概率论与数理统计 第一次习题课

2023 年 10 月 30 日

第一次作业

3. 某炮弹射击目标 3 次, 记 $A_i = \{$ 第 i 次集中目标 $\}(i=1,2,3)$, 用 A_1, A_2, A_3 表示下列事件

   (1) 仅有一次击中目标.

   (2) 至少有一次击中目标.

   (3) 第一次击中且第二次第三次至少有一次击中.

   (4) 最多击中一次.

解: (1) $A = A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3$.

(2) $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

(3) $C = A_1 \cap (A_2 \cup A_3)$.

(4) $D = \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3$.

4. 设一个试验的样本空间为 $[0,2]$, 记事件 $A = \{1/2 < x \le 1\}, B = \{1/4 < x \le 3/2\}$, 写出下列各事件下列事件

   $(1)A\bar{B}$, $(2)\bar{A} \cup B$, $(3)\overline{AB}$, $(4)\overline{\bar{A}\bar{B}}$.

解: $\Omega = [0,2], A = \left(\frac{1}{2}, 1\right], B = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right]$, 则 $\bar{A} = \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup (1,2], \bar{B} = \left[0, \frac{1}{4}\right] \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right]$.

(1) $A\bar{B} = \left(\frac{1}{2}, 1\right] \cap \left\{\left[0, \frac{1}{4}\right] \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right]\right\} = \phi$.

(2) $\bar{A} \cup B = \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup (1,2] \cup \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right] = [0,2]$.

(3) $\overline{AB} = \overline{\left(\frac{1}{2}, 1\right] \cap \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right]} = \overline{\left(\frac{1}{2}, 1\right]} = \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup (1,2]$.

(4) $\overline{\bar{A}\bar{B}} = \overline{\left\{\left[0, \frac{1}{2}\right] \cup (1,2]\right\} \cap \left\{\left[0, \frac{1}{4}\right] \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right]\right\}} = \overline{\left[0, \frac{1}{4}\right] \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right]} = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right]$.

6. 设 A, B, C 是三事件, 已知 $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = 1/3, \mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(BC) = 1/8$, $\mathbb{P}(AC) = 0$. 求 A, B, C 至少发生一个的概率.

解: 由容斥原理有

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) = \frac{3}{4}.$$

8. 市场调查员报道了如下数据: 在被询问的 1000 名顾客中, 有 811 人喜欢巧克力糖, 752 人喜欢夹心糖, 418 人喜欢大白兔糖, 570 人喜欢巧克力糖和夹心糖, 356 人喜欢巧克力糖和大白兔糖, 348 人喜欢夹心糖和大白兔糖以及 297 人喜欢全部三种糖果. 证明这一消息有误.

解: A: 喜欢巧克力糖, B: 喜欢夹心糖, C: 喜欢大白兔糖.

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) = \frac{1004}{1000} > 1.$$

与概率 ≤ 1 矛盾.

11. 袋中有 a 个白球, b 个黑球, 现任意不放回的一一摸出, 求第 k 次取出白球的概率 $(1 \leq k \leq a+b)$.

解:
- 第 k 个位置为白球的排列有 a ·(a+b-1)！种情况.
- 所有排列有(a+b)！种情况.

$\Rightarrow P = \frac{a \cdot (a+b-1)!}{(a+b)!} = \frac{a}{a+b}$.

注: 将抽球问题理解成小球排列问题, 其中每个小球都视为不同的个体.

19. 某小学一年级有 8 个班, 二年级有 6 个班, 三年级有 4 个班. 如果将所有班级随机分成 3 组, 每组班级数相同. 求每组都有三年级班的概率是多少?

解: A：每组都有三年级班

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{C_{14}^5 \cdot C_9^5 \cdot C_4^2 \cdot 2 + C_4^5 C_9^4 \cdot C_4^2 \cdot 2 + C_{14}^4 \cdot C_{10}^5 \cdot C_4^2 \cdot 2}{C_{18}^6 \cdot C_{12}^6} \\ &= \frac{3 \cdot 12 \cdot C_{14}^5 C_9^5}{C_8^6 \cdot C_{12}^6} = \frac{9}{17} \end{aligned}$$

注: 在考虑总的种类时, 需要想清楚是否有序.

23. 甲乙两选手进行乒乓球单打比赛, 已知在每局中甲胜的概率为 $p(p > 1/2)$, 乙胜的概率为 $1-p$. 比赛可采用三局两胜制或五局三胜制, 问哪一种比赛制度对甲更有利?

解: A: 甲获胜

三局两胜: $P_1(A) = p^2 + C_2^1 p^2(1-p) = p^2 - 2p^3 + 2p^2$.

五局三胜:

$$\begin{aligned} P_2(A) &= p^3 + C_3^1 p^3(1-p) + C_4^2 p^3(1-p)^2 \\ &= p^3 + 3p^3 - 3p^4 + 6p^3 - 12p^4 + 6p^5. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\therefore P_2(A)-P_1(A) &= 6p^5-15p^4+10p^3-3p^2+2p^3 \\
&= 3p^2\left(2p^3-5p^2+4p-1\right)
\end{aligned}
$$

设 $g(p)=2p^3-5p^2+4p-1$, 关于 p 求导有

$$
g'(p)=6p^2-10p+4=2(3p-2)(p-1).
$$

$\therefore g(p):\left[0,\frac{2}{3}\right]\uparrow,\left[\frac{2}{3},1\right]\downarrow.$
由 $g\left(\frac{1}{2}\right)=0, g(1)=0$ 可知

$$
P_2(A)-P_1(A)>0, p\in\left(\frac{1}{2},1\right),\ P_2(A)-P_1(A)=0, p=1.
$$

$\therefore$ 五局三胜好

第二次作业

27. 设某袋子中有红白黑三种颜色的球, 红色球的数目是白球的 2 倍, 黑球为红球的 1/3, 试求从袋中随机摸出一球恰好是白球的概率.

解: 黑球: n, 红球: $3n$, 白球: $\frac{3}{2}n$. n 为偶数 $n\neq 0$.
A: 摸到白球. $P(A)=\frac{\frac{3}{2}n}{n+3n+\frac{3}{2}n}=\frac{3}{11}$.

31. 在一种双骰子博弯中, 玩家投两枚骰子, 如果其和是 7 或 11 , 则玩家赢; 如果其和是 2,3 或者 12 , 玩家输; 若是其他结果时就继续玩, 直到玩家输或者赢为止. 计算玩家赢的概率.

解: A_i : 投到第 i 次赢, A_i 两两不相交. A : 玩家赢.

$$
P(A)=P\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P\left(A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cdot\frac{2}{9}=\frac{2}{9}\cdot 3=\frac{2}{3}.
$$

注: 将事件分成两两不相交事件之并, 再算各个事件的概率.

35. 在数字 $1\sim 9$ 中随机的取一个数 X, 然后再在 1 到 X 中随机的取一个数, 试求第二次取的数为 $m(1\leq m\leq 9)$ 的概率是多少?

解: A : 第二次取到 m. A_i : 第一次取到 i, 第二次取到 m.

$$
P(A)=P\left(\sum_{i=1}^{9}Ai\right)=\sum_{i=1}^{9}P\left(A_i\right)=\sum_{i=m}^{9}P\left(A_i\right)=\sum_{i=m}^{9}\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{i}=\frac{1}{9}\sum_{i=m}^{9}\frac{1}{i}.
$$

37. 某人忘了电话号码的最后一个数字, 因而随机拨号, 问拨号不超过 3 次而接通所需拨的电话号码的概率是多少? 若已知最后一位是偶数, 那么此概率是多少?

解: A_i : 第 i 次接通. A: 不超过 3 次接通.

$$P(A)=P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)+P\left(A_3\right)=\frac{1}{10}+\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{9}+\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{10}$$

偶数时解题思路类似, 答案为 $\frac{3}{5}$.

45. 袋中有一个球, 它为白球黑球的概率相等. 现从中放入一个白球, 再从中随机取出一球, 现发现是白球, 试求袋中所剩之球也是白球的概率.

解: A : 剩的球为白球。 B : 第一次取出球为白球。

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}$$

注: 题目要求的是条件概率.

49. 为防止意外, 办公大楼楼道里同时装有两个报警装置 1 和 2 . 已知报警装置 1 单独使用时有效概率为 0.95 ; 报警装置 2 单独使用时有效概率为 0.90 . 在报警装置 1 失效的条件下装置 2 失效的概率为 0.86 . 求发生意外时至少有一个报警装置有效的概率.

解: A: 1 有效 B: 2 有效。$P(A)=0.95.\quad P(B)=0.90.\quad P\left(B^c\mid A^c\right)=0.86.$

$\therefore P\left(A^c\right)=0.05.\quad P\left(B^c\right)=0.10\Rightarrow P\left(A^cB^c\right)=0.043.$

$\therefore P(A\cup B)=1-P\left(A^cB^c\right)=1-0.043=0.957.$

第三次作业

第一章

56. 对于三个事件 A,B,C, 若

$$\mathbb{P}(AB\mid C)=\mathbb{P}(A\mid C)\mathbb{P}(B\mid C)$$

成立, 则称 A 与 B 关于 C 条件独立. 若已知 A 与 B 关于 C 与 $\bar{C}$ 条件独立, 且 $\mathbb{P}(C)=0.5,\mathbb{P}(A\mid C)=\mathbb{P}(B\mid C)=0.9,\mathbb{P}(A\mid\bar{C})=0.2,\mathbb{P}(B\mid\bar{C})=0.1$, 试求 $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B),\mathbb{P}(AB)$ 并证明 A 与 B 不独立.

解: 计算可得 P(A)=0.55,P(B)=0.5,P(AB)=0.415.

$\therefore P(A)P(B)=0.275\neq 0.415=P(AB)\therefore AB$ 不独立.

65. 求下列各系统能正常工作的概率, 其中框图中的字母代表元件, 字母相同但下标不同的都是同一种元件, 只是装配在不同的位置上, A,B,C,D 类元件能正常工作的概率分别为 p_A,p_B,p_C,p_D.

解: (4) $P(A\cup B\cup C)=1-P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=1-(1-p_A)(1-p_B)(1-p_C)$

$\therefore P=p_D\cdot[1-(1-p_A)(1-p_B)(1-p_C)]\cdot p_D=p_D^2\cdot[1-(1-p_A)(1-p_B)(1-p_C)]$.

(5) S: 正常工作

C 正常工作时.

$$\begin{aligned}P(S\mid C)&=P\left(A_1A_2\text{ 有一个行且}B_1,B_2\text{ 有一个行}\right)\\&=P\left((A_1\cup A_2)\cap(B_1\cup B_2)\right)\\&=\left[1-(1-p_A)^2\right]\cdot\left[1-(1-p_B)^2\right]\end{aligned}$$

C 不正常工作时.

$$\begin{aligned}P(S\mid\bar{C})&=P\left(A_1,B_1\text{ 都行或}A_2,B_2\text{ 都行}\right)\\&=P\left(A_1\cap B_1)\cup(A_2\cap B_2)\right)\\&=2p_Ap_B-p_A^2p_B^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore P(S)&=P(S\mid C)\cdot P_C+P(S\mid\bar{C})\cdot(1-P_C).\\&=p_C\cdot\left[1-(1-p_A)^2\right]\cdot\left[1-(1-p_B)^2\right]+(1-p_C)\left(2p_Ap_B-p_A^2p_B^2\right)\\&=2p_A(1-p_A)\left[1-(1-p_B)(1-p_Bp_C)\right]+p_A^2\left[1-(1-p_B)^2\right]\end{aligned}$$

73. 从北京到达拉斯有两个航班, 从达拉斯到芝加哥有 3 个航班, 从北京直飞芝加哥有 2 个航班. 这些航班的票务之间完全独立, 买到票的概率都是 $p(0<p<1)$. 假设从北京飞芝加哥没有其他途径可选, 且某人从北京出发到达了巴黎, 计算他乘坐直飞航班完成的旅程的概率.

解: A : 北京直飞芝加哥。B : 北京飞达拉斯。 C : 达拉斯飞芝加哥. $A\cup(B\cap C)$: 到达。

$P(A)=1-(1-p)^2$. $P(B)=1-(1-p)^2$. $P(C)=1-(1-p)^3$

$P(A\cup(B\cap C))=\left[1-(1-p)^2\right]\left[1+(1-p)^2-(1-p)^5\right]$.

$P(A\mid A\cup(B\cap C))=\dfrac{1-(1-p)^2}{\left[1-(1-p)^2\right]\left[1+(1-p)^2-(1-p)^5\right]}=\dfrac{1}{1+(1-p)^2-(1-p)^5}$

76. 设有来自三个地区的考生报名表共 50 份, 三个地区分别有 10,15 和 25 份, 其中女生的报名表分别为 3 份, 7 份和 5 份, 现随机地选一个地区, 从该地区的报名表中先后抽出 2 份.

(1) 求先抽到的 1 份是女生报名表的概率.

(2) 已知后抽到的 1 份是男生报名表, 求先抽到的 1 份是女生报名表的概率.

解: (1) A: 先抽到 1 份是女生。B_i : 抽到第 i 个地区。

$$P(A)=P\left(\sum_{i=1}^{3}AB_i\right)=P\left(AB_1\right)+P\left(AB_2\right)+P\left(AB_3\right)=\frac{29}{90}$$

(2)C_{j}：第 j 份是女生

$$P\left(C_1 \mid \bar{C}_2\right)=\frac{P\left(C_1 \bar{C}_2\right)}{P\left(\bar{C}_2\right)}=\frac{P\left(\bar{C}_2 \mid C_1\right) P\left(C_1\right)}{P\left(\bar{C}_2 \mid C_1\right) P\left(C_1\right)+P\left(\bar{C}_2 \mid \bar{C}_1\right) P\left(\bar{C}_1\right)}=\frac{20}{61}$$

83. 计算机信号“0 ”和“1 ”传递出去, 信息站接收的时候, “0 ”被误收为“1 ”的概率为 0.02, “1 ”被误收为“0 ”的概率为 0.01 . 信号“0 ”和“1 ”传输的频繁程度为 2 : 1. 若接收到的信号是“0 ”, 真实信号是“0 ”的概率是多少?

解: A: 真实信号是“0” B: 接收信号是”0”

$$P(A \mid B)=\frac{P(A) P(B \mid A)}{P(A) P(B \mid A)+P\left(A^c\right) P\left(B \mid A^c\right)}=\frac{196}{197}.$$

第二章

8. 设某游乐场的一部设备在一天内发生故障的概率为 20%, 设备一旦发生故障则全天无法工作. 若一周五个工作日内无故障可以获利 10 万元, 只发生一次故障可以获利 5 万元, 发生两次故障获利 0 元, 发生三次或三次以上故障则亏损两万元. 试求一周内该游乐场在这台设备上的毛利润的分布律.

解: X：: 周获利 (万元) .$X=10,5,0,-2$ A：故障次数. $A=0,1,2,3,4,5$.

$$P(X=10)=P(A=0)=(1-20\%)^5=\left(\frac{4}{5}\right)^5=0.32768$$

$$\begin{aligned}
P(X=5)&=P(A=1)=C_5^1(1-20\%)^4 \cdot 20\%=\left(\frac{4}{5}\right)^4=0.4096 \\
P(X=0)&=P(A=2)=C_5^2(1-20\%)^3 20\%=0.2048 \\
P(X=-2)&=P(A=3)+P(A=4)+P(A=5) \\
&=C_5^3(1-20\%)^2 20\%^3+C_5^4(1-20\%)^1 20\%^4+C_5^5 20\%^5=0.05792
\end{aligned}$$

16. 若随机变量 X 和 Y 分别服从二项分布 $B(2,p)$ 和 $B(3,2p)$, 且 $\mathbb{P}(X \geq 1)=0.51$, 试求 $\mathbb{P}(Y \geq 1)$.

解:

$$\begin{aligned}
&P(X \geqslant 1)=P(X=1)+P(X=2)=2p(1-p)+p^2=2p-p^2=0.51 \\
&\therefore p=0.3(0 \leq p \leq 1) \\
&\therefore P(Y \geqslant 1)=1-P(Y=0)=1-(1-2 \times 0.3)^3=0.936.
\end{aligned}$$

26. 一个系统包含了 1000 个零件, 各个零件出故障是相互独立的并且在一个月内出故障的概率为 0.001 . 试利用 Poisson 分布求系统在一个月内正常运转 (即没有零件出故障) 的概率.

解: 由题知该系统服从二项分布 $B(1000,0.001)$

把其看成一个 Poisson 分布$\lambda=np=1000 \times 0.001=1$. $\therefore P(X=0)=e^{-1}$.

第四次作业

第二章

33. 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ a\sin x, & 0\le x\le \frac{\pi}{2}, \\ 1, & x>\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

试求常数 a 的值及概率 $\mathbb{P}\left(X>\frac{\pi}{6}\right)$.

解: 由 $F(x)$ 右连续性. $a\cdot\sin\frac{\pi}{2}=F\left(\frac{\pi}{2}\right)=F\left(\frac{\pi}{2}^{+}\right)=1$

$\therefore a=1.$ $\therefore P\left(x>\frac{\pi}{6}\right)=1-P\left(x\le\frac{\pi}{6}\right)=1-F\left(\frac{\pi}{6}\right)=1-\sin\frac{\pi}{6}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

39. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\frac{a}{1+x^2},\quad -\infty<x<\infty.$$

试求: (1) 常数 a; (2) 分布函数 $F(x)$; (3) 概率 $\mathbb{P}(|X|<1)$.

解: (1) $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a}{1+x^2}dx=a\cdot\arctan x|_{-\infty}^{\infty}=a\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=a\cdot\pi=1$

$$\therefore a=\frac{1}{\pi}$$

(2)

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{1}{\pi}\cdot\left(\arctan t|_{-\infty}^{x}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\arctan x+\frac{\pi}{2}\right)\\&=\frac{1}{\pi}\arctan x+\frac{1}{2},-\infty<x<\infty\end{aligned}$$

(3) $P(|X|<1)=P(-1<X<1)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{1}{\pi}\left(\arctan t|_{-1}^{1}\right)=\frac{1}{2}.$

46. 某城际列车从早上六点整开始每 15 分钟发出一趟列车, 假设某乘客达到车站的时间服从七点到七点半的均匀分布, 若忽略买票等其它时间, 试求该乘客等车少于 5 分钟的概率.

解: $P=\frac{5+5}{30}=\frac{1}{3}.$

48. 设随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布, a 为常数且大于零, 则 $\mathbb{P}(Y\le a+1\mid Y>a)=$.

解: 由题知 $F(x)=(1-e^{-x})\cdot\mathbb{I}\{x>0\}$.

$$P(Y\leqslant a+1\mid Y>a)=\frac{P(Y\leqslant a+1,Y>a)}{P(Y>a)}=\frac{1-e^{-(a+1)}-1+e^{-a}}{1-(1-e^{-a})}=1-e^{-1}.$$

50. 设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 X 服从参数为 $\lambda = 1/5$ 的指数分布 (单位: 分钟). 假设某顾客一旦等待时间超过 10 分钟他就立即离开, 且一个月内要到该银行 5 次, 试求他在一个月内至少有一次未接受服务而离开的概率.

解: $F(x) = \left(1 - e^{-\frac{1}{5}x}\right) \cdot \mathbb{I}_{x>0\}}$, 则有 $P(\text{接受一次服务}) = P(X \le 10) = F(10) = 1 - e^{-2}$.
$\therefore P(\text{至少有一次未接受服务}) = 1 - P(\text{每次都接受服务}) = 1 - (1 - e^{-2})^5 = 0.517$.

第三章

2. 从 $1, 2, 3, 4$ 四个数中任取一个数, 记为 X, 再从 1 到 X 中任取一个数, 记为 Y, 求 $\{Y = 2\}$ 这个事件发生的概率是多少?

解:

$$P(Y = 2) = \sum_{i=2}^{4} P(Y = 2 \mid X = i) \cdot P(X = i) = \sum_{i=2}^{4} \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{4} = \frac{13}{48}.$$

11. 设某射手每次射中目标的概率为 $p(0 < p < 1)$, 射击进行到第二次射中目标为止, X 表示第一次射中目标所进行的射击次数, Y 表示第二次射中目标时所进行的射击次数.

(1) 求二维随机变量 (X, Y) 的分布律;

(2) 求 X 和 Y 的边缘分布.

解: (1) $P(x = i, Y = j) = p^2 \cdot (1-p)^{j-2}, j = 2, 3, \cdots; i = 1, \cdots, j-1$.

(2) $P(X = i) = p \cdot (1-p)^{i-1}, i = 1, 2, \cdots$.

$P(Y = j) = \sum_{i=1}^{j-1} P(X = i, Y = j) = \sum_{i=1}^{j-1} p^2(1-p)^{j-2} = (j-1)p^2(1-p)^{j-2}$.

21. 设二维随机变量 (X, Y) 的密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} \cos x \cos y, & 0 < x < \pi/2, 0 < y < \pi/2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 试求 (X, Y) 的分布函数;

(2) 试求概率 $\mathbb{P}(0 < X < \pi/4, \pi/4 < Y < \pi/2)$.

解: (1)

$$F(x, y) = \begin{cases} \sin x \cdot \sin y & 0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < \frac{\pi}{2} \\ \sin x & 0 < x < \frac{\pi}{2}, y \geqslant \frac{\pi}{2} \\ \sin y & x \geqslant \frac{\pi}{2}, 0 < y < \frac{\pi}{2} \\ 1 & x > \frac{\pi}{2}, y > \frac{2}{2} \\ 0 & else. \end{cases}$$

(2)

$$\begin{aligned} P\left(0 < X < \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} < Y < \frac{\pi}{2}\right) &= \sin\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{\pi}{4}. \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right). \end{aligned}$$