

2023 春信息论 B 课程数学基础复习题目

考察范围： 概率论基础 课程助教： 高源

1. 设随机变量 $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, 而对任一实数 x , 在 $X = x$ 条件下, $Y \sim \mathcal{N}(x, 1)$.

(1) 试求随机变量 Y 的密度函数 $f_Y(y)$, 并指出 Y 服从何种分布.

(2) 试求条件期望 $E[XY | X = x]$.

(3) 试求 X 和 Y 的相关系数.

(4) 试求常数 a , 使得随机变量 $aX + Y$ 和 $aX - Y$ 相互独立.

思考:

(1) 考察条件概率密度函数定义及其相关计算.

(2) 考察条件期望相关计算. 全期望公式如何应用?

(3) 考察相关系数的定义及其相关计算.

(4) 考察正态分布的性质.

2. 设随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立且都服从区间 $(0, 1)$ 上的均匀分布.

(1) 若随机变量 $Y = -a \ln X_1$, 其中 $a > 0$ 为一给定常数, 试求 Y 的概率密度函数.

(2) 试求随机变量 $Z = X_2/X_1$ 的分布函数.

(3) 试求随机变量 $U = 1/(X_1 X_2 X_3)$ 的概率密度函数.

思考:

(1) 本题考察随机变量函数的概率密度函数求解, 主要有两种方法, 分别是什么?

3. 设二维随机向量 (X, Y) 服从二元正态分布 $\mathcal{N}(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$, 其中 $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 0.5, \rho = 0.5$. 记 $Z = |X - Y|$. 求 Z 的密度函数 $f_Z(z)$.

思考:

(1) 本题考察随机变量函数的概率密度函数求解, 由于正态分布的特殊性, 本题使用了一种和上一题不同的求解方法, 并且更简便. 通过这道题, 你收获了什么?

4. 设随机向量 (X, Y, Z) 的概率密度函数为

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{1}{8\pi}(1 - \sin x \sin y \sin z), & 0 \leq x, y, z \leq 2\pi \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

证明 X, Y, Z 两两独立但不相互独立.

思考:

(1) 本题考察随机变量独立的概念. 通过这道题, 你收获了什么?

5. 设 (X, Y) 的概率密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(1) X 与 Y 是否独立?

(2) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度函数.

思考:

(1) 本题考察随机变量独立的概念以及随机变量函数的概率密度函数求解. 通过这道题, 你收获了什么?