2023.11.10 第 13 次作业

卢科政　夏业志

2023 年 12 月 13 日

题目 1.　一段无限长导线弯成如图所示形状, 通有电流 I, 求圆心 O 处的磁感应强度.

解答.　利用叠加原理, 分为无限长导线 + 圆环

对于无限长导线, 取微元:

$$dl_1 = \frac{R}{\cos^2\theta}d\theta \tag{1}$$

利用毕奥萨伐尔定律可得:

$$B_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\cos\theta d\theta = \frac{\mu_0}{2\pi R} \tag{2}$$

对于圆环, 取微元:

$$dl_2 = Rd\theta \tag{3}$$

利用毕奥萨伐尔定律可得:

$$B_2 = \oint \frac{\mu_0 IRd\theta}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 I}{2R} \tag{4}$$

根据叠加原理有:

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{2R}(1+\frac{1}{\pi}) \tag{5}$$

方向为垂直于纸面向内

题目 2.　一载有电流 I 的导线弯成抛物线, 焦点到顶点的距离为 a, 求焦点处的磁感应强度.

解答.　利用极坐标表示可以简化计算. 回忆高中数学知识, 以焦点为原点, 该抛物线可以表示为 $r = \frac{2a}{1-\cos\theta}$, 点 F 处的磁感应强度为:

$$dB = \frac{\mu_0 Idl\sin\phi}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 Id\theta}{4\pi r} = \frac{\mu_0 I(1-\cos\theta)d\theta}{8\pi a} \tag{6}$$

积分可得:

$$B = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I(1-\cos\theta)d\theta}{8\pi a} = \frac{\mu_0 I}{4a} \tag{7}$$

方向为垂直于纸面向外

题目 3.　氢原子处于基态时, 它的电子在半径为 $0.529\times10^{-8}cm$ 的轨道上做匀速圆周运动, 速率为 $2.19\times10^{8}cm\cdot s^{-1}$, 求电子在原子核中心处产生的磁感应强度

解答. 可以把电子匀速圆周运动视为带电圆环, 其电流大小为:

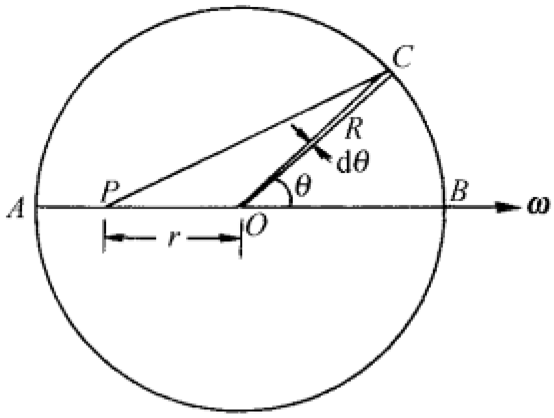
$$I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi R} \tag{8}$$

由 (4) 可知:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0 ev}{4\pi R^2} \tag{9}$$

题目 4. (课本 4.9) 电荷量 Q 均匀地分布在半径为 R 的球面上，这个球面以匀角速度 ω 绕一个直径轴旋转，求：(1) 轴线上离圆心为 r 处的磁感应强度;(2) 该球的磁矩。

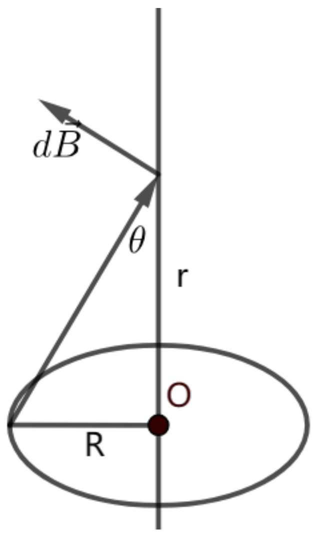
解答. (1).



如图，取球面上一环形条带，转动时该条带的电流为:

$$dI = dQ/T = \frac{\sigma dS}{2\pi/\omega} = \frac{Q/(4\pi R^2)\cdot 2\pi R sin\theta R d\theta}{2\pi/\omega} = \frac{\omega Q}{4\pi} sin\theta d\theta$$

对于如下的模型:



距离环形电流 I 轴心距离为 r 的位置处的磁感应强度为:

$$B = \oint dBsin\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I2\pi R}{r^2+R^2}sin\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I2\pi R}{r^2+R^2}\frac{R}{\sqrt{r^2+R^2}}$$

则回到本题中环形电流 dI 在 P 点产生的磁感应强度为:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi(Rsin\theta)^2 dI}{[(r+Rcos\theta)^2+(rsin\theta)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 Q\omega R^2}{8\pi}\frac{sin^3\theta d\theta}{[(r+Rcos\theta)^2+(rsin\theta)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

对上式的 θ 积分可得:

$$B = \int_0^{\pi}\frac{\mu_0 Q\omega R^2}{8\pi}\frac{sin^3\theta d\theta}{[(r+Rcos\theta)^2+(rsin\theta)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

对于该积分，首先令 $cos\theta = x$, 转化为:

$$B = \frac{\mu_0 Q\omega R^2}{8\pi}\int_0^{\pi}\frac{x^2-1}{(r^2+R^2+2rRx)^{\frac{3}{2}}}dx$$

再令 $r^2+R^2+2rRx = y$ 即可进一步化简，最终结果分为两种情况:

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 Q}{6\pi R}\vec{\omega} & r < R \\ \frac{\mu_0 Q}{6\pi R}(\frac{R}{r})^3\vec{\omega} & r > R \end{cases} \tag{10}$$

(2). 图中的 dI 电流的磁矩为:

$$d\vec{m} = (dI)\vec{S} = \frac{Q\omega}{4\pi}sin\theta d\theta\cdot\pi(Rsin\theta)^2\frac{\vec{\omega}}{\omega} = \frac{1}{4}QR^2\vec{\omega}sin^3\theta d\theta$$

总磁矩为:

$$\vec{m} = \int_0^{\pi}\frac{1}{4}QR^2\vec{\omega}sin^3\theta d\theta = \frac{1}{3}QR^2\vec{\omega}$$

题目 5. (课本 4.11) 假定地球的磁场是由地球中心的小电流产生的，已知地面磁极附近磁场为 0.8G，地球半径 $R = 6\times 10^6 m$，求小电流环的磁矩。

解答. 上题中的距离环形电流 I 轴心距离为 r 处的磁感应强度为:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I2\pi R}{r^2+R^2}\frac{R}{\sqrt{r^2+R^2}} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{m}{(r^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

由于地心的小电流产生了这个磁场，则 $R << r$

近似后可以得到:

$$m = \frac{2\pi Br^3}{\mu_0} = 8.63\times 10^{22}A\cdot m^2$$

注记. $1T = 10^4 G$