中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

电　磁　学
(Electromagnetism)

第四章 真空中的静磁场3

§ 4.5 磁场中带电粒子的运动

一、带电粒子受力

- 运动电荷q所受的电场力为： $\vec{F}_e = q\vec{E}$
- 所受的磁力 (洛仑兹力)为： $\vec{F}_m = q\vec{v}\times\vec{B}$
- 带电粒子所受的总作用力：

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{V}\times\vec{B}}$$

二、洛仑兹力不作功

带电粒子在磁场中运动，将受到洛仑兹力，洛仑兹力的功率应为:

$$\vec{F}\cdot\vec{V}=(q\vec{V}\times\vec{B})\cdot\vec{V}=0$$

洛仑兹力不作功，在洛仑兹力作用下，带电粒子动能守恒，粒子速率V不会改变，变化的只是粒子的速度方向。

三、均匀磁场

●粒子的运动方程为：
$$m\frac{d\vec{V}}{dt}=q\vec{V}\times\vec{B}$$

●假定B沿z的方向，即$B=B_z$，$B_x=B_y=0$，写成分量式：

$$\begin{cases} ma_x = qBv_y \\ ma_y = -qBv_x \\ a_z = 0 \end{cases}$$

●定义$\omega_L=qB/m$，则上述方程可化为：

$$\begin{cases} \dot{a}_x + \omega_L^2 v_x = 0 \\ \dot{a}_y + \omega_L^2 v_y = 0 \\ a_z = 0 \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} v_x = v_\perp \cos(\omega_L t + \varphi_0) \\ v_y = -v_\perp \sin(\omega_L t + \varphi_0) \\ v_z = v_{//} = \text{const} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{v_\perp}{\omega_L}\sin(\omega_L t + \varphi_0) + x_0 \\ y = \dfrac{v_\perp}{\omega_L}\cos(\omega_L t + \varphi_0) + y_0 \\ z = v_{//} t + z_0 \end{cases}$$

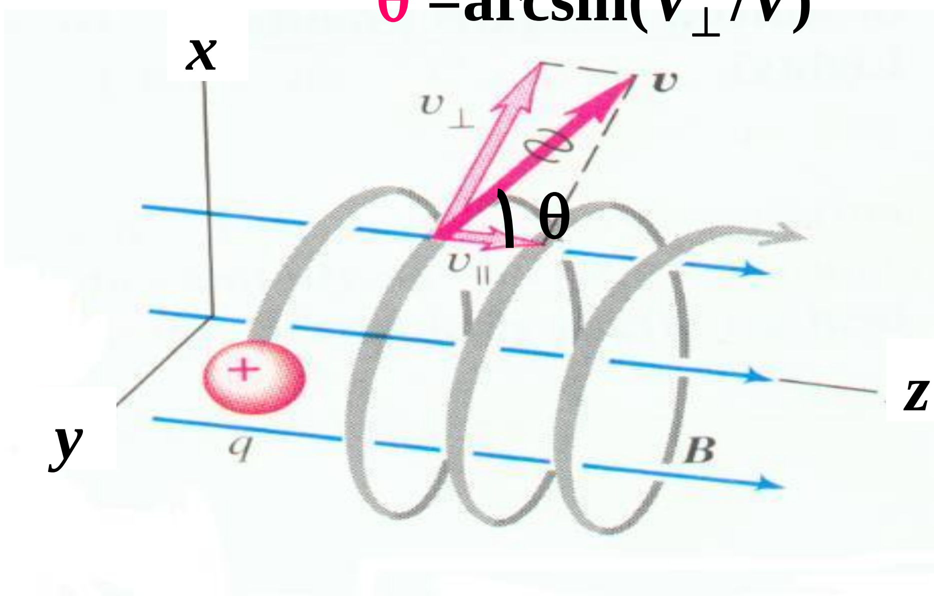
■其中$v_\perp$，$v_\parallel$，φ_0，x_0，y_0，z_0为积分常数，由初始条件定。

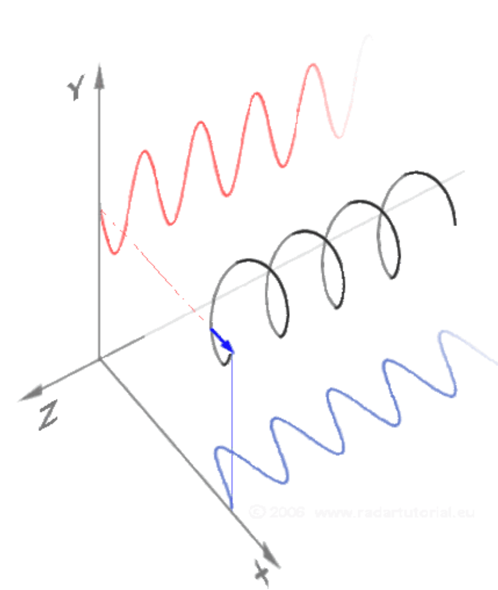
$v_\perp$和$v_\parallel$分别为垂直及平行于磁场的速度分量。

■因为V=const, $V_{//}$ =const, 所以$V_\perp$=const, 故粒子速度与磁场的夹角（投射角）$\theta = \arcsin(V_\perp / V) = \text{const}$， 在粒子运动过程中为常量，也由初始条件定。

• 带电粒子在磁场中作平行于磁场的螺旋线运动。

$\theta = \arcsin(V_\perp / V)$





螺距： $h = v_{//} T$， T：回旋周期。

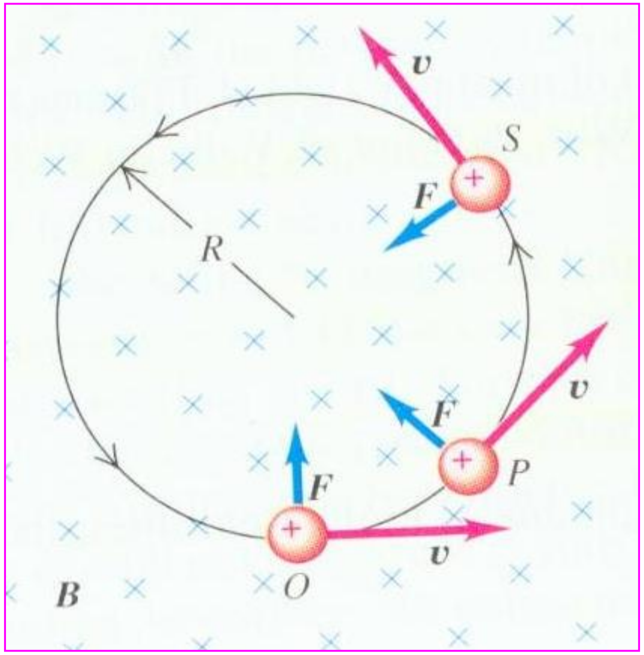
轨道在*x-y*平面上投影是圆：

回旋半径 $R = \dfrac{v_\perp}{\omega_L} = \dfrac{mv_\perp}{qB}$

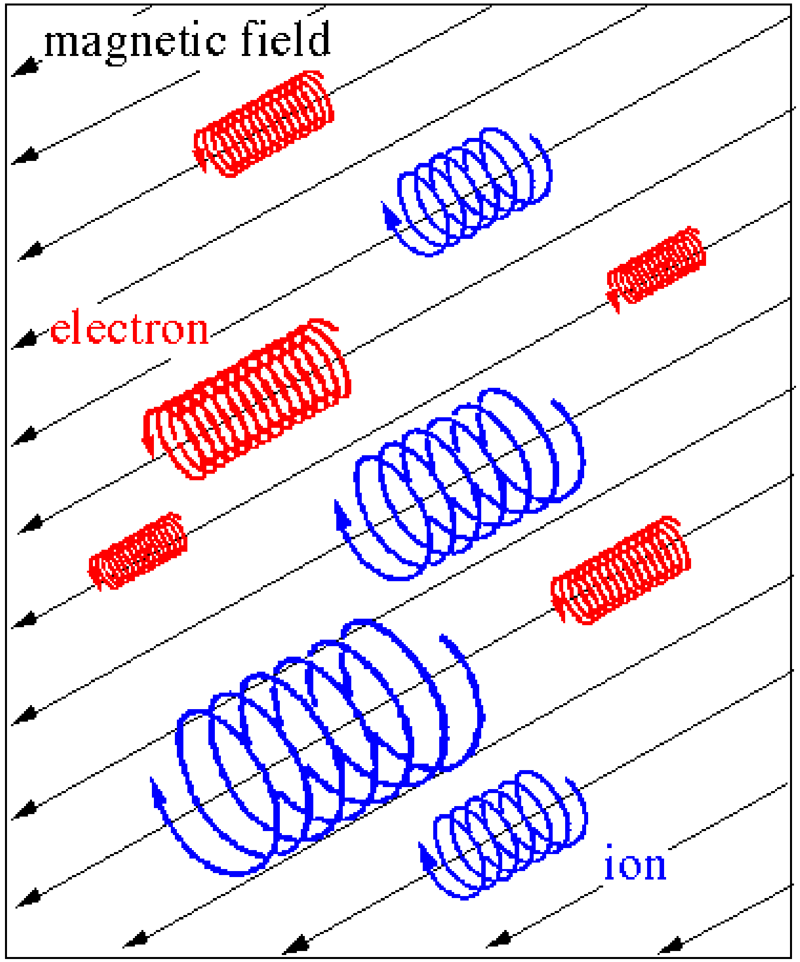
回旋角频率 $\omega_L = qB/m$

回旋频率 $f = qB/(2\pi m)$

回旋周期 $T = 2\pi m/(qB)$



ω、f、T只决定于磁场和粒子的荷质比，与粒子的回旋速率、回旋半径无关！



回旋方向是逆磁方向

四、“电场+磁场”

粒子的运动方程为： $$m\frac{d\vec{V}}{dt}=q\vec{V}\times\vec{B}+q\vec{E}$$

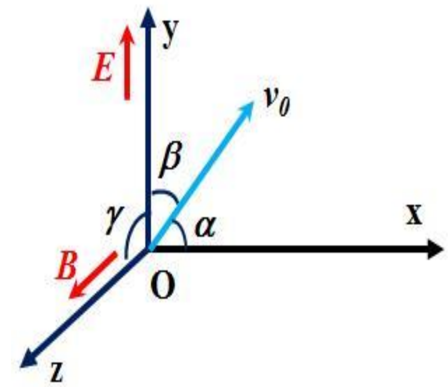
1）电场和磁场平行

假定B沿z的方向, 由运动方程：

$$\begin{cases} ma_x = qBv_y \\ ma_y = -qBv_x \\ ma_z = qE \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = v_\perp \cos(\omega_L t+\varphi_0) \\ v_y = -v_\perp \sin(\omega_L t+\varphi_0) \\ v_z = v_{//} + \frac{q}{m}E_{//}t \end{cases}$$

2）电场和磁场垂直

假定B沿z的方向，E沿y方向

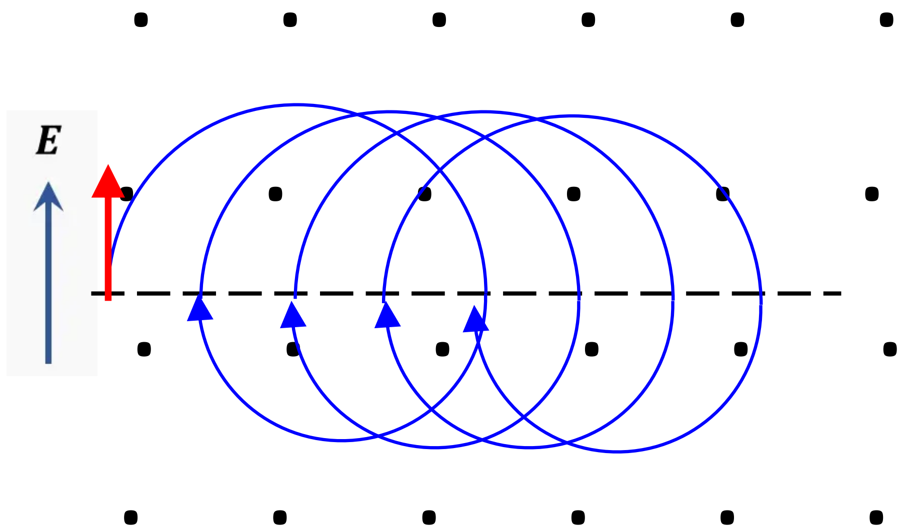


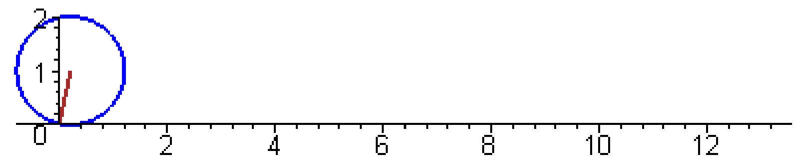
$$\boxed{m\frac{d\vec{V}}{dt}=q\vec{V}\times\vec{B}+q\vec{E}}$$

$$\boxed{\vec{v}_0=v_0\cos\alpha\vec{e}_x+v_0\cos\beta\vec{e}_y+v_0\cos\gamma\vec{e}_z}$$

$$\begin{cases} ma_x=qBv_y \\ ma_y=-qBv_x+qE \\ ma_z=qE \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x=\dfrac{E}{B}+v_\perp\cos(\omega t+\varphi_0) \\ v_y=v_\perp\sin(\omega t+\varphi_0) \\ v_z=v_0\cos\gamma \end{cases}$$

在x方向以 E/B 运动的动坐标系中，粒子作回旋运动，运动参考系中好像“垂直电场消失”

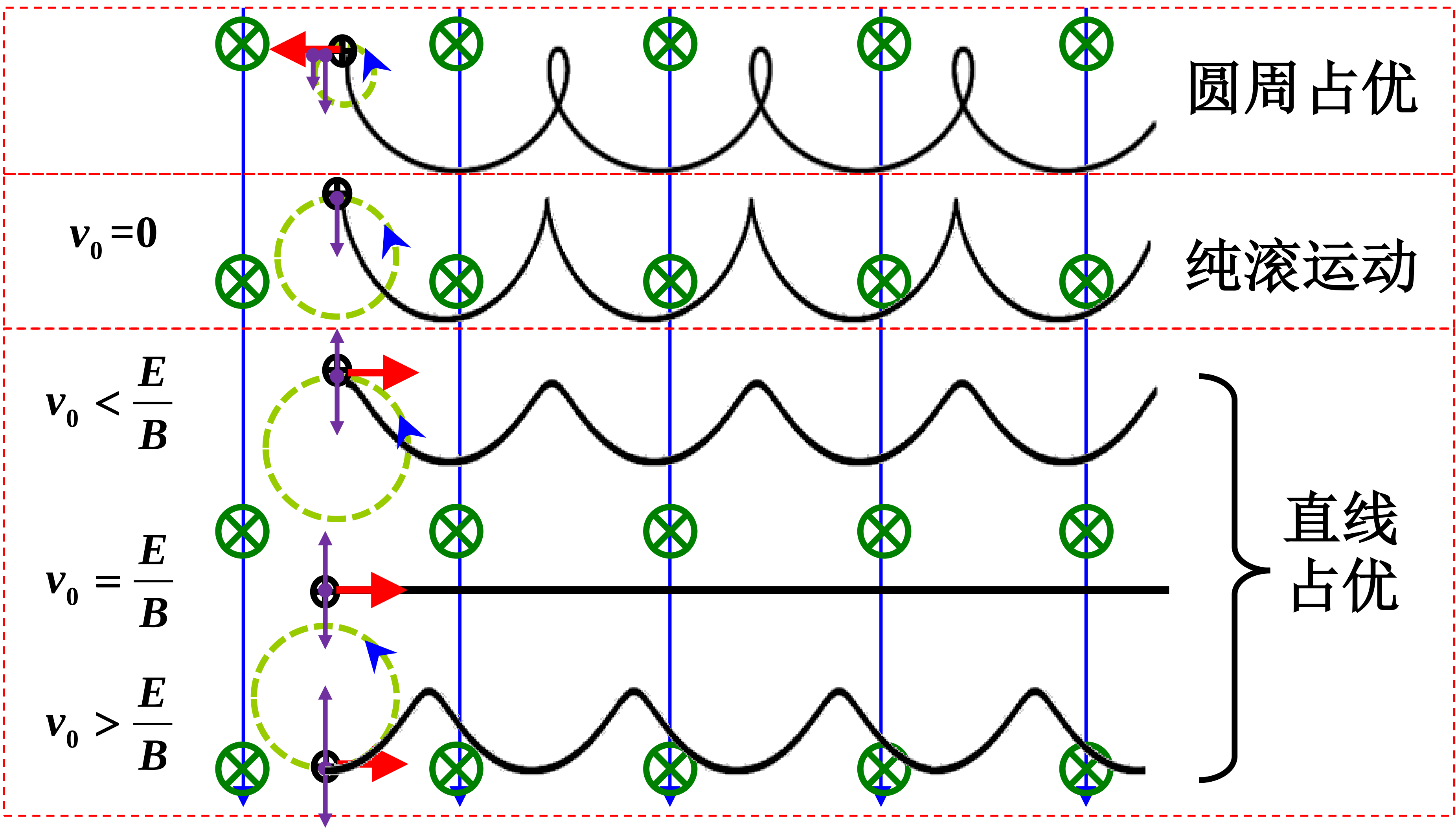




同时存在电场磁场时，带电粒子做圆心漂移的螺线运动，对着磁力线看是一滚轮线运动，可以看成是圆心不断漂移的圆周运动。

圆心漂移速度：$\vec{v}_f = \dfrac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}$

正交电场磁场中离子运动轨迹
（初始速度与磁场垂直）



五、磁场对电流的作用

外磁场*B*对线电流、面电流和体电流系统的作用：

$$\vec{\mathbf{F}} = \oint_L I d\vec{l} \times \vec{\mathbf{B}} \qquad \vec{\mathbf{L}} = \oint_L \vec{\mathbf{r}} \times (I d\vec{l} \times \vec{\mathbf{B}})$$

$$\vec{F} = \iint_S \vec{i} \times \vec{B} dS \qquad \vec{\mathbf{L}} = \iint_S \vec{\mathbf{r}} \times (\vec{\mathbf{i}} \times \vec{\mathbf{B}}) dS$$

$$\vec{F} = \iiint_V \vec{j} \times \vec{B} dV \qquad \vec{\mathbf{L}} = \iiint_V \vec{\mathbf{r}} \times (\vec{\mathbf{j}} \times \vec{\mathbf{B}}) dV$$

应用上述公式，应先求出外磁场*B*。

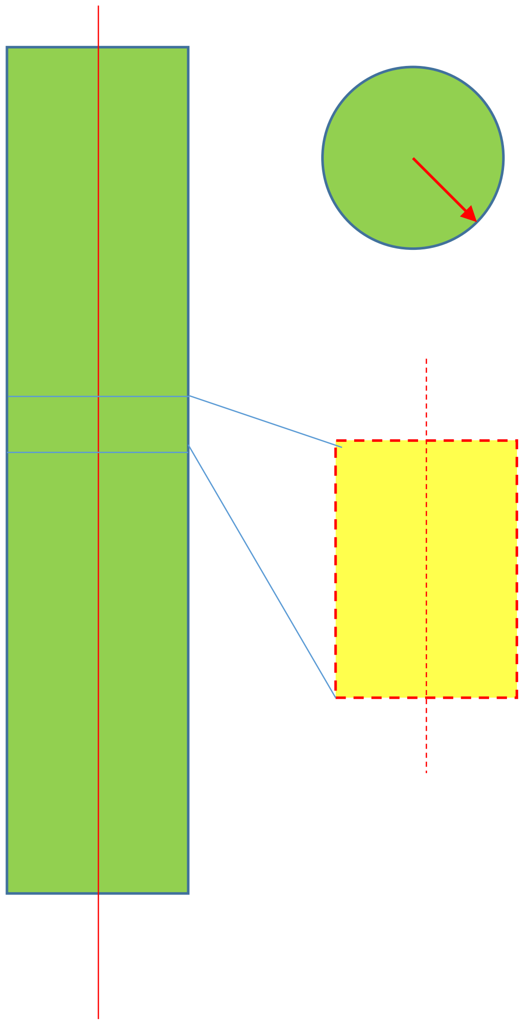
- 有时候，由外磁场和受作用电流的磁场合成的总磁场 B_t 容易计算。在这种情况下，应从B_t中减去受作用电流的贡献B_1才得到外磁场B，即

$$\vec{B} = \vec{B}_t - \vec{B}_1$$

- 与静电场问题类似处理，可以用电流元自身产生的磁感应强度代替B_1。

因为同一载流回路上的电流元相互作用之和可以理解为回路对其自身作用，满足牛顿第三定律。

（1）体电流元在其附近产生的磁感应强度为零。



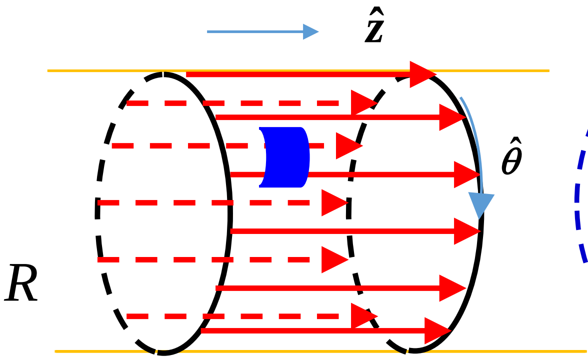
无限长实心电流柱，半径a，电流密度j，柱内磁场为

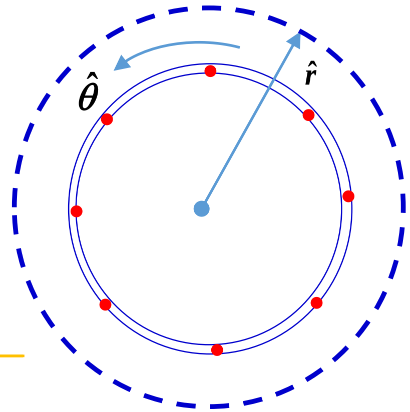
$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I \rightarrow B = \frac{1}{2}\mu_0 jr$$

在$r = a$处，B最大，长电流柱的磁场是电流元磁场叠加，所以电流元磁场B_1小于该值。

$a\rightarrow 0$，$B\rightarrow 0$，$B_1\rightarrow 0$

（2）面电流元：取两侧平均





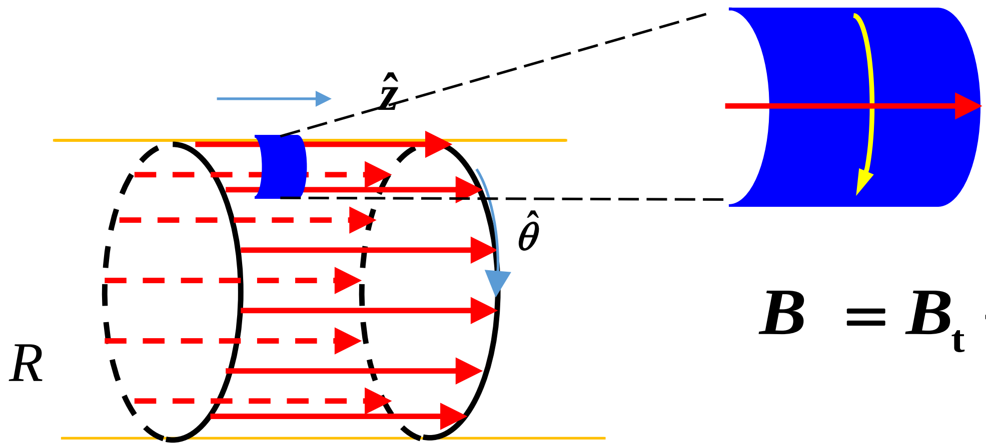
$$B_t = \begin{cases} \mu_0 i, & (r > a) \\ 0 & (r < a) \end{cases}$$

面元在其附近产生的磁场：

$$dB = \begin{cases} \frac{1}{2}\mu_0 i, & (r > a) \\ -\frac{1}{2}\mu_0 i & (r < a) \end{cases}$$

$$B = B_t - dB = \begin{cases} \frac{1}{2}\mu_0 i, & (r > a) \\ \frac{1}{2}\mu_0 i & (r < a) \end{cases}$$

- 其余电流在面元处产生磁场连续，面元处“外”磁场为$\mu_0 i/2$
- 通常外场直接取两侧总磁场的平均值



$$B = B_t - dB = \begin{cases} \frac{1}{2}\mu_0 i, & (r > a) \\ \frac{1}{2}\mu_0 i & (r < a) \end{cases}$$

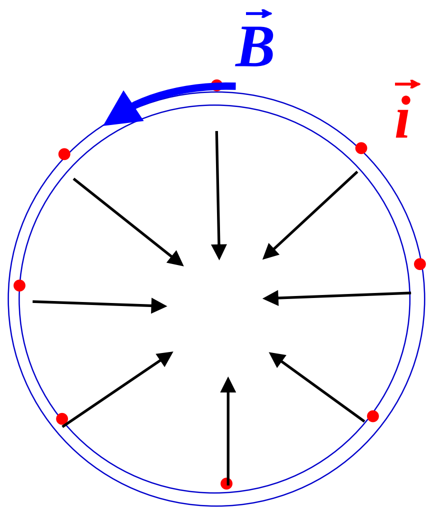
面元受到的磁场力：$d\vec{F} = id\vec{S} \times \vec{B}$

$$dF = \frac{1}{2}\mu_0 i^2 dS$$

单位面积受力，即磁压力：

$$p_m = \frac{1}{2}\mu_0 i^2$$

方向指向轴心



(3) 线电流元

- 可证一个闭合线电流中的任一小段线电流所受的内力趋于无穷大
- 在需要分析这种内力时，**必须放弃线电流近似**，计入通电导线有限截面尺寸的效应

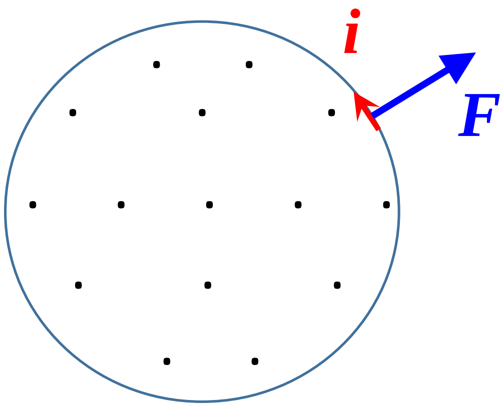
例　求电流强度为I、单位长度匝数为n的无穷长螺线管单位表面受力。

$i = nI$为面电流密度

[解] 无穷长螺线管在管内外沿轴向的 B_t 分别为 $\mu_0 i$ 和0。

面元 ΔS 对内、外侧磁场的贡献为 $\pm\mu_0 i/2$

面元 ΔS 的外磁场为 $\mu_0 i/2$



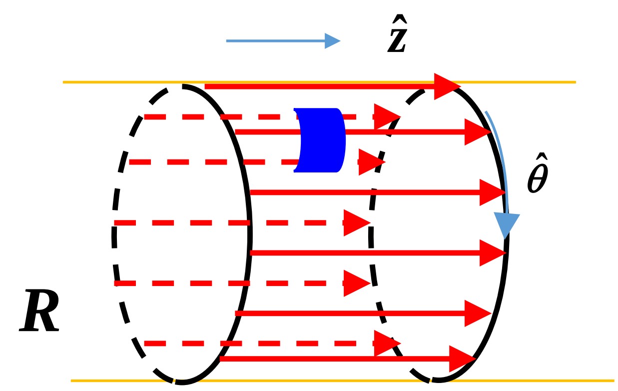
单位面积面元受力:

$$\frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{i\Delta S}{2\Delta S}\mu_0 i = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2.$$

该力的方向垂直于面元并指向螺线管外侧。

- 螺线管存在**一等效的轴向电流*I***，该电流的面密度为：

$$i_{//} = I/(2\pi R)$$



- 管面上的外磁场为

$$B_\theta = \mu_0 I/(4\pi R)$$

它与管面相切并与管轴垂直。

- 单位面积面元受一指向管轴的力，大小为：

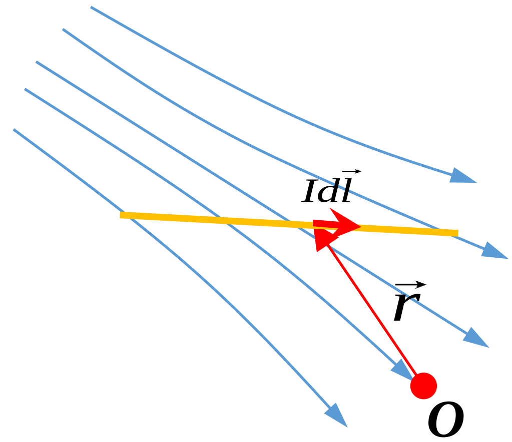
$$\boldsymbol{i_{//} B_\theta = \mu_0 I^2 / \left(8\pi^2 R^2\right)}$$

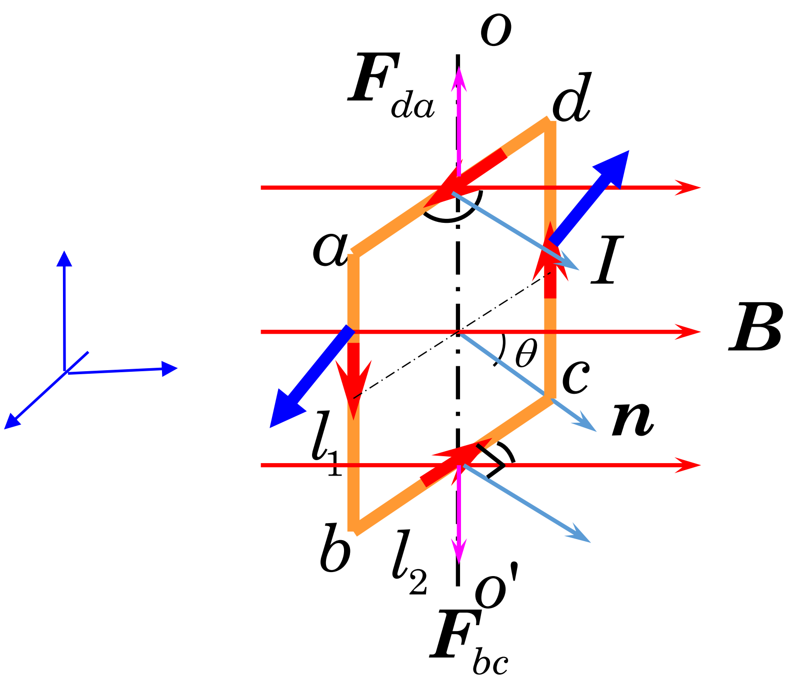
一般情况下，这力比上面指向螺线管外侧的力小得多，可忽略不计

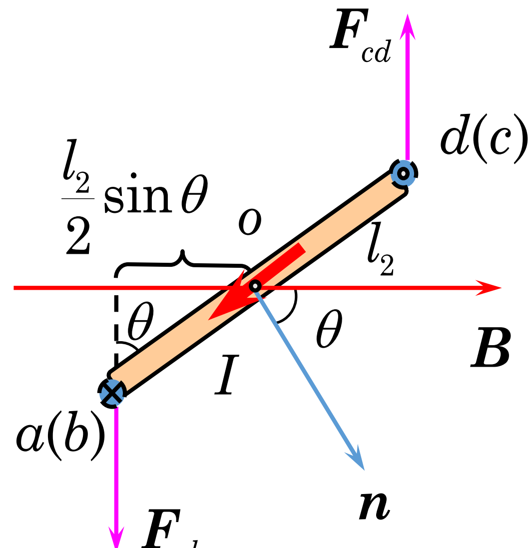
六、磁场中的载流线圈

$$\vec{F} = \int_L I d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$\vec{M} = \int_L \vec{r} \times (I d\vec{l} \times \vec{B})$$

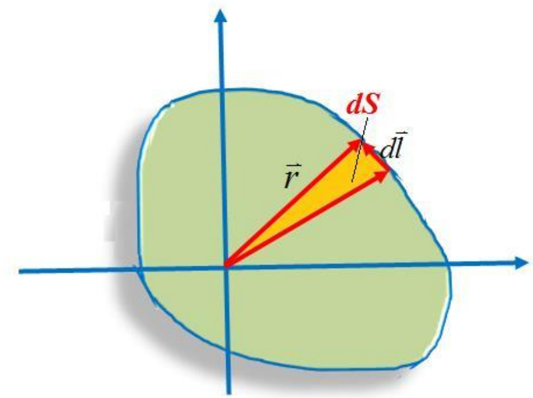






闭合线圈在均匀外磁场中受力：

$$\vec{F} = \oint (I d\vec{l} \times \vec{B}) = \left(\oint I d\vec{l}\right) \times \vec{B} = 0$$



闭合线圈在均匀外磁场中受到的力矩：

$$\vec{M} = I\vec{S} \times \vec{B} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\oint (\vec{r} \times d\vec{r})$$

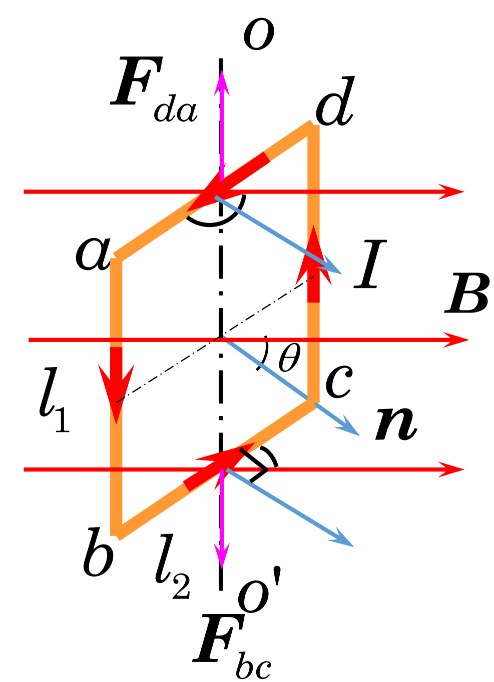
【讨论】：

1）均匀磁场中，$\sum \vec{F} = 0$，只有转动；

2）θ= 0，$\vec{M} = 0$，稳定平衡；

3）θ =π，$\vec{M} = 0$，不稳定平衡；

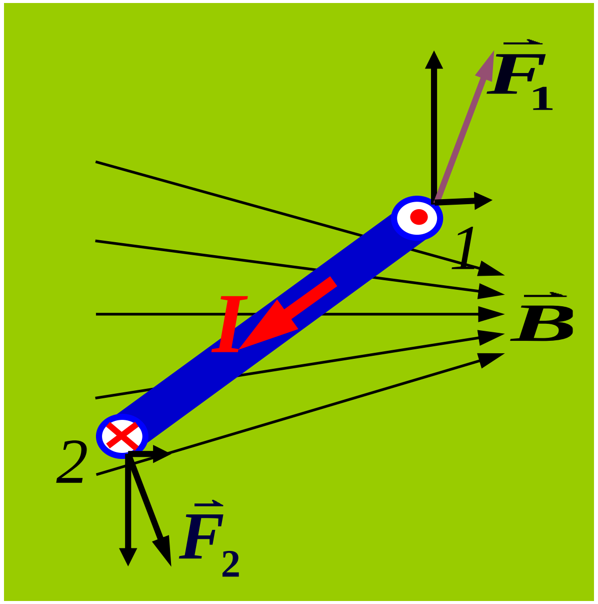
4）θ = ± π/2，$M_{max} = \mu B$。



不均匀磁场中的载流线圈

$$\vec{F} = \oint I d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$\vec{M} = \oint \vec{r} \times (I d\vec{l} \times \vec{B})$$



如图 $B_1 > B_2$，有 $F_1 > F_2$，

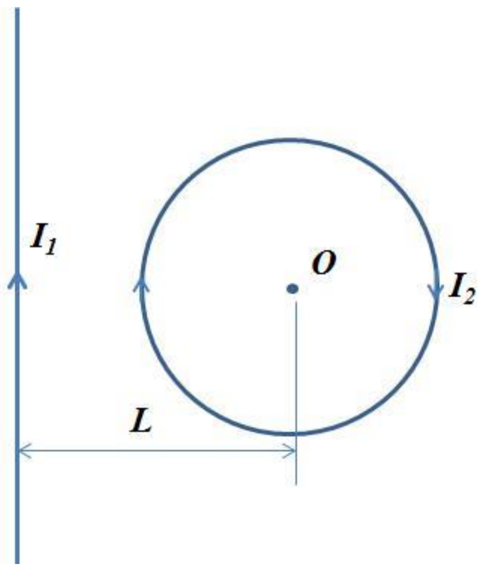
线圈除转动外，还有净力作用。

当线圈比较小时，有

$$\vec{F}_{梯} = (\vec{\mu} \cdot \nabla)\ \vec{B}$$

$$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B} + \vec{r} \times \vec{F}_{梯}$$

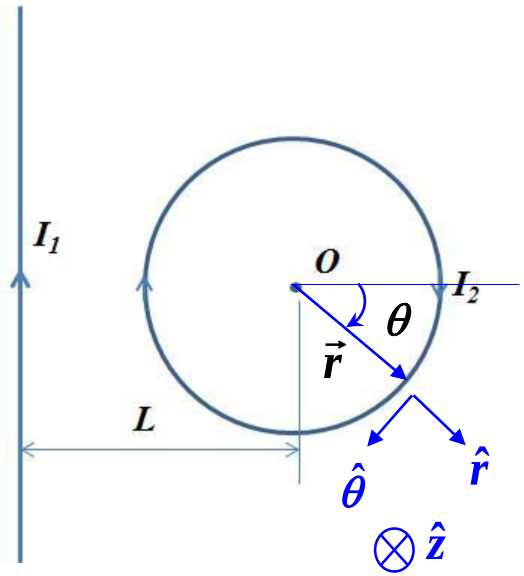
无限长载流直导线通电流I_1，在其旁边有与其共面的半径为R的圆线圈通电流I_2，圆心到直导线距离为L，求（1）圆电流对无限长直导线的磁力；（2）圆线圈所受的力矩。



圆电流对直电流的作用力等于直电流对圆电流的作用力 （？）

直电流在（R,θ）处的磁场：

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(R\cos\theta + L)}\hat{z}$$



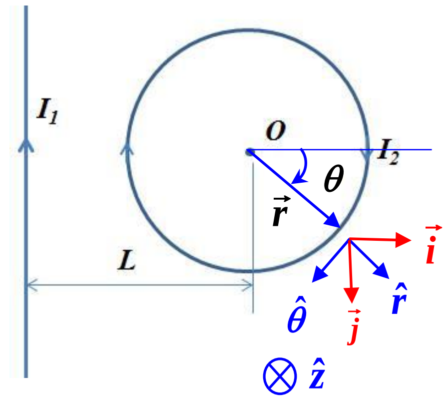
（r,θ）处的电流元受力：

$$d\vec{F} = I_2 R d\theta\hat{\theta}\times\vec{B} = I_2 R d\theta\hat{\theta}\times\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(R\cos\theta + L)}\hat{z}$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2 R}{2\pi(R\cos\theta + L)} d\theta\hat{\theta}\times\hat{z} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 R}{2\pi(R\cos\theta + L)} d\theta\hat{r}$$

圆电流的受力

$$\hat{r}=\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j}$$



$$\vec{F}=\oint d\vec{F}=\oint\frac{\mu_0 I_1 I_2 R}{2\pi(R\cos\theta+L)}d\theta\hat{r}$$

$$F_j=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{R\sin\theta d\theta}{(R\cos\theta+L)}=0$$

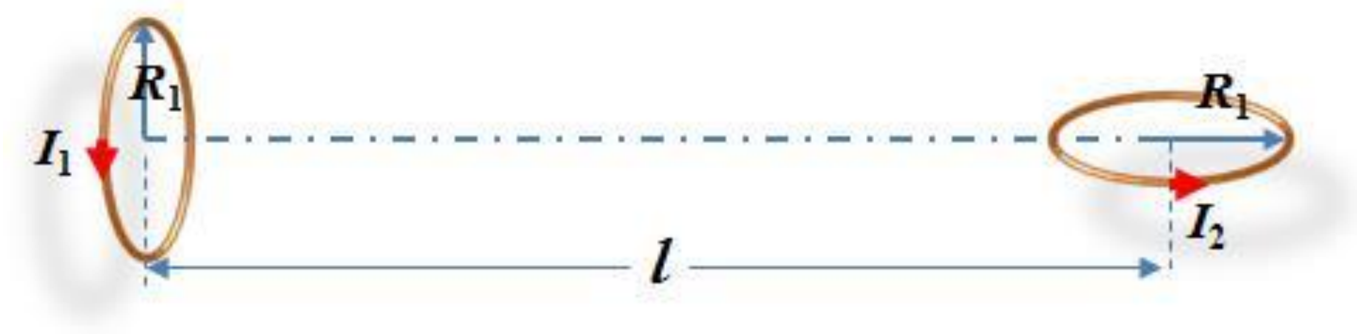
$$F_i=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{R\cos\theta d\theta}{(R\cos\theta+L)}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1-\frac{L}{R\cos\theta+L}\right)d\theta$$

$$=\mu_0 I_1 I_2-\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\frac{2L}{\sqrt{L^2-R^2}}\arctan\left.\frac{L\tan\frac{\theta}{2}+R}{\sqrt{L^2-R^2}}\right|_{-\pi}^{\pi}=\mu_0 I_1 I_2\left(1-\frac{L}{\sqrt{L^2-R^2}}\right)$$

圆电流的受力矩:
（O点为参考点）

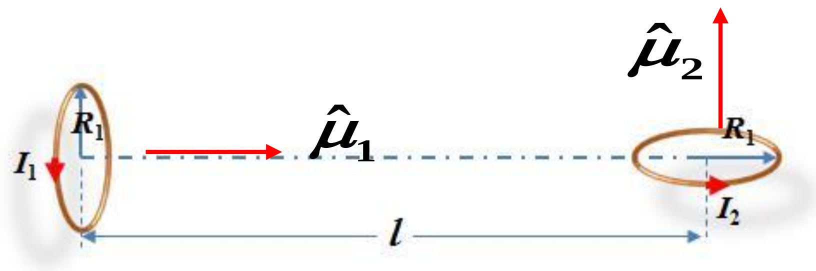
$$\vec{M}=\oint\vec{r}\times d\vec{F}=\oint\vec{r}\times\frac{\mu_0 I_1 I_2 R}{2\pi(R\cos\theta+L)}d\theta\hat{r}=0$$

两个圆线圈的半径分别为R_1和R_2，分别同电流I_1和I_2，圆心距离为 l ($l >> R_1$、R_2)，如图放置，求线圈1作用在线圈2上的力矩。



磁偶极子的磁场：
$$\boxed{\vec{B} = -\frac{\mu_0\vec{\mu}}{4\pi r^3} + \frac{3\mu_0(\vec{\mu}\cdot\vec{r})}{4\pi r^5}\vec{r}}$$

磁偶极子受到的力矩：
$$\boxed{\vec{M} = I\vec{S}\times\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \vec{\mu}\times\overrightarrow{\boldsymbol{B}}}$$



线圈1在线圈2处的磁场：

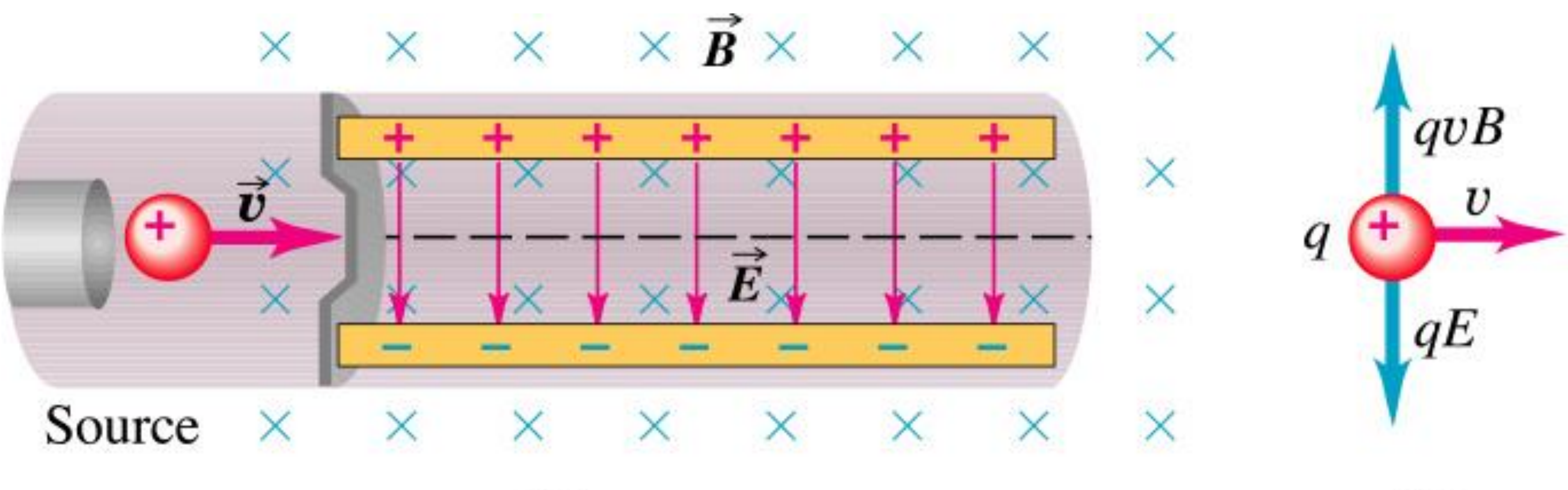
$$\vec{B}_{21} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\vec{\mu}_1}{r^3} \approx \frac{\mu_0 I_1 R_1^2}{2l^3}\hat{\mu}_1$$

线圈2受到的力矩：

$$\vec{M}_{21} = \vec{\mu}_2 \times \vec{B}_{21} = \frac{\pi\mu_0^2 I_1 I_2 R_1^2 R_2^2}{2l^3}\hat{\mu}_2 \times \hat{\mu}_1$$

一、速度选择器

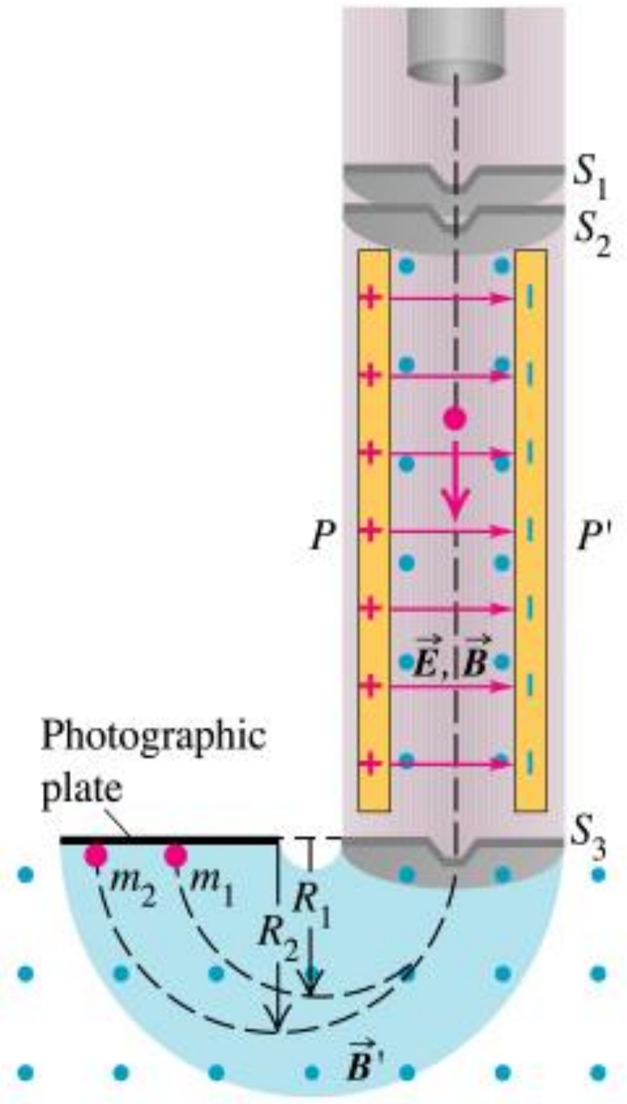
一束带电粒子射入一相互垂直的均匀电场和均匀磁场。若粒子走直线，便能从小孔中穿出，它所受到的电力应与磁力平衡，则：qE=qvB, $\therefore v = E / B$ 即只允许特定速率的粒子穿过（忽略重力），与粒子的电荷、质量无关。



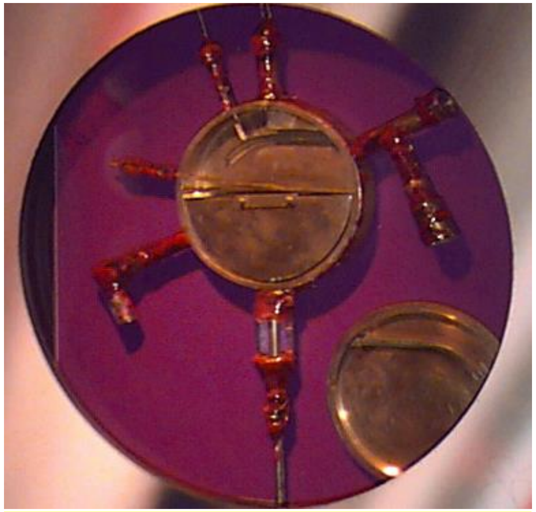
二、质谱仪

$$R=\frac{v_{\perp}}{\omega}=\frac{v_{\perp}m}{qB},\qquad \frac{q}{m}=\frac{v_{\perp}}{RB}$$

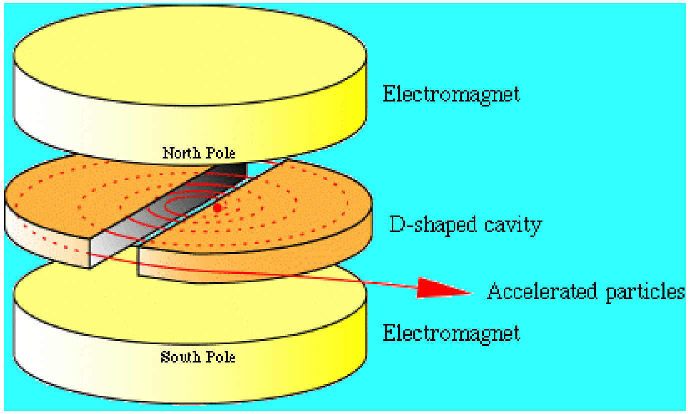
由测量所得R 可得带电粒子的荷质比，并可利用来分离同位素，分析丰度。



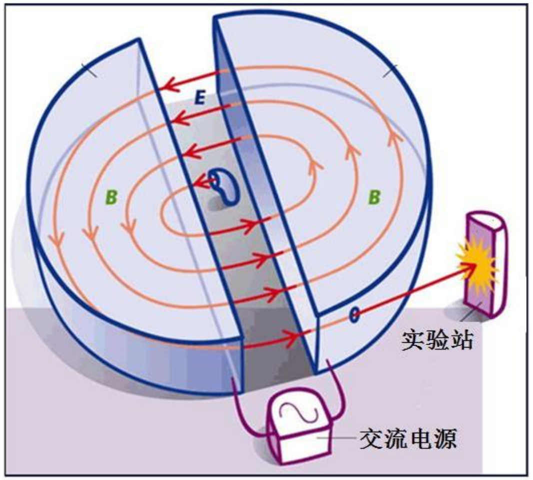
三、回旋加速器



4-Inch Cyclotron in CERN



$$T = \frac{2\pi m}{qB}, \qquad R = \frac{vm}{qB}.$$

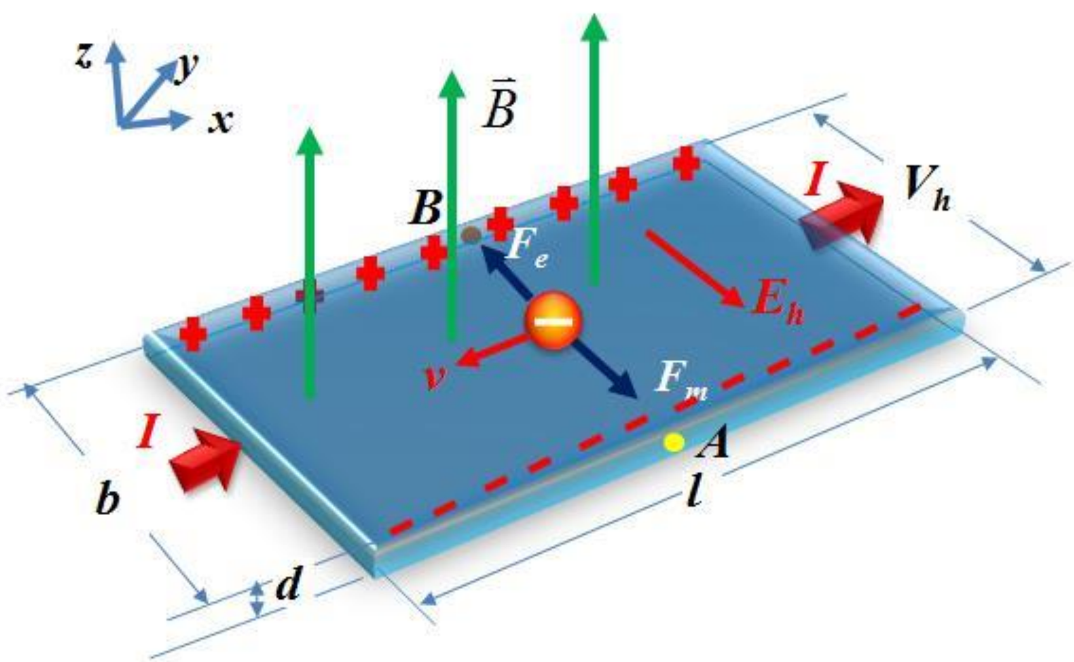


$$\because m\frac{v^2}{R} = qvB$$

$$\therefore E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{q^2B^2R^2}{2m}$$

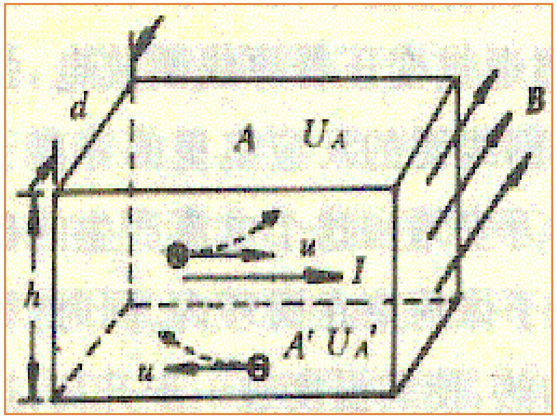
四、霍尔效应

载流导体外加磁场，载流导体内载流子在外磁场中受洛伦兹力作用而发生偏转。如图示，长方形载流导体外加磁场，由于载流子在外磁场中发生偏转而使得在与电流 I 和外磁场B垂直的上、下底面之间存在电势差。



只有当洛仑兹力与电力平衡时，载流子不再偏转。此时，$Eq=qvB$，又$I=dhnqv$，故：

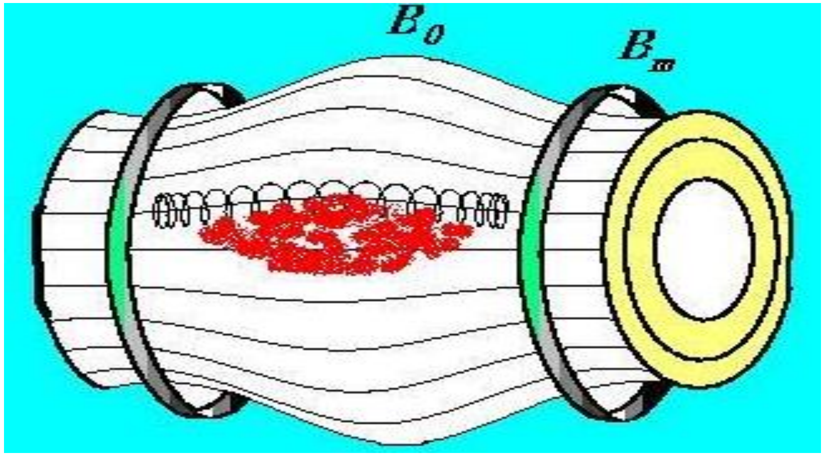
$$U = \frac{IB}{nqd} = \mathrm{K}\frac{IB}{d}$$



$K=1/nq$ 霍尔系数

- 给定I，B，d，测U，可得 nq。若 q 已知，可得载流子浓度n。
- 判定载流子带正电荷还是负电荷。
- 已知材料的 K, d, 及 I，测 U，可得磁场。
- 用其原理，可设计磁流体发电。

五、磁镜

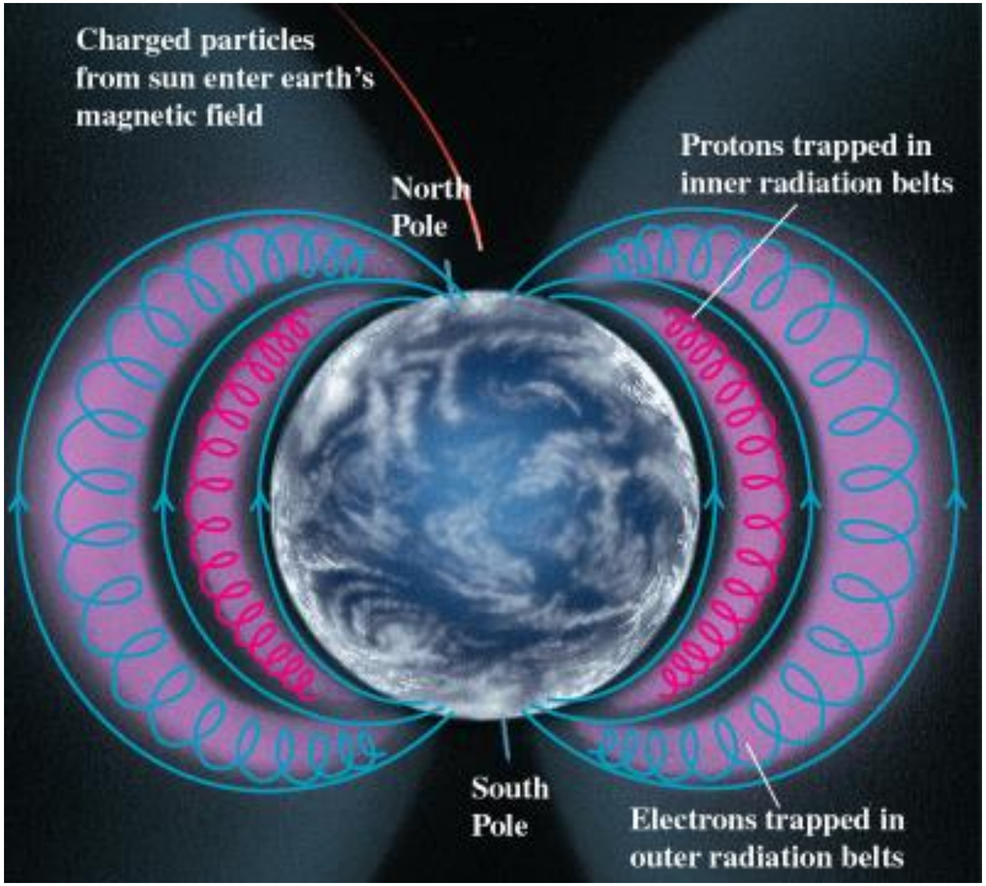


带电粒子在随时间、空间缓变磁场中**磁矩守恒**。

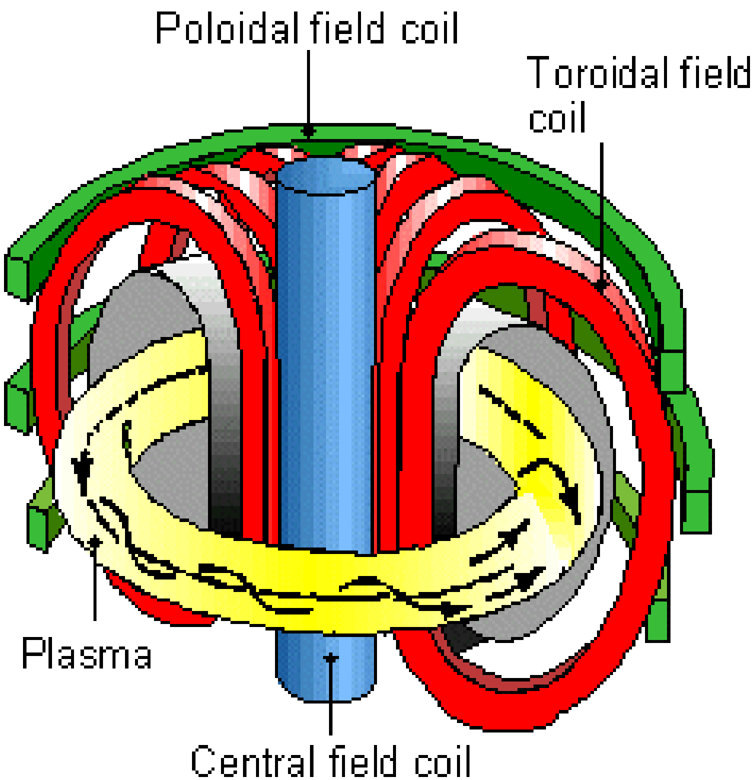
✱带电粒子作回旋运动的磁矩：

$$\mu = SI = \pi R^2 \frac{q}{T} = \frac{1}{2} m v_\perp^2 / B$$

地球的磁场就是一个天然的磁镜捕捉器

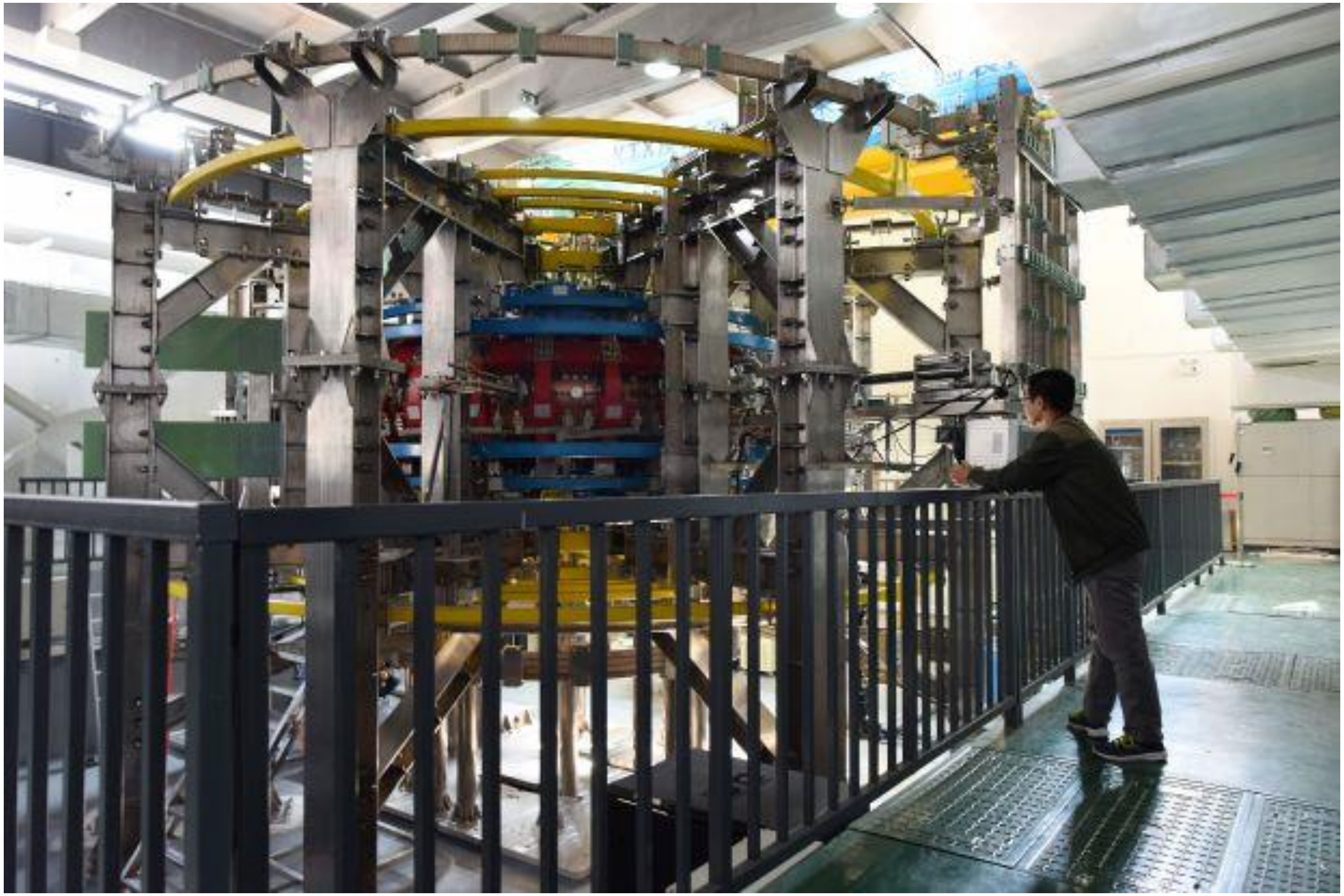


六、环流器



环形的磁场结构避免了速度大的粒子逃逸掉。目前，受控热核装置中，都采用该种结构。

合肥“人造小太阳”装置—**EAST**



反场箍缩装置—KTX（科大一环）