中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

电　磁　学
(Electromagnetism)

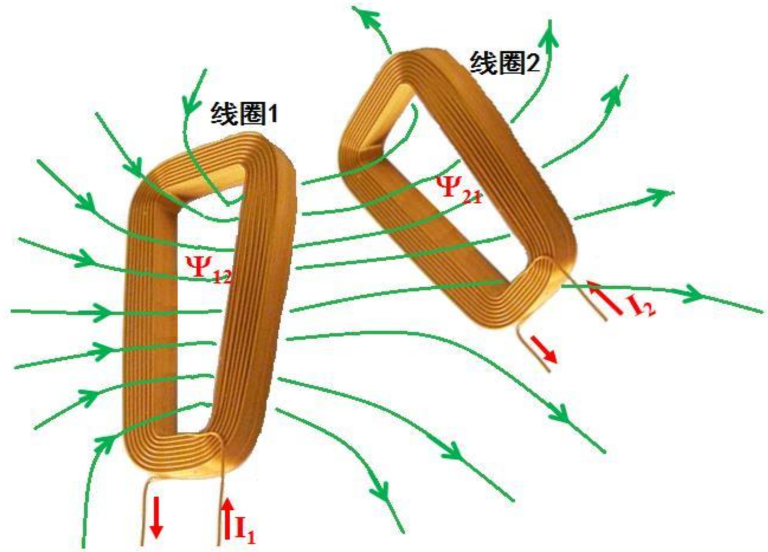
第六章　电磁感应2

§ 6.3 互感与自感

一、互感

1. 互感现象

当一个线圈中的电流发生变化时，其在周围空间产生变化的磁场，磁场中的另一个线圈中会产生感应电动势，这种现象称为互感现象.



2.互感系数

线圈1激发磁场在线圈2中的磁匝链数：$\boxed{\psi_{21} = M_{21} I_1}$

线圈2激发磁场在线圈1中的磁匝链数：$\boxed{\psi_{12} = M_{12} I_2}$

M_{21}和M_{12}为互感系数的第一种定义, 简称互感。

- 两个线圈间的互感与两个线圈的结构（大小、绕法）、它们之间的相对位置(距离、方位)及两线圈的空间相对取向、线圈间介质特性等因素有关。

可以证明： $M_{12}=M_{21}=M$

互感单位：

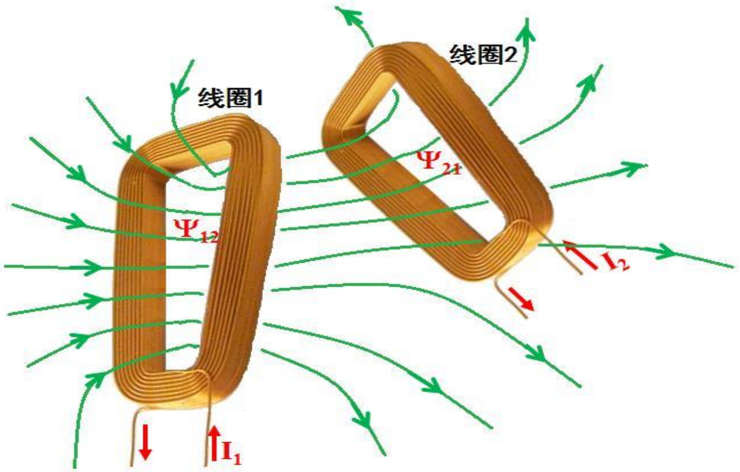
$$1亨利=\frac{1韦伯}{1安培}=\frac{1伏特\bullet 1秒}{1安培}$$

$$1H=10^{3}mH=10^{6}\mu H$$

3.互感电动势

I_1变化而激发线圈2中的感应电动势为：

$$\varepsilon_2 = -\frac{d\psi_{21}}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt}$$



I_2变化而激发线圈1中的感应电动势为

$$\varepsilon_1 = -\frac{d\psi_{12}}{dt} = -M\frac{dI_2}{dt}$$

互感系数的第二定义式：

$$\varepsilon_{ij} = -M_{ij}\frac{dI_j}{dt}$$

[例]在横截面积为S，长为*l*的螺线管上，重叠 密绕两组线圈，匝数为N_1和N_2，求互感（系数）。

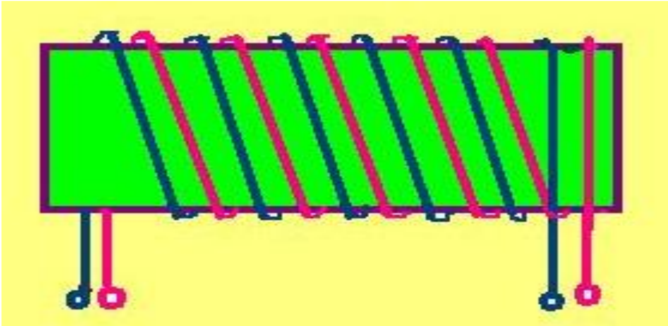
[解]：

$$B_1 = \mu_0 n I_1 = \mu_0 \frac{N_1}{l} I_1$$

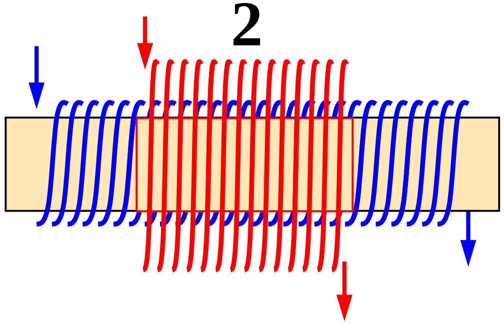
$$\Phi_{21} = N_2 B_1 S = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S I_1$$

$$M = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l^2} S l$$

$$M = \mu_0 n_1 n_2 V$$



两密绕线圈， $L_1 >> L_2$



线圈1： I_1、n_1、S_1

线圈2： I_2、n_2、S_2

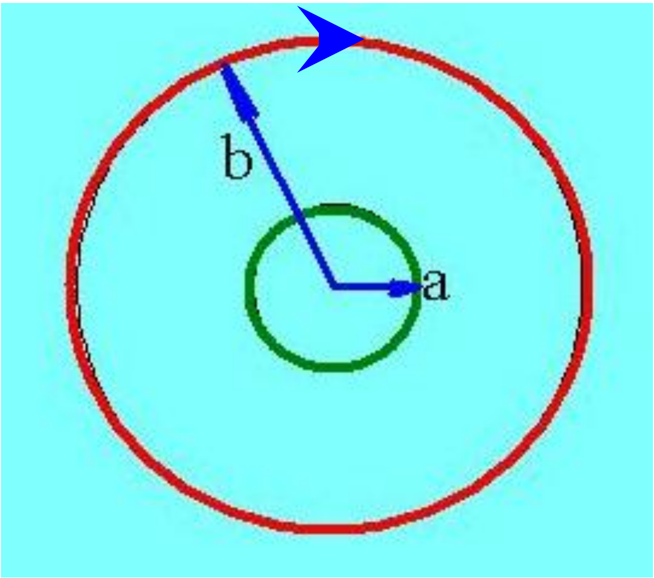
线圈1产生的磁力线沿轴向，全部单次穿过线圈2.

$$B_1 = \mu_0 i = \mu_0 n_1 I_1 \qquad \Phi_1 = B_1 S_1 = \mu_0 n_1 S_1 I_1$$

B_1在线圈2中产生的全磁通： $\Psi_{21} = n_2 L_2 \mu_0 n_1 S_1 I_1$

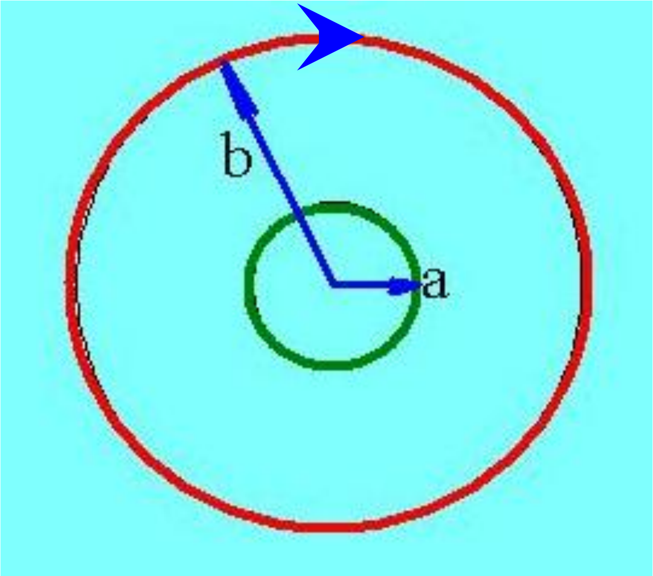
互感系数： $M_{21} = M_{12} = \mu_0 n_1 n_2 L_2 S_1$

[例]如图两个同心共面的圆线圈半径分别为a、b（$a<<b$），其中b中通有电流I。设b中电流产生的磁场在a中近似为常数，求:(1)互感系数M. (2)若$I_a=I_0 \sin\omega t$， 则ε_b为多少?



[解]求互感 ：

$$B=\frac{\mu_0 I}{2b}$$



$$\Phi = BS_a = \frac{\mu_0 I}{2b}\pi a^2$$

$$\therefore M = \frac{\mu_0 \pi a^2}{2b}$$

求电动势 ：

$$\varepsilon_{ba} = -M\frac{dI_a}{dt} = -\frac{\mu_0 \pi a^2}{2b}\omega I_0 \cos\omega t$$

[讨论]

1.互感系数是由回路自身的几何特性和介质特性决定的；

2.没有铁磁质、回路不变形时两种定义等效。

$$
\begin{cases}
M_{21} = \dfrac{\Phi_{21}}{I_1} & \text{(常用于计算)} \\
M_{21} = -\dfrac{\varepsilon_{21}}{dI_1/dt} & \text{(常用于测量)}
\end{cases}
$$

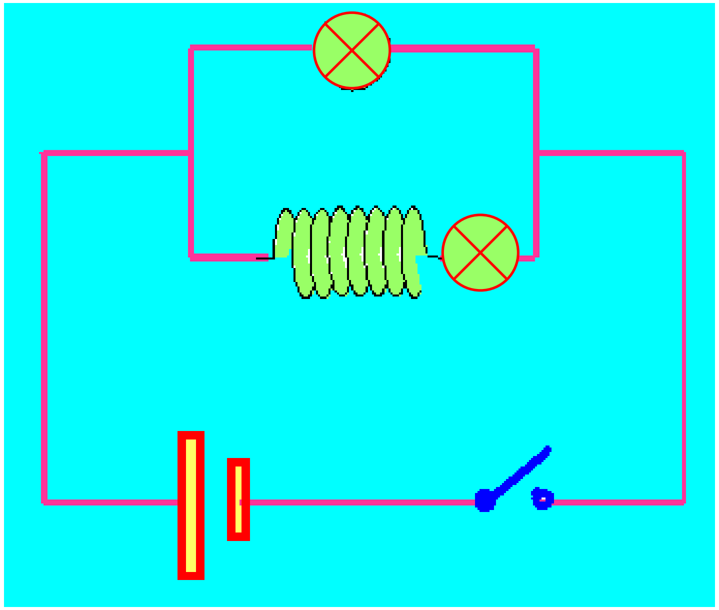
3. M 可正可负，取决于I 的方向；

4. 互感理论计算复杂，一般用实验方法确定。

二、自感

1. 自感现象

线圈中的电流变化会**在线圈自身中产生感应电动势**称的物理现象.

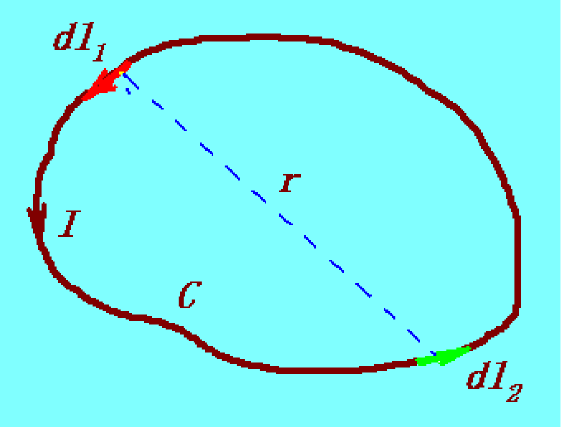


2、 自感系数

线圈激发磁场在线圈自身中的磁匝链数

$$\Phi = LI \quad \Rightarrow \quad L = \Phi / I$$

$$L = M_{11} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L_1} \oint_{L_1} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r}$$



自感的单位：亨利

3. 自感电动势

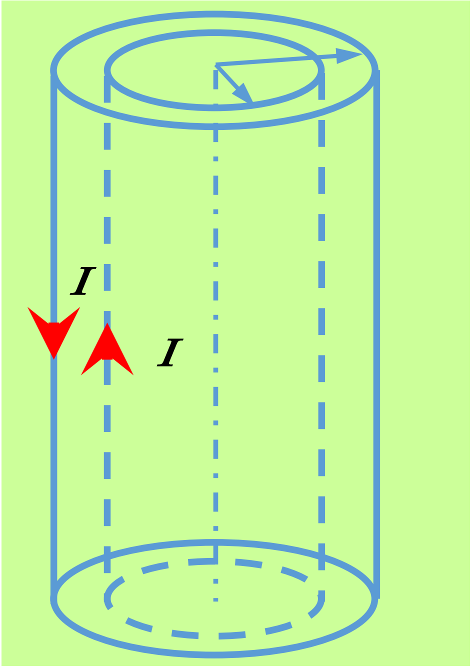
I 变化激发线圈中的感应电动势为：

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

理想螺线管的自感系数为：

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l^2} V = \mu_0 n^2 l S$$

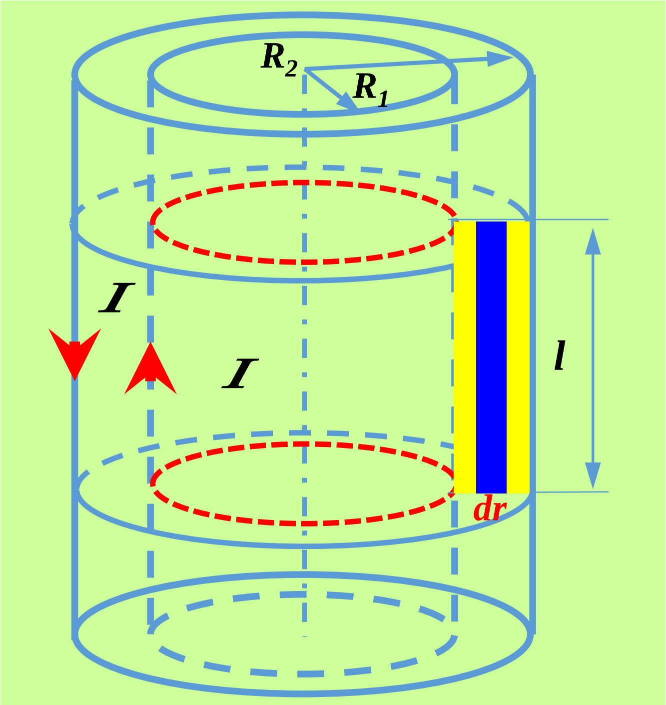
[例]如图，空心同轴电缆由半径分别为R_1,R_2的两个无限长同轴柱面组成，两柱面通过大小相等方向相反的电流，求单位长度上电缆的自感系数。



[解]根据安培回路定律，有

$$B=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}$$

r 为场点到轴线的距离。



在两柱面之间作长为l，宽为dr的纵截面，通过此截面的磁通量为：

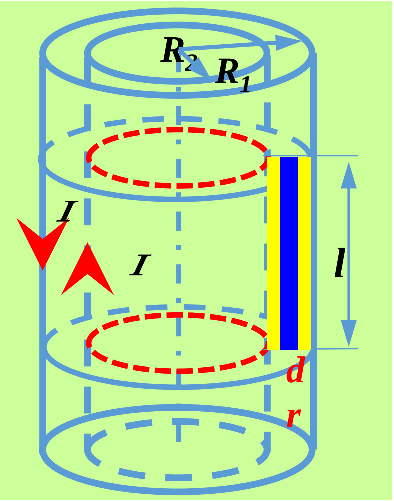
$$d\Phi=\vec{B}\cdot d\vec{S}=Bldr=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}ldr=\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\frac{dr}{r}$$

通过长为l 的两圆柱面之间的纵截面的磁通量为：

$$\Phi=\iint_S d\Phi=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\frac{dr}{r}=\frac{\mu_0}{2\pi}Il\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

根据自感定义，长为 l 的同轴线的自感为：

$$L=\frac{\Phi}{I}=\frac{\mu_0}{2\pi}l\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$



单位长度同轴电缆的自感为：

$$L_0=\frac{L}{l}=\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

线圈自感只与其几何量有关，与通过的电流无关。

[讨论]

1.自感系数由回路自身的几何特性和介质特性决定；

2.两种定义

$$\begin{cases} L = \dfrac{\Phi}{I} \\ L = -\dfrac{\varepsilon}{dI/dt} \end{cases}$$

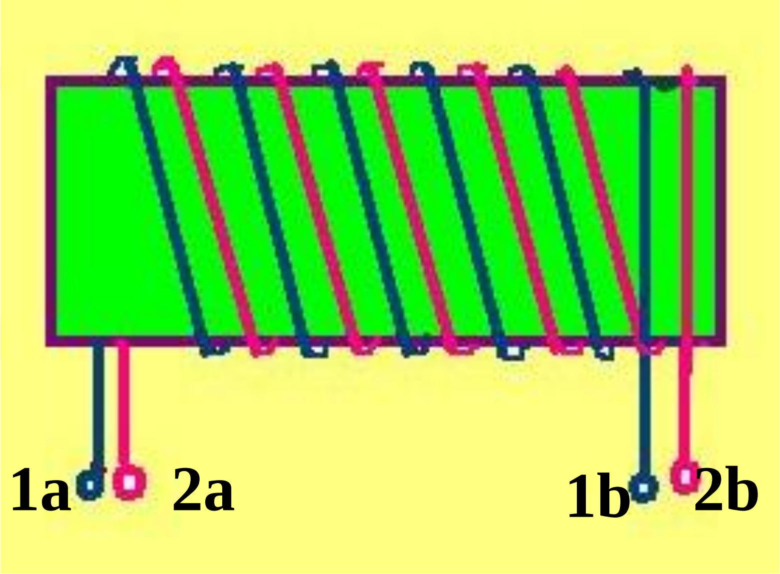
(无铁磁质和回路不变形时等效)；

3. L总大于零； L又称为电磁惯量。

三、自感系数与互感系数的关系

无磁漏条件：

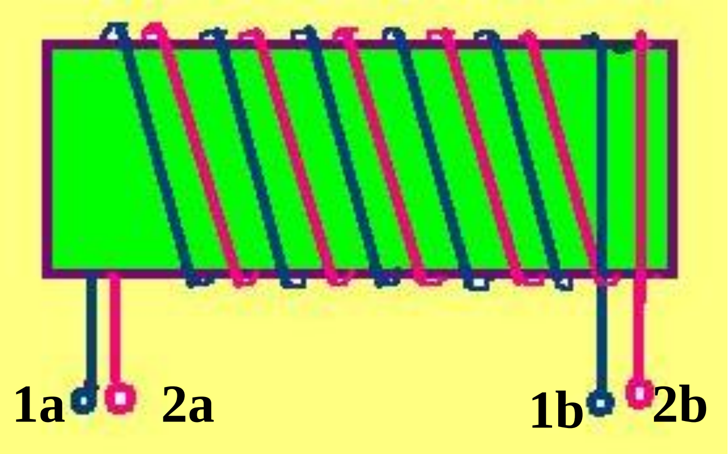
两个线圈中每一个线圈所产生的磁通量对于每一匝来说都相等，并且全部穿过另一个线圈的每一匝，这种情况叫**无磁漏**。



$$\Phi_{12}=\Phi_{2},\quad \Phi_{21}=\Phi_{1}$$

$$M=\frac{N_2\Phi_{21}}{I_1}=\frac{N_1\Phi_{12}}{I_2}$$

$$L_1=\frac{N_1\Phi_1}{I_1},\quad L_2=\frac{N_2\Phi_2}{I_2}$$



无磁漏 $\Phi_{12}=\Phi_2,\quad \Phi_{21}=\Phi_1$

$$M=\frac{N_2\Phi_1}{I_1},\quad M=\frac{N_1\Phi_2}{I_2}$$

$$\therefore M^2=\frac{N_2\Phi_1}{I_1}\cdot\frac{N_1\Phi_2}{I_2}=\frac{N_1\Phi_1}{I_1}\cdot\frac{N_2\Phi_2}{I_2}=L_1L_2$$

$$\boxed{M=\sqrt{L_1L_2}}$$

一般地 $M = k\sqrt{L_1 L_2},\ \mathrm{k} \le 1$

k：耦合系数，$\begin{cases} k = 0, \text{无耦合} \\ k = 1, \text{理想耦合} \end{cases}$

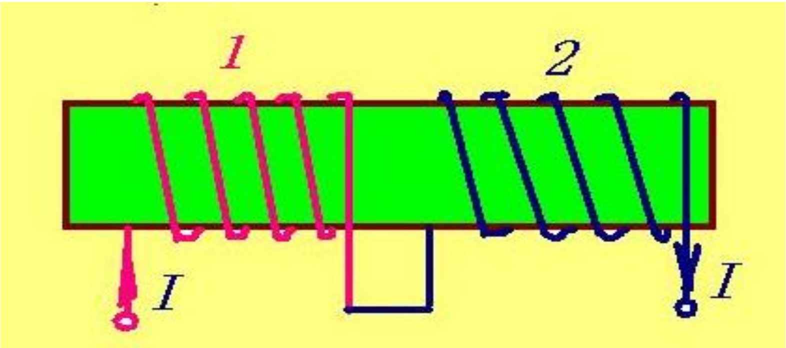
变压器主副线圈之间，k=0.98

四、线圈的串联和并联

1. 串联

两个自感分别为L_1，L_2的线圈，它们的互感为M，由这两个线圈串联等效于一个自感线圈，但新线圈的自感不等于两线圈自感之和，大小与接法有关，有顺接和逆接两种方式。

●顺接（磁场加强）



$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12} = L_1 I_1 + M I_2$$

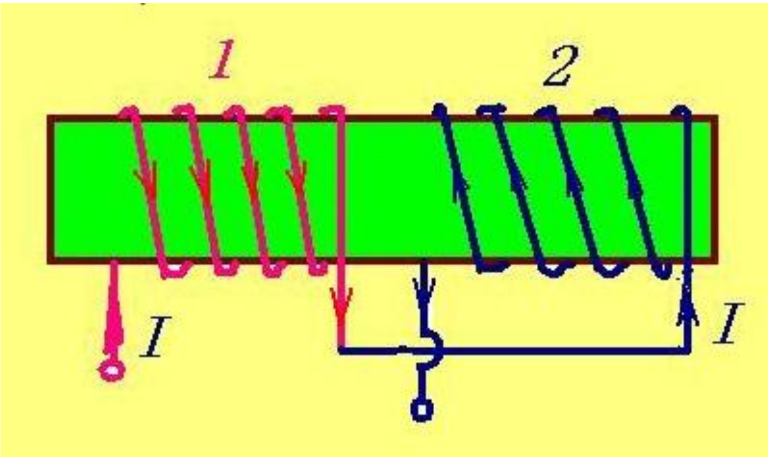
$$\Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{21} = L_2 I_2 + M I_1$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = L_1 I + M I + L_2 I + M I = L I$$

$$\therefore L = L_1 + L_2 + 2M$$

两个线圈串联后的自感并不等于每个自感之和。

●逆接（磁场减弱）



两线圈中的电流连接使磁场相互减弱。

$$L = L_1 + L_2 - 2M$$

说明：此处的M是互感系数的大小，根据接法判断互感磁通的正负。

$$\because L = L_1 + L_2 - 2M \geq 0 \quad \therefore M \leq (L_1 + L_2)/2$$

2、并联

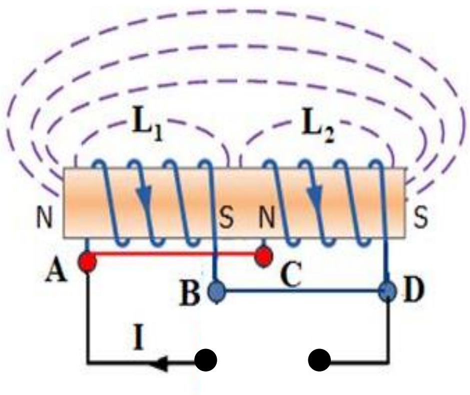
同名端与异名端的定义：

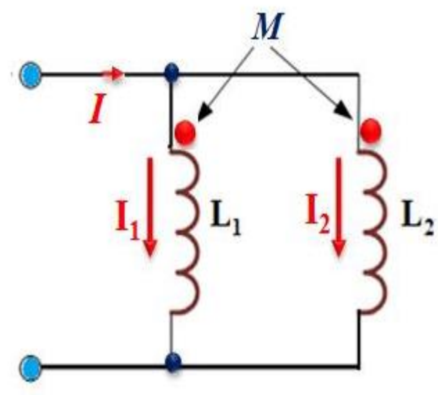
当两线圈的电流从同名端流入（或流出）时，同一线圈的自感磁通和互感磁通同向。

反之，若两线圈的电流从异名端流入（或流出）时，同一线圈的自感磁通和互感磁通反向。

（当两个线圈在一起时，为方便连接，一般都标出同名端，否则要从两线圈的绕行方向来判断。）

●同名端并接





$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

$$I = I_1 + I_2$$

$$\varepsilon = -(L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt}) \quad = -(L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt})$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dI_1}{dt} = \dfrac{L_2 - M}{L_1 + L_2 - 2M} \dfrac{dI}{dt} \\ \dfrac{dI_2}{dt} = \dfrac{L_1 - M}{L_1 + L_2 - 2M} \dfrac{dI}{dt} \end{cases}$$

$$\therefore \varepsilon = -\frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}\frac{dI}{dt} \Rightarrow L = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

$L_1 \neq L_2$时，$L = \dfrac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \geq 0$

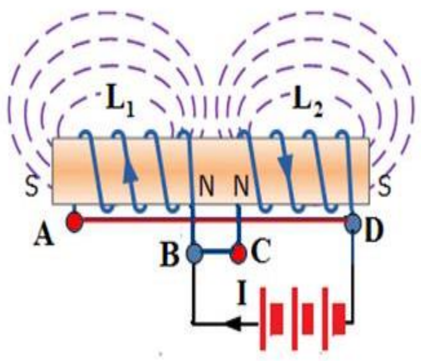
由前　$L = L_1 + L_2 - 2M \geq 0$

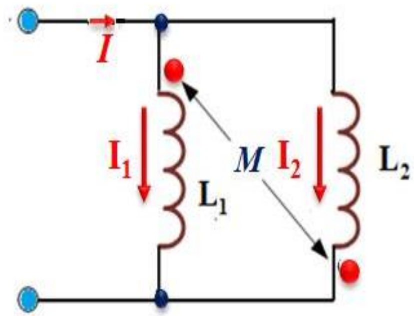
分母非负，必须要求分子非负，所以

$$\boxed{M \leq \sqrt{L_1L_2}}$$

当L_1=L_2时，两个电感并联等同于一个电感。

●异名端并接





$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

$$I = I_1 + I_2$$

在同名端结果中用-M代替M即可

$$L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$$

分母恒为正，分子非负。

● **当理想耦合时** $M=\sqrt{L_1L_2}$

两个不相等的电感并接：

$$L=\frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2\pm 2M}=0$$

两个理想耦合线圈并接时可能会短路！！

串联顺接

$$L = L_1 + L_2 + 2M$$

串联逆接

$$L = L_1 + L_2 - 2M$$

同名端并接

$$L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

异名端并接

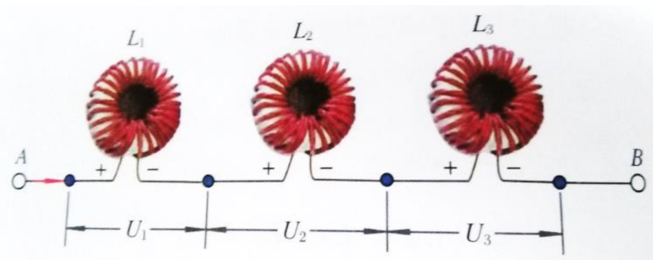
$$L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$$

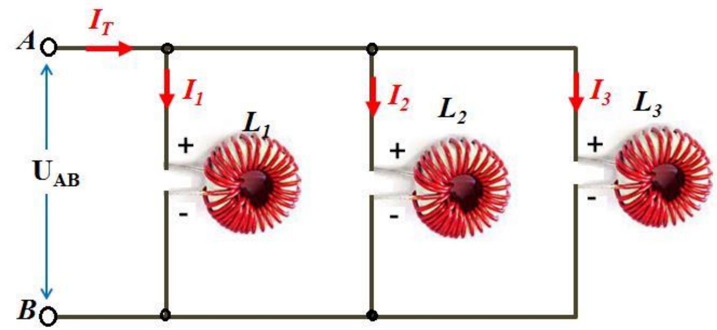
- **当零耦合时（M=0）**

串联 $L = L_1 + L_2$

并联 $\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$

零耦合（M=0）





$$L = L_1 + L_2 + L_3$$

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}$$