

Digital Signal Processing

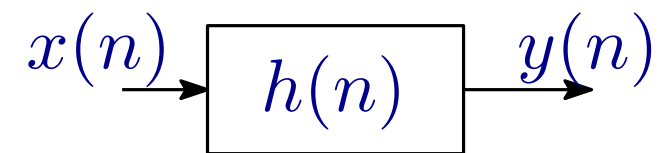
第4章 数字滤波器及其结构

尹华锐

电子工程与信息科学系, yhr@ustc.edu.cn

- 数字滤波器原理
- IIR数字滤波器结构
- FIR滤波器结构
- 内插滤波器及其实现结构

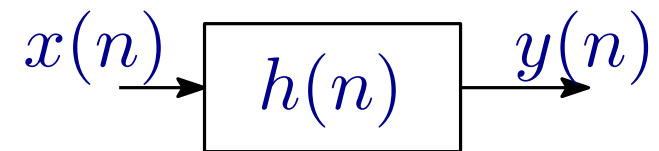
模拟滤波器原理



$$Y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \quad \longleftarrow \quad \text{时间域}$$

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega}) \quad \longleftarrow \quad \text{频率域}$$

模拟滤波器原理



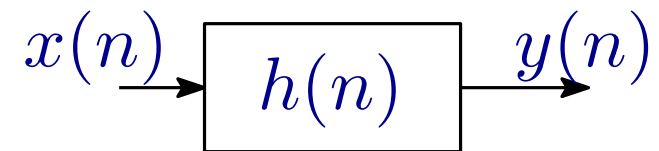
$$Y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \quad \longleftarrow \quad \text{时间域}$$

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega}) \quad \longleftarrow \quad \text{频率域}$$

时域：系统单位取样响应与信号序列卷积

频域：对信号频谱进行加工， $H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}}$

模拟滤波器原理

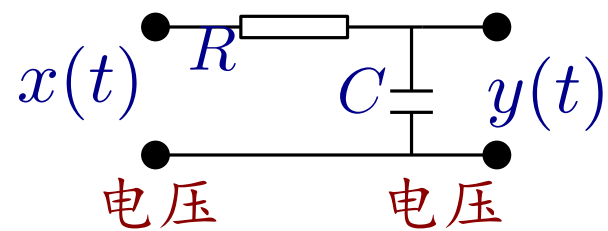


$$Y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \quad \longleftarrow \quad \text{时间域}$$

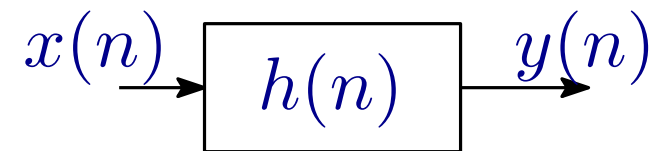
$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega}) \quad \longleftarrow \quad \text{频率域}$$

时域：系统单位取样响应与信号序列卷积

频域：对信号频谱进行加工， $H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}}$



模拟滤波器原理

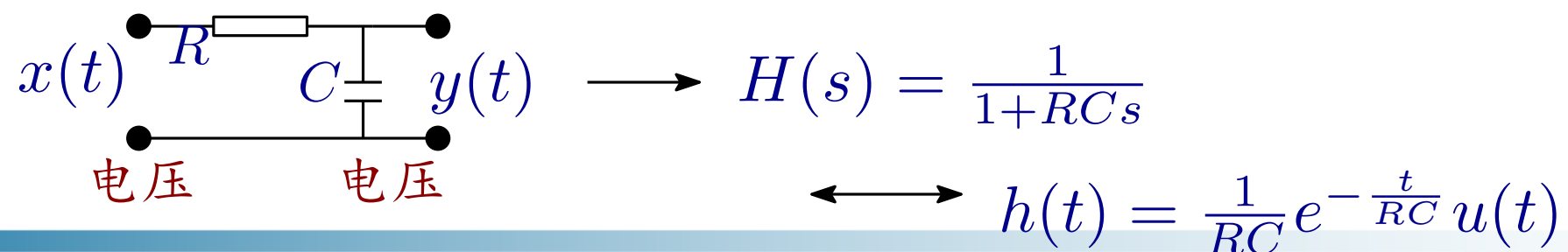


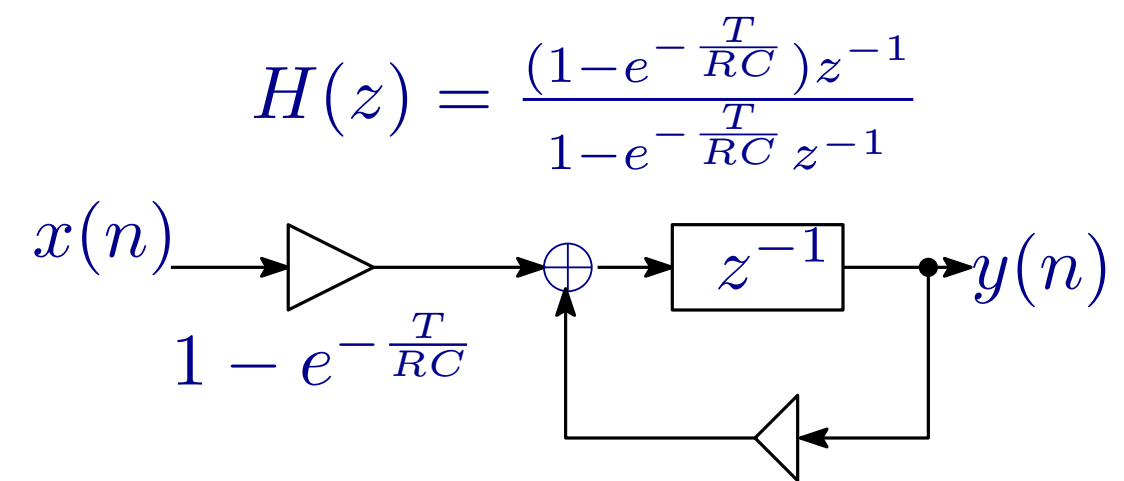
$$Y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \quad \longleftarrow \quad \text{时间域}$$

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega}) \quad \longleftarrow \quad \text{频率域}$$

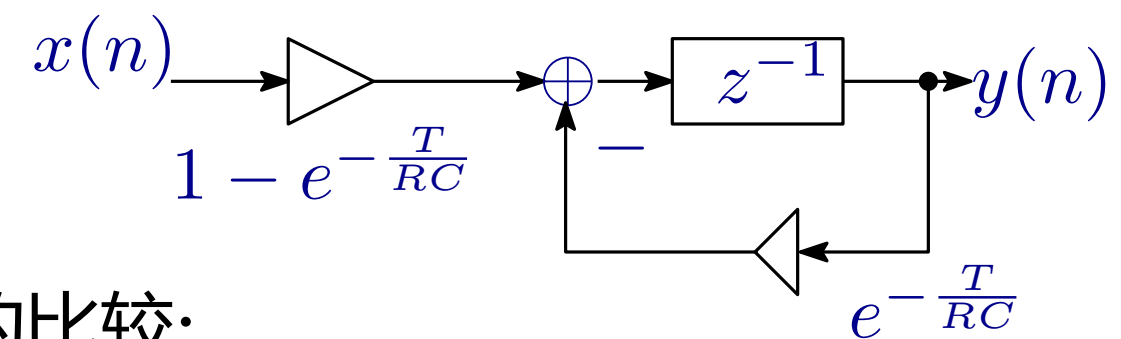
时域：系统单位取样响应与信号序列卷积

频域：对信号频谱进行加工， $H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}}$



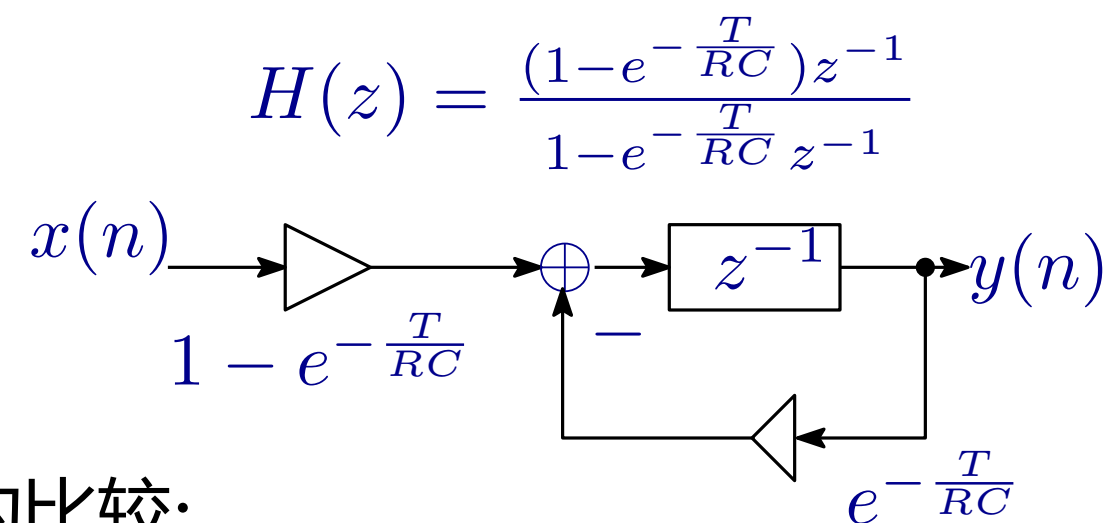


$$H(z) = \frac{(1 - e^{-\frac{T}{RC}})z^{-1}}{1 - e^{-\frac{T}{RC}}z^{-1}}$$



频率响应的比较:

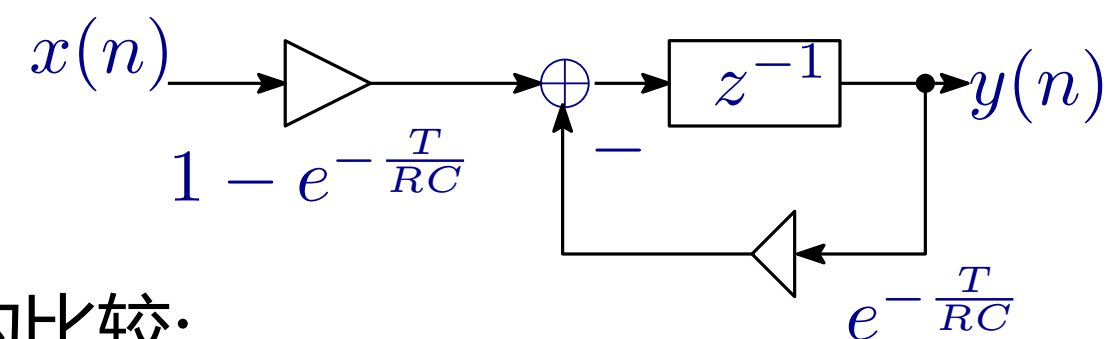
$$H(e^{j\Omega T}) = \frac{1 - e^{-\frac{T}{RC}}}{1 - e^{-\frac{T}{RC}} - j\Omega T}$$



频率响应的比较:

$$H(e^{j\Omega T}) = \frac{1 - e^{-\frac{T}{RC}}}{1 - e^{-\frac{T}{RC}} - j\Omega T} \quad T \ll RC \longrightarrow T/RC \ll 1$$

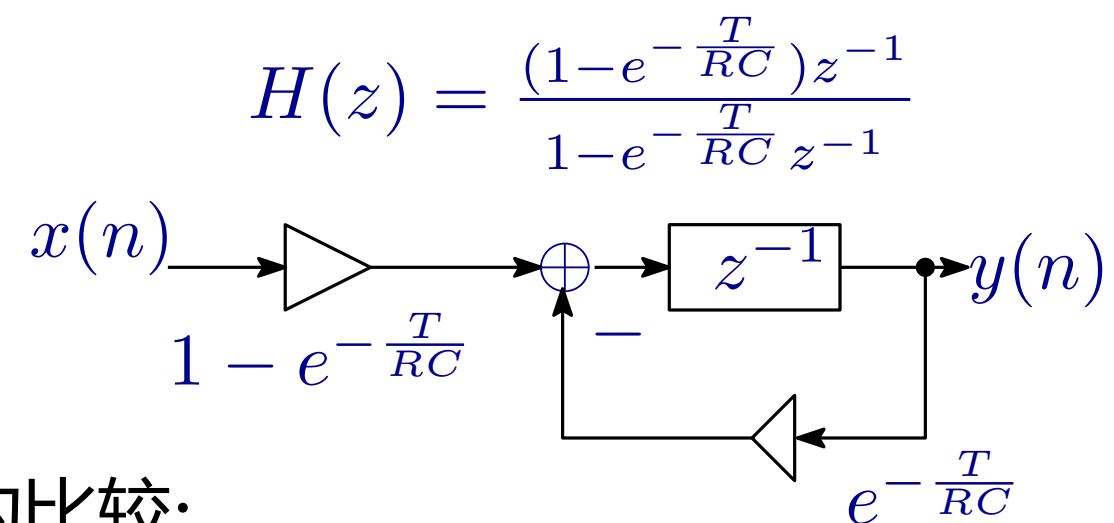
$$H(z) = \frac{(1 - e^{-\frac{T}{RC}})z^{-1}}{1 - e^{-\frac{T}{RC}}z^{-1}}$$



频率响应的比较:

$$H(e^{j\Omega T}) = \frac{1 - e^{-\frac{T}{RC}}}{1 - e^{-\frac{T}{RC} - j\Omega T}} \quad T \ll RC \longrightarrow T/RC \ll 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1 + x$$



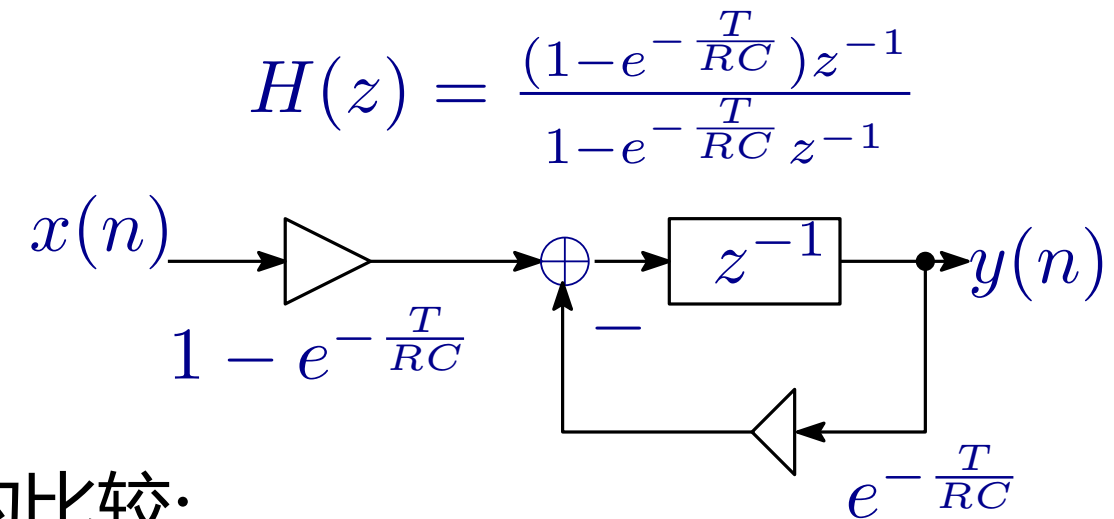
频率响应的比较:

$$H(e^{j\Omega T}) = \frac{1 - e^{-\frac{T}{RC}}}{1 - e^{-\frac{T}{RC} - j\Omega T}} \quad T \ll RC \longrightarrow T/RC \ll 1$$

\downarrow

$\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1 + x$

$$H(j\Omega T)|_{T \rightarrow 0} = \frac{\frac{T}{RC}}{\left(\frac{T}{RC} + j\Omega T\right)} = \frac{\frac{1}{RC}}{\frac{1}{RC} + j\Omega}$$



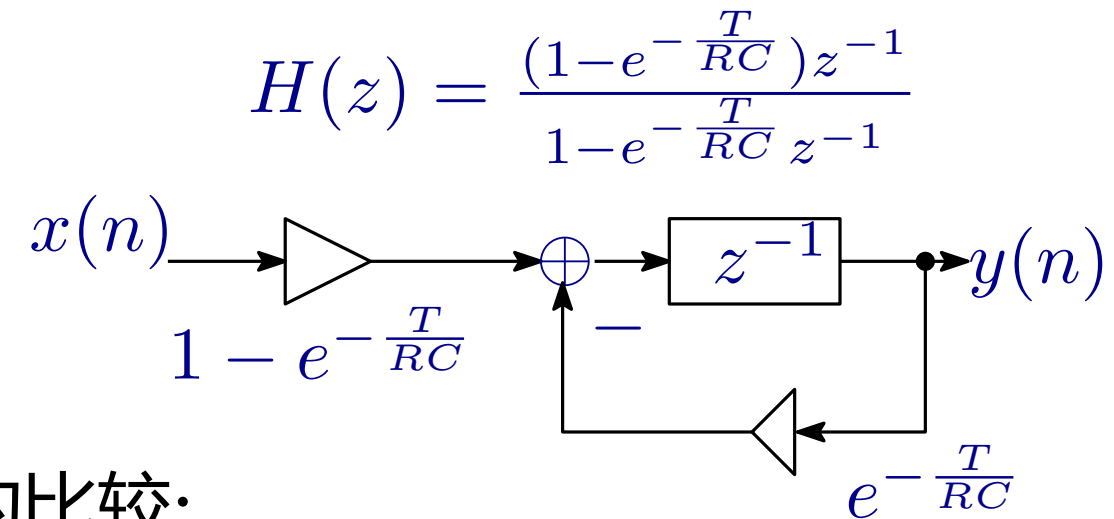
频率响应的比较:

$$H(e^{j\Omega T}) = \frac{1 - e^{-\frac{T}{RC}}}{1 - e^{-\frac{T}{RC} - j\Omega T}} \quad T \ll RC \longrightarrow T/RC \ll 1$$

$\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1 + x$

$$\downarrow$$

$$H(j\Omega T)|_{T \rightarrow 0} = \frac{\frac{T}{RC}}{\left(\frac{T}{RC} + j\Omega T\right)} = \frac{\frac{1}{RC}}{\frac{1}{RC} + j\Omega} \Longleftrightarrow H_a(j\Omega) = \frac{\frac{1}{RC}}{\frac{1}{RC} + j\Omega}$$



频率响应的比较:

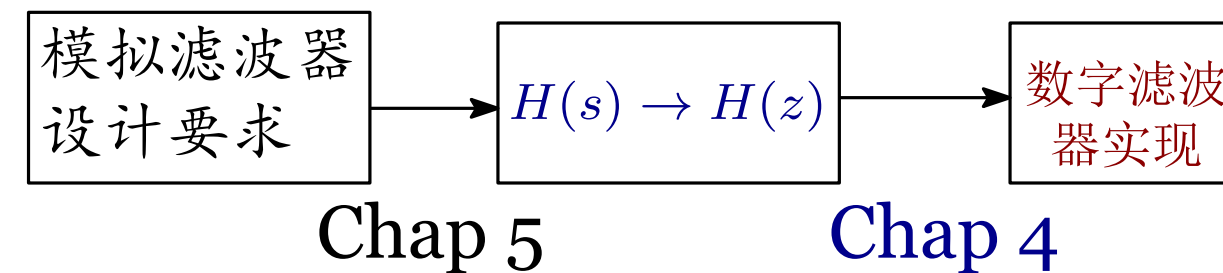
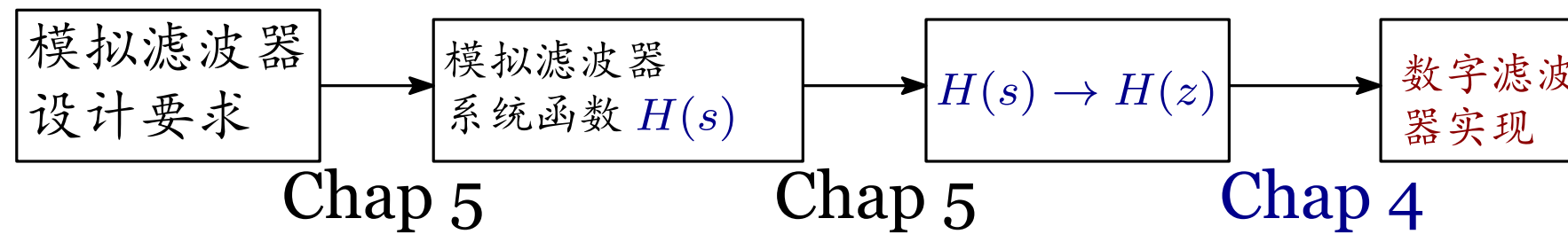
$$H(e^{j\Omega T}) = \frac{1 - e^{-\frac{T}{RC}}}{1 - e^{-\frac{T}{RC} - j\Omega T}} \quad T \ll RC \longrightarrow T/RC \ll 1$$

\downarrow

$$H(j\Omega T)|_{T \rightarrow 0} = \frac{\frac{T}{RC}}{\left(\frac{T}{RC} + j\Omega T\right)} = \frac{\frac{1}{RC}}{\frac{1}{RC} + j\Omega} \iff H_a(j\Omega) = \frac{1}{\frac{1}{RC} + j\Omega}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1 + x$

结论：利用数字滤波器实现模拟滤波器理论上可行



本章问题： 如何根据 $H(z)$ 和滤波器设计要求实现滤波器。

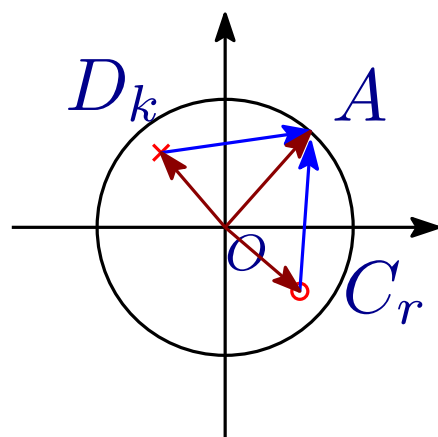
- $H(z)$ 变动对应的系统设计变动最小
- 保证稳定性和频率特性前提下的成本优化

考虑一个滤波器，零点集合为 $\{C_r, 1 \leq r \leq M\}$ ，极点集合为 $\{D_k, 1 \leq k \leq N\}$ ，系统函数可以表示为：

$$H(z) = P \cdot \frac{\prod_{r=1}^M (1 - C_r z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - D_k z^{-1})}$$

幅度频率响应为：

$$|H(e^{j\omega})| = P \cdot \frac{\prod_{r=1}^M |e^{j\omega} - C_r|}{\prod_{k=1}^N |e^{j\omega} - D_k|}$$



$$|H(e^{j\omega})| = \frac{|e^{j\omega} - C_r|}{|e^{j\omega} - D_k|} = \frac{|C_r A|}{|D_k A|}$$

零极点位置决定幅度频率响应。因此滤波器实现通过调整零极点位置调整幅度频率响应，以逼近 $H(z)$ 对应的频率特性

数字滤波器表征方法

- 差分方程，单位取样响应，系统函数

数字滤波器实现方法

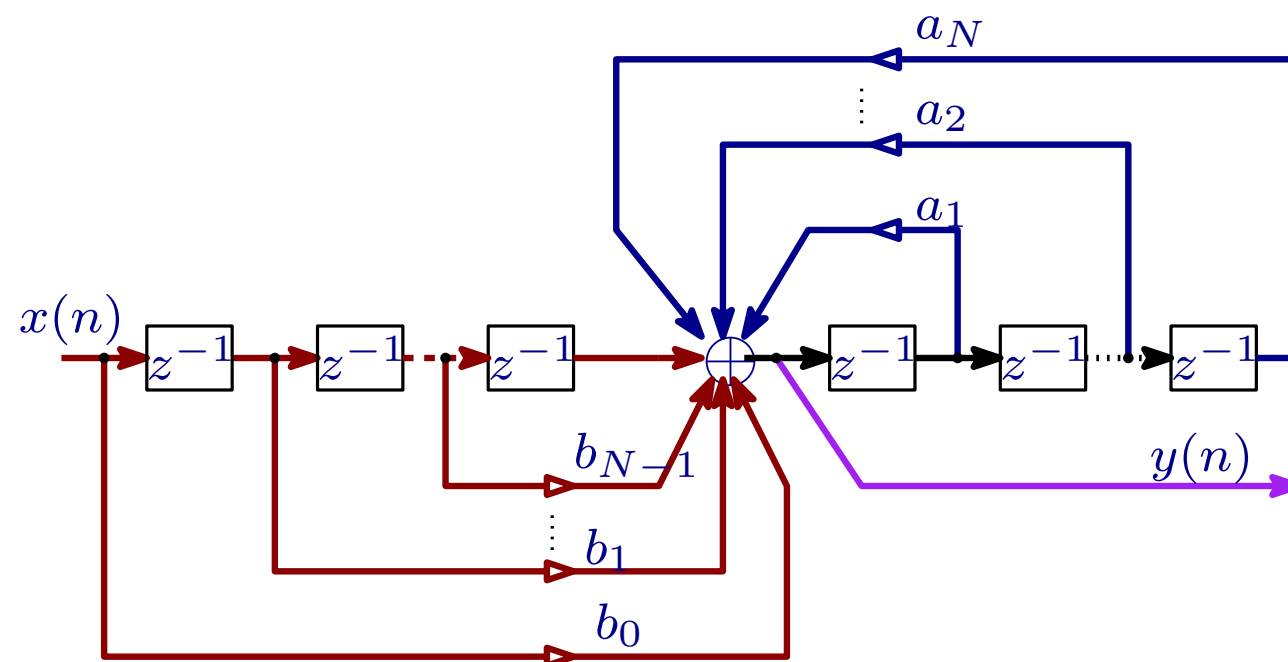
- 方框图。不同实现方法理想情况性能一致，但是频率特性的调整面临的难度有很大的不同
- 运算结构将会影响系统精度、误差、稳定性和经济性和运算速度等性能
- 无限长单位脉冲响应滤波器和有限长单位脉冲响应滤波器实现方法有所不同

直接实现形式:

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \longleftrightarrow y(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) + \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

直接实现形式:

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \longleftrightarrow y(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) + \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$



延时单元: $N + M$

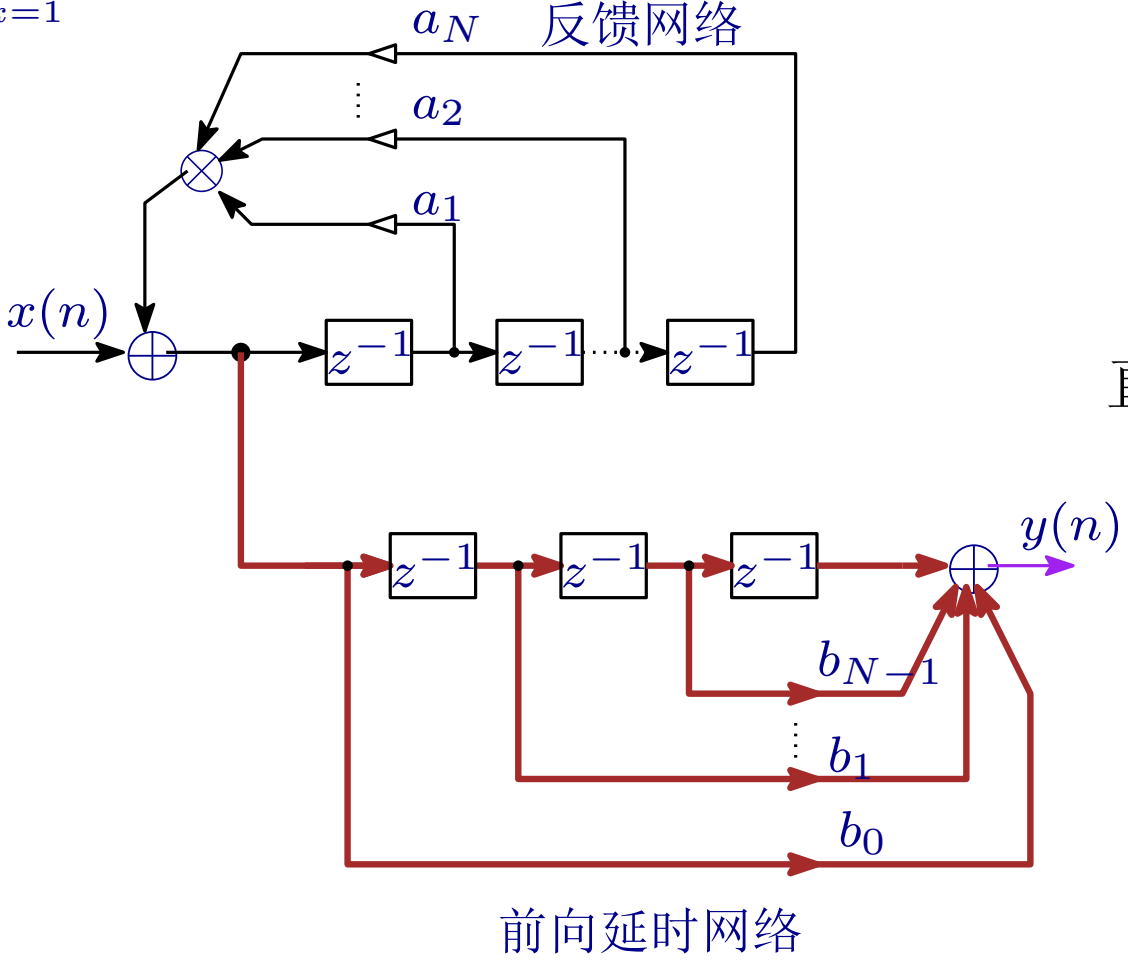
前向延时网络

反馈网络

无限长单位脉冲响应数字滤波器

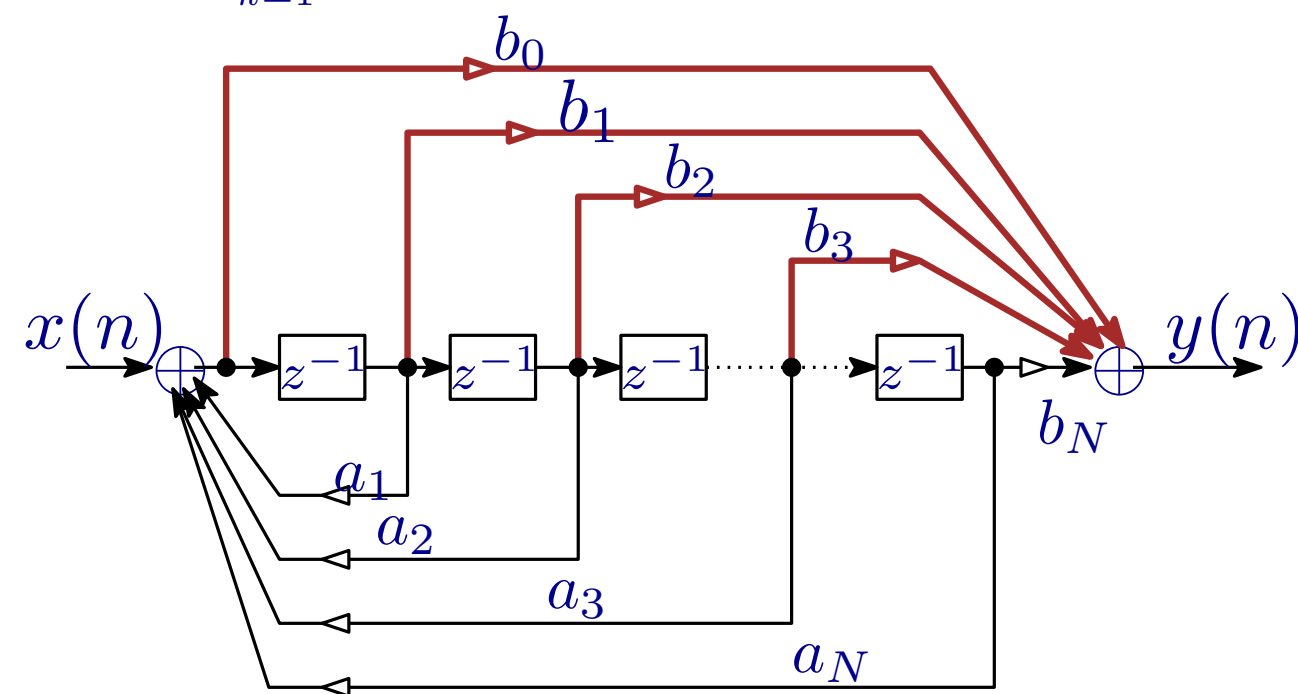
直接实现形式:

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \longleftrightarrow y(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) + \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$



直接实现形式:

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \longleftrightarrow y(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) + \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$



延时单元: N

直接实现形式:

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \longleftrightarrow y(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) + \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

直接型实现方案总结:

- a_k, b_k 对滤波器零极点控制关系不直接, 零极点调整复杂度极高
任何一个零极点的调整都需要调整所有的系数 $a_k (1 \leq k \leq N)$ 和 $b_r (0 \leq r \leq M)$
- 系数对极点位置灵敏度高, 字长效应敏感, 容易因为误差而出现不稳定现象 (后续会有讨论)

级联表达式

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \longrightarrow H(z) = \mathbf{A} \frac{\prod_{r=0}^M (1 - c_r z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}$$

c_r 是零点, d_k 是极点

无限长单位脉冲响应数字滤波器

级联表达形式

C_r 是零点, d_k 是极点

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \longrightarrow H(z) = \mathbf{A} \frac{\prod_{r=0}^M (1 - c_r z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}$$

提示: C_r, d_k 复数零极点总是成对出现

$h_i, h_i^* (q_i, q_i^*)$ 共轭复零 (极) 点

$$H(z) = \mathbf{A} \frac{\prod_{i=1}^{M_1} (1 - g_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^{N_1} (1 - p_i z^{-1})} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{M_2} (1 - h_i z^{-1})(1 - h_i^* z^{-1})}{\prod_{i=1}^{N_2} (1 - q_i z^{-1})(1 - q_i^* z^{-1})}$$

$g_i (p_i)$ 实零 (极) 点

$h_i, h_i^* (q_i, q_i^*)$ 共轭复零 (极) 点

无限长单位脉冲响应数字滤波器

级联表达形式

C_r 是零点, d_k 是极点

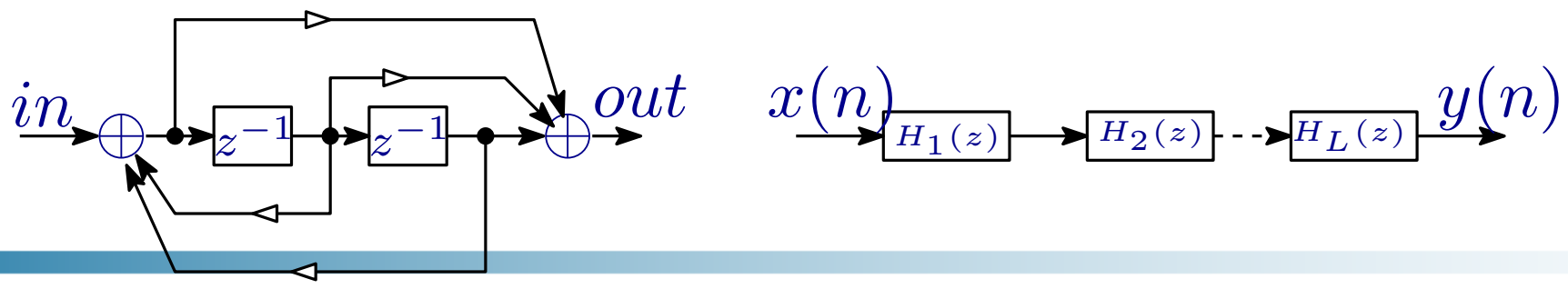
$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \longrightarrow H(z) = A \frac{\prod_{r=0}^M (1 - c_r z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}$$

提示: C_r, d_k 复数零极点总是成对出现

$h_i, h_i^* (q_i, q_i^*)$ 共轭复零 (极) 点

$$H(z) = A \frac{\prod_{i=1}^{M_1} (1 - g_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^{N_1} (1 - p_i z^{-1})} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{M_2} (1 - h_i z^{-1})(1 - h_i^* z^{-1})}{\prod_{i=1}^{N_2} (1 - q_i z^{-1})(1 - q_i^* z^{-1})}$$

$g_i (p_i)$ 实零 (极) 点



级联表达形式

C_r 是零点, d_k 是极点

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \longrightarrow H(z) = \mathbf{A} \frac{\prod_{r=0}^M (1 - c_r z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}$$

级联型实现优缺点:

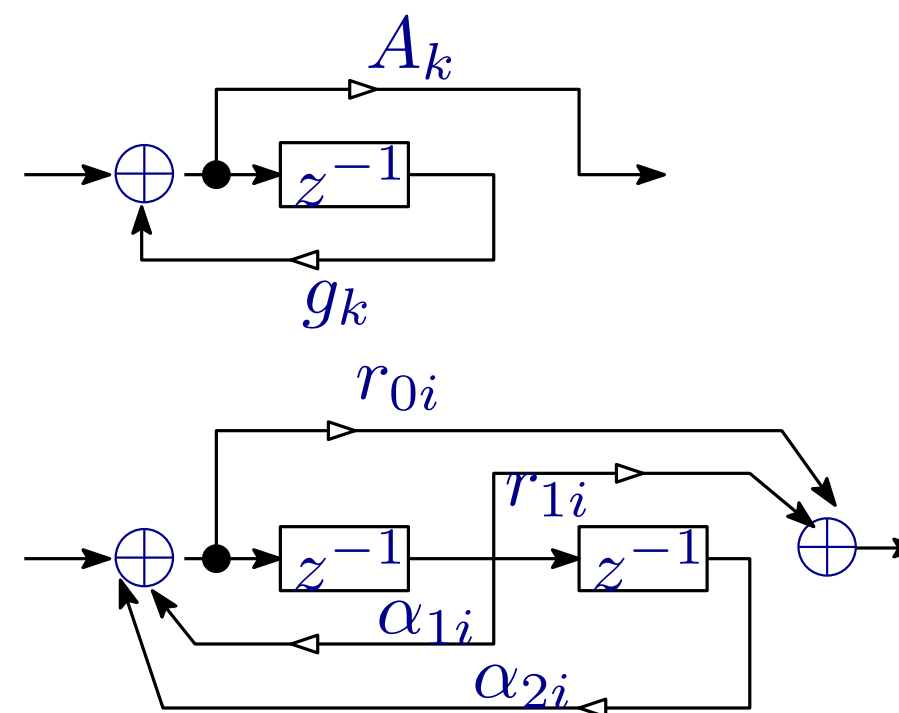
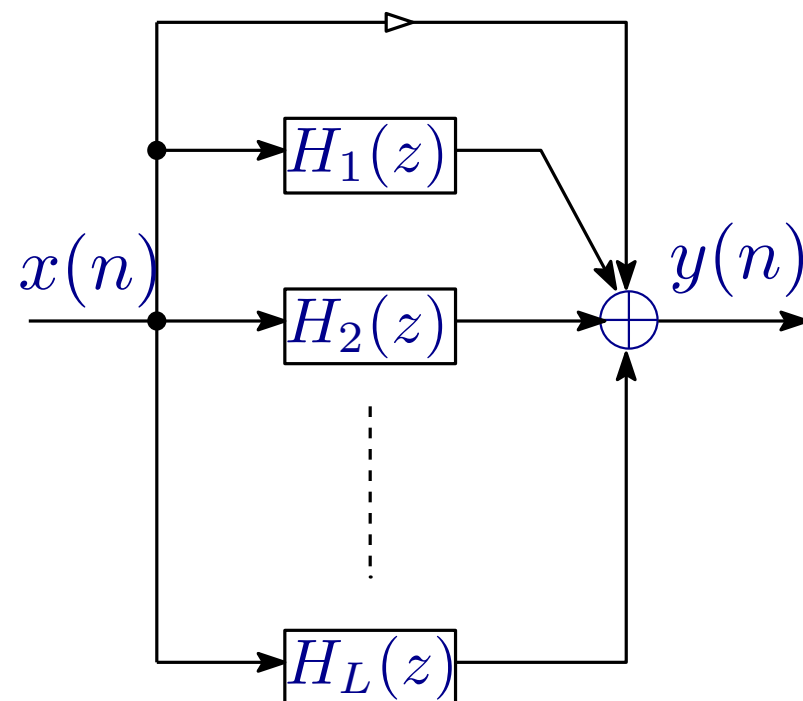
- 每一级基本节对应一对极点和零点
- 优点: 精确调整零极点位置, 便于调整频率相应
- 级联系统, 误差积累, 容易造成不稳定现象 (暂时略过, 后续详细分析研究)

并联型实现:

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \longrightarrow H(z) = \sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_k}{1 - g_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{r_{0k} + r_{1k} z^{-1}}{1 - \alpha_{1k} z^{-1} - \alpha_{2k} z^{-2}} + G_0$$

并联型实现:

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \Rightarrow H(z) = \sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_k}{1 - g_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{r_{0k} + r_{1k} z^{-1}}{1 - \alpha_{1k} z^{-1} - \alpha_{2k} z^{-2}} + G_0$$



并联型实现:

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \longrightarrow H(z) = \sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_k}{1 - g_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{r_{0k} + r_{1k} z^{-1}}{1 - \alpha_{1k} z^{-1} - \alpha_{2k} z^{-2}} + G_0$$

级联型特点

- 运算速度快，单独调整极点，基本节的之间误差不扩散（后续会有详细分析）
- 只可调整极点，无法单独调控零点

有限长冲激响应滤波器特点

- 冲激响应仅持续一个有限长时间
- 系统实现上仅包含前馈网络而无反馈网络

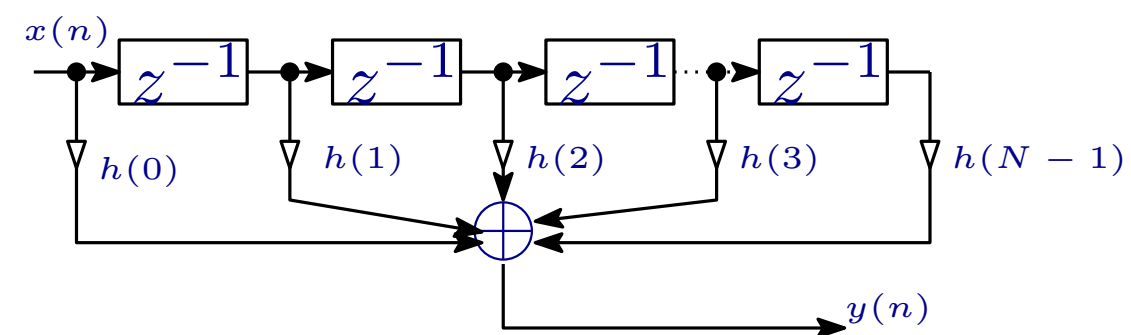
$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

有限长冲激响应滤波器特点

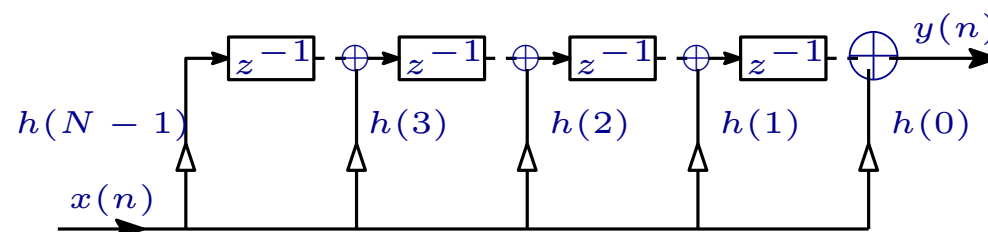
- 冲激响应仅持续一个有限长时间
- 系统实现上仅包含前馈网络而无反馈网络

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

直接型-横向滤波器结构:



直接结构



转置结构

有限长冲激响应滤波器特点

- 冲激响应仅持续一个有限长时间
- 系统实现上仅包含前馈网络而无反馈网络

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

级联型实现结构

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \prod_{k=1}^{M_1} H_{1k}(z) \prod_{k=1}^{M_2} H_{2k}(z)$$

其中, $M_1 + 2M_2 = N_1, M_1 \geq 0, M_2 \geq 0$

$$\diamond H_{1k}(z) = \alpha_{0k}^{(1)} + \alpha_{1k}^{(1)} z^{-1}, 1 \leq k \leq M_1$$

$$H_{2k}(z) = \alpha_{0k}^{(2)} + \alpha_{1k}^{(2)} z^{-1} + \alpha_{2k}^{(2)} z^{-2}, 1 \leq k \leq M_2$$

$H_{1k}(z)$ 对应一阶实零点, $H_{2k}(z)$ 对应一对共轭复零点

有限长冲激响应滤波器特点

- 冲激响应仅持续一个有限长时间
- 系统实现上仅包含前馈网络而无反馈网络

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

FIR 滤波器特点

- 系统因果稳定
- 无反馈网络（系统函数无极点），同样的幅度频率响应需要更高阶次才能达到
- 可以实现线性相位滤波器

线性相位滤波器单独列出，必然有非常重要的物理意义

线性相位滤波器

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\angle\phi(\omega)} = H(\omega)e^{j\angle\phi(\omega)}$$

线性相位滤波器

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\angle\phi(\omega)} = H(\omega)e^{j\angle\phi(\omega)}$$

幅度频率响应



线性相位滤波器

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\angle\phi(\omega)} = H(\omega)e^{j\angle\phi(\omega)}$$

幅度频率响应

相位频率响应

$$\phi(\omega) = -(\alpha\omega + \beta), \alpha, \beta \in R \quad \alpha, \text{group delay, 群延迟}$$

线性相位滤波器

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\angle\phi(\omega)} = H(\omega)e^{j\angle\phi(\omega)}$$

幅度频率响应

相位频率响应

$$\phi(\omega) = -(\alpha\omega + \beta), \alpha, \beta \in R \quad \alpha, \text{group delay, 群延迟}$$

线性相位:

对任何一个给定的频率 ω ，对应分量 $ae^{j\omega t}$ ，输出信号对应的延迟为 α ，与输入信号频率无关，所有频率分量齐头并进。即所有频率分量通过滤波器后均不会发生色散（Chromatic Dispersion）。

问题：何种结构的 FIR 滤波器具有线性相位性质

具备线性相位的 FIR 滤波器结构特征

$$H(e^{j\omega}) = H(\omega)e^{-j(\alpha\omega+\beta)} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-jn\omega}, \forall \omega \in R$$

具备线性相位的 FIR 滤波器结构特征

$$H(e^{j\omega}) = H(\omega)e^{-j(\alpha\omega+\beta)} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-jn\omega}, \forall \omega \in R$$

◇ 上述表达式需要满足实部相等，虚部相等

$$\begin{cases} H(\omega) \cos(\alpha\omega + \beta) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos(n\omega) \\ H(\omega) \sin(\alpha\omega + \beta) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin(n\omega) \end{cases}$$

具备线性相位的 FIR 滤波器结构特征

$$H(e^{j\omega}) = H(\omega)e^{-j(\alpha\omega+\beta)} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-jn\omega}, \forall \omega \in R$$

◇ 上述表达式需要满足实部相等，虚部相等

$$\left\{ \begin{array}{l} H(\omega) \cos(\alpha\omega + \beta) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos(n\omega) \\ H(\omega) \sin(\alpha\omega + \beta) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin(n\omega) \end{array} \right.$$

$$\sin(\alpha\omega + \beta) \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos(n\omega) = \cos(\alpha\omega + \beta) \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin(n\omega)$$

具备线性相位的 FIR 滤波器结构特征

$$H(e^{j\omega}) = H(\omega)e^{-j(\alpha\omega+\beta)} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-jn\omega}, \forall \omega \in R$$

◇ 上述表达式需要满足实部相等，虚部相等

$$\begin{cases} H(\omega) \cos(\alpha\omega + \beta) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos(n\omega) \\ H(\omega) \sin(\alpha\omega + \beta) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin(n\omega) \end{cases}$$

$$\sin(\alpha\omega + \beta) \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos(n\omega) = \cos(\alpha\omega + \beta) \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin(n\omega)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin((n - \alpha)\omega - \beta) = 0, \forall \omega \in R$$

考虑这样的一个特殊的例子：

$$\diamond \alpha = \frac{N-1}{2}$$

考虑这样的一个特殊的例子：

$$\diamond \alpha = \frac{N-1}{2}$$

Remark: 对于任意时刻输出 $y(n)$ ，对于输入信号的延迟为 $0 \sim (N-1)$ ，平均延时为 $(N-1)/2$ ，因此假定 $\alpha = (N-1)/2$ 是自然而又合理的。

考虑这样的一个特殊的例子：

$$\diamond \alpha = \frac{N-1}{2}$$

Remark: 对于任意时刻输出 $y(n)$ ，对于输入信号的延迟为 $0 \sim (N-1)$ ，平均延时为 $(N-1)/2$ ，因此假定 $\alpha = (N-1)/2$ 是自然而又合理的。

注意: $\beta = 0$ 其中 $\sin((n-\alpha)\omega - \beta)$ 关于中心点镜像奇对称：

$$\sin((n_1 - \alpha)\omega) + \sin((N-1-n_1 - \alpha)\omega) = 0$$

考虑这样的一个特殊的例子：

$$\diamond \alpha = \frac{N-1}{2}$$

Remark: 对于任意时刻输出 $y(n)$ ，对于输入信号的延迟为 $0 \sim (N-1)$ ，平均延时为 $(N-1)/2$ ，因此假定 $\alpha = (N-1)/2$ 是自然而又合理的。

注意： $\beta = 0$ 其中 $\sin((n - \alpha)\omega - \beta)$ 关于中心点镜像奇对称：

$$\sin((n_1 - \alpha)\omega) + \sin((N - 1 - n_1) - \alpha)\omega) = 0$$

进一步，若 $h(n)$ 关于中心镜像偶对称，即：

$$h(n_1) = h(N - 1 - n_1)$$

这个时候有：

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin((n - \alpha)\omega) = 0, \forall \omega \in R$$

考虑这样的一个特殊的例子：

$$\diamond \alpha = \frac{N-1}{2}$$

Remark: 对于任意时刻输出 $y(n)$ ，对于输入信号的延迟为 $0 \sim (N-1)$ ，平均延时为 $(N-1)/2$ ，因此假定 $\alpha = (N-1)/2$ 是自然而又合理的。

注意： $\beta = 0$ 其中 $\sin((n - \alpha)\omega - \beta)$ 关于中心点镜像奇对称：

$$\sin((n_1 - \alpha)\omega) + \sin((N - 1 - n_1) - \alpha)\omega) = 0$$

进一步，若 $h(n)$ 关于中心镜像偶对称，即：

$$h(n_1) = h(N - 1 - n_1)$$

这个时候有：

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin((n - \alpha)\omega) = 0, \forall \omega \in R$$

大胆假设，小心求证——必须验证满足这个条件就是线性相位滤波器

验证满足 $h(n) = h(N - 1 - n)$ 的滤波器是否线性相位

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

■ N 是偶数

验证满足 $h(n) = h(N - 1 - n)$ 的滤波器是否线性相位

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

■ N 是偶数

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(h(n)z^{-n} + h(N-1-n)z^{-(N-1-n)} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) \left(z^{-n} + z^{-(N-1-n)} \right) \end{aligned}$$

验证满足 $h(n) = h(N - 1 - n)$ 的滤波器是否线性相位

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

■ N 是偶数

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(h(n)z^{-n} + h(N-1-n)z^{-(N-1-n)} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) \left(z^{-n} + z^{-(N-1-n)} \right) \end{aligned}$$

代入 $z = e^{j\omega}$

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) \left(e^{-jn\omega} + e^{-j\omega(N-1-n)} \right) \\ &= e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h(n) \cos\left(\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\omega\right) \end{aligned}$$

验证满足 $h(n) = h(N - 1 - n)$ 的滤波器是否线性相位

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

■ N 是偶数

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(h(n)z^{-n} + h(N-1-n)z^{-(N-1-n)} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) (z^{-n} + z^{-(N-1-n)}) \end{aligned}$$

代入 $z = e^{j\omega}$

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) (e^{-jn\omega} + e^{-j\omega(N-1-n)}) \quad \text{注意: } N = 2l, \omega = \pi \text{ 时,} \\ &= e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h(n) \cos\left(\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\omega\right) \quad \cos\left(\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\pi\right) = 0 \end{aligned}$$

HPF is mission impossible!

验证满足 $h(n) = h(N - 1 - n)$ 的滤波器是否线性相位

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

■ N 是奇数 $N = 2k + 1 \square k \in \mathcal{Z}$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} \left(h(n) z^{-n} + h(N-1-n) z^{-(N-1-n)} \right) + h\left(\frac{N-1}{2}\right) z^{-\frac{N-1}{2}}$$

代入 $z = e^{-j\omega}$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \left(h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} 2h(n) \cos\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\omega \right)$$

可实现各类型滤波器

注意: $\beta = \pi/2$ 其中 $\sin((n - \alpha)\omega - \beta)$ 中心点镜像偶对称:
 $\sin((n_1 - \alpha)\omega + \beta) = \sin((N - 1 - n_1) - \alpha)\omega + \beta)$

注意: $\beta = \pi/2$ 其中 $\sin((n - \alpha)\omega - \beta)$ 中心点镜像偶对称:

$$\sin((n_1 - \alpha)\omega + \beta) = \sin((N - 1 - n_1) - \alpha)\omega + \beta)$$

当 $h(n) = -h(N - 1 - n)$ 可满足:

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin((n - \alpha)\omega + \beta) = 0, \forall \omega \in R$$

注意: $\beta = \pi/2$ 其中 $\sin((n - \alpha)\omega - \beta)$ 中心点镜像偶对称:

$$\sin((n_1 - \alpha)\omega + \beta) = \sin((N - 1 - n_1) - \alpha)\omega + \beta)$$

当 $h(n) = -h(N - 1 - n)$ 可满足:

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin((n - \alpha)\omega + \beta) = 0, \forall \omega \in R$$

类似的可以得到 N 为偶数的时候, 对应的频率响应为:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) (e^{-jn\omega} - e^{-j\omega(N-1-n)}) \\ &= e^{-j(\frac{N-1}{2}\omega + \frac{\pi}{2})} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h(n) \sin((\frac{N}{2} - n - \frac{1}{2})\omega) \end{aligned}$$

注意: $\beta = \pi/2$ 其中 $\sin((n - \alpha)\omega - \beta)$ 中心点镜像偶对称:

$$\sin((n_1 - \alpha)\omega + \beta) = \sin((N - 1 - n_1) - \alpha)\omega + \beta)$$

当 $h(n) = -h(N - 1 - n)$ 可满足:

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin((n - \alpha)\omega + \beta) = 0, \forall \omega \in R$$

类似的可以得到 N 为偶数的时候, 对应的频率响应为:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) (e^{-jn\omega} - e^{-j\omega(N-1-n)}) \quad \omega = 0, H(e^{j\omega}) = 0 \\ &= e^{-j(\frac{N-1}{2}\omega + \frac{\pi}{2})} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h(n) \sin((\frac{N}{2} - n - \frac{1}{2})\omega) \end{aligned}$$

注意: $\beta = \pi/2$ 其中 $\sin((n - \alpha)\omega - \beta)$ 中心点镜像偶对称:

$$\sin((n_1 - \alpha)\omega + \beta) = \sin((N - 1 - n_1) - \alpha)\omega + \beta)$$

当 $h(n) = -h(N - 1 - n)$ 可满足:

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin((n - \alpha)\omega + \beta) = 0, \forall \omega \in R$$

类似的可以得到 N 为偶数的时候, 对应的频率响应为:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) (e^{-jn\omega} - e^{-j\omega(N-1-n)}) \quad \omega = 0, H(e^{j\omega}) = 0 \\ &= e^{-j(\frac{N-1}{2}\omega + \frac{\pi}{2})} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h(n) \sin((\frac{N}{2} - n - \frac{1}{2})\omega) \end{aligned}$$

类似的可以得到 N 为奇数的时候, 对应的频率响应为:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j(\frac{N-1}{2}\omega + \frac{\pi}{2})} \left(\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} 2h(n) \sin(\frac{N-1}{2} - n) \omega \right)$$

注意: $\beta = \pi/2$ 其中 $\sin((n - \alpha)\omega - \beta)$ 中心点镜像偶对称:

$$\sin((n_1 - \alpha)\omega + \beta) = \sin((N - 1 - n_1) - \alpha)\omega + \beta)$$

当 $h(n) = -h(N - 1 - n)$ 可满足:

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin((n - \alpha)\omega + \beta) = 0, \forall \omega \in R$$

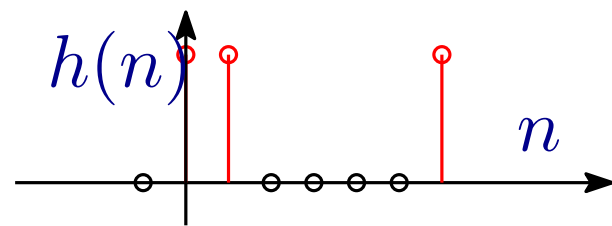
类似的可以得到 N 为偶数的时候, 对应的频率响应为:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) (e^{-jn\omega} - e^{-j\omega(N-1-n)}) \quad \omega = 0, H(e^{j\omega}) = 0 \\ &= e^{-j(\frac{N-1}{2}\omega + \frac{\pi}{2})} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h(n) \sin((\frac{N}{2} - n - \frac{1}{2})\omega) \end{aligned}$$

类似的可以得到 N 为奇数的时候, 对应的频率响应为:

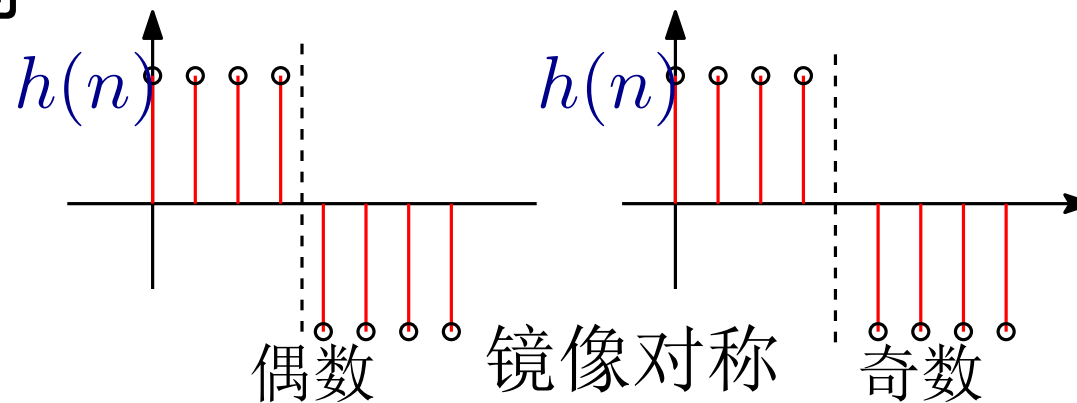
$$H(e^{j\omega}) = e^{-j(\frac{N-1}{2}\omega + \frac{\pi}{2})} \left(\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} 2h(n) \sin(\frac{N-1}{2} - n) \omega \right) \quad \omega = 0, \pi, H(e^{j\omega}) = 0$$

镜像对称与周期对称的区别



周期对称

$$h(n) = h(N - n)$$



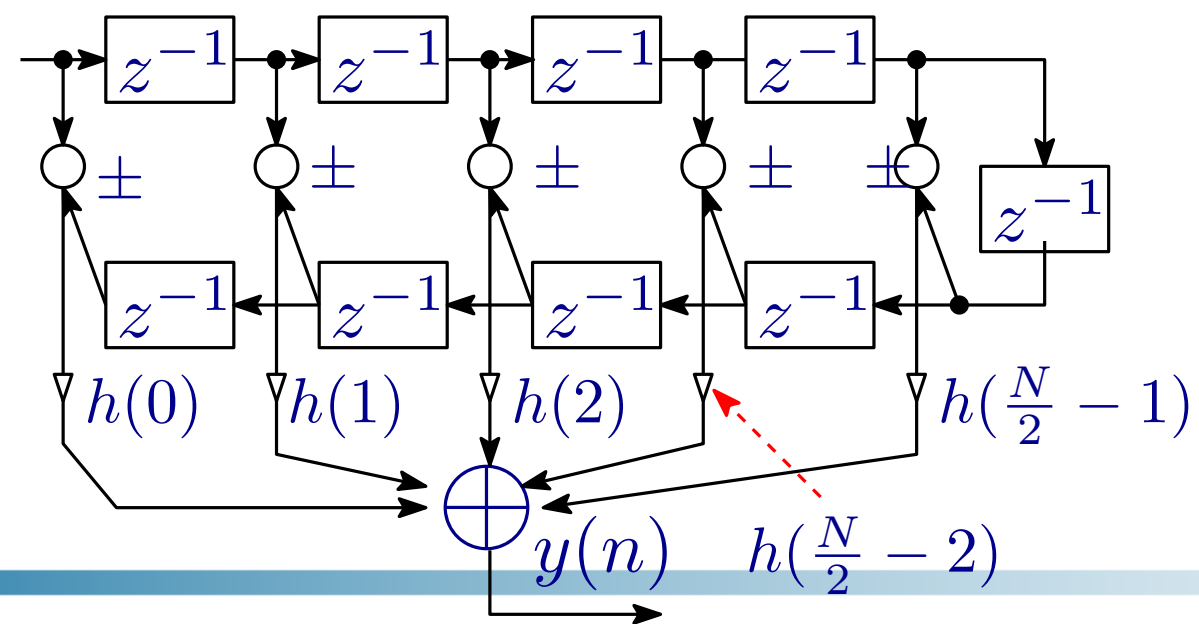
偶数

镜像对称

奇数

$$h(n) = \pm h(N - 1 - n)$$

线性相位滤波器实现 (偶数)



线性相位滤波器零点分布

$$\alpha = \frac{N-1}{2}, h(n) = \pm h(N-1-n)$$

注意到 $h(n) \in R$, 复零点总是共轭成对出现, 如果 z_0 满足 $h(z_0) = 0$:

线性相位滤波器零点分布

$$\alpha = \frac{N-1}{2}, h(n) = \pm h(N-1-n)$$

注意到 $h(n) \in R$, 复零点总是共轭成对出现, 如果 z_0 满足 $h(z_0) = 0$:

线性相位滤波器零点分布

$$\alpha = \frac{N-1}{2}, h(n) = \pm h(N-1-n)$$

注意到 $h(n) \in R$, 复零点总是共轭成对出现, 如果 z_0 满足 $h(z_0) = 0$:

$$h(z_0^*) = (h(z_0))^* = 0$$

$$h(z_0) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) \left[z_0^{-n} + z_0^{-(N-1-n)} \right]$$

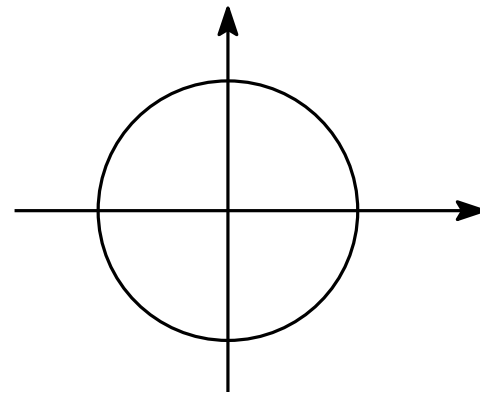
$$\begin{aligned} z_0^{-(N-1)} h(z_0) &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) \left[z_0^{(N-1-n)} + z_0^n \right] \\ &= H(z_0^{-1}) \end{aligned}$$

$$\because h(z_0) = 0, z_0 \neq 0, \therefore H(z_0^{-1}) = 0$$

$$\longrightarrow \text{if } h(z_0) = 0 \text{ then } h(z_0^*), h(z_0^{-1}), h((z_0^{-1})^*) = 0$$

线性相位滤波器零点分布

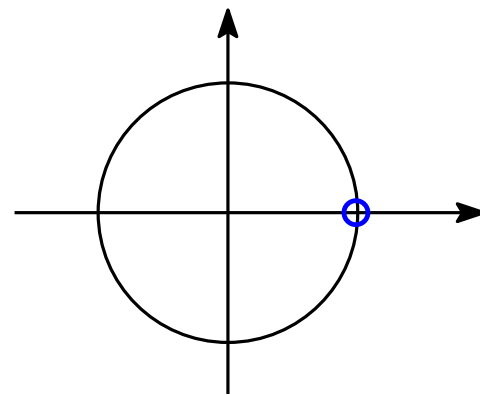
$$\alpha = \frac{N-1}{2}, h(n) = \pm h(N-1-n)$$



线性相位滤波器零点分布

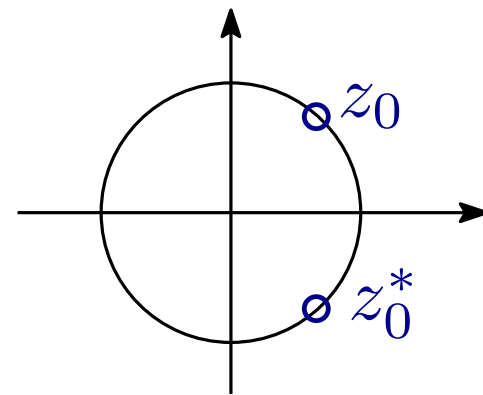
$$\alpha = \frac{N-1}{2}, h(n) = \pm h(N-1-n)$$

$$z_0 = 1$$



线性相位滤波器零点分布

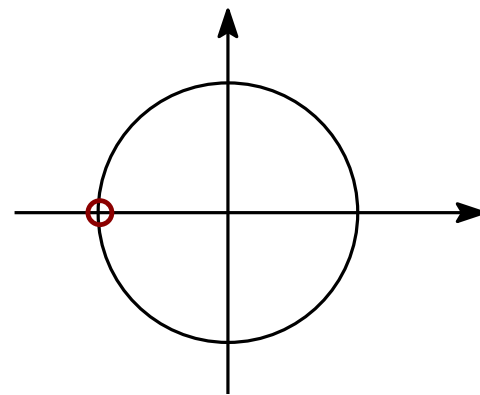
$$\alpha = \frac{N-1}{2}, h(n) = \pm h(N-1-n)$$



$$|z_0| = 1 \quad \text{and} \quad z_0 \leq \pm 1$$

线性相位滤波器零点分布

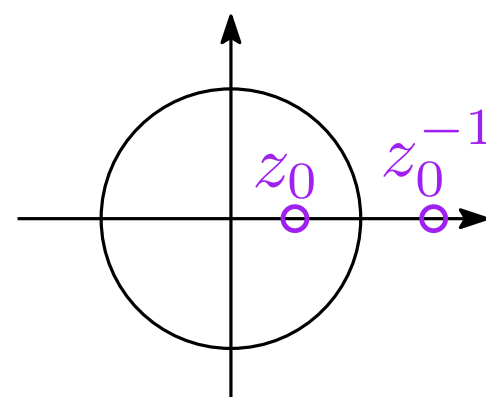
$$\alpha = \frac{N-1}{2}, h(n) = \pm h(N-1-n)$$



$$z_0 = -1$$

线性相位滤波器零点分布

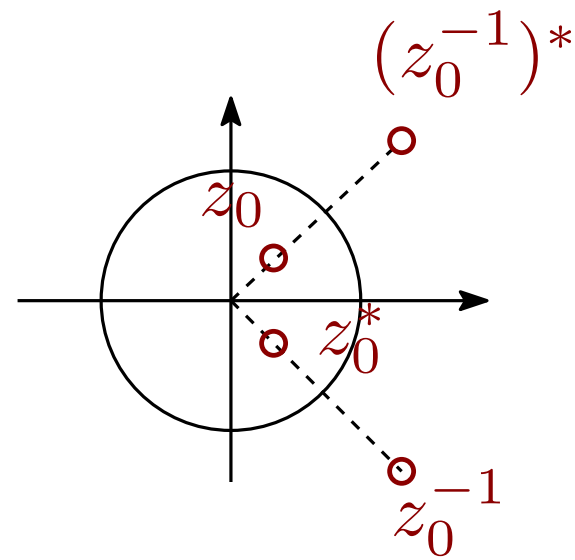
$$\alpha = \frac{N-1}{2}, h(n) = \pm h(N-1-n)$$



$$z_0 \in R, z_0 \neq \pm 1$$

线性相位滤波器零点分布

$$\alpha = \frac{N-1}{2}, h(n) = \pm h(N-1-n)$$



$$z_0, z_0^*, z_0^{-1}, (z_0^*)^{-1}$$

线性相位滤波器频率取样实现

系统函数 $H(z)$ 在单位圆的 N 等分取样就是 $h(n)$ 的傅立叶变换 $H(k)$

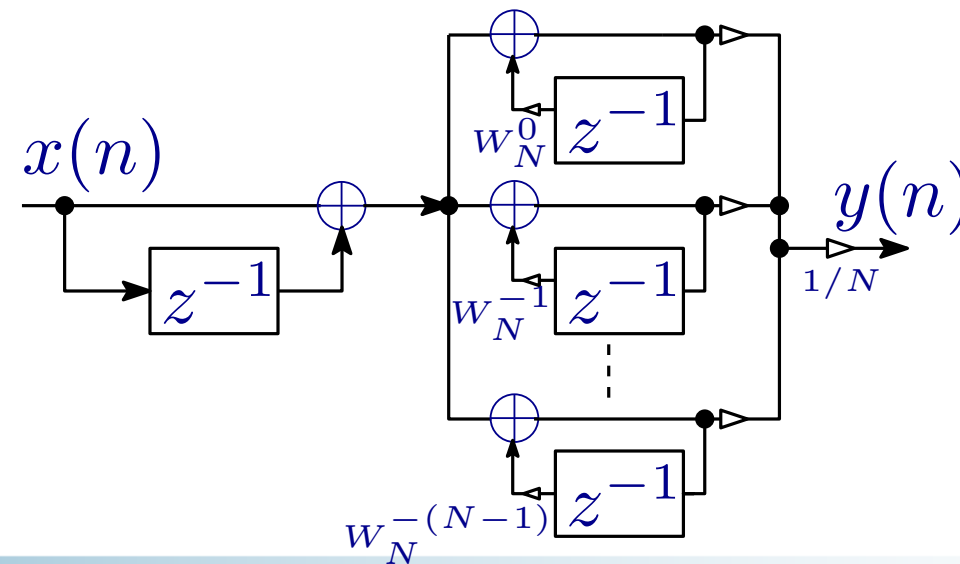
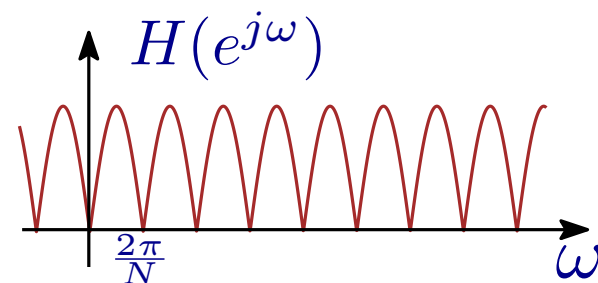
$$H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

$$H(z) = \underbrace{(1 - z^{-N})}_{\text{FIR, 梳状滤波器}} \cdot \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}}_{\text{IIR滤波器}}$$

FIR, 梳状滤波器

IIR滤波器

$$|H(e^{j\omega})| = 2|\sin(N\omega/2)|$$



频率取样实现特点

- 梳状滤波器是 **FIR** 结构，零点位于单位圆上
- **IIR** 系统是 N 个一阶分式的和，极点也位于单位圆上 $Z_k = W_N^{-k}$
- 极点位于单位圆上，系统稳定性缺失，无法使用（后续详细阐述）
- 一阶实现方式引入大量的复数运算

频率取样实现稳定性修正

谐振器极点位置收缩到的半径为 $r, r < 1$ 的圆周上，并调整梳状滤波器零点和极点重合以相互抵消。

$$H(z) = \frac{1-r^N z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H_r(k)}{1-rW_N^{-k} z^{-1}}$$

其中， $H_r(k) = H(rW_N^{-k}) \approx H(k)$ ，进一步简化可以得到：

$$H(z) = \frac{1-r^N z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1-rW_N^{-k} z^{-1}}$$

频率取样实现复数运算修正

频率取样实现复数运算修正

$$H(k) = H^*(N - k), W_N^k = (W_N^{N-k})^*$$

频率取样实现复数运算修正

$$H(k) = H^*(N - k), W_N^k = (W_N^{N-k})^*$$

将第 k 个和 $N - k$ 个 IIR 合并:

$$\begin{aligned} H_k(z) &\approx \frac{H(k)}{1 - rW_N^{-k}z^{-1}} + \frac{H(N-k)}{1 - rW_N^{-(N-k)}z^{-1}} \\ &= \frac{2|H(k)| \left\{ [\cos \theta(k)] - rz^{-1} \cos \left[\theta(k) - \frac{2k\pi}{N} \right] \right\}}{1 - 2rz^{-1} \cos \frac{2k\pi}{N} + r^2 z^{-2}} \bigg| \theta(k) = \arg H(k) \end{aligned}$$

频率取样实现复数运算修正

$$H(k) = H^*(N - k), W_N^k = (W_N^{N-k})^*$$

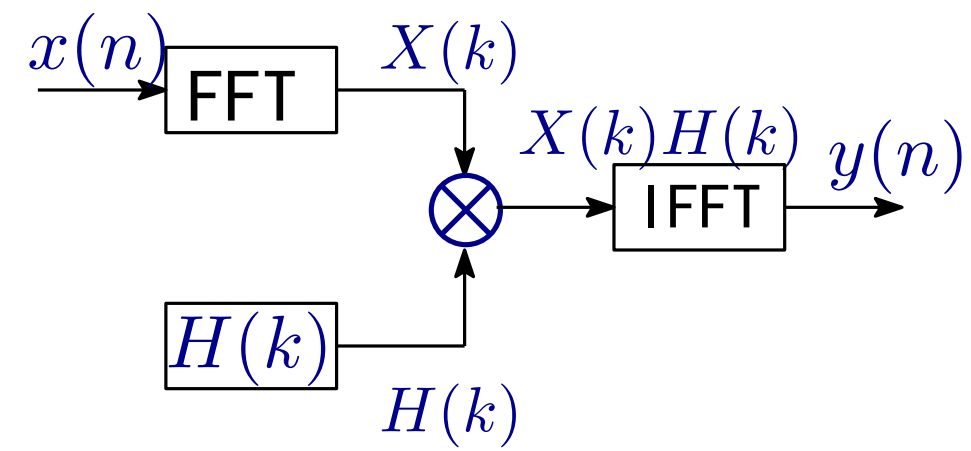
将第 k 个和 $N - k$ 个 IIR 合并:

$$\begin{aligned} H_k(z) &\approx \frac{H(k)}{1 - rW_N^{-k}z^{-1}} + \frac{H(N-k)}{1 - rW_N^{-(N-k)}z^{-1}} \\ &= \frac{2|H(k)| \left\{ [\cos \theta(k)] - rz^{-1} \cos \left[\theta(k) - \frac{2k\pi}{N} \right] \right\}}{1 - 2rz^{-1} \cos \frac{2k\pi}{N} + r^2 z^{-2}} \bigg| \theta(k) = \arg H(k) \end{aligned}$$

频率取样总结:

- 引入了极点, 造成了系统不稳定
- 实现复杂, 引入大量的存储器及乘法器
- 当存在 $H(k), 0 \leq k \leq N - 1$ 为 0 或者可忽略的数值时, 可能可以获得较多的系统复杂度降低

快速 FFT 实现方法



数字滤波器的基本操作

- 延时单位-存储器，寄存器
- 数乘单元-乘法器（乘法指令）
- 合并单元-加法器（加法指令）

数字滤波器的基本操作

- 延时单位-存储器，寄存器
- 数乘单元-乘法器（乘法指令）
- 合并单元-加法器（加法指令）

存储器，乘法器，加法器复杂度直接取決与位宽

- 存储器复杂度-位宽线性关系（芯片面积）
- 乘法器复杂度-增长速度超过线性（面积，运算时间）
- 加法器复杂度-面积与位宽基本上近似线性关系，执行时间与位宽也直接相关

数字滤波器的基本操作

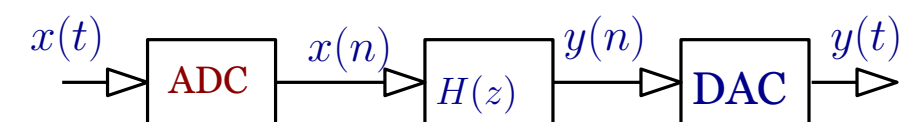
- 延时单位-存储器，寄存器
- 数乘单元-乘法器（乘法指令）
- 合并单元-加法器（加法指令）

存储器，乘法器，加法器复杂度直接取決与位宽

- 存储器复杂度-位宽线性关系（芯片面积）
- 乘法器复杂度-增长速度超过线性（面积，运算时间）
- 加法器复杂度-面积与位宽基本上近似线性关系，执行时间与位宽也直接相关

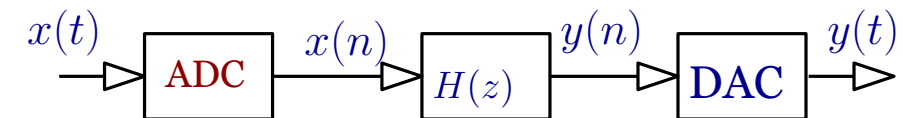
问题：滤波器性能和位宽有关系吗？如何实现性能和位宽（复杂度）的优化和折中。

数字滤波器的基本结构（回顾）



- 数字信号处理系统存储系统单元字节宽度受限
- 输入信号必须经过**取样量化**转换为有限字长信号

数字滤波器的基本结构（回顾）

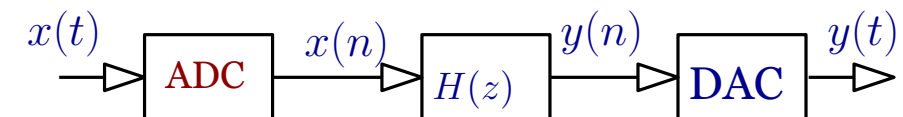


- 数字信号处理系统存储系统单元字节宽度受限
- 输入信号必须经过取样量化转换为有限字长信号

有限字长误差来源

- 输入（输出）信号经过取样量化的量化误差
- 系统参数有限精度表示引起的量化误差
- 运算过程中包含的尾数处理、信号电平压缩等产生的积累误差

数字滤波器的基本结构（回顾）



- 数字信号处理系统存储系统单元字节宽度受限
- 输入信号必须经过**取样量化**转换为有限字长信号

研究目的

- 信号处理芯片复杂度和处理字长直接相关，复杂度和有限字长宽度引起的误差之间的折中

通用计算机，CPU 处理位宽和存储位宽目前一般不小于 64 比特，远远超过信号信噪比区间，通常不考虑运算误差
- 量化位宽，射频通道线性特性与输入序列样本的准确性和复杂度之间如何折中

数的表示方法

■ 定点二进制数 (Fix), 浮点二进制数, 成组浮点二进制数

定点运算速度快, 面临溢出问题; 浮点动态范围大, 运算复杂度高, 功耗高; 成组浮点数方法一组数据共享阶码, 使用定点方式计算尾数, 两者折中

数的表示方法

■ 定点二进制数 (Fix), 浮点二进制数, 成组浮点二进制数

定点运算速度快, 面临溢出问题; 浮点动态范围大, 运算复杂度高, 功耗高; 成组浮点数方法一组数据共享阶码, 使用定点方式计算尾数, 两者折中

■ 正数: 原码, 补码, 反码均表所示为 $x = 0.X_1X_2 \cdots X_b$

数的表示方法

■ 定点二进制数 (Fix), 浮点二进制数, 成组浮点二进制数

定点运算速度快, 面临溢出问题; 浮点动态范围大, 运算复杂度高, 功耗高; 成组浮点数方法一组数据共享阶码, 使用定点方式计算尾数, 两者折中

■ 正数: 原码, 补码, 反码均表所示为 $x = 0.X_1X_2 \cdots X_b$

■ 负数:

◇ 原码表示 $X_y = 1.X_1X_2 \cdots X_b$, y 指代原码

$$X_y = X_0.X_1X_2 \cdots X_b \rightarrow x = (-1)^{X_0}.X_1X_2 \cdots X_b$$

符号位操作方式适合乘法, 不利于加法操作

数的表示方法

■ 定点二进制数 (Fix), 浮点二进制数, 成组浮点二进制数

定点运算速度快, 面临溢出问题; 浮点动态范围大, 运算复杂度高, 功耗高; 成组浮点数方法一组数据共享阶码, 使用定点方式计算尾数, 两者折中

■ 正数: 原码, 补码, 反码均表所示为 $x = 0.X_1X_2 \cdots X_b$

■ 负数:

◇ 原码表示 $X_y = 1.X_1X_2 \cdots X_b$, y 指代原码

$$X_y = X_0.X_1X_2 \cdots X_b \rightarrow x = (-1)^{X_0}.X_1X_2 \cdots X_b$$

符号位操作方式适合乘法, 不利于加法操作

◇ 负数反码表示 $X_r = 1.\bar{X}_1\bar{X}_2 \cdots \bar{X}_b$, r 指代反码, \bar{X} 表示取反

$$X_r = X_0.X_1X_2 \cdots X_b \rightarrow x = -X_0(1 - 2^{-b}) + \sum_{i=1}^b X_i 2^{-i}$$

数的表示方法

■ 定点二进制数 (Fix), 浮点二进制数, 成组浮点二进制数

定点运算速度快, 面临溢出问题; 浮点动态范围大, 运算复杂度高, 功耗高; 成组浮点数方法一组数据共享阶码, 使用定点方式计算尾数, 两者折中

■ 正数: 原码, 补码, 反码均表所示为 $x = 0.X_1X_2 \cdots X_b$

■ 负数:

◇ 原码表示 $X_y = 1.X_1X_2 \cdots X_b$, y 指代原码

$$X_y = X_0.X_1X_2 \cdots X_b \rightarrow x = (-1)^{X_0}.X_1X_2 \cdots X_b$$

符号位操作方式适合乘法, 不利于加法操作

◇ 负数反码表示 $X_r = 1.\bar{X}_1\bar{X}_2 \cdots \bar{X}_b$, r 指代反码, \bar{X} 表示取反

$$X_r = X_0.X_1X_2 \cdots X_b \rightarrow x = -X_0(1 - 2^{-b}) + \sum_{i=1}^b X_i 2^{-i}$$

◇ 负数补码表示 $X_b = 1.(\bar{X}_1\bar{X}_2 \cdots \bar{X}_b + 1)$, b 指代补码, \bar{X} 表示取反

$$X_b = X_0.X_1X_2 \cdots X_b \rightarrow x = -X_0 + \sum_{i=1}^b X_i 2^{-i}$$

适合加法预算 (加法结果即为结果的补码), 补码加法只需要将减数取相反数的补码即可完成计算

误差类型：截尾误差和表征误差

定点系统截尾误差

截尾表示 $[x]_T = \sum_{i=1}^{b_t} X_i 2^{-i}$ ，截尾误差 $E_T = [x]_T - x$

误差类型：截尾误差和表征误差

定点系统截尾误差

截尾表示 $[x]_T = \sum_{i=1}^{b_t} X_i 2^{-i}$ ，截尾误差 $E_T = [x]_T - x$

■ 正数截尾误差 $E_T = \sum_{i=b_t+1}^b X_i 2^{-i}, q = 2^{-b_t} - 2^{-b}, -q < E_T \leq 0$

误差类型：截尾误差和表征误差

定点系统截尾误差

截尾表示 $[x]_T = \sum_{i=1}^{b_t} X_i 2^{-i}$ ，截尾误差 $E_T = [x]_T - x$

■ 正数截尾误差 $E_T = \sum_{i=b_t+1}^b X_i 2^{-i}, q = 2^{-b_t} - 2^{-b}, -q < E_T \leq 0$

■ 负数截尾误差

◇ 补码 $E_T = \sum_{i=b_t+1}^{b_t} X_i 2^{-i}, -q < E_T \leq 0$

◇ 原码和反码： $0 \leq E_T < q$

误差类型：截尾误差和表征误差

定点系统截尾误差

截尾表示 $[x]_T = \sum_{i=1}^{b_t} X_i 2^{-i}$ ，截尾误差 $E_T = [x]_T - x$

■ 正数截尾误差 $E_T = \sum_{i=b_t+1}^b X_i 2^{-i}, q = 2^{-b_t} - 2^{-b}, -q < E_T \leq 0$

■ 负数截尾误差

◇ 补码 $E_T = \sum_{i=b_t+1}^{b_t} X_i 2^{-i}, -q < E_T \leq 0$

◇ 原码和反码： $0 \leq E_T < q$

反码截断会引起 $X_0 2^{-b}$ 的变化，这是核心

误差类型：截尾误差和表征误差

定点系统截尾误差

截尾表示 $[x]_T = \sum_{i=1}^{b_t} X_i 2^{-i}$ ，截尾误差 $E_T = [x]_T - x$

■ 正数截尾误差 $E_T = \sum_{i=b_t+1}^b X_i 2^{-i}, q = 2^{-b_t} - 2^{-b}, -q < E_T \leq 0$

■ 负数截尾误差

◇ 补码 $E_T = \sum_{i=b_t+1}^{b_t} X_i 2^{-i}, -q < E_T \leq 0$

◇ 原码和反码： $0 \leq E_T < q$

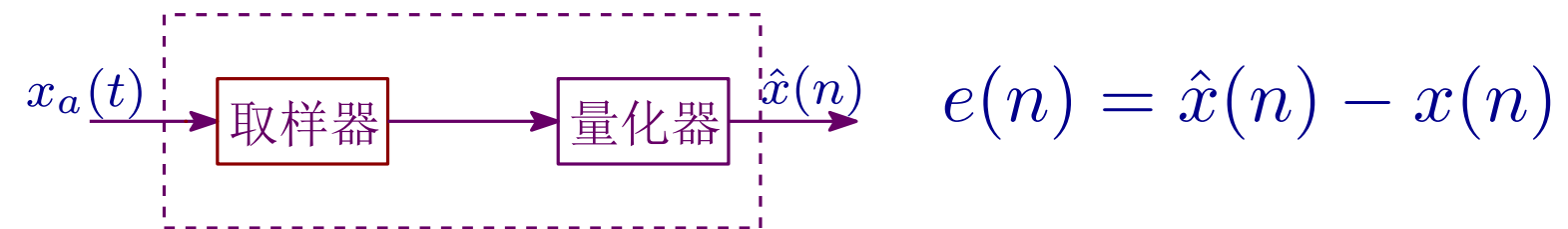
反码截断会引起 $X_0 2^{-b}$ 的变化，这是核心

定点系统舍入误差， $q = 2^{-b_r} - 2^{-b}, -q/2 < E_r \leq q/2$

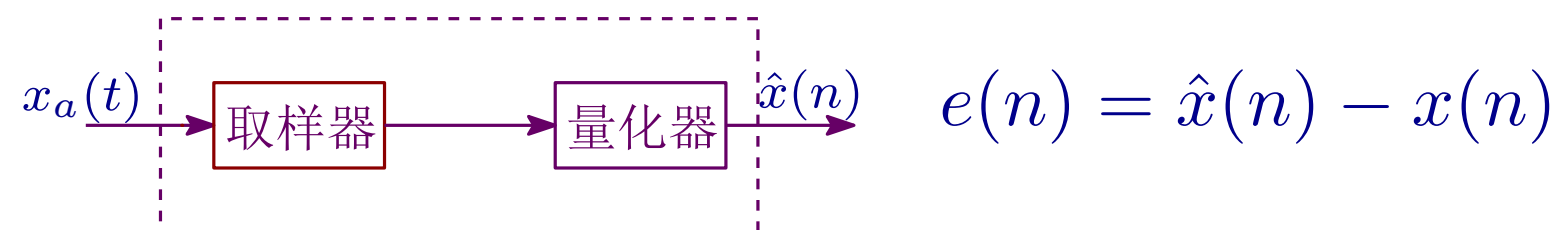
- 相对误差 $\epsilon = \frac{[x] - x}{x}$
- 绝对误差 $E = [x] - x = x\epsilon$
- 浮点舍入误差 $\epsilon_R, q = 2^{-b}, -q \leq \epsilon_R \leq q$
- 截尾误差 ϵ_T :
 - ◇ 正数截尾: $-2q < \epsilon_T \leq 0$
 - ◇ 负数补码截尾: $0 \leq \epsilon_T < 2q$
 - ◇ 负数原码、反码: $-2q < \epsilon_T \leq 0$

综上所述, 截尾处理量化特性满足 $-2^{-b} \leq \epsilon_T \leq 2^{-b}$

ADC转换器等效模型



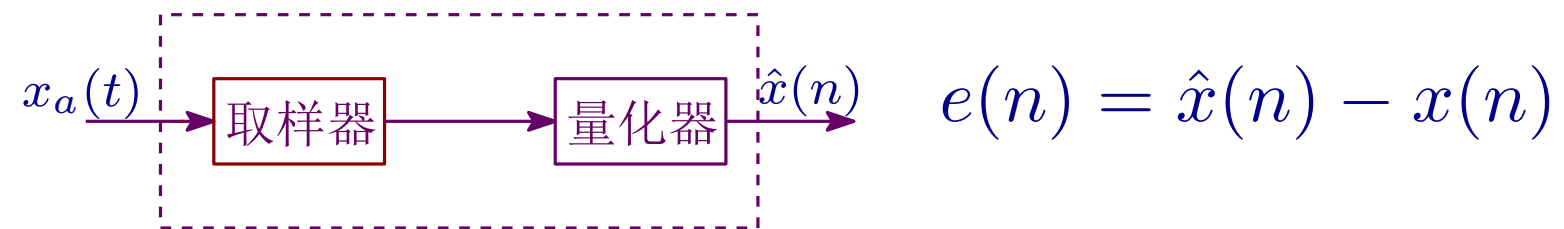
ADC转换器等效模型



关于 $e(n)$ 的一些假设

- 平稳随机序列 误差序列的自相关函数性质和时间无关
- $E(e(n)x(n)) = 0$
- $E(e(n)e(m)) = 0, \text{ if } m \neq n$
- $e(n)$ 误差范围内均匀分布

ADC转换器等效模型



关于 $e(n)$ 的一些假设

- 平稳随机序列 误差序列的自相关函数性质和时间无关
- $E(e(n)x(n)) = 0$
- $E(e(n)e(m)) = 0, \text{ if } m \neq n$
- $e(n)$ 误差范围内均匀分布

$e(n)$ 的概率密度函数(Probability Density Function)

$$P(e(n)) = \begin{cases} \frac{1}{q} & -\frac{q}{2} \leq e(n) < \frac{q}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

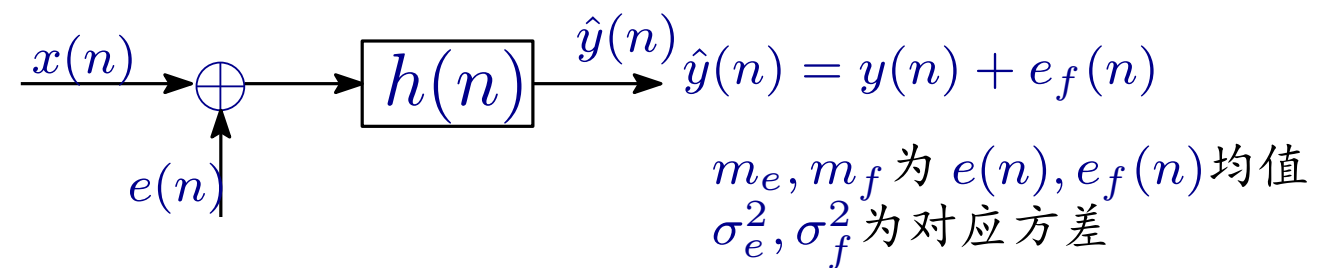
截尾误差统计特性

操作方式	均值 (m_e)	方差 σ_e^2
定点补码	-2^{-b-1}	$2^{-2b}/12$
定点原码, 反码	0	$\frac{2^{-2b}}{3}$

舍入误差统计特性

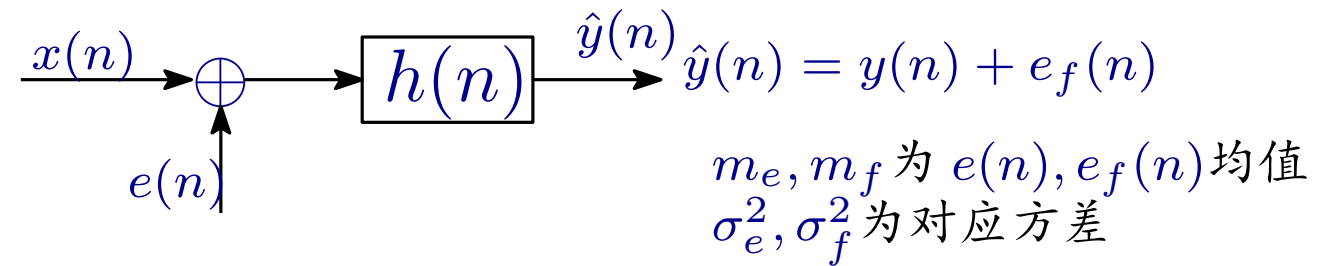
$$E(e(n)) = 0, \sigma_e^2 = \frac{2^{-2b}}{12}$$

我们更多的考虑舍入误差 (round()), 而不是考虑截尾 (Truncate()) 误差 ← 现实的信号处理系统一般采取舍入方式对精度进行控制



量化噪声通过线性系统模型

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)\hat{x}(n-k) = y(n) + \sum_{k=0}^{\infty} h(k)e(n-k) = y(n) + e_f(n)$$



量化噪声通过线性系统模型

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)\hat{x}(n-k) = y(n) + \sum_{k=0}^{\infty} h(k)e(n-k) = y(n) + e_f(n)$$

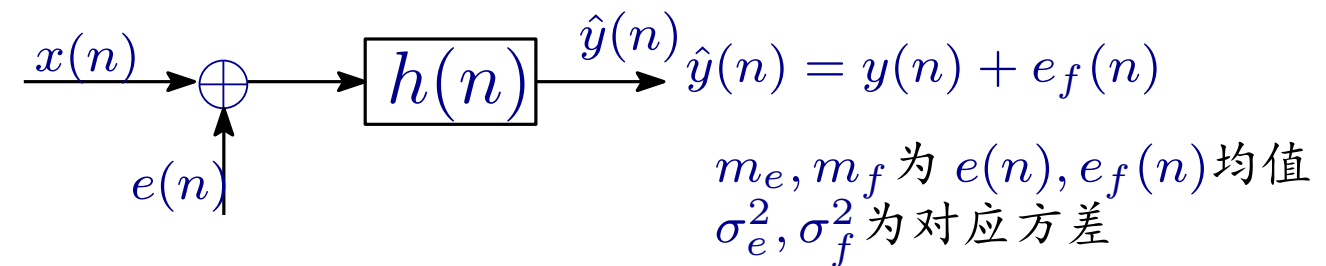
输出误差信号统计特性

■ 舍入、ADC 取样

$$\diamond m_f = E\{e_f(n)\} = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)e(n-k) = m_e \sum_{k=0}^{\infty} h(k) = 0$$

$$\diamond \sigma_f^2 = E\{(e_f(n) - m_f)^2\} = E\{e_f^2(n)\} = \sigma_e^2 \sum_{m=0}^{\infty} h^2(m)$$

$$\sigma_f^2 = \frac{\sigma_e^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

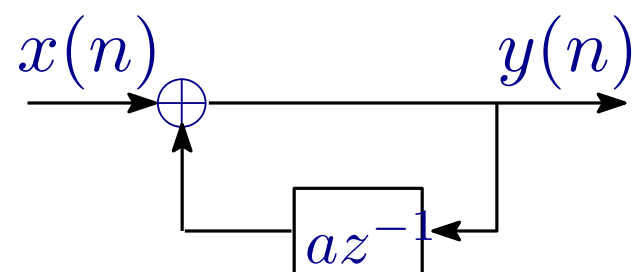


量化噪声通过线性系统模型

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)\hat{x}(n-k) = y(n) + \sum_{k=0}^{\infty} h(k)e(n-k) = y(n) + e_f(n)$$

■ 量化误差传递（截断，舍入）

◇ $m_f = m_e H(e^{j\omega})$



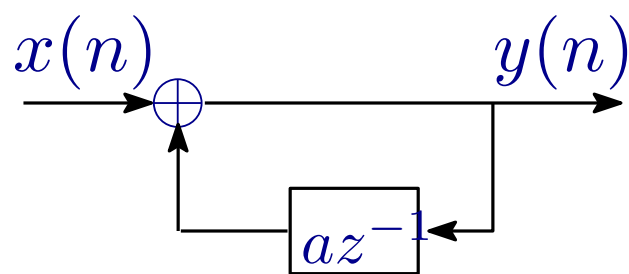
$$H(z) = \frac{1}{1+az^{-1}}$$

$$h(n) = a^n, n \in \mathcal{Z}$$

$$\sigma_f^2 = \sigma_e^2 \sum_{m=0}^{\infty} h^2(m) = \sigma_e^2 \frac{1}{1-|a|^2}$$

$$H(z) = \frac{1}{1+az^{-1}}$$

$$h(n) = a^n, n \in \mathcal{Z}$$

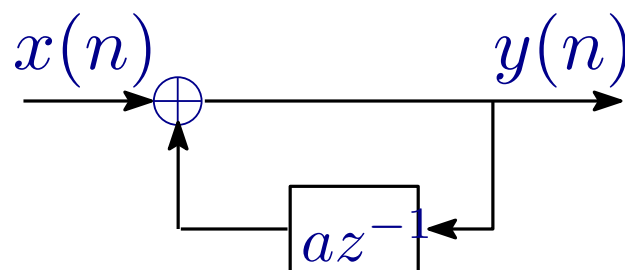


$$\sigma_f^2 = \sigma_e^2 \sum_{m=0}^{\infty} h^2(m) = \sigma_e^2 \frac{1}{1-|a|^2}$$

推论： $|a| > 1$ ， σ_f^2 不收敛，系统稳定性不能得到保证

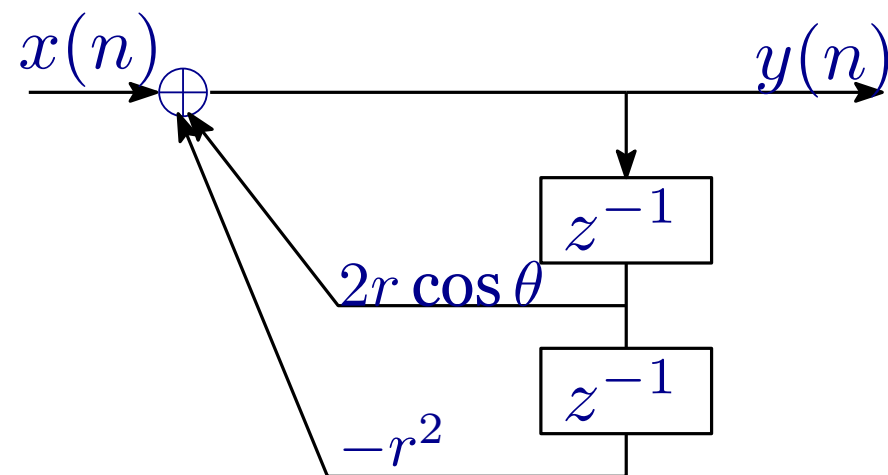
$$H(z) = \frac{1}{1+az^{-1}}$$

$$h(n) = a^n, n \in \mathcal{Z}$$



$$\sigma_f^2 = \sigma_e^2 \sum_{m=0}^{\infty} h^2(m) = \sigma_e^2 \frac{1}{1-|a|^2}$$

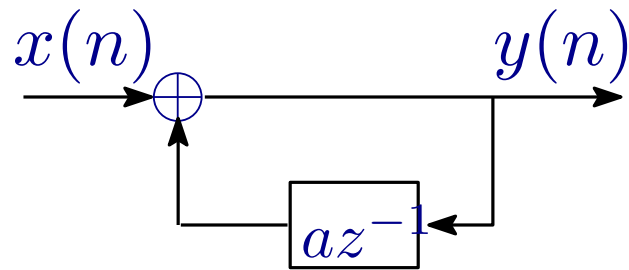
推论: $|a| > 1$, σ_f^2 不收敛, 系统稳定性不能得到保证



$$\begin{aligned} \sigma_f^2 &= \sigma_e^2 \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) \\ &= \frac{\sigma_e^2}{2\pi} \oint_c H(z)H(z^{-1}) \frac{dz}{z} \\ &= \sigma_e^2 \frac{1+r^2}{1-r^2} \cdot \frac{1}{1+r^4-2r^2 \cos 2\theta} \end{aligned}$$

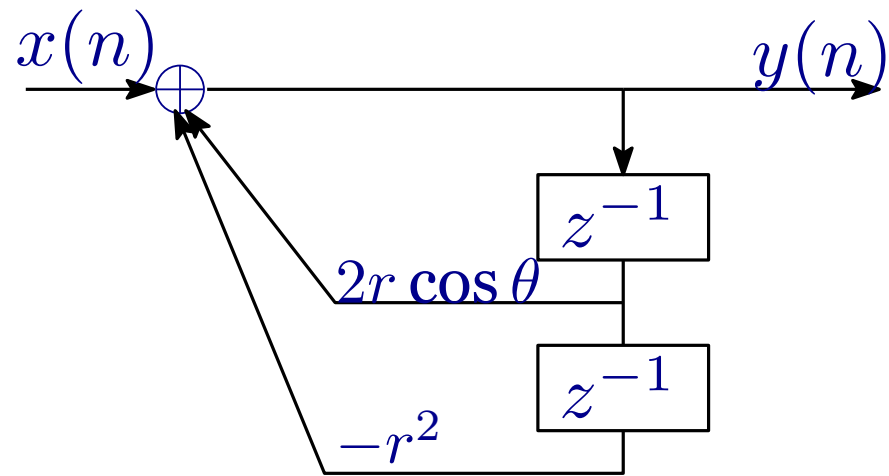
$$H(z) = \frac{1}{1+az^{-1}}$$

$$h(n) = a^n, n \in \mathcal{Z}$$



$$\sigma_f^2 = \sigma_e^2 \sum_{m=0}^{\infty} h^2(m) = \sigma_e^2 \frac{1}{1-|a|^2}$$

推论： $|a| > 1$ ， σ_f^2 不收敛，系统稳定性不能得到保证

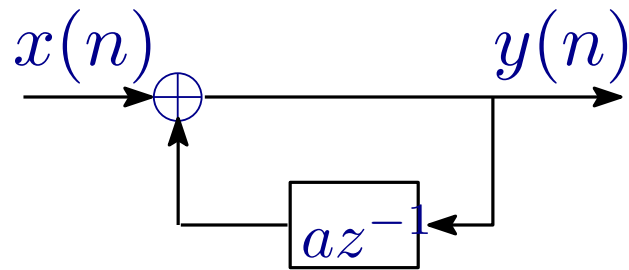


$$\begin{aligned} \sigma_f^2 &= \sigma_e^2 \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) \\ &= \frac{\sigma_e^2}{2\pi} \oint_c H(z)H(z^{-1}) \frac{dz}{z} \\ &= \sigma_e^2 \frac{1+r^2}{1-r^2} \cdot \frac{1}{1+r^4-2r^2 \cos 2\theta} \end{aligned}$$

推论：当极点靠近 1 时， σ_f^2 与极点和单位圆的距离成反比，越靠近单位圆，系统输出的方差越大，越不稳定。

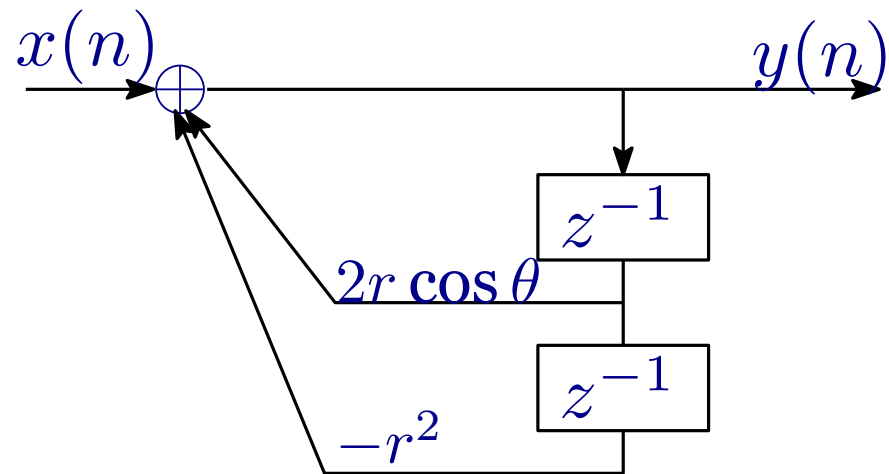
$$H(z) = \frac{1}{1+az^{-1}}$$

$$h(n) = a^n, n \in \mathcal{Z}$$



$$\sigma_f^2 = \sigma_e^2 \sum_{m=0}^{\infty} h^2(m) = \sigma_e^2 \frac{1}{1-|a|^2}$$

推论： $|a| > 1$ ， σ_f^2 不收敛，系统稳定性不能得到保证



$$\begin{aligned} \sigma_f^2 &= \sigma_e^2 \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) \\ &= \frac{\sigma_e^2}{2\pi} \oint_c H(z)H(z^{-1}) \frac{dz}{z} \\ &= \sigma_e^2 \frac{1+r^2}{1-r^2} \cdot \frac{1}{1+r^4-2r^2 \cos 2\theta} \end{aligned}$$

推论：当极点靠近 1 时， σ_f^2 与极点和单位圆的距离成反比，越靠近单位圆，系统输出的方差越大，越不稳定。

$$y(n) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)h(t - nT)$$

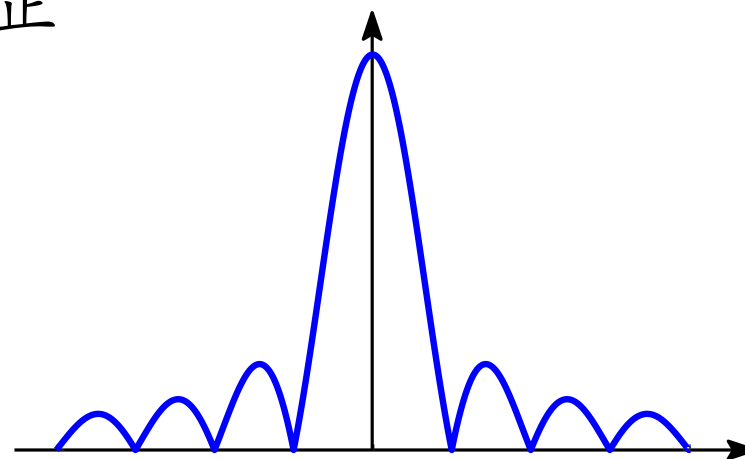
误差来源:

$$Y(\omega) = Y_D(e^{j\omega})H(\omega), 0 \leq \omega \leq \pi/T$$

其中, $H(\omega)$ 是 $h(t)$ 的频率响应:

$$H(\omega) = \text{sinc}(\omega/2)e^{-j0.5\omega T}$$

$h(t)$ 是 DAC 后的低通滤波冲激响应, 频谱特性并不理想, 需要对其频谱进行校正



$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} \quad a_i = 0, \text{退化为 FIR 滤波器}$$

性能分析假设条件： $a_i, 1 \leq i \leq N, b_i, 0 \leq i \leq M$ 为无限精度，实际系统中存在误差这些误差会带来 $H(z)$ 的变化。

- 系数量化对零极点的影响
- 系数量化效应的统计分析

极点方程：

$$1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i} = 0$$

假定对于任何一个给定的 $a_i, a_i \rightarrow a_i + \Delta a_i$,

$$1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i} - \Delta a_{i'} z^{-i'} = 0$$

单位圆与极点
的最小距离

极点 z 必须不大于 1, 我们可以得到下述结论：

$$(\Delta a_{i'})_{max} = |z^{i'}| |1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}| \leq |1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}| = 1 - \sum a_i$$

推论：系数量化误差要小于极点到所有单位圆的最小距离！

量化比特数满足： $2^b > (a_i)_{max} / (\Delta a_i)_{max}$

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}}$$

$a_i = 0$, 退化为 FIR 滤波器
 z_i 是对应的极点

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}}$$

$a_i = 0$, 退化为 FIR 滤波器
 z_i 是对应的极点

系统性能会受到系数量化的影响，这个影响与结构形式相关

$$\hat{a}_i = a_i + \Delta a_i, \hat{b}_i = b_i + \Delta b_i$$

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}}$$

$a_i = 0$, 退化为 FIR 滤波器
 z_i 是对应的极点

系统性能会受到系数量化的影响, 这个影响与结构形式相关

$$\hat{a}_i = a_i + \Delta a_i, \hat{b}_i = b_i + \Delta b_i$$

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M \hat{b}_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^N \hat{a}_i z^{-i}}$$

$a_i = 0$, 退化为 FIR 滤波器
 $\hat{z}_i = z_i + \Delta z_i$ 是对应的极点

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}}$$

$a_i = 0$, 退化为 FIR 滤波器
 z_i 是对应的极点

系统性能会受到系数量化的影响，这个影响与结构形式相关

$$\hat{a}_i = a_i + \Delta a_i, \hat{b}_i = b_i + \Delta b_i$$

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M \hat{b}_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^N \hat{a}_i z^{-i}}$$

$a_i = 0$, 退化为 FIR 滤波器
 $\hat{z}_i = z_i + \Delta z_i$ 是对应的极点

定义：

$$A(z) = 1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i} = \prod_{i=1}^N (1 - z_i z^{-1})$$

$$z_k = z_k(a_1, a_2, \dots, a_N), 1 \leq k \leq N$$

$$\longrightarrow \Delta z_k = \sum_{i=1}^N \frac{\partial z_k}{\partial a_i} \Delta a_i$$

$$\left(\frac{\partial A(z)}{\partial z_k} \right) \Big|_{z=z_k} \cdot \left(\frac{\partial z_k}{\partial a_i} \right) = \left(\frac{\partial A(z)}{\partial a_i} \right) \Big|_{z=z_k}$$

因为：

$$\frac{\partial A(z)}{\partial a_i} = -z^{-i}, \frac{\partial A(z)}{\partial z_k} = -z^{-N} \prod_{j=1, j \neq k}^N (z - z_j)$$

我们可以得到

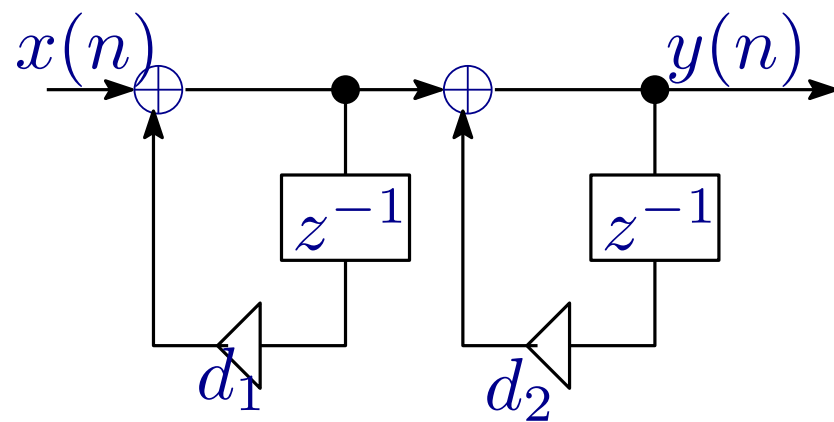
$$\frac{\partial z_k}{\partial a_i} = \frac{z_k^{N-i}}{\prod_{j=1, j \neq k}^N (z_k - z_j)} \longrightarrow \Delta z_k = \sum_{i=1}^N \frac{z_k^{N-i}}{\prod_{j=1, j \neq k}^N (z_k - z_j)} \Delta a_i$$

极点对系数的敏感性，取决于其他极点与本极点之间的距离的成绩，即往往取决于极点间的最小距离。（直接型，级联型和并联型谁最敏感）

系统对系数量化的灵敏度

级联型

$$H(z) = \frac{z^2}{(z-z_1)(z-z_2)}$$



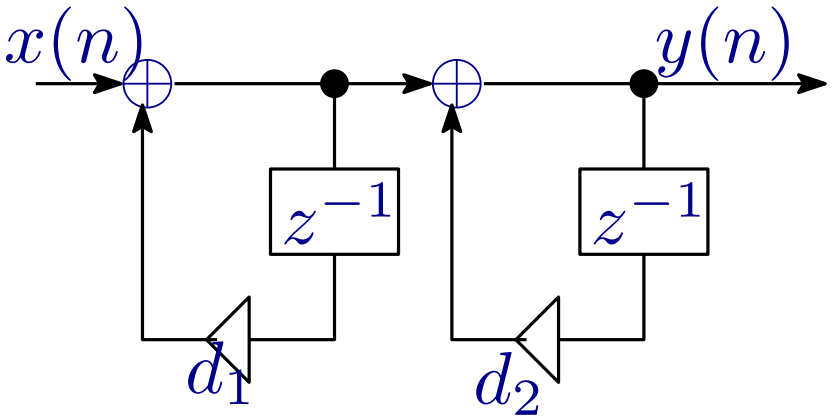
$$\frac{\partial z_1}{\partial d_1} = 1, \frac{\partial z_1}{\partial d_2} = 0$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial d_1} = 0, \frac{\partial z_2}{\partial d_2} = 1$$

系统对系数量化的灵敏度

级联型

$$H(z) = \frac{z^2}{(z-z_1)(z-z_2)}$$

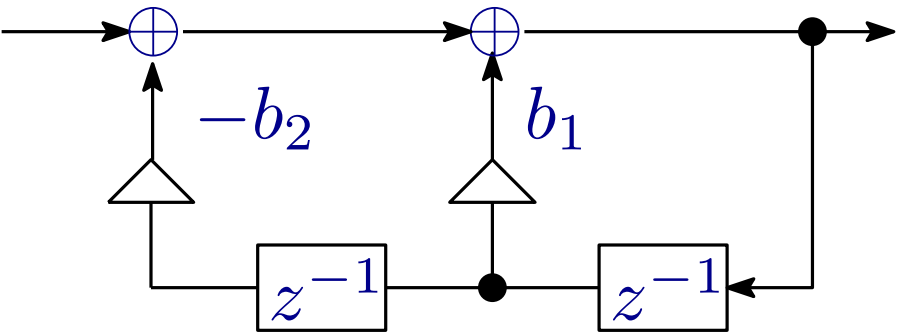


$$\frac{\partial z_1}{\partial d_1} = 1, \frac{\partial z_1}{\partial d_2} = 0$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial d_1} = 0, \frac{\partial z_2}{\partial d_2} = 1$$

直接型

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 - z(z_1 + z_2) + z_1 z_2}$$



$$b_1 = z_1 + z_2, b_2 = z_1 z_2$$

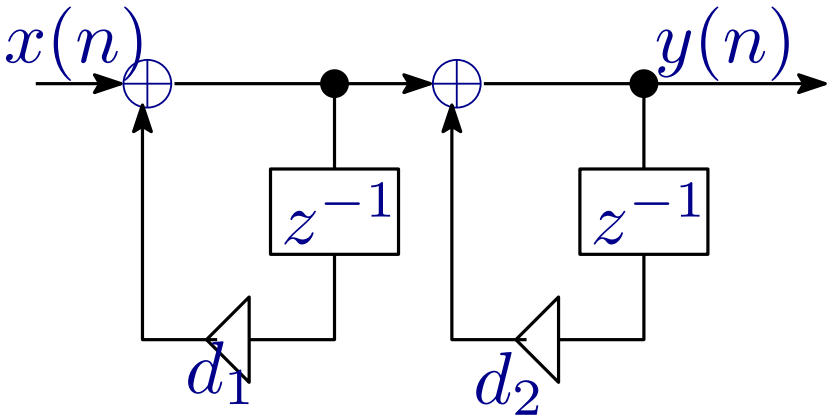
$$\frac{\partial z_1}{\partial b_1} = \frac{z_1}{z_1 - z_2}, \frac{\partial z_1}{\partial b_2} = \frac{1}{z_2 - z_1}$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial b_1} = \frac{z_2}{z_2 - z_1}, \frac{\partial z_2}{\partial b_2} = \frac{1}{z_1 - z_2}$$

系统对系数量化的灵敏度

级联型

$$H(z) = \frac{z^2}{(z-z_1)(z-z_2)}$$

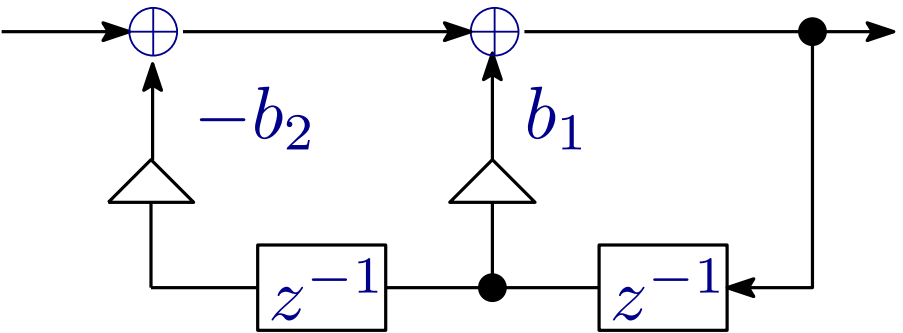


$$\frac{\partial z_1}{\partial d_1} = 1, \frac{\partial z_1}{\partial d_2} = 0$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial d_1} = 0, \frac{\partial z_2}{\partial d_2} = 1$$

直接型

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 - z(z_1 + z_2) + z_1 z_2}$$



$$b_1 = z_1 + z_2, b_2 = z_1 z_2$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial b_1} = \frac{z_1}{z_1 - z_2}, \frac{\partial z_1}{\partial b_2} = \frac{1}{z_2 - z_1}$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial b_1} = \frac{z_2}{z_2 - z_1}, \frac{\partial z_2}{\partial b_2} = \frac{1}{z_1 - z_2}$$

讨论：如果 z_1, z_2 都是在正半轴实轴上：

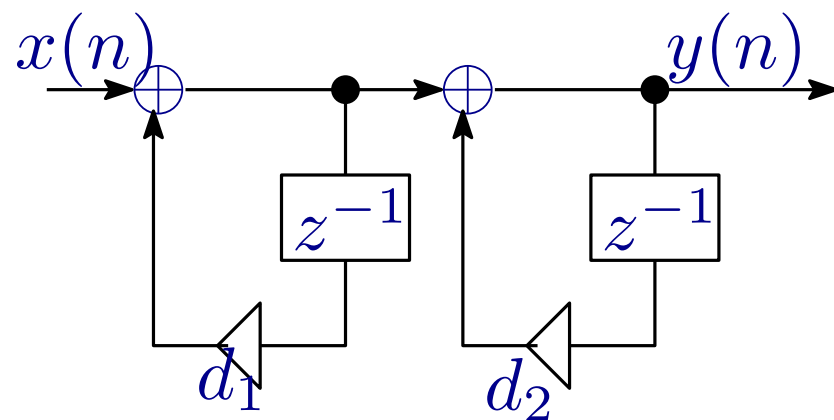
$$\frac{\partial z_1}{\partial b_1} > \frac{\partial z_1}{\partial d_1}, \frac{\partial z_2}{\partial b_2} > \frac{\partial z_2}{\partial d_2};$$

$$|\frac{\partial z_1}{\partial b_2} > \frac{\partial z_1}{\partial d_2}|, |\frac{\partial z_2}{\partial b_1} > \frac{\partial z_2}{\partial d_1}|;$$

系统对系数量化的灵敏度

级联型

$$H(z) = \frac{z^2}{(z-z_1)(z-z_2)}$$

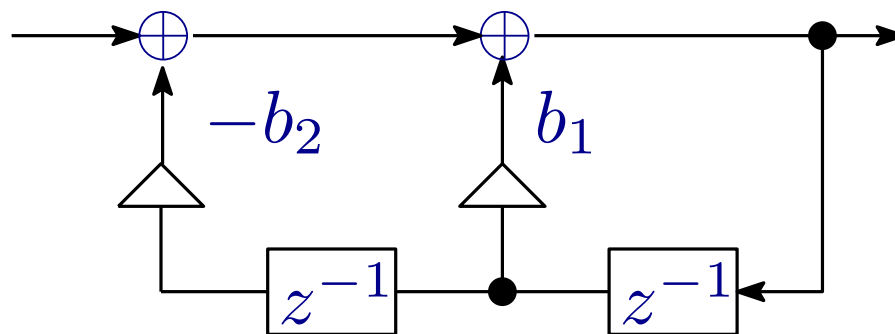


$$\frac{\partial z_1}{\partial d_1} = 1, \frac{\partial z_1}{\partial d_2} = 0$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial d_1} = 0, \frac{\partial z_2}{\partial d_2} = 1$$

直接型

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 - z(z_1 + z_2) + z_1 z_2}$$



$$b_1 = z_1 + z_2, b_2 = z_1 z_2$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial b_1} = \frac{z_1}{z_1 - z_2}, \frac{\partial z_1}{\partial b_2} = \frac{1}{z_2 - z_1}$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial b_1} = \frac{z_2}{z_2 - z_1}, \frac{\partial z_2}{\partial b_2} = \frac{1}{z_1 - z_2}$$

结论:

级联型和并联型极点稳定性优于直接型，设计时可根据表达式计算出最小位数字长。前者的误差灵敏度是确定量，后者和极点位置相关，系统性能取决于取决于最坏时候的性能！

系数量化效应的统计分析

出发点:

高阶系统系数过多, 量化误差成明显的随机特征。误差可表征为随机变量, 利用统计模型对量化误差进行分析和建模。

IIR数字滤波器系统量化统计分析

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^N b_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

$$\begin{aligned} b_i &\rightarrow \hat{b}_i = b_i + \beta_i \\ a_i &\rightarrow \hat{a}_i = a_i + \alpha_i \end{aligned}$$

α_i, β_i 在 $(-q/2, q/2)$ 均匀分布

$$E\{\alpha_i\} = 0, \text{Var}\{\alpha_i\} = q^2/12 \quad E\{\beta_i\} = 0, \text{Var}\{\beta_i\} = q^2/12$$

定义：

$$e(n) = \hat{y}(n) - y(n) = \sum_{i=0}^N \beta_i x(n-i) + \sum_{i=1}^N a_i e(n-i) + \sum_{i=1}^N \alpha_i y(n-i) + \sum_{i=1}^N \alpha_i e(n-i)$$

定义:

$$e(n) = \hat{y}(n) - y(n) = \sum_{i=0}^N \beta_i x(n-i) + \sum_{i=1}^N a_i e(n-i) + \sum_{i=1}^N \alpha_i y(n-i) + \sum_{i=1}^N \alpha_i e(n-i)$$

忽略二阶误差

$$E(z) = \frac{\beta(z) + \alpha(z)H(z)}{A(z)} X(z)$$

其中 $\alpha(z) = \sum_{i=1}^N \alpha_i z^{-i}$, $\beta(z) = \sum_{i=1}^N \beta_i z^{-i}$, $A(z) = 1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}$, $E(z) = \sum_{i=0}^{\infty} e(i) z^{-i}$

$$\longrightarrow H_E(z) = \frac{\beta(z) + \alpha(z)H(z)}{A(z)}$$

定义:

$$e(n) = \hat{y}(n) - y(n) = \sum_{i=0}^N \beta_i x(n-i) + \sum_{i=1}^N a_i e(n-i) + \sum_{i=1}^N \alpha_i y(n-i) + \sum_{i=1}^N \alpha_i e(n-i)$$

忽略二阶误差

$$E(z) = \frac{\beta(z) + \alpha(z)H(z)}{A(z)} X(z)$$

其中 $\alpha(z) = \sum_{i=1}^N \alpha_i z^{-i}$, $\beta(z) = \sum_{i=1}^N \beta_i z^{-i}$, $A(z) = 1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}$, $E(z) = \sum_{i=0}^{\infty} e(i) z^{-i}$

$$\longrightarrow H_E(z) = \frac{\beta(z) + \alpha(z)H(z)}{A(z)}$$

频率响应的均方偏差 ϵ^2 作为频响偏差的度量:

$$\sigma_{\epsilon}^2 = \frac{q^2}{12} \left\{ \frac{\mu}{2\pi j} \oint_C \frac{1}{A(z)A(z^{-1})} \frac{dz}{z} + \frac{r}{2\pi j} \oint_C \frac{H(z)H(z^{-1})}{A(z)A(z^{-1})} \frac{dz}{z} \right\}$$

由于全 0 点设计，不专门分析舍入误差，而且阶数较高，直接利用统计分析方式解决

定义误差函数：

$$E(e^{j\omega}) = \hat{H}(e^{j\omega}) - \bar{H}(e^{j\omega})$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} 2e(n) \cos [((N-1)/2 - n)\omega] + e((N-1)/2)$$

$e(n)$ 在区间 $[-0.5q, 0.5q]$ 均匀分布

$$\diamond \text{ 均方误差 } \sigma^2(\omega) \leq \frac{q^2}{12} \left[1 + 4 \sum_{n=1}^{(N-1)/2} \cos^2(\omega n) \right]$$

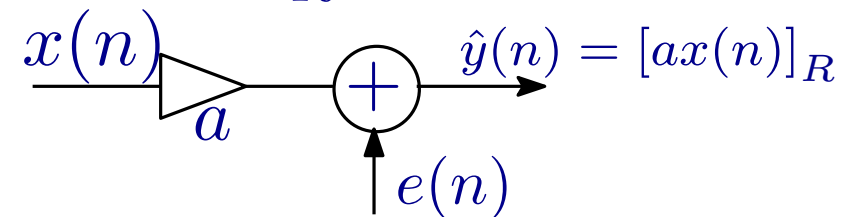
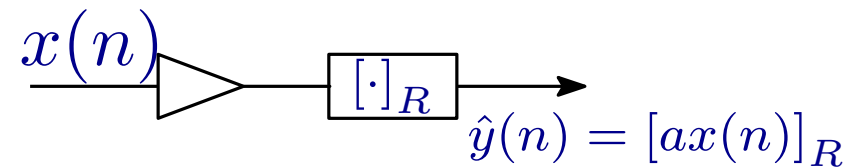
数字滤波器基本操作

- 延迟-无误差
- 乘系数-有误差, 定点操作超长问题
- 相加-有误差, 定点操作有溢出问题

递归型滤波器运算量化误差经过反馈, 类似于非线性引起的零输入极限环和溢出震荡

由于 FIR 滤波器的无反馈性质, 我们更多关注存在反馈的 IIR 滤波器的相关运算量化分析。

定点运算舍入误差模型: $e(n) = [ax(n)]_R - ax(n)$



- $e(n)$ 是平稳白噪声序列
- $e(n)$ 在量化间隔中均匀分布
- 任何两个不同噪声源独立
- $e(n)$ 与输入 $x(n)$, 输出序列 $y(n)$ 均不相关

$e(n) \in [-2^{-b}/2, 2^{-b}/2]$ 均匀分布, $E\{e(n)\} = 0$, $E\{e^2(n)\} = 2^{-b}/12$

经过线性系统后的实际输出为: $\hat{y}(n) = y(n) + e_f(n)$

$$m_f = m_e \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_e(n) \quad \sigma_f^2 = \sigma_e^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_e^2(n)$$

直接 1 型

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

$$y(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) + \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

注意所有噪声源均在滤波器同一点相加，因此误差可以看作是

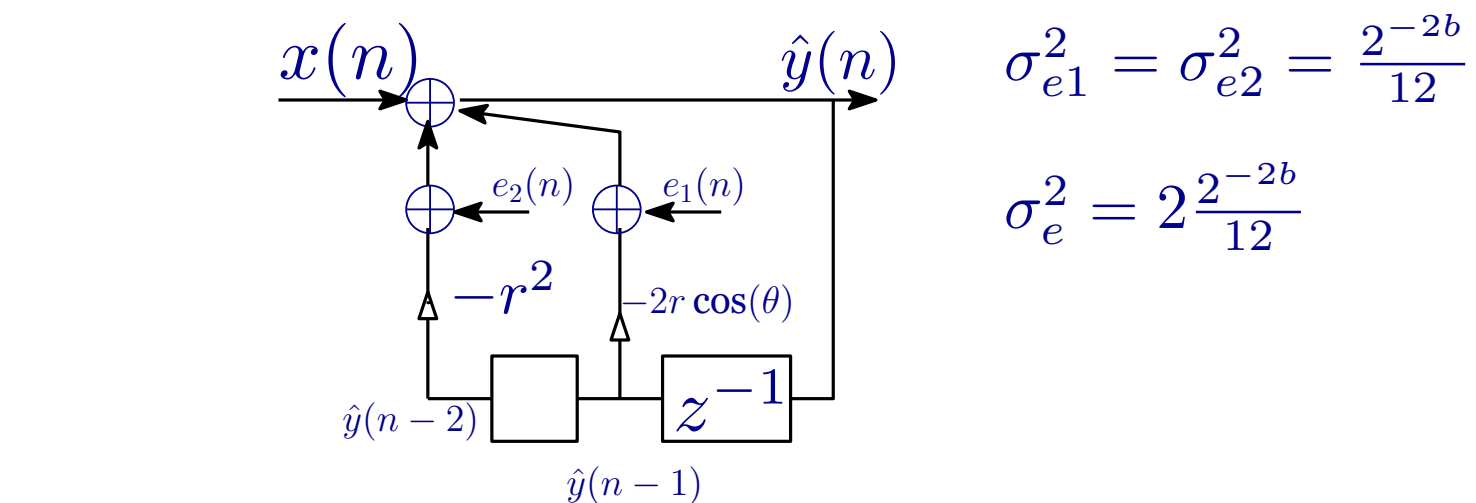
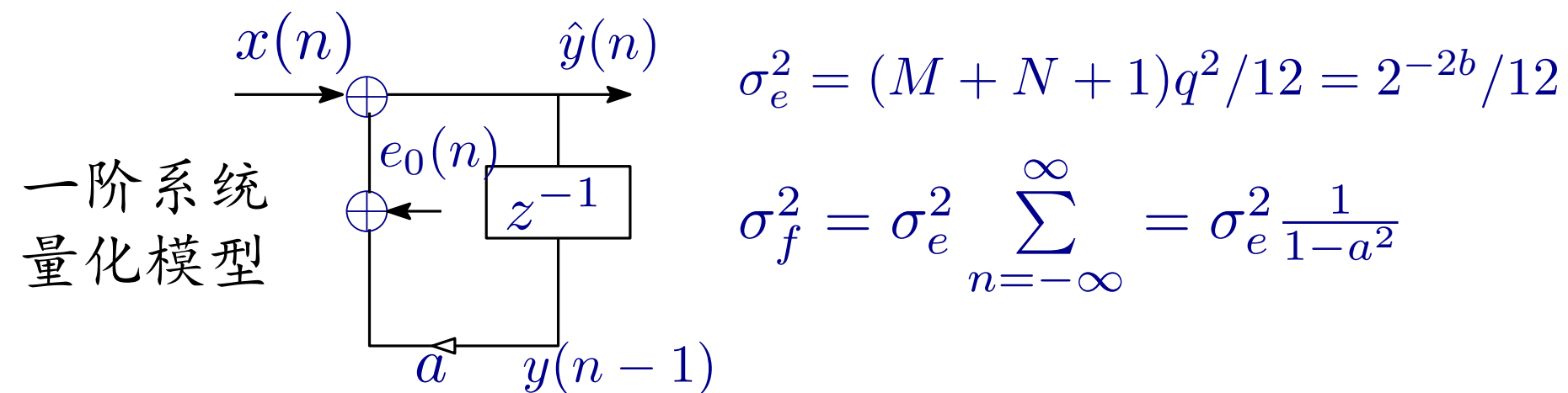
$$E\{e(n)\} = 0, E\{e^2(n)\} = q^2(M+N+1)/12$$

$$\longrightarrow \hat{y}(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) + \sum_{k=1}^N a_k \hat{y}(n-k) + e(n)$$

$$\longrightarrow e(n) = e_f(n) - \sum_{k=1}^N a_k e_f(n-k)$$

$$m_f = 0$$

$$\sigma_f^2 = \sigma_e^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_e^2(n) \quad \text{其中: } \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_e^2(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C H_e(z) H_e(z^{-1}) z^{-1} dz$$



$$\sigma_f^2 = \sigma_e^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_e^2(n) = \frac{2 \times 2^{-2b}}{12} \frac{1+r^2}{1-r^2} \frac{1}{1+r^4-2r^2 \cos 2\theta}$$

■ 误差来源 (反馈来源)

$$\sigma_{ea}^2 = \frac{2^{-2b}N}{12}$$

■ 误差来源 (前馈)

$$\sigma_{eb}^2 = \frac{2^{-2b}(M+1)}{12}$$

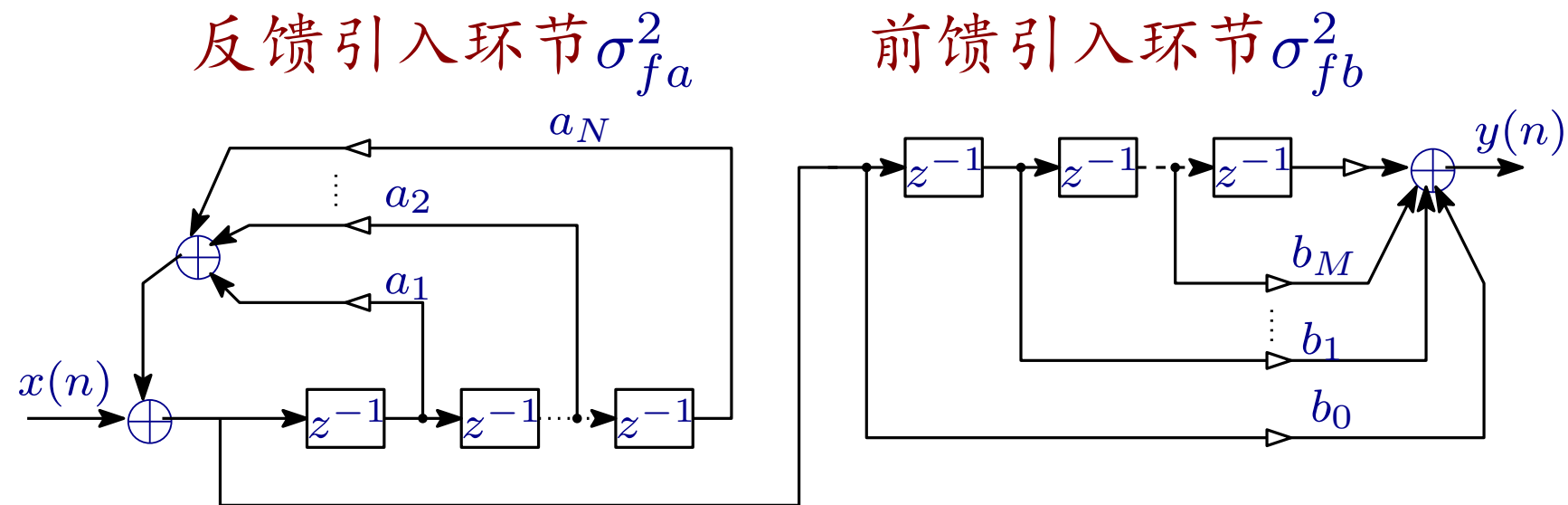
系统输出误差:

$$\sigma_f^2 = \sigma_{fa}^2 + \sigma_{fb}^2$$

其中反馈环节:

$$\sigma_{fa}^2 = \sigma_{ea}^2 \frac{1}{2j\pi} \oint_C H(z)H(z^{-1}) \frac{dz}{z}$$

$$\sigma_{fb}^2 = \sigma_{eb}^2$$

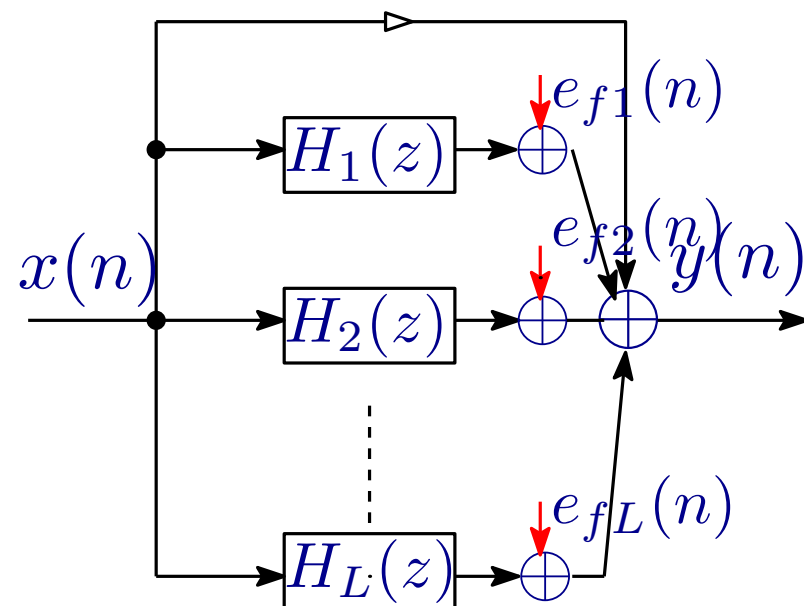


■ 系统函数

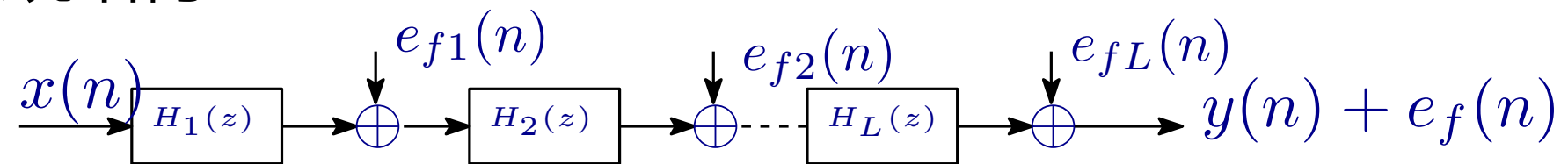
$$H(z) = \sum_{i=1}^L H_i(z) = \sum_{i=1}^L \frac{r_{0i} + r_{1i}z^{-1}}{1 - a_{1i}z^{-1} - a_{2i}z^{-2}}$$

每一并联级引入误差为 $e_{fi}(n)$, 对应方差为 σ_{fi}^2 , 则误差为各并联级误差之和:

■ 输出误差 $$e_f(n) = \sum_{i=1}^L e_{fi}(n) \rightarrow \sigma_f^2 = \sum_{i=1}^L \sigma_{fi}^2$$



系统结构



$$\sigma_f^2 = \sum_{i=1}^L \frac{\sigma_{fi}^2}{2^{2j\pi}} \left\{ \oint \prod_{k=i+1}^L H_k(z) H_k(z^{-1}) \frac{dz}{z} \right\}$$

■ 溢出问题是定点计算必须关注的重要问题

◇ 输入信号幅度限幅是解决问题的一个途径

◇ 信号幅度受限将影响信号数据精度

x_n 是滤波器输入, $y_k(n)$ 是第 k 个节点的输出, $h_k(n)$ 表示输入点到节点 k 的单位取样响应:

$$y_k(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h_k(r)x(n-r)$$

若要求 $|y_k(n)| < 1$, then

$$\max |x(n)| \leq \frac{1}{\sum_{r=-\infty}^{\infty} |h_k(r)|}$$

滤波器经常采用级联或者并联实现, 仅考虑1-2 阶滤波器

■ 宽带信号-广义平稳白噪声, 均匀分布

窄带信号，等效为正弦序列输入 $x(n) = A \cos n\omega$

$$\text{二阶系统: } \frac{\sigma_f^2}{\sigma_y^2} \approx \frac{1}{48} \frac{2^{-2b}}{\delta \sin^2 \theta}$$

$$\text{一阶系统: } \frac{\sigma_f^2}{\sigma_y^2} \approx \frac{1}{48} \frac{2^{-2b}}{\delta}$$

说明：上述结论是给出的是极端情况下也不溢出的条件，但是通常可以通过钳位的方式允许小概率溢出，可以增大适当输出提高信噪比

高阶滤波器可采用级联或者并联方式给出，直接 1，直接 2 型很难

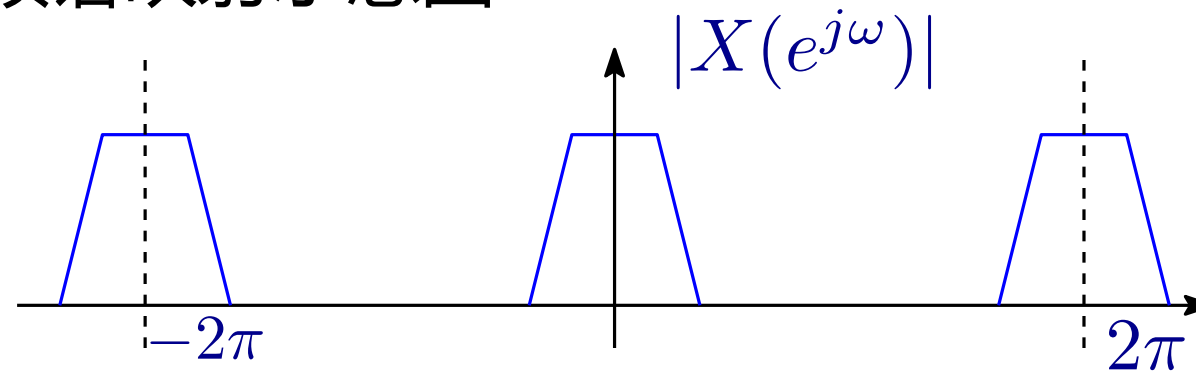
舍入误差带来的低电平极限环震荡

定点运算的溢出震荡

数字信号处理系统最终要恢复到模拟信号



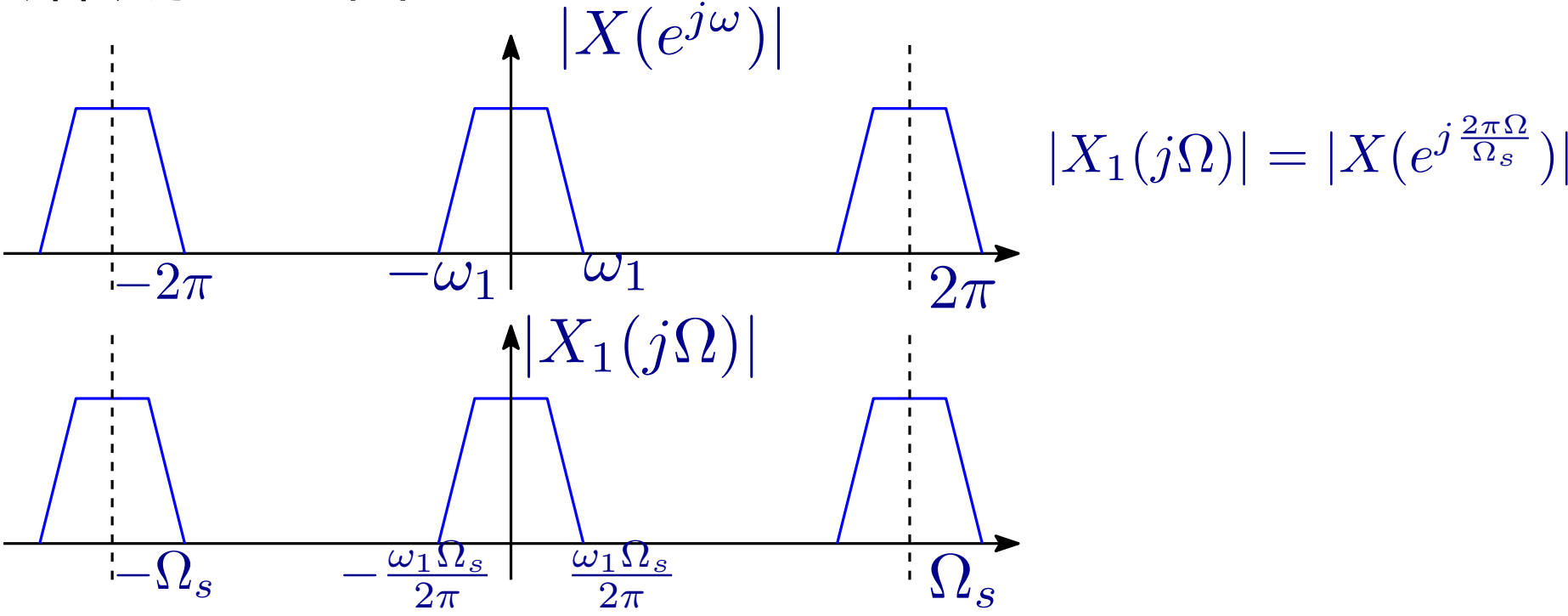
频谱映射示意图



数字信号处理系统最终要恢复到模拟信号



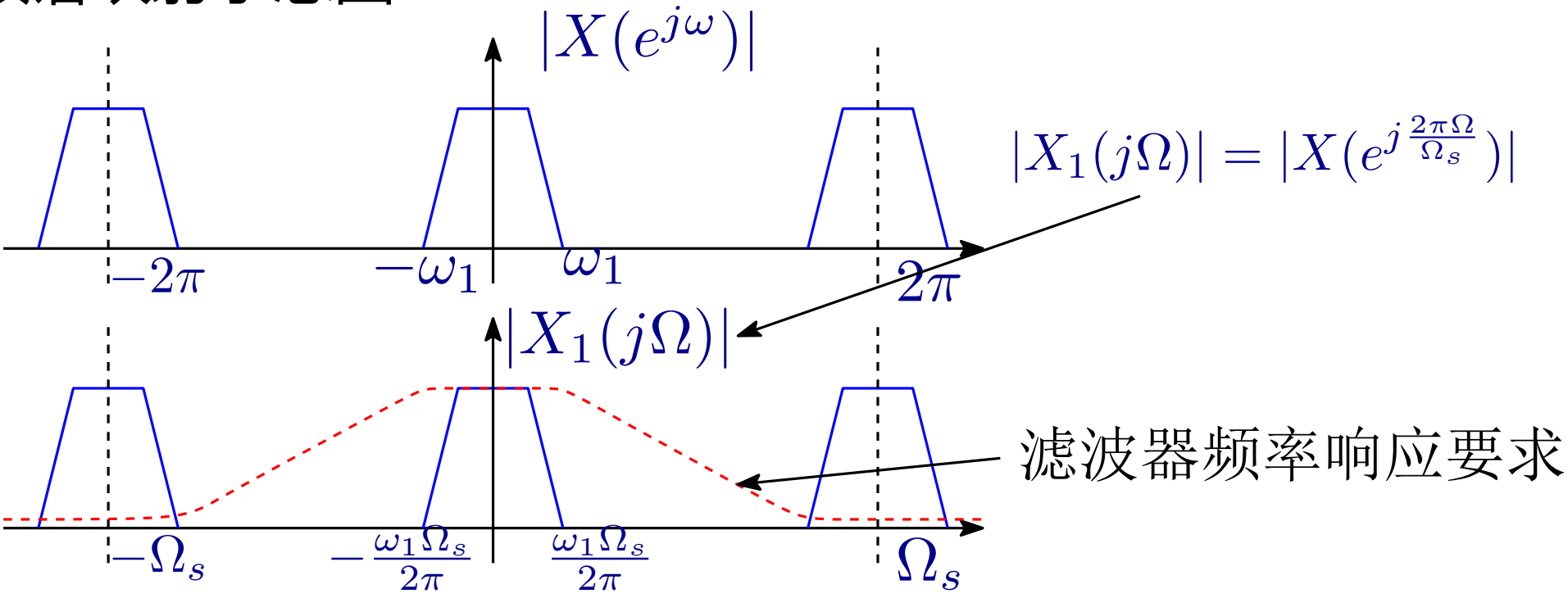
频谱映射示意图



数字信号处理系统最终要恢复到模拟信号

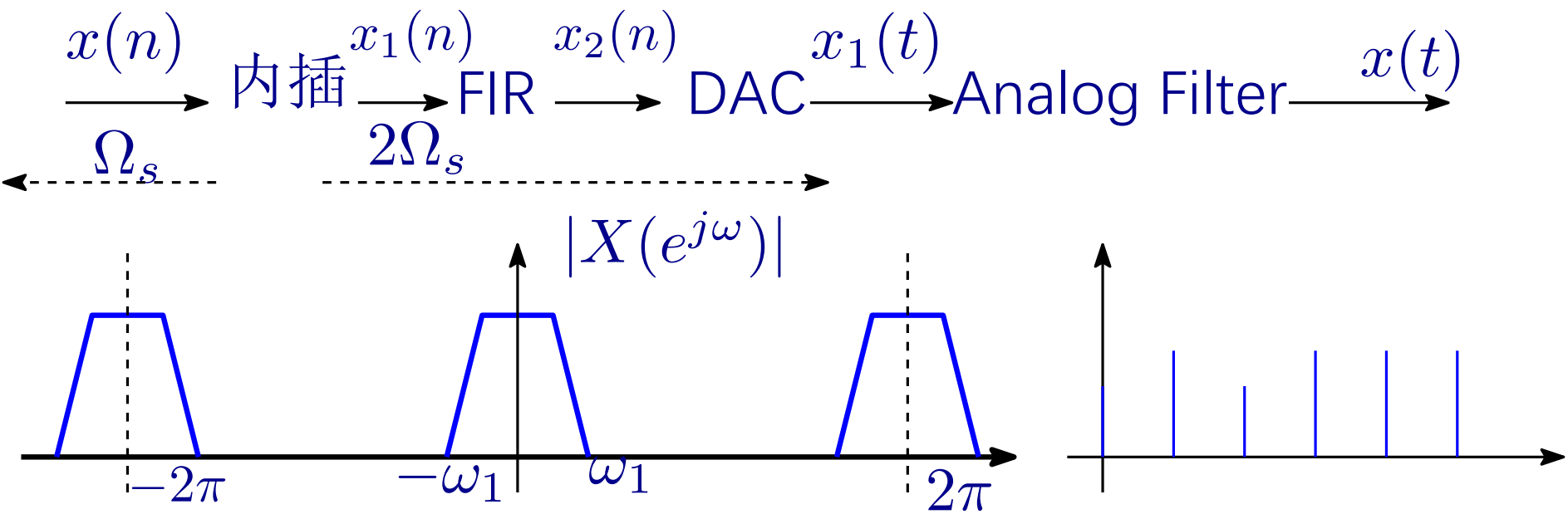


频谱映射示意图

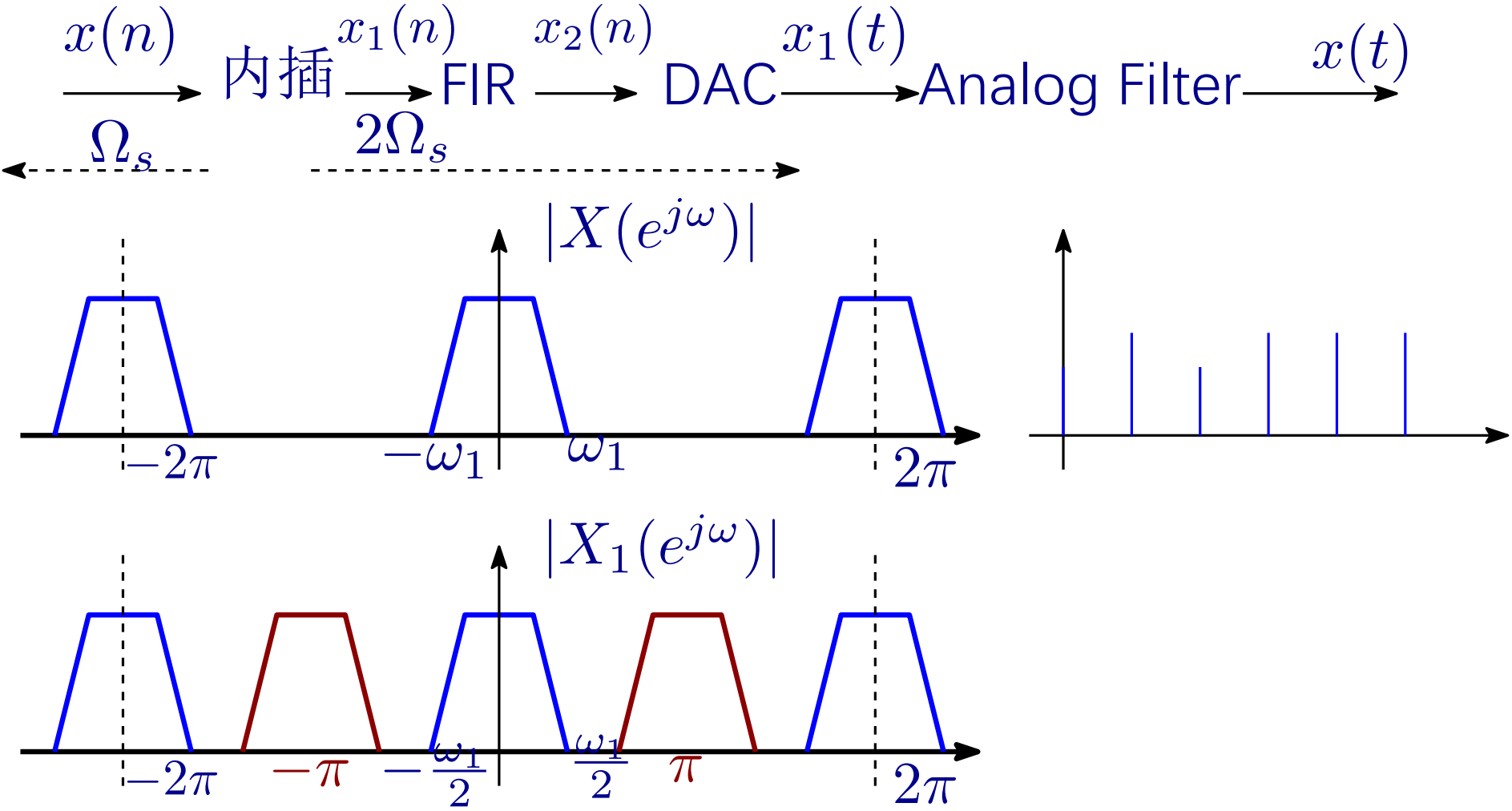


滤波器过渡带满足 $[\omega_1 \Omega_s / (2\pi), \Omega_s - \omega_1 \Omega_s / (2\pi)]$, 滤波器造价直接取决于过渡带宽度, 如何将模拟滤波器的宽度约束对于系统造价非常重要. 思路就是增大 Ω_s , 降低 ω_1

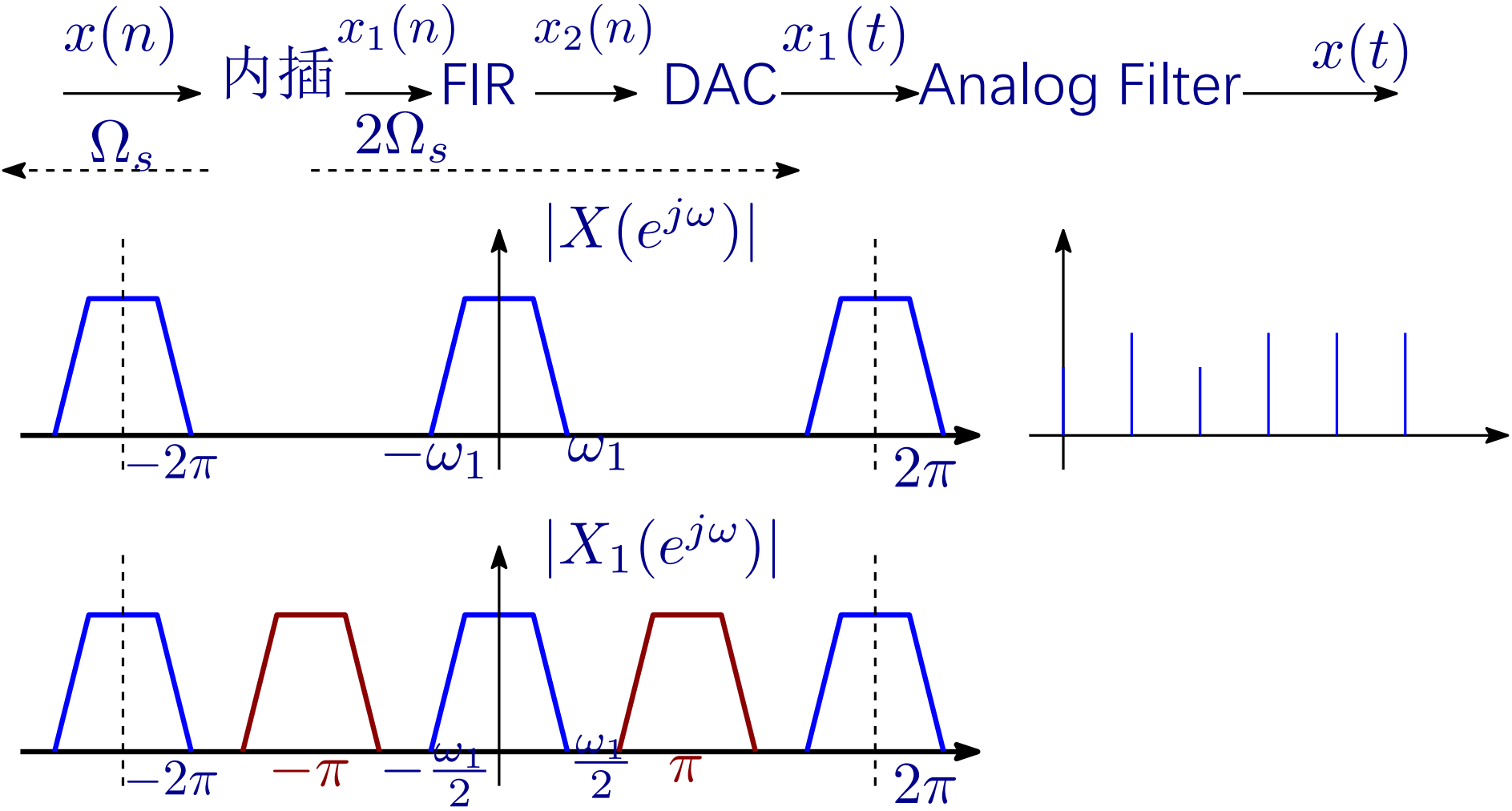
内插滤波器



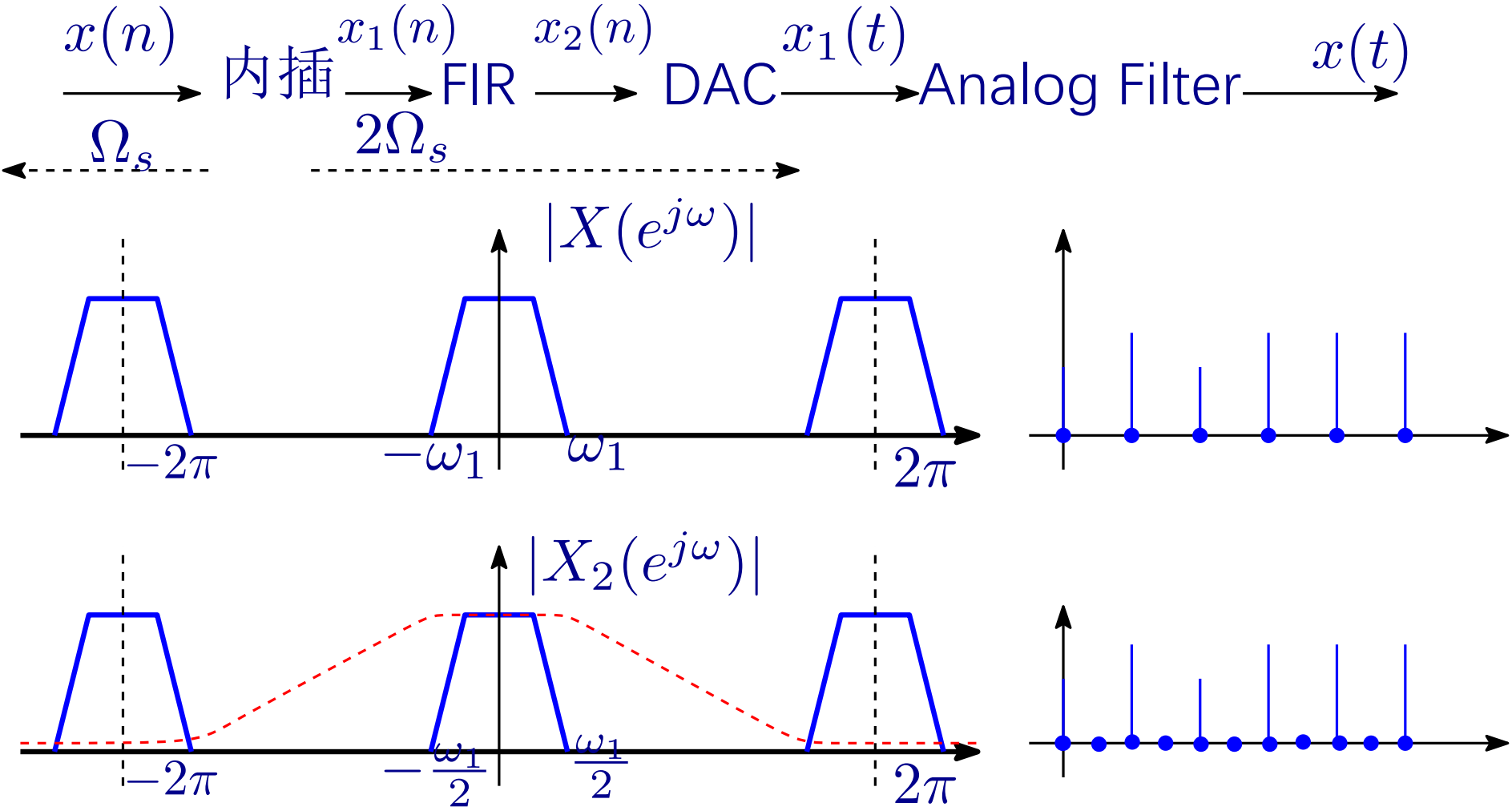
内插滤波器



内插滤波器



内插滤波器



滤波器对应过渡带为 $[2\omega_1\Omega_s/(2\pi), 2\Omega_s - 2\omega_1\Omega_s/(2\pi)]$

内插滤波器相关参数

- 内插前采样频率 Ω_s
- 内插因子为 L , 两个取样点之间插入 $L - 1$ 个零点
- 内插后数据速率为 $L\Omega_s$

内插滤波器实现存在的困难

- 滤波器对每个样本的计算都必须在 $1/(L\Omega_s)$ 时间内完成
- 滤波器的工作时钟频率应至少要提高 L 倍思路

解决思路

- 改进实现结构

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x_1(n-k)$$

考虑 $n = mL + i (0 \leq i \leq L - 1)$ 的情形, 对非 0 元素项处理

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x_1(n-k) \quad \text{令 } n = mL + i$$

$$\longrightarrow y(mL + i) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x_1(mL + i - k)$$

定义 $k = jL + c, \quad 0 \leq j \leq N/L, \quad 0 \leq c \leq L-1$

$$y(ml + i) = \sum_{j=0}^{N/L-1} \left\{ \sum_{c=0}^{L-1} h(jL + c)x_1(mL + i - jL - c) \right\}$$

注意到:

$$x_1((m-j)L + (i-c)) = \begin{cases} x(m-j) & i = c \\ 0 & i \neq c \end{cases}$$

$$\longrightarrow y(ml + i) = \sum_{j=0}^{N/L-1} h(jL + i)x((m-j))$$

内插滤波器

