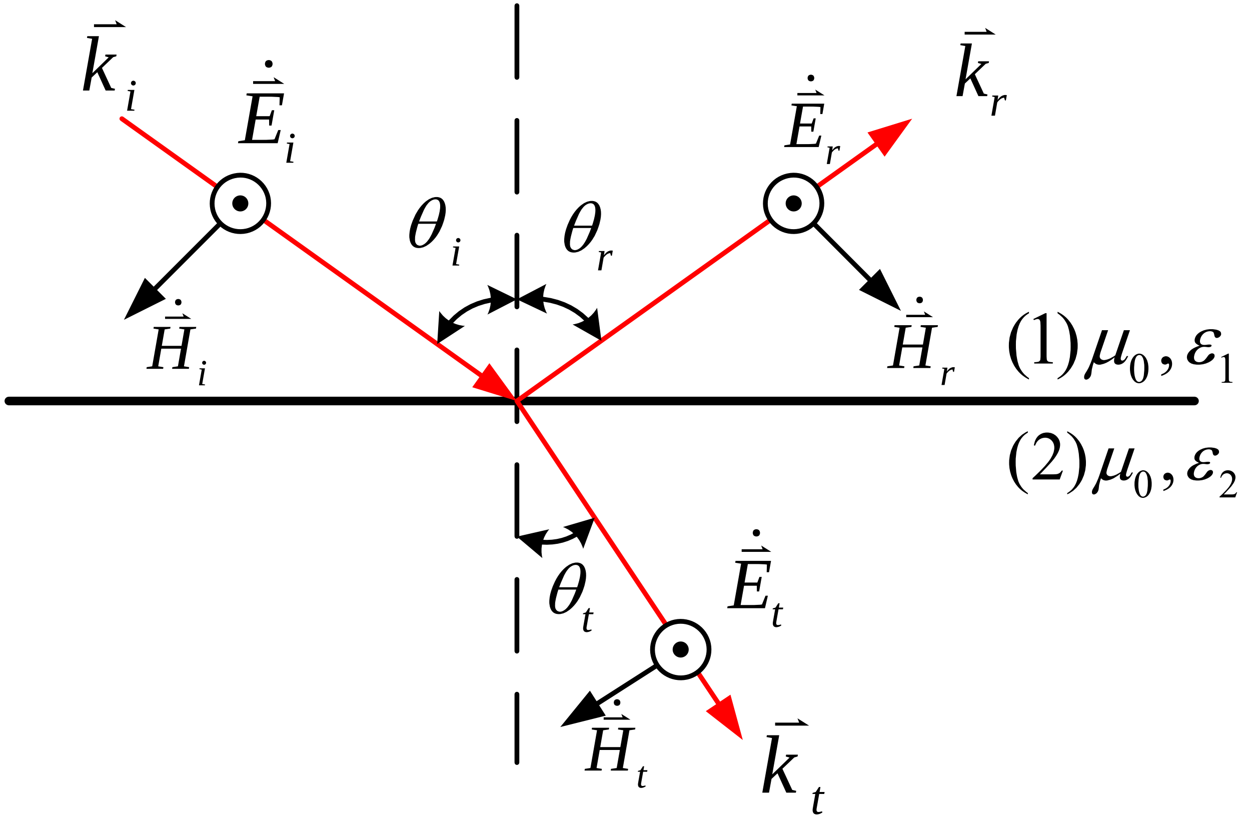
在菲涅尔公式中用$-j\dfrac{k_t^{''}}{k_2} \rightarrow \cos\theta_t$，即可得

到全反射时的菲涅尔公式。

费涅尔公式

1、垂直线极化波入射

2、水平线极化波入射



写出介质1和介质2中电场和磁场强度的表达式，然后利用边界条件求解。

半波损失

功率反射系数和传输系数

反射系数*R*：分界面上反射波的平均能流密度的法向分量与入射波的平均能流密度的法向分量之比。

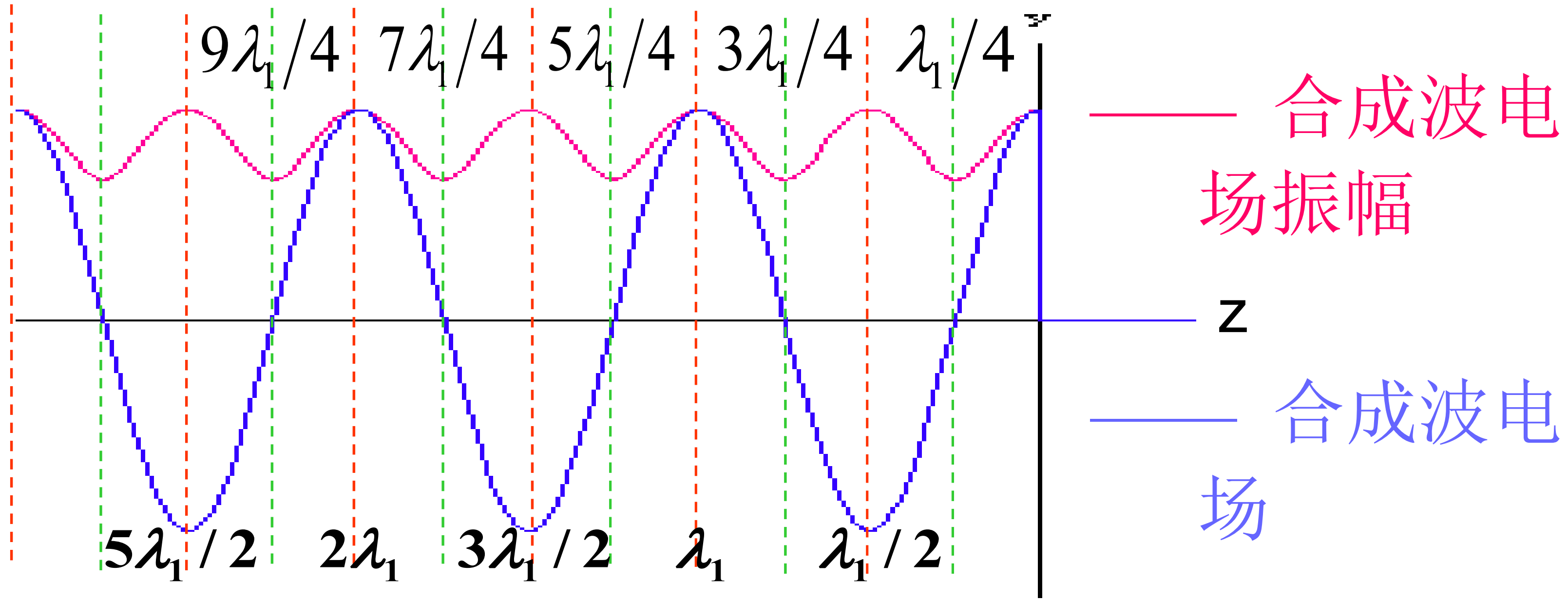
传输系数*T*：分界面上折射波的平均能流密度的法向分量与入射波的平均能流密度的法向分量之比。

$$R+T=1$$

驻波系数(驻波比) S

驻波系数 S 定义为驻波的电场强度振幅的最大值与最小值之比，即

$$S=\frac{\left|\vec{E}\right|_{\max}}{\left|\vec{E}\right|_{\min}}=\frac{1+|R|}{1-|R|} \Longleftrightarrow |R|=\frac{S-1}{S+1}$$



§ 7.7 平面波对理想导体的投射

$$\sigma = \infty$$

①平面波不能进入到理想导体内部

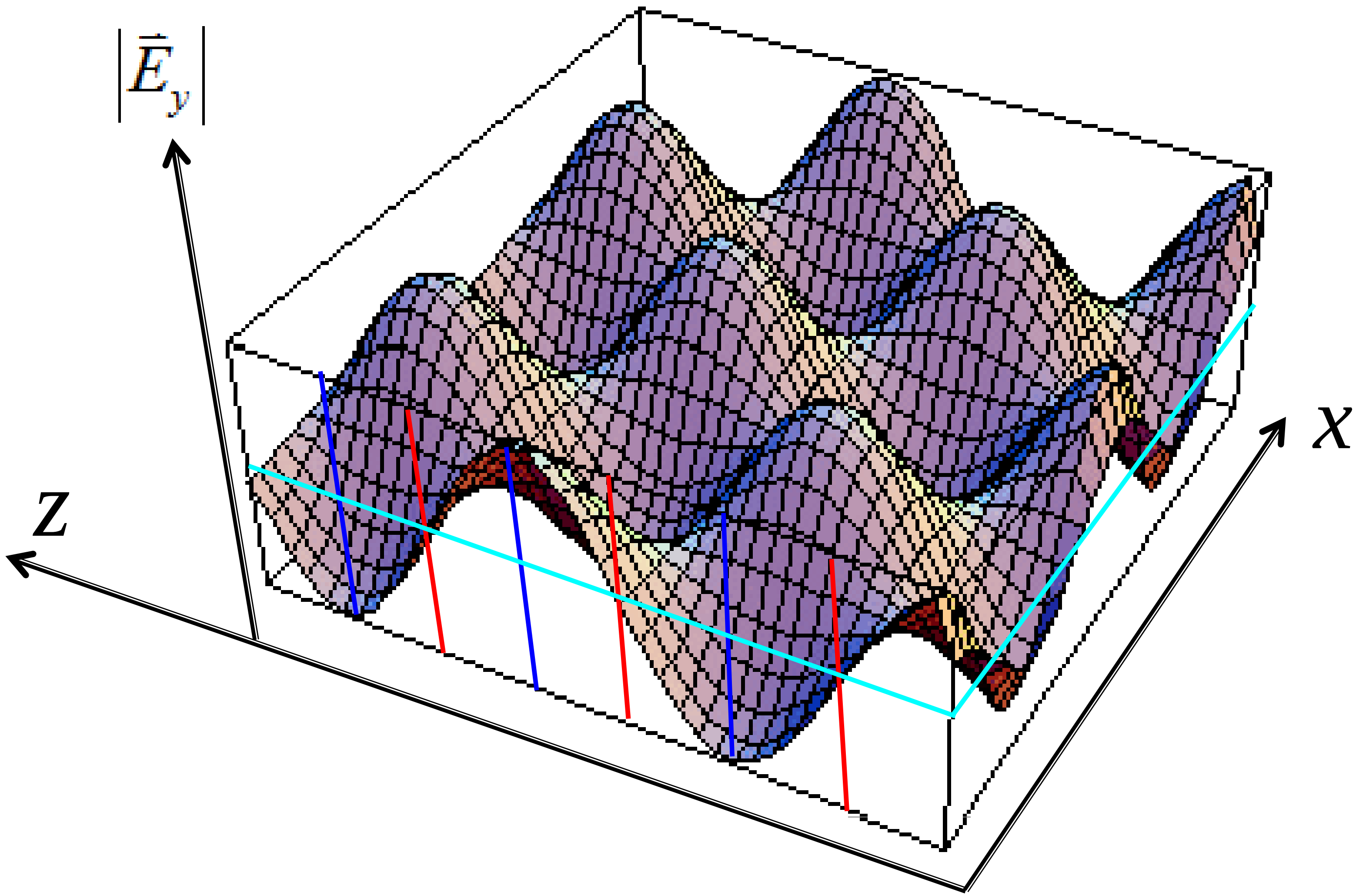
②反射角等于入射角

③反射波的传播矢量、入射波的传播矢量及导体表面的法向在一个平面内。

写出无损介质1总电场和磁场强度的表达式，然后利用边界条件求解。

$$\begin{cases} \hat{n} \times \dot{\vec{E}} = 0 \\ \hat{n} \times \dot{\vec{H}} = \dot{\vec{J}}_s \end{cases}$$

向理想导体平面投射后，总场的特点



§ 7.8 多层介质的反射和折射

知其计算方法（思路），了解半波介质窗和四分之一波长阻抗变换器（应用）

法向波阻抗定义：相对于媒质界面的法向分量成右手定则的一对行波电场强度与磁场强度的正交分量的比值。

写出各层介质1总电场和磁场强度的表达式，然后利用边界条件求解。

§ 7.8 多层介质的反射和折射

垂直投射时

（1）若d为半波长的整数倍

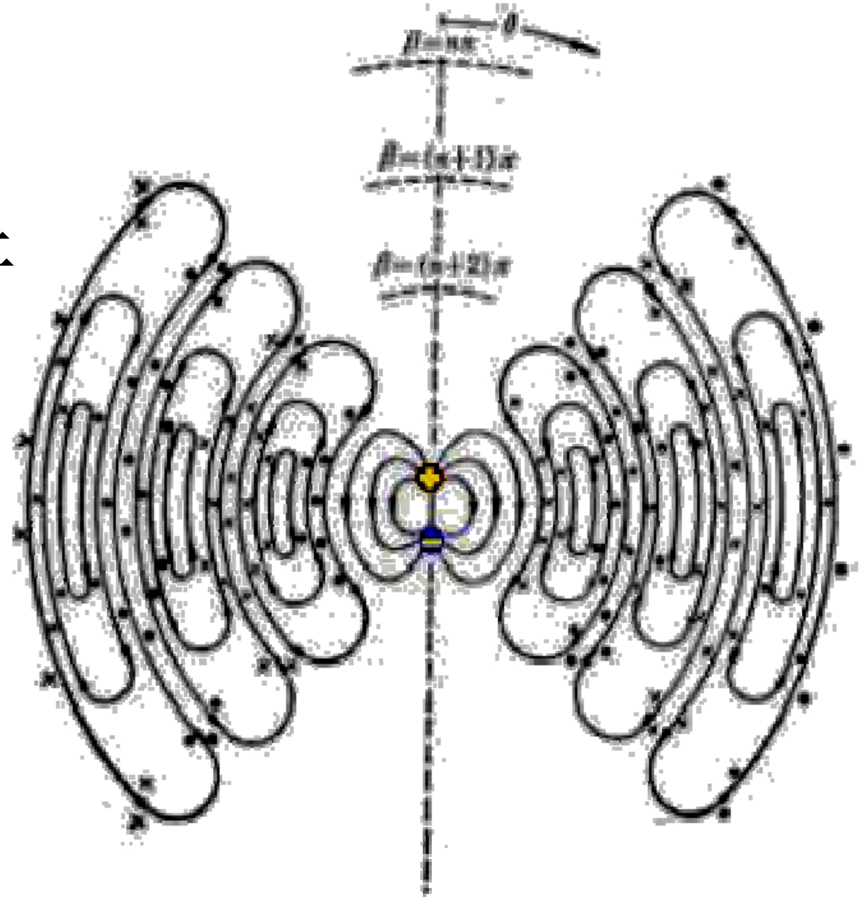
介质1和介质3为同种介质，则无反射

（2）若d为四分之一波长的奇数倍

若$\eta_2 = \sqrt{\eta_1 \eta_3}$，则无反射

第八章 电磁波的辐射

本章目录：



辐射的基本概念和必要条件

1. 什么是辐射?

辐射：随时间变化的电磁场离开波源向空间传播的现象。

产生辐射的源称为天线。

2. 辐射产生的必要条件

（1）时变源存在。

（2）源电路是开放的。

3. 影响辐射强弱的原因

（1）源电路尺寸与辐射波的波长相比拟时辐射较为明显。

（2）源电路越开放，辐射就越强。

分区条件（范围）

近区：$r' << r << \lambda$

中间区：$r' << r \sim \lambda$

远区：$r' << \lambda << r$

近区特点：

电场和磁场的相位相差 90°

电偶极子、磁偶极子的辐射场特点

辐射场的特点：

①辐射场为球面波（等相位面为球面，等振幅面不是球面）

为横电磁波（TEM波）

②定义$\vec{k}=k\hat{r}$为传播矢量

$$\begin{cases}\dot{\vec{E}}=\eta_0(\dot{\vec{H}}\times\hat{r}) \\ \dot{\vec{H}}=\dfrac{1}{\eta_0}(\hat{r}\times\dot{\vec{E}})\end{cases}$$

③$\nabla\to -j\vec{k}$（仅对辐射场成立）

与平面波的区别：

①等振幅面不是平面，也不是球面。

②$\vec{E}$、$\vec{H}$表达式不一样，但相互关系一样。

方向性函数、方向性系数、辐射电阻的概念和求解

电场强度的归一化方向性函数$F(\theta,\varphi)=\dfrac{|\dot{\vec{E}}(\theta,\varphi)|}{|\dot{\vec{E}}_{\max}|}$

$$D=\frac{P_0}{P}\bigg|_{E_0=E_{\max}}=\frac{S_{\max}}{\dfrac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}S\sin\theta d\theta d\varphi}$$

$$P=\oint_S \bar{\vec{S}}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{2}R_r\left|\dot{I}_0\right|^2$$

§ 8.4 线天线的辐射场

1、短天线$r' << \lambda$，可看作电偶极距的辐射

任意形状的小电流环（L$\ll\lambda$），可看作磁偶极距的辐射

2、“长”天线$r' \sim \lambda$将线电流分布分解成无数个电流元，每个电流元看作电偶极子（其长度趋于零，满足远远小于波长的条件），再用叠加原理求总场。

$$d\dot{p} = \frac{\dot{I}(z')dz'}{jw}$$