2023.10.13 第八次作业

卢科政　夏业志

2023 年 11 月 5 日

题目 1. (课本 2.15) 水分子是有极分子，一个水分子的电偶极矩为 $0.61 \times 10^{-30} C \cdot m$，若将所有的水分子电矩都朝向同一方向。

(1) 试估算水的极化强度；

(2) 直径为 $1mm$ 的水滴的电偶极矩有多大？距水 $10cm$ 处的电场强度有多大？

解答. (1)

单位体积水分子数 (摩尔质量 $M = 0.018kg/mol$) 为：

$$N = \frac{\rho_0}{M} * N_a = \frac{10^3}{0.018} \times 6.02 \times 10^{23} = 3.344 \times 10^{28} \tag{1}$$

由于所有的水分子电矩都朝向同一方向，所以极化强度约为：

$$p = N \times 0.61 \times 10^{-30} = 2.04 \times 10^{-2} C/m^{-2} \tag{2}$$

(2)

直径为 $1mm$ 的水滴体积为 $V = \frac{1}{6}\pi d^3$，则电偶极矩为：

$$P = pV = 1.07 \times 10^{-11} C \cdot m \tag{3}$$

根据电偶极子电场公式，带入 P 可得:

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2P\cos\theta}{r^3} = 192\cos\theta V/m \tag{4}$$

$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P\sin\theta}{r^3} = 96\sin\theta V/m \tag{5}$$

题目 2. (课本 2.16) 平行班电容器两极板相距 3.0cm，其间放有两层相对介电常数分别为 $\epsilon_{r1} = 2$ 和 $\epsilon_{r2} = 3$ 的介质，位置与厚度如图所示。已知极板上面电荷密度为 σ，略去边缘效应，求:(1) 极板间各处 P,E 和 D 的值；(2) 极板间各处的电势 (设 $V_A = 0$)；(3)3 个介质分界面的极化电荷面密度。

解答. (1) 根据高斯定理 $\int\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{total}}{\epsilon}$:
对于 A 面:

$$E_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_1} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

对于 B 面:

$$E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_2} = \frac{\sigma}{3\epsilon_0}$$

根据 $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$:

$$D_1 = D_2 = \sigma$$

根据 $\vec{D} = \epsilon\vec{E} = \vec{P} + \epsilon_0\vec{E}$:

$$P_1 = (\epsilon_1 - \epsilon_0)E_1 = \frac{\sigma}{2}$$
$$P_2 = (\epsilon_2 - \epsilon_0)E_2 = \frac{2\sigma}{3}$$

(2) 设极板间一点的位置离 A 的距离为 l,
当 0<l<1.0cm 时:

$$\phi_1 = E_1 l = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot l$$

当 1.0cm<l<3.0cm 时:

$$\phi_2 = E_1 * l_1 + E_2 * (l - l_1) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot l_1 + \frac{\sigma}{3\epsilon_0} \cdot (l - l_1)$$

(其中 $l_1 = 1.0cm$)
(3) 极化电荷的面密度可以根据 $Q_p = -\int\int \vec{P} \cdot d\vec{S}$ 得到:

$$\sigma'_A = -P_1 = -\frac{1}{2}\sigma$$
$$\sigma'_B = P_2 = \frac{2}{3}\sigma$$
$$\sigma' = P_1 - P_2 = -\frac{1}{6}\sigma$$

题目 3. (课本 2.17) 一个半径为 a 的导体球面套有一层厚度为 b-a 的均匀电介质，电介质的介电常数为 ϵ, 设内球的电量为 q, 求空间的电势分布。

解答. 先计算电场分布, 设导体球外一点距离球心距离为 r, 注意到导体球的自由电荷电量已知为 q，可以利用高斯定理 $\int\int \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{free}$，则对于 r>a 都有:

$$D(r) = \frac{q}{4\pi r^2}$$

由于 $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$, 可以计算的到 $\vec{E}$ 的分布:

$$E_1(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}, a < r < b$$
$$E_2(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, r > b$$

r>b 时，电势为:

$$\phi_2(r) = \int_r^\infty E_2(r)dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

a<r<b 时，电势为:

$$\phi_1(r) = \phi_2(b) + \int_r^b E_1(r)dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b} + \frac{q}{4\pi\epsilon}(\frac{1}{r} - \frac{1}{b})$$

r<a 时，位于球内，导体球为等势体:

$$\phi_0(r) = \phi_1(a) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b} + \frac{q}{4\pi\epsilon}(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})$$

题目 4. (课本 2.20) 球心电容器由半径为 R_1 的导体和与它同心的导体球壳构成，壳的内半径为 R_2，其间有两层均匀介质，分界面的半径为 a，相对介电常数分别为 ϵ_1 和 ϵ_2。(1) 求电容 C;(2) 当内球带电荷-Q 时，求介质表面上极化电荷的面密度 σ'。

解答. (1) 设内球带的自由电荷量为 q, 则根据高斯定理 $\int\int \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int\int \epsilon\vec{E} \cdot d\vec{S} = Q_{free}$:

$$E_1(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_1\epsilon_0 r^2}, R_1 < r < a$$
$$E_2(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_2\epsilon_0 r^2}, a < r < R_2$$

则可以计算两级之间的电势差:

$$U = \int_{R_1}^{a} E_1(r)dr + \int_a^{R_2} E_2(r)dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_1\epsilon_0}(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{a}) + \frac{q}{4\pi\epsilon_2\epsilon_0}(\frac{1}{a} - \frac{1}{R_2})$$

电容器电容为:

$$C = q/U = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_1\epsilon_2 R_1 R_2 a}{\epsilon_2 R_2(a - R_1) + \epsilon_1 R_1(R_1 - a)}$$

(2) 内球带电量为-Q 即上题中的 q=-Q, 则 P_1 和 P_2 分别为:

$$P_1(r) = (\epsilon_1 - 1)\epsilon_0 E_1(r), R_1 < r < a$$

$$P_2(r) = (\epsilon_2 - 1)\epsilon_0 E_2(r), a < r < R_2$$

分界面处的极化电荷面密度为:

$$\sigma'(a) = -(P_2(a) - P_1(a)) = -\frac{Q}{4\pi a^2}\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1\epsilon_2}$$

$r = R_1$ 处的极化电荷面密度为:

$$\sigma'(R_1) = -P_1(R_1) = \frac{Q_1}{4\pi R_1^2}(1 - \frac{1}{\epsilon_1})$$

$r = R_2$ 处的极化电荷面密度为:

$$\sigma'(R_2) = P_2(R_2) = -\frac{Q}{4\pi R_2^2}(1 - \frac{1}{\epsilon_2})$$

题目 5. (课本 2.23) 半径为 R 的金属球，外面包有一层相对介电常数为 $\epsilon_r = 2$ 的均匀电解质材料，内外半径分别为 $R_1 = R, R_2 = 2R$，介质球内均匀分布着电量为 q_0 的自由电荷，金属球接地，求介质外表面的电势。

解答. 介质中自由电荷密度为：$\rho = \frac{3q_0}{4\pi(8R^3 - R^3)}$，假设金属球表面的感应电荷为 q，在介质内，由高斯定理可知：

$$4\pi r^2 \epsilon_r \epsilon_0 E_1(r) = q + \frac{4\pi(r^3 - R^3)}{3}\rho \tag{6}$$

可得：

$$E_1(r) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r^2} + \frac{q_0 r}{7R^3} - \frac{q_0}{7r^2}\right) \tag{7}$$

在介质外，由高斯定理易知：$E_2(r) = \frac{q+q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}$，由于金属球接地电势为 0 而且无穷远处电势仍为 0，所以有；

$$\int_{2R}^{R} E_1 dr = \int_{2R}^{\infty} E_2 dr \tag{8}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\int_{2R}^{R}\left(\frac{q}{r^2} + \frac{q_0 r}{7R^3} - \frac{q_0}{7r^2}\right) dr = \frac{q+q_0}{4\pi\epsilon_0}\int_{2R}^{\infty}\frac{dr}{r^2} \tag{9}$$

可得 $q = -\frac{16}{21}q_0$,，所以求介质外表面的电势为：

$$U = \int_{2R}^{\infty} E_2 dr = \int_{2R}^{\infty}\frac{q+q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}dr = \frac{q+q_0}{8\pi\epsilon_0 R} = \frac{5q_0}{168\pi\epsilon_0 R} \tag{10}$$