中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

第一次习题课

概率论与数理统计

助教：黄晨凌、谢心乔

October 30, 2023

Outline

- 多维分布与边际分布
  - 联合分布
  - 边际分布
- 条件分布与独立性
  - 条件分布
  - 独立性随机变量
- 随机变量函数的分布
  - 卷积公式
  - 密度变换公式
  - 根据分布定义

2 从 $1, 2, 3, 4$ 四个数中任取一个数, 记为 X, 再从 1 到 X 中任取一个数, 记为 Y, 求 $\{Y = 2\}$ 这个事件发生的概率是多少?

proof. $P(Y = 2) = \sum_{i=2}^{4} P(Y = 2 \mid X = i) \cdot P(X = i) = \frac{13}{48}$.

11 设某射手每次射中目标的概率为 $p(0 < p < 1)$, 射击进行到第二次射中目标为止, X 表示第一次射中目标所进行的射击次数, Y 表示第二次射中目标时所进行的射击次数.

(1) 求二维随机变量 (X, Y) 的分布律;

(2) 求 X 和 Y 的边缘分布.

proof (1) $P(X = i, Y = j) = p \cdot (1 - p)^{i-1} \cdot p \cdot (1 - p)^{j-i-1} = p^2 \cdot (1 - p)^{j-2}, j = 2, 3, \cdots; i = 1, \cdots, j - 1$.

(2) $P(X = i) = \sum_{j=i+1}^{+\infty} P(X = i, Y = j) = p \cdot (1 - P)^{i-1}, i = 1, 2, \cdots$

$P(Y = j) = \sum_{i=1}^{j-1} P(X = i, Y = j) = (j - 1)P^2(1 - p)^{j-2}, j = 1, 2, \cdots$

21 设二维随机变量 (X, Y) 的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\cos x\cos y, & 0<x<\pi/2, 0<y<\pi/2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 试求 (X, Y) 的分布函数;
(2) 试求概率 $\mathbb{P}(0<X<\pi/4, \pi/4<Y<\pi/2)$.

proof. (1)

$$F(x,y)=\begin{cases}\sin x\cdot\sin y & 0\leqslant x<\frac{\pi}{2}, 0\leqslant y<\frac{\pi}{2}\\ \sin x & 0\leqslant x<\frac{\pi}{2}, y\geqslant\frac{\pi}{2}\\ \sin y & x\geqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant y<\frac{\pi}{2}\\ 1 & x\geqslant\frac{\pi}{2}, y\geqslant\frac{\pi}{2}\\ 0 & \text{其它}.\end{cases}$$

(2) .

$$\begin{aligned}P\left(0<X<\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}<Y<\frac{\pi}{2}\right)&=\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{4}.\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{aligned}$$

19 设二维随机变量 (X, Y) 的分布函数为

$$F(x,y) = a(b+\arctan x)(c+\arctan y), \quad x,y\in\mathbb{R}.$$

(1) 确定常数 a, b, c;
(2) 求 $\mathbb{P}(X>0, Y>0)$;
(3) 求 X 和 Y 的边缘密度函数.

proof. (1) $\therefore a=\frac{1}{\pi^2}, b=\frac{\pi}{2}, c=\frac{\pi}{2}$.

(2) $F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan y\right)$

$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1}{1+y^2}$.

$P(X>0, Y>0)=\int_0^\infty\int_0^\infty f(x,y)dxdy=\frac{1}{4}$.

(3) $F_X(x)=\lim_{y\to\infty}F(x,y)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x\right)$

$f(x)=\frac{\partial F_X(x)}{\partial x}=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}$

同理, $f(y)=\frac{\partial F_Y(y)}{\partial y}=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+y^2}$

22 (2010 年全国考研试题) 设二维随机变量 (X, Y) 的密度函数为

$$f(x,y) = Ae^{-2x^2+2xy-y^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

求常数 A 及条件密度函数 $f_{Y|X}(y \mid x)$.

proof. $\iint f(x,y)dxdy = 1 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-2x^2+2xy-y^2}dxdy = 1$

$A\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-(x-y)^2}dy\right)dx = A\pi = 1$

$A = \dfrac{1}{\pi}$

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi}e^{-2x^2+2xy-y^2}dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$$

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{1}{\pi}e^{-2x^2+2xy-y^2}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2xy-y^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x-y)^2}$$

27 设二维随机变量 (X, Y) 的密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} c\left(R - \sqrt{x^2+y^2}\right), & x^2+y^2 < R^2, \\ 0, & x^2+y^2 \geq R^2. \end{cases}$$

(1) 求 c 的值; (2) 求 (X, Y) 落在圆 $\left\{(x,y) : x^2+y^2 \leq r^2\right\}$ $(r < R)$ 内的概率.

proof. (1) $\iint f(x,y)dxdy = \iint_{x^2+y^2<R^2} c\left(R - \sqrt{x^2+y^2}\right) dxdy = 1$

$c = \frac{3}{\pi R^3}$

(2)

$$P = \iint_{x^2+y^2<r^2} f(x,y)dxdy = 2\pi \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\pi R^2} r^2 - \frac{1}{\pi R^2} r^3\right)$$

$$= 3\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2\left(\frac{r}{R}\right)^3$$

51 设 (X, Y) 的联合密度函数为:

$$f(x,y)=\begin{cases}0.25(1+xy), & |x|<1,|y|<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 求给定 $X=1/2$ 时 Y 的条件密度函数;
(2) 证明 X^2 和 Y^2 相互独立.

proof. (1) $f_X(x)=\int_{-1}^{1} f(x,y)dy=\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}(1+xy)dy=\frac{1}{2}\cdot\mathbb{1}_{\{|x|<1\}}$

$f_{Y|X=\frac{1}{2}}(y\mid x=\frac{1}{2})=\frac{f(\frac{1}{2},y)}{f_X(\frac{1}{2})}=\frac{2+y}{4}\cdot\mathbb{1}_{\{|y|<1\}}.$

(2) $f_X(x)=\frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{|x|<1\}}, f_Y(y)=\frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{|y|<1\}}$

$P\left(X^2<x, Y^2<y\right)=P(-\sqrt{x}<x<\sqrt{x},-\sqrt{y}<Y<\sqrt{y})=$

$\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x_1,y_1)\,dy_1\,dx_1=\sqrt{x}\sqrt{y}$

$P\left(x^2<x\right)=P(-\sqrt{x}<x<\sqrt{x})=\sqrt{x}.P\left(Y^2<y\right)=\sqrt{y}$

$P\left(X^2<x, Y^2<y\right)=P\left(x^2<x\right)\cdot P\left(Y^2<y\right)$ 故X^2, Y^2 独立。

58 设随机向量 (X, Y) 的密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1+xy}{4}, & |x| < 1, |y| < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

证明 X, Y 不独立但是 X^2, Y^2 是相互独立的.

proof. 下证 X, Y 不独立。

$$f_X(x) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{|x|<1\}}, f_Y(y) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{|y|<1\}}..$$

$$f(x,y) = \frac{1}{4}(1+xy)$$

$f_X(x) \cdot f_Y(y) \neq f(x,y)$ 故$X_1 Y$不独立.

67 设随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 为严格单调函数, 证明: 随机变量 $Y=F(X)$ 服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布.

proof.

(1) $Y:=F(X)\in[0,1]$

(2) $P(Y\leq y)=P(F(X)\leqslant y)=P\left(X\leqslant F^{-1}(y)\right)=F\left(F^{-1}(y)\right)=y.$

70 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布, 以 $Y=\lfloor X\rfloor$ 表示它的整数部分, 即不超过 X 的最大整数, 而以 Z 表示它的小数部分, 即 $Z=X-\lfloor X\rfloor$. 试求随机变量 Y 和 Z 各自的分布, 且它们是否相互独立?

proof $P(Y=n)=P(n\leqslant X<n+1)=e^{-\lambda n}-e^{-\lambda(n+1)} \quad n=0,1,2,\cdots$

对 $z\in[0,1)$.

$$P(Z\leq z)=P(X-\lfloor X\rfloor\leq z)=\sum_{k=0}^{\infty}P(k\leq X\leq k+z)$$

$$=\frac{1-e^{-\lambda z}}{1-e^{-\lambda}}$$

$$P(Z\leq z\mid Y=n)=\frac{P(Z\leq z,Y=n)}{P(Y=n)}=\frac{1-e^{-\lambda z}}{1-e^{-\lambda}}$$

$\therefore P(Z\leq z,Y=n)=P(Y=n)P(Z\leq Z)$. 独立.

71 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布, 且随机变量 Y 定义为

$$Y = \begin{cases} X, & 若 X \geq 1, \\ -X^2, & 若 X < 1. \end{cases}$$

试求 Y 的密度函数 $p(y)$.

proof 法一: 求解分布函数再求密度

$G(y) =$

$$\begin{cases} 0 & y \leqslant -1 \\ e^{-\lambda\sqrt{-y}} - e^{-\lambda} & -1 < y < 0 \\ 1 - e^{-\lambda} & 0 \leqslant y < 1 \\ 1 - e^{-\lambda y} & y \geq 1 \end{cases} \quad g(y) = \begin{cases} 0 & y \leqslant -1 \\ \frac{\lambda}{2}(-y)^{-\frac{1}{2}} e^{-\lambda\sqrt{-y}} & -1 < y < 0 \\ 0 & 0 \leq y < 1 \\ \lambda e^{-\lambda y} & y \geqslant 1 \end{cases}$$

法二: 密度函数变换法

72 设随机变量 X 服从标准正态分布，试求下列随机变量的密度函数.

(1) $Y_1 = e^X$;

(2) $Y_2 = |X|$;

(3) $Y_3 = 2X^2 + 1$.

proof $X \sim N(0,1)$. $p(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in \mathbb{R}$

(1) $Y_1 = e^X$ $\quad f_{Y_1}(y) = p(\ln y) \cdot \left|\frac{\partial x}{\partial y}\right| = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}} \cdot \frac{1}{y}, y > 0. \\ 0, \text{其他}. \end{cases}$

$$P(Y_2 \le y) = P(|X| \le y) = P(-y \le X \le y) = 2P(X \le y) - 1.$$

(2)

$$F_2(y) = 2F_X(y) - 1. \quad f_2(y) = 2p(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, y > 0.$$

$$P(Y_3 \leqslant y) = P\left(2X^2 \leqslant y - 1\right) = 2P\left(X \leqslant \sqrt{\frac{y-1}{2}}\right) - 1$$

(3).

$$F_{Y_3}(y) = 2F_X\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right) - 1$$

$$f_{Y_3}(y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}} e^{-\frac{y-1}{4}}, y > 1$$

30 设随机变量 X 的密度函数为 $f_X(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$，而随机变量 Y 服从 $(0, X)$ 上的均匀分布，求

(1) (X, Y) 的联合分布;

(2) 随机变量 Y 的分布.

proof (1) $f_X(x) = xe^{-x}\mathbb{1}_{\{x>0\}}, f_{Y|X=x}(y) = \frac{1}{x}\mathbb{1}_{\{0<y<x\}}$.

$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_{Y|X=x}(y) = e^{-x} \cdot \mathbb{1}_{\{0<y<x\}}$.

(2) $f_Y(y) = \int_y^\infty f_{X,Y}(x, y)dx = e^{-y} \cdot \mathbb{1}_{\{y>0\}}$

$F_Y(y) = \int_0^y f_Y(t)dt = 1 - e^{-y}$.

56 设 X, Y 是两个相互独立的随机变量，X 在 $(0, 1)$ 上服从均匀分布，Y 的密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-y/2}, & y > 0, \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$$

(1) 求 (X, Y) 的联合密度函数;

(2) 求二次方程 $a^2 + 2Xa + Y = 0$ 有实根的概率.

proof (1) 由 X, Y 独立，$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{1}{2}e^{-y/2} \cdot \mathbb{1}_{\{0<x<1,y>0\}}$

(2) 有实根 $\Leftrightarrow 4x^2 - 4Y \geqslant 0 \Leftrightarrow X^2 \geqslant Y$.

$P\left(Y \le X^2\right) = \int_0^1 \int_0^{x^2} f_{X,Y}(x, y)dydx = 1 - \sqrt{2\pi}(\Phi(1) - \Phi(0)) = 0.1446.$

- 数学期望
  - 离散型随机变量
  - 连续型随机变量
- 数学期望的性质

7 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x) = c\mathrm{e}^{-x^2+x}, \quad -\infty < x < \infty.$$

试求常数 c, 及 $\mathbb{E}X$ 和 $\mathrm{Var}(X)$.

proof $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1,\ c = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{4}}$

$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2+x} dx = \frac{1}{2}$

8 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x) = \frac{x^n\mathrm{e}^{-x}}{n!}, \quad x > 0.$$

试求 $\mathbb{E}X$ 和 $\mathrm{Var}(X)$.

proof $EX = \int_0^{\infty} x \cdot \frac{x^n e^{-x}}{n!} = n+1.$

9 设 X 为一个连续型随机变量, 试对下列各种情形, 分别求 $\mathbb{E}X$ 和 $\mathrm{Var}(X)$.

(1) 若 X 的密度函数为

$$f(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad x > 0,$$

其中 $\sigma > 0$ 为常数, 则称 X 服从瑞利 (Rayleigh) 分布.

proof $EX = \int_0^\infty x \cdot \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\sigma.$

(3) 若 X 的密度函数为

$$f(x) = \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right\}, \quad x > 0,$$

其中 $k, \lambda > 0$ 为常数, 则称 X 服从威布尔 (Weibull) 分布.

proof $EX = \int_0^\infty x \cdot \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k} dx = \lambda\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right).$

26 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=2(x-1), 1<x<2$, 试求随机变量 $Y=\mathrm{e}^X$ 和 $Z=\frac{1}{X}$ 的数学期望.

proof $EY=E\left[e^X\right]=\int_1^2 e^x\cdot 2(x-1)dx=2e.$

$EZ=E\left[\frac{1}{X}\right]=\int_1^2 \frac{1}{x}\cdot 2(x-1)dx=2-2\ln 2.$

29 某鲜花店为了迎接情人节的销售高峰期, 决定购进一批玫瑰花. 已知在情人节期间, 每出售一束玫瑰花会获利 a 元, 若未售出, 最终则会亏损 b 元, 该店预测玫瑰花情人节期间的销售量 (单位: 束) 会服从 $[m,n]$ 上的均匀分布. 试问为了平均获利最大, 该店应购进多少束玫瑰花?

proof 设应购 t 束。$t\in[m,n]$ 。销售量为 S 束. $S\sim U(m,n)$. 获利为 X 元

$$X=\begin{cases} at & S\geqslant t \\ aS-b(t-S) & S<t. \end{cases}$$

$$EX=E\left[at\cdot \mathbb{1}_{\{S\geqslant t)}+[aS-b(t-S)]\cdot \mathbb{1}_{\{S<t\}}\right]=$$

$$\frac{1}{n-m}\left[-\frac{(a+b)}{2}t^2+(an+bm)t-\frac{(a+b)m^2}{2}\right]$$

为关于 t 的二次函数，开口向下。

当 $t=\frac{an+bm}{a+b}$ 时获利最大。

31 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}, \quad -\infty < x < \infty.$$

试求 $\mathbb{E}[\min\{|X|, 1\}]$.

proof $E[\min\{|x|, 1\}] = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\ln 2.$

32 (2014 年全国考研试题) 设随机变量 X 的分布为 $\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(X=2) = \frac{1}{2}$, 在给定 $X = i$ 的条件下, 随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0, i)(i = 1, 2)$.

(1) 求 Y 的分布函数;

(2) 求期望 $\mathbb{E}Y$.

proof (1) $$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & x < 0. \\ \frac{3}{4}x & 0 \leq x < 1 \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{2} & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2. \end{cases}$$

$$p_Y(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{3}{4} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{4} & 1 \leq x < 2 \\ 0 & x \geqslant 2. \end{cases}$$

(2)

$$E[Y] = \int_0^2 x \cdot p_Y(x)dx = \frac{3}{4}.$$

1 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=0.5\Phi(x)+0.5\Phi\left(\frac{x-4}{2}\right)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则 X 的数学期望 $\mathrm{E}X=?$

思考 1 若假设 X_1 与 X_2 的分布函数分别为 $\Phi(x)$ 与 $\Phi\left(\frac{x-4}{2}\right)$, 思考 $Y=0.5X_1+0.5X_2$ 与 X 同分布吗?

2 比较 EX 与 EY, $VarX$ 与 $VarY$.

2 设随机变量 X, Y 和 Z 相互独立, 且均服从参数为 1 的指数分布. 记

$$U=\frac{X}{X+Y}, \quad V=\frac{X+Y}{X+Y+Z}, \quad W=X+Y+Z.$$

(1) 计算随机向量 (U, V, W) 的联合密度函数. (2) 随机变量 U, V 和 W 是否相互独立? 请证明你的结论.

提示 1 利用多维随机变量密度变换公式求出联合密度以及边际密度

3 将区间 $(0,2)$ 随机截成两段, 记较短一段的长度为 X, 较长一段的长度为 Y.

(1) 求 X 和 Y 的相关系数 $\mathrm{Corr}(X,Y)$;

(2) 求 X 的概率密度函数 $f(x)$;

(3) 求 $Z=\frac{Y}{X}$ 的概率密度函数 $g(z)$;

(4) 设随机变量 X^* 与 X 独立同分布, 试求 $V=2\,|X-X^*|$ 的概率密度函数 $h(v)$.

提示 1 根据 $P(X+Y=2)=1$

2 密度变换公式，注意表达式变量范围。

4 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为一列独立的随机变量, 且均服从 $U(0,1)$ 分布. 记

$$Y = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}, \quad Z = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}.$$

(1) 试证明: 对任意常数 $0 < y, z < 1$, 有

$$\mathrm{P}(Y \le y, Z \le z) = \begin{cases} z^n - (z-y)^n, & y < z; \\ z^n, & y \ge z. \end{cases}$$

(2) 利用上述结果, 试求随机变量 Y 和 Z 的联合密度函数 $f(y,z)$.

(3) 在 $Y = y$ 条件下 $(0 < y < 1)$, 试求 Z 的条件密度函数 $f_{Z|Y}(z \mid y)$.

(4) 若 $n = 2$, 试求 Y 和 Z 的协方差 $\mathrm{Cov}(Y, Z)$.

提示 1 利用 min 与 max 的定义

5 一只蚂蚁从等边三角形 $\triangle ABC$ 的顶点 A 出发开始沿着边爬行, 设它每次爬行到一个顶点后, 会休留片刻再随机选择一条边继续爬行, 则第 n 次爬行是往 A 爬的概率为

5 一只蚂蚁从等边三角形 $\triangle ABC$ 的顶点 A 出发开始沿着边爬行, 设它每次爬行到一个顶点后, 会休留片刻再随机选择一条边继续爬行, 则第 n 次爬行是往 A 爬的概率为

提示 1 全概率公式。