2023-2024 学年信息论 B 期末试题

学生所在系：__________ 姓名：__________ 学号：__________

$\log 3 = 1.5850$，$\log 5 = 2.3219$，$\log 7 = 2.8074$，$\log 11 = 3.4594$

1. (每题 4 分，共 8 分) 选择题 (多选题)

   (a) 设 X, Y, Z 为离散随机变量，则以下不等式正确的是 (　)

   $$(A) H(X,Y,Z) - H(X,Y) \leqslant H(X,Z) - H(X)$$
   $$(B) I(X;Y) \geqslant I(X;Y \mid Z)$$
   $$(C) H(X) < H(3X)$$
   $$(D) I(X;Y,Z) \geqslant I(X;Y)$$

   (b) 以下编码不可能是二元哈夫曼编码的是 (　)

   $$(A) \{0, 10, 11\}$$
   $$(B) \{00, 01, 10, 110\}$$
   $$(C) \{01, 10\}$$
   $$(D) \{1, 01, 10\}$$

2. (每题 4 分，共 12 分) 填空题

   (a) 有三个二元离散随机变量 X, Y, Z, 若要使得 $I(X;Y) = 1$ 比特,$I(X;Y \mid Z) = 0$ 比特, 则 X, Y, Z 的联合概率分布为____________________。(给出一个满足条件的例子即可)

   (b) 设一离散信源 X 的概率分布为 $(p_1, p_2, \cdots, p_6)$, $\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$ ，将该信源编码为 r 元即时码，其对应的码长为 $(l_1, l_2, \cdots, l_6) = (1, 1, 2, 3, 2, 3)$ ，则的的最小可能取值为_______________。

   (c) 设一连续消息通过某放大器，转化为放大器的输出电压。设该放大器输出的最大瞬时电压为 b ，最小瞬时电压为 a 。若把放大器中输出的电压看作一个连续随机变量，该随机变量的最大微分熵是_______________。

3. (每题 4 分，共 12 分) 判断题 (若判断为对，简要说明或证明；若判断为错，简要说明或举出反例)

   (a) 令 X 和 Y 为相互独立的两个离散随机变量，则 $H(X+Y) \geqslant H(X)$ 。

(b) 设信号依次通过两个串联的离散信道，第一个信逆输入为 X ，输出为 Y ，信道容量为 C_1 ；第二个信道输入为 Y ，输出为 Z ，信道容量为 C_2 。设串联信道（即输入为 X ，输出为 Z 的信道）的总信道容量为 C ，则 $C \leqslant \min(C_1, C_2)$。

4. (12 分) 对某城市进行交通是否繁忙的调查（忙或者闲），并把天气分为晴雨两种状态，气温分为冷暖两种状态，调查结果得到联合出现的相对频率如下所示：

$$
\text{忙}\begin{cases}\text{晴}\begin{cases}\text{冷} & 12\\ \text{暖} & 8\end{cases}\\ \text{雨}\begin{cases}\text{冷} & 27\\ \text{暖} & 16\end{cases}\end{cases}
\qquad
\text{闲}\begin{cases}\text{晴}\begin{cases}\text{冷} & 8\\ \text{暖} & 15\end{cases}\\ \text{雨}\begin{cases}\text{冷} & 5\\ \text{暖} & 12\end{cases}\end{cases}
$$

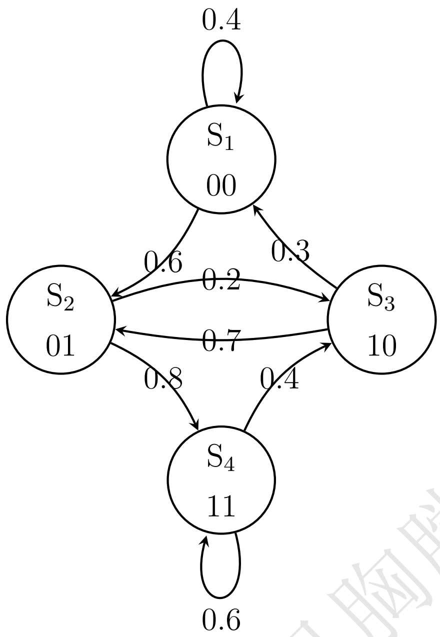
若实际分布概率和这些频率完全一样，请计算

(a) 交通是否繁忙的平均不确定性；

(b) 已知天气状态和气温状态，交通是否繁忙的平均不确定性；

(c) 从天气状态和气温状态中可以获得关于交通是否繁忙的信息量。

5. (8 分) 设 $\{X_i, i=1,2\cdots\}$ 为时间不变的马尔可夫链，每个 X_i 有四个可能的状态取值 S_1, S_2, S_3, S_4 ，初始状塩为均匀分布，状态转移概率如下图所示，请计算该马尔科夫链的熵率。



6.（8 分）设离散信源的概率分布为

$$\begin{bmatrix} S \\ P(S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 & s_7 & s_8 \\ 0.2 & 0.12 & 0.08 & 0.15 & 0.25 & 0.1 & 0.05 & 0.05 \end{bmatrix}$$

(a) 求该信源的熵；

(b) 求该信源的哈夫曼编码以及平均码长。

7. (10 分) 设二元离散信源 X ，通过信道传输后的输出为三元离散随机变量 Y ，信道概率转移矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

请计算该信道的信道容量。

8. (10 分) 设 $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ 分别为定义在 N 维实数空间 $\mathbf{R}^N$ 中的 N 维连续随机变量，$\mathbf{U}, \mathbf{V}$ 分别为 $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ 的可逆线性变换，即 $\mathbf{U} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{V} = \mathbf{B}\mathbf{Y} + \boldsymbol{\beta}$ ，证明：$I(\mathbf{U}; \mathbf{V}) = I(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$。

9. (12 分) 假设有一无记忆加性指数噪声信道，输入随机变量 X 是非负的，输出为 $Y = X + Z$ ，其中随机变量 Z 为独立于输入的指数分布噪声

$$f(Z) = \frac{1}{\mu}\exp(-z/\mu)$$

如果对信道输入的均值进行限制，即 $E[X] \leqslant \lambda$，求该信道的信道容量。

10. (10 分) 对一个 Bernoulli(p) 分布的信源，计算它在以下失真函数下的率失真函数 $R(D)$。

$$d(x, \hat{x}) = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{array}$$