

2022 春信息论 B 往年考试题精选

考察范围：第二章 ~ 第五章 课程助教：高源

1. 选择题 (多选题)。以下编码不可能是二元哈夫曼编码的是 ()

(A) {0, 10, 11}

(B) {00, 01, 10, 110}

(C) {01, 10}

(D) {1, 01, 10}

2. 有三个二元离散随机变量 X, Y, Z , 若要使得 $I(X; Y) = 0$ 比特, $I(X; Y | Z) = 1$ 比特, 则 X, Y, Z 的联合概率分布为_____。(给出一个满足条件的例子即可)

3. 给定一个概率分布 (p_1, p_2, \dots, p_n) 和一个整数 $m (0 \leq m \leq n)$. 定义 $q_m = 1 - \sum_{i=1}^m p_i$, 证明:

$$H(p_1, p_2, \dots, p_n) \leq H(p_1, p_2, \dots, p_m, q_m) + q_m \log(n - m)$$

并说明何时等式成立.

4. 随机变量 X_1, X_2, X_3, X_4 构成了马尔科夫链 $X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow X_4$. 证明:

$$I(X_1; X_3) + I(X_2; X_4) \leq I(X_1; X_4) + I(X_2; X_3)$$

5. 设 $\{X_i, i = 1, 2, \dots\}$ 为时间不变的马尔可夫链, 初始状态的概率分布为 $P(X_1 = 1) = 0.5, P(X_1 = 2) = 0.25, P(X_1 = 3) = 0.25$. 转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

请计算:

(a) 联合熵 $H(X_1, X_2, X_3)$ 。

(b) 马尔可夫链的熵率。