第二章　离散傅里叶变换

课 程 作 业

【1.1】计算下列有限长序列 $x(n)$ 的 DFT，假设序列长度为 N 。

（1） $x(n)=\delta(n)$ ；

（2） $x(n)=\delta(n-n_0),0<n_0<N$ ；

（3） $x(n)=a^n,0\le n\le N-1$ ；

（4） $x(n)=nR_N(n)$ 。

【1.2】研究两个周期序列 $\tilde{x}(n)$ 和 $\tilde{y}(n)$， $\tilde{x}(n)$ 具有周期 N 而 $\tilde{y}(n)$ 具有周期 M ， $M\ne N$ 。序列 $\tilde{w}(n)$ 定义为 $\tilde{w}(n)=\tilde{x}(n)+\tilde{y}(n)$ 。

（1）求序列 $\tilde{w}(n)$ 的最小周期，并给出证明过程。

（2）设 $\tilde{X}(k)$ 为 $\tilde{x}(n)$ 的 DFS， $\tilde{Y}(k)$ 为 $\tilde{y}(n)$ 的 DFS， $\tilde{W}(k)$ 为 $\tilde{w}(n)$ 的 DFS。试用 $\tilde{X}(k)$ 和 $\tilde{Y}(k)$ 表示 $\tilde{W}(k)$ 。

【1.3】设 $X(k)$ 表示长度为 N 的有限长序列 $x(n)$ 的 DFT。

（1）证明如果 $x(n)$ 满足关系式 $x(n)=-x(N-1-n)$，则 $X(0)=0$ 。

（2）证明当 N 为偶数时，如果 $x(n)=x(N-1-n)$，则 $X\left(\frac{N}{2}\right)=0$ 。

【1.4】已知序列 $x(n)=a^nu(n)$， $0<a<1$，对其 Z 变换 $X(z)$ 在单位圆上 N 等分采样，采样值为 $X(k)=X(z)\big|_{z=W_N^{-k}}$， $0\le k\le N-1$ 。

（1）求有限长序列 $\mathrm{IDFT}\left[X(k)\right]$ 。

（2）若 $x(n)=a^nR_N(n)$， $0<a<1$ ，重复上述过程。

（3）试作分析比较和解释上述两个结果。

【1.5】证明 DFT 的帕斯维尔关系式：$\sum_{n=0}^{N-1}\left|x(n)\right|^2=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left|X(k)\right|^2$。

【1.6】已知两个有限长序列为：

$$x(n)=\begin{cases}n+1, & 0\le n\le 3\\ 0, & 4\le n\le 6\end{cases}$$

$$y(n)=\begin{cases}-1, & 0\le n\le 4\\ 1, & 5\le n\le 6\end{cases}$$

（1）试画出序列 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的图。

（2）作图画出线性卷积 $f_1(n)=x(n)*y(n)$ 以及长度为 7 的圆周卷积 $f_2(n)=x(n)\otimes y(n)$ 的结果，并比较其异同。

（3）设 $x_1(n)$ 和 $y_1(n)$ 的周期卷积与 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的线性卷积相等，画出 $x_1(n)$ 和 $y_1(n)$。

注：以上三问回答只需给出最终序列的图。

第二章　离散傅里叶变换

课程作业答案

【1.1】解：

注意所有题目都要标明 k 的取值范围，本题 $k=0,1,2,\dots N-1$

（1）根据定义有：$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}\delta(n)W_N^{kn}=1$

（2）$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}\delta(n-n_0)W_N^{kn}=1$

（3）$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}=\frac{1-(aW_N^k)^N}{1-(aW_N^k)}=\frac{1-a^N}{1-aW_N^k}$

（4）令 $x_1(n)=R_N(n)$，则 $X_1(z)=\sum_{n=0}^{N-1}z^{-n}=\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$

利用 z 变换中的性质 $X(z)=-z\frac{dX_1(z)}{dz}$，因此，$X(k)=X(z)\big|_{z=W_N^{-k}}=-\frac{N}{1-W_N^k},k\neq 0$，

$X(k)\big|_{k=0}=\sum_{n=0}^{N-1}nW_N^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}n=\frac{N(N-1)}{2}$。

【1.2】解：

（1）最小周期为 M 和 N 的最小公倍数 $Q=LCM(M,N)=k_1M=k_2N$

因为 $\tilde{\mathrm{w}}(\mathrm{n})=\tilde{\mathrm{x}}(\mathrm{n})+\tilde{\mathrm{y}}(\mathrm{n})$

所以

$$\begin{aligned}\tilde{w}(n+Q)&=\tilde{x}(n+k_2N)+\tilde{y}(n+k_2M)\\&=\tilde{x}(n)+\tilde{y}(n)=\tilde{w}(n)\end{aligned}$$

下面证明其是最小周期

假设 $\exists K<Q$，K 为正整数，使得其是序列 $\tilde{w}(n)$ 的周期

则有 $$\begin{aligned}\tilde{w}(n+K)&=\tilde{x}(n+K)+\tilde{y}(n+K)\\&=\tilde{x}(n)+\tilde{y}(n)=\tilde{w}(n)\end{aligned}$$

则 $\tilde{x}(n+K)-\tilde{x}(n)=\tilde{y}(n)-\tilde{y}(n+K)$

$\tilde{x}(n+K)-\tilde{x}(n)$ 和 $\tilde{y}(n+K)-\tilde{y}(n)$ 不能同时等于 0

$\tilde{x}(n+K)-\tilde{x}(n)$ 的周期为 N

$\tilde{y}(n+K)-\tilde{y}(n)$ 的周期为 M

两者不相等，矛盾

故 $Q=LCM(M,N)$ 是序列 $\tilde{w}(n)$ 的最小周期。

（2）易得，MN 为 $\tilde{x}(n)$ 的周期，把 $\tilde{x}(n)$ 看成周期为 MN 的序列，其 DFS 为

$$\tilde{x}_{MN}(k)=\sum_{n=0}^{MN-1}\tilde{x}(n)W_{MN}^{kn}$$

可以把它看成长为 N 的 M 段相加，令 $n'=n-lN$，其中 $0\le n'\le N-1$，则

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{MN}(k)&=\sum_{n'=0}^{N-1}\tilde{x}(n')W_{MN}^{kn'}\sum_{l=0}^{M-1}W_{MN}^{lkN}\\&=\sum_{n'=0}^{N-1}\tilde{x}(n')e^{-j\frac{2\pi}{N}\frac{k}{M}n'}\sum_{l=0}^{M-1}W_{MN}^{lkN}\end{aligned}$$

因为

$$\sum_{l=0}^{M-1}W_{MN}^{lkN}=\begin{cases}M,\text{当}k\text{为的}M\text{倍数时}\\0\qquad\qquad\text{其他}\end{cases}$$

即 $\sum_{l=0}^{M-1}W_{MN}^{lkN}=M\delta(k-lM)$

所以 $\tilde{X}_{MN}(k)=M\tilde{X}\left(\frac{k}{M}\right)\delta(k-lM)$

其中 $\tilde{X}(k)$ 是把 $\tilde{x}(n)$ 看成周期为 N 的 DFS 的系数。同理可得

$$\tilde{Y}_{MN}(k)=N\tilde{Y}\left(\frac{k}{N}\right)\delta(k-l'N)$$

故

$$\begin{aligned}\tilde{W}(k)&=\tilde{X}_{MN}(k)+\tilde{Y}_{MN}(k)\\&=M\tilde{X}\left(\frac{k}{M}\right)\delta(k-lM)+N\tilde{Y}\left(\frac{k}{N}\right)\delta(k-l'N)\end{aligned}$$

【1.3】

（1）

$$X(0)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^0=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)=\sum_{n=0}^{N-1}x(N-1-n)$$

$$2X(0)=0\Rightarrow X(0)=0$$

（2）

$$X\left(\frac{N}{2}\right)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{jn\pi}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)(-1)^n=\sum_{n=0}^{N-1}x(N-1-n)(-1)^{N-1-n}=\sum_{n=0}^{N-1}x(N-1-n)(-1)^{n-1}$$

$$2X\left(\frac{N}{2}\right)=0\Rightarrow X\left(\frac{N}{2}\right)=0$$

【1.4】

解：

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}=\frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$X(k)=X(z)\Big|_{z=W_N^{-k}}=\frac{1}{1-az^{-1}}\Bigg|_{z=W_N^{-k}}=\frac{1}{1-aW_N^k}$$

从而

$$=\frac{1}{1-a^N}\cdot\frac{1-a^NW_N^{Nk}}{1-aW_N^k}=\frac{1}{1-a^N}\sum_{n=0}^{N-1}(aW_N^k)^n$$

$$=\frac{1}{1-a^N}\sum_{n=0}^{N-1}a^nW_N^{nk}$$

$$\therefore \mathrm{IDFT}\left[X(k)\right]=\frac{1}{1-a^N}a^nR_N(n)$$

（2）

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}a^nW_N^{nk}$$

$$\therefore \mathrm{IDFT}\left[X(k)\right]=a^nR_N(n)=x(n)$$

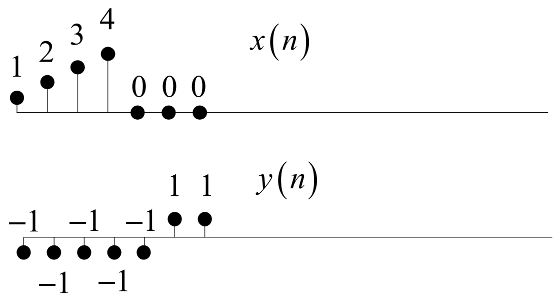
（3）分析：对单位圆上 Z 变换（即 DTFT）的均匀采样，就是 DFT 的过程，对单位圆 N 点采样，就是做了 N 点 DFT，若原序列长度大于 N，需要进行截短，截短过程相当于通过一个矩形窗口观察原序列，即原序列与矩形序列 $R_N(n)$ 相乘。

【1.5】

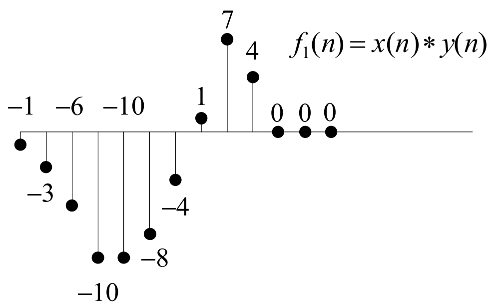
$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2 &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x^*(n) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-kn}\right]^* \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k)\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k)\,X(k) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2
\end{aligned}
$$

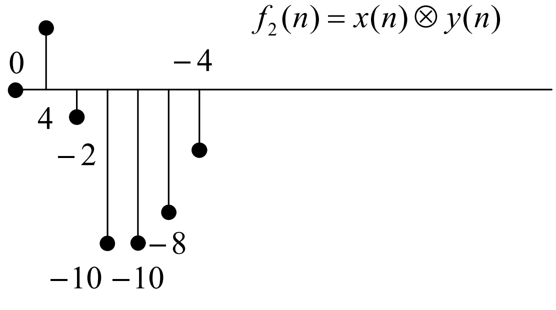
【1.6】解：

（1）



（2）





（3）将 $x(n), y(n)$ 后面补零至 7+7-1=13 点即可保证圆周卷积和线性卷积相等。