2023.11.17 第十五次作业

卢科政　夏业志

2024 年 1 月 1 日

题目 1. (课本 4.28) 如课本习题 4.28 图所示, 质量均为 m, 电量为 $-q$ 和 $+q$ 的两个带电质点相距 $2R$. 开始时, 系统的质心静止地位于坐标原点 O 处, 且两带电质点在 xOy 平面上绕质心 C 沿顺时针方向做圆周运动. 设系统处于图示位置时, 规定为 $t=0$ 时刻, 从该时刻起所讨论的空间加上沿 z 轴方向的弱匀强磁场 B. 试求: 质心 C 的速度分量 v_x 和 v_y 随时间 t 的变化关系及运动轨迹方程, 定性画出质心 C 的运动轨迹. 设两带电质点绕质心的圆周运动保持不变.

解答. $t=0$ 时刻, 两带电质点在 xOy 平面上绕质心 C 沿顺时针方向做圆周运动, 库仑力提供向心力, 因此有:

$$\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 R^2} = mR\omega^2 \tag{1}$$

可得角速度为:

$$\omega = \sqrt{\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 mR^3}} \tag{2}$$

$t>0$ 时, 外加磁场, 此时质心受力为:

$$F = 2q\omega R \tag{3}$$

为方便计算, 考虑速度分解, 将质心的速度分解为 $\vec{v_1}+\vec{v_2}$，其中 $\vec{v_1}$ 为 $v_1=\frac{qBR}{m}$ 的直线运动，$\vec{v_2}$ 为 $v_2=\frac{qBR}{m}$ 的匀速圆周运动,$\vec{v_2}$ 用于” 抵消”$t=0$ 时刻质点受到的有心力,$\vec{v_1}$ 用于补偿初速度。因此可以写出质点在 x,y 方向上的速度:

$$\begin{cases} v_x = v_1 - v_2\text{cos}t = \frac{qBR}{m}(1-\text{cos}t) \\ v_y = v_2\text{sin}\omega t = \frac{qBR}{m}\text{sin}\omega t \end{cases} \tag{4}$$

带入初始条件积分可得:

$$\begin{cases} x = v_1 t - r\sin\omega t = \dfrac{qBR}{m}t - 4BR^2\sqrt{\frac{\pi\epsilon_0 R}{m}}\sin\omega t \\ y = r(1-\cos\omega t) = 4BR^2\sqrt{\frac{\pi\epsilon_0 R}{m}}(1-cos\omega t) \end{cases} \tag{5}$$

质心 C 的运动轨迹是滚轮线.

题目 2. (课本 4.30) 将两极板之间距离为 d 的平行板电容器放入磁场中，磁场的方向垂直于板面，磁感应强度为 B, 在电容器内负极板附近有慢速的电子源，它向各个方向发射电子。当两极板之间的电压为多大时，电子将聚焦在正极的极板上?(图见书中 P410)

解答. 在发射点处建立一个右手坐标系 xyz，假设某时刻 t 时的粒子速度为 $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, 磁感应强度为 $\vec{B} = B\vec{k}$，电场强度为 $\vec{E} = -E\vec{k}$ 洛伦兹力为:

$$\vec{F_1} = q\vec{v} \times \vec{B} = -e \begin{bmatrix} i & j & k \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix} = eB(v_x\vec{j} - v_y\vec{i})$$

电场力为:

$$\vec{F_2} = -e\vec{E} = eE\vec{k}$$

根据牛顿第三定律:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = e(-Bv_y\vec{i} + BV_x\vec{j} + E\vec{k})$$

写成分量形式:

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = -eBv_y/m \\ \frac{dv_y}{dt} = eBv_x/m \\ \frac{dv_z}{dt} = eE/m \end{cases} \tag{6}$$

可以得到粒子在 z 方向做匀加速运动，加速度为 $a_z = \frac{eE}{m}$, 在 x 和 y 方向上做圆周运动，且 $\omega = \frac{eB}{m}$, 为了使得所有粒子聚焦到一点，需要到达正极板的时间刚好为圆周运动时间的整数倍:

$$n\frac{2\pi}{eB/m} = \sqrt{\frac{2d}{eE/m}} = \sqrt{\frac{2d^2}{eU/m}}$$

则极板的电势差应为 (n 为正整数):

$$U = \frac{ed^2B^2}{2\pi^2n^2m}$$

题目 3. (课本 4.36) 如图所示的矩形管长为 l、宽为 a、高为 b，有电阻率为 ρ 的水银流动。当其一端加上压强 P 时，水银的流速为 v_0。现在竖直方向加上磁感应强度为 B 的均匀磁场，试求水银的流速。

解答. 当水银以速度 v 流动时，电子受到的电场力和洛伦兹力平衡:

$$eE = evB, E = \frac{U}{a}$$

则产生的电动势为 U=Bav

水银中的电流大小为:

$$I = U/R = \frac{Bav}{\rho a/(bl)}$$

根据安培定律，水银受到的安培力 (方向与 v 反向) 为:

$$F_A = BIa = \frac{B^2vabl}{\rho}$$

管两侧的压强差减少为

$$p' = p - \frac{F}{ab} = p - \frac{B^2vl}{ab}$$

此时的流速 v 满足:

$$\frac{v}{v_0} = \frac{p'}{p} = 1 - \frac{B^2vl}{\rho p}$$

$$v = v_0(1 + \frac{v_0B^2l}{\rho p})^{-1}$$