

中国科学技术大学 2021-2022 第二学期 统计信号分析与处理 期末考试（回忆版）

一、简答题（15 分）

1. 随机信号 $x(t)$ 通过线性时不变系统，写出输入输出信号的频谱与功率谱与系统函数的关系。
2. 写出窄带信号的正交表示。
3. $x(t) = s(t) + n(t)$ ，信号和噪声的功率谱密度分别是 $S(\omega), S_n(\omega)$ ，请写出信噪比在时刻 T 和系统函数之间的关系
4. 写出确定单参量的 Cramer-Rao 不等式。

二、（10 分）证明稳定的 ARMA(p,q) 系统可以等价于一个无穷阶的 MA 系统。

三、（15 分）二元假设：

$$H_0: y = -1 + n$$

$$H_1: y = 1 + n$$

其中 n 的概率密度函数是 $f(n) = \frac{1}{\pi(1+n^2)}$ ，若 H_0, H_1 以等概率发生，请用最小平均错误概率准则计算判决规则和平均错误概率。

四、（20 分）分集接收 BASK 信号。 n_i 之间是相互独立的高斯白噪声， A 和 ω_c 已知，一共进行了 N 次接收：

$$\begin{aligned} H_0: x_i &= n_i(t) \\ H_1: x_i &= A \cos \omega_c t + n_i(t), i = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

用纽曼-皮尔逊准则设计最佳接收机，在虚警概率是 α 时写出检测概率，画出最佳接收机框图。

五、（20 分）在噪声中估计参数 s 。 s 以相同的概率取 $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ，噪声 n_k 相互独立，以相同的概率取 $\{-1, 0, 1\}$ ， n_k 同分布， $\mathbf{E}\{sn_k\} = 0$ 。

$$x_k = s + n_k, k = 1, 2, \dots$$

使用 x_1, x_2 两个样本，用线性最小均方误差估计求估计量，计算估计的均方误差。

六、（20 分）离散信号 $x(m) = s(m) + n(m)$ ($m \leq k$)， $P_s(z) = \frac{0.98}{(1-0.2z^{-1})(1-0.2z)}$ ， $P_n(z) = 1$ ，设计维纳滤波器：

- (1) 估计 $s(k)$ （时域和频域形式）
- (2) 估计 $s(k+1)$ （时域和频域形式）

一、解 1. 设系统函数是 $H(j\omega)$, 则有:

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

$$S(j\omega) = |H(j\omega)|^2 X(j\omega)$$

2. 窄带信号的正交表示如下:

$$\begin{aligned} n(t) &= \operatorname{Re}\{\tilde{n}(t)\} = \operatorname{Re}\{\tilde{a}(t)e^{j\omega_0 t}\} \\ &= \operatorname{Re}\{[x(t) + jy(t)]e^{j\omega_0 t}\} \\ &= x(t)\cos\omega_0 t - y(t)\sin\omega_0 t \end{aligned}$$

其中 $x(t), y(t)$ 称为 $n(t)$ 的两个正交分量, 上式称为窄带信号 $n(t)$ 的正交表示。有:

$$\begin{aligned} x(t) &= n(t)\cos\omega_0 t + \hat{n}(t)\sin\omega_0 t \\ y(t) &= -n(t)\sin\omega_0 t + \hat{n}(t)\cos\omega_0 t \end{aligned}$$

3. 设系统函数是 $H(j\omega)$, 则有:

$$SNR = \frac{s_o^2(t)}{\mathbf{E}\{n_o^2(t)\}} = \frac{\left|\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} H(j\omega)S(j\omega)e^{j\omega T} d\omega\right|^2}{\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |H(j\omega)|^2 S_n(\omega) d\omega}$$

4.

$$\mathbf{E}\{(\theta - \tilde{\theta})^2\} = -\frac{1}{\mathbf{E}\left\{\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln f(x|\theta)\right\}}$$

二、解 见书本 P71.

三、解 易得:

$$\begin{aligned} f(x|H_0) &= \frac{1}{\pi(1+(x+1)^2)} \\ f(x|H_1) &= \frac{1}{\pi(1+(x-1)^2)} \end{aligned}$$

则有似然比函数:

$$\lambda(x) = \frac{f(x|H_1)}{f(x|H_0)} = \frac{1+(x+1)^2}{1+(x-1)^2} <> \frac{P(H_0)}{P(H_1)} = 1$$

则有判决规则:

$$x <> 0$$

下面计算平均错误概率:

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{1}{2}P(D_1|H_0) + \frac{1}{2}P(D_0|H_1) \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\pi(1+(n+1)^2)} dn \\ &= \frac{1}{\pi} \arctan x \Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

四、解 见书本 P140. 信号的分集接收。

五、解 由于 LMS 的计算公式: $\hat{s}_{LMS} = \mathbf{E}\{s\} + \text{Cov}(s, \mathbf{x})\text{Cov}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x})[\mathbf{x} - \mathbf{E}\{\mathbf{x}\}]$, 其中:

$$\mathbf{E}\{s\} = 0, \mathbf{E}\{n_k\} = 0, \mathbf{E}\{s^2\} = 2, \mathbf{E}\{n_k^2\} = \frac{2}{3}$$

故而:

$$\text{Cov}(s, \mathbf{x}) = \mathbf{E}\left\{\begin{pmatrix} sx_1 & sx_2 \end{pmatrix}\right\} = \mathbf{E}\left\{\begin{pmatrix} s^2 + sn_1 & s^2 + sn_2 \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) &= \mathbf{E}\{(\mathbf{x} - \mathbf{E}\{\mathbf{x}\})(\mathbf{x} - \mathbf{E}\{\mathbf{x}\})^T\} = \mathbf{E}\left\{\begin{pmatrix} x_1x_1 & x_1x_2 \\ x_1x_2 & x_2x_2 \end{pmatrix}\right\} \\ &= \mathbf{E}\left\{\begin{pmatrix} s^2 + n_1^2 & s^2 + n_1n_2 \\ s^2 + n_1n_2 & s^2 + n_2^2 \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & 2 \\ 2 & \frac{8}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

所以:

$$\hat{s}_{LMS} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & 2 \\ 2 & \frac{8}{3} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{3}{7}(x_1 + x_2)$$

估计的均方误差:

$$\mathbf{E}\{(s - \hat{s}_{LMS})^2\} = \frac{2}{7}$$

在考场上可以用正交条件验证 LMS 估计量的正确性:

$$\mathbf{E}\{(s - \hat{s}_{LMS})x_1\} = \mathbf{E}\left\{sx_1 - \frac{3}{7}x_1^2 - \frac{3}{7}x_1x_2\right\} = \mathbf{E}\left\{s^2 - \frac{3}{7}(s^2 + n_1^2) - \frac{3}{7}s^2\right\} = 0$$

同理可得

$$\mathbf{E}\{(s - \hat{s}_{LMS})x_2\} = 0; \text{ 综合两式, 也即: } \mathbf{E}\{(s - \hat{s}_{LMS})\mathbf{x}\} = 0$$

六、解 本题中要求的是物理可实现的维纳滤波器, 因为题中声明了信号只有在 k 时刻之前有值, 而物理不可实现滤波器要求知道信号在所有时刻的值。有物理可实现的维纳滤波器的公式:

$$H(z) = \frac{1}{P_x^+(z)} \left[\frac{P_{gx}(z)}{P_x^-(z)} \right]^+$$

(1) 上式中的:

$$\begin{aligned} P_x(z) &= P_s(z) + P_n(z) = \frac{0.98}{(1 - 0.2z^{-1})(1 - 0.2z)} + 1 \\ &= \frac{2(1 - 0.1z^{-1})(1 - 0.1z)}{(1 - 0.2z^{-1})(1 - 0.2z)} = \frac{2(1 - 0.1z^{-1})}{1 - 0.2z^{-1}} \times \frac{1 - 0.1z}{1 - 0.2z} \\ &= P_x^+(z)P_x^-(z) \end{aligned}$$

又有:

$$\begin{aligned} \frac{P_{gx}(z)}{P_x^-(z)} &= \frac{P_s(z)}{P_x^-(z)} = \frac{0.98}{(1 - 0.2z^{-1})(1 - 0.1z)} = \frac{0.98z^{-1}}{(1 - 0.2z^{-1})(z^{-1} - 0.1)} \\ &= \frac{1}{1 - 0.2z^{-1}} + \frac{0.1}{z^{-1} - 0.1} = \left[\frac{P_{gx}(z)}{P_x^-(z)} \right]^+ + \left[\frac{P_{gx}(z)}{P_x^-(z)} \right]^- \end{aligned}$$

所以：

$$H(z) = \frac{1 - 0.2z^{-1}}{2(1 - 0.1z^{-1})} \frac{1}{1 - 0.2z^{-1}} = \frac{0.5}{1 - 0.1z^{-1}}$$

$$h(n) = 0.5(0.1)^n u(n)$$

(2) 如果取信号 $g(n) = s(n+1)$ 则有：

$$P_{gx}(z) = \text{ZT} [\mathbf{E} \{s(n+1+m)s(n)\}] = \text{ZT} [R_s(m+1)] = zP_s(z)$$

可设：

$$H_1(z) = \frac{P_{gx}(z)}{P_x^-(z)} = \frac{z}{1 - 0.2z^{-1}} + \frac{0.1z}{z^{-1} - 0.1}$$

那么它在时域中的信号和正时间部分是：

$$h_1(n) = (0.2)^{n+1}u(n+1) + (0.1)^{-n-1}u(-n-2)$$

$$h_1^+(n) = (0.2)^{n+1}u(n+1)u(n) + (0.1)^{-n-1}u(-n-2)u(n) = (0.2)^{n+1}u(n)$$

所以：

$$\left[\frac{P_{gx}(z)}{P_x^-(z)} \right]^+ = \frac{0.2}{1 - 0.2z^{-1}}, \quad H(z) = \frac{1 - 0.2z^{-1}}{2(1 - 0.1z^{-1})} \frac{0.2}{1 - 0.2z^{-1}} = \frac{0.1}{1 - 0.1z^{-1}}$$

$$h(n) = (0.1)^{n+1}u(n)$$