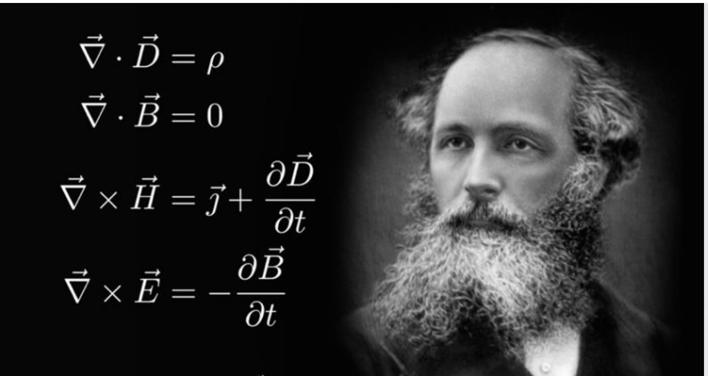
中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

# 电 磁 学
# (Electromagnetism)




## 第八章 Maxwell电磁理论1

# §8-1 麦克斯韦方程组

## 一、电磁现象实验规律总结

### 1. 电荷守恒定律

$$\oiint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\iiint_V \rho dV = -\iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV$$

$$\nabla\cdot\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

### 2. 静电学的实验规律

库仑定律： $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1 q_2}{r^3}\vec{r}$

电场强度： $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^3}\vec{r}$

根据库仑定律和电场叠加原理可以得到描述静电场性质的高斯定理和环路定理：

$$\oiint_s \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum_{s内} q_i$$

$$\oint_c \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

## 3. 静磁学的实验规律

**安培定律：**

$$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12})}{r_{12}^3}$$

**毕−萨定律：**

$$d\vec{B}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

由此得到描述**静磁场**性质的**高斯定理**和**环路定理**：

$$\oiint_s \vec{\mathrm{B}} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_c \vec{\mathrm{H}} \cdot d\vec{l} = \sum_{\text{穿过}c} I_0$$

# 4. 电磁感应的实验规律

**法拉第定律：**

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

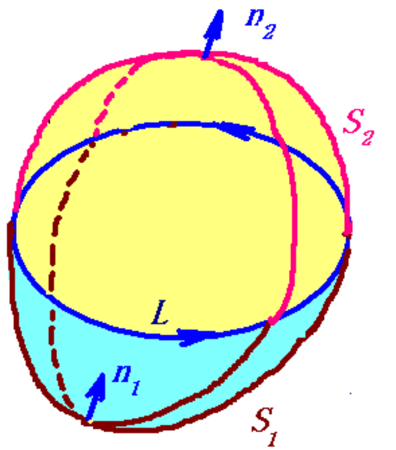
**这是随时间变化的磁场的实验规律**

**问题：当电场、磁场随时间变化时，高斯定理、环路定理是什么形式？**

## 二、电磁场理论推广

**目标：寻找适用于变化电场、磁场的定理**

### 1. 时变磁场的高斯定理




对同一边界L，作两个闭合曲面$S_1$和$S_2$，$S_1+S_2$构成一个闭合曲面S

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\iint_{S_1}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = -\iint_{S_2}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$\iint_{S_1}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} - \iint_{S_2}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = 0$$

统一以S的外法线方向为正，即

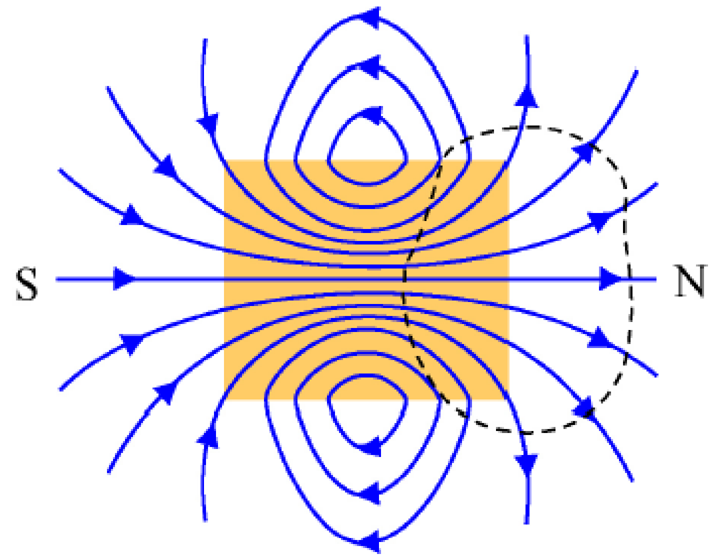
$$\iint_{S_1}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} + \iint_{S_2}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \oiint_{S}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oiint_{S}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = \iiint_{V}\nabla\cdot\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)dV = \iint_{V}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{B})\,dV = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{B}) = 0 \Rightarrow \nabla\cdot\vec{B} = const$$

若空间某处原来只有静磁场，亦即：

$$\nabla\cdot\vec{B}\Big|_{t=0}=0$$




则即使后来有了变化的磁场，仍然有：

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{B}=0}$$

“形式”不变!

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{B}(\vec{r},t)=0}$$

## 2. 时变电场的环路定理

麦克斯韦认为变化的磁场可以激发出涡旋电场

$$\varepsilon = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{E}_{旋} \cdot d\vec{l} \Rightarrow \nabla \times \vec{E}_{旋} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\oint_L \vec{E}_{势} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \nabla \times \vec{E}_{势} = 0$$

$$\vec{E} = \vec{E}_{势} + \vec{E}_{旋} \Rightarrow \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_{势} + \vec{E}_{旋} = \vec{E}(\vec{r}, t)$$

## 3. 时变电场的高斯定理

$$\oiint_S \vec{D}_{势} \cdot d\vec{S} = \sum_{S内} q_0$$

$$\nabla \cdot \vec{D}_{势} = \rho_0 \quad , \quad 其中\ \vec{D}_{势} = \varepsilon_0 \vec{E}_{势} + \vec{P}$$

**变化的磁场将激发涡旋电场，涡旋电场的电力线为闭合的曲线，故**

$$\oiint_S \vec{E}_{旋} \cdot d\vec{S} = 0$$

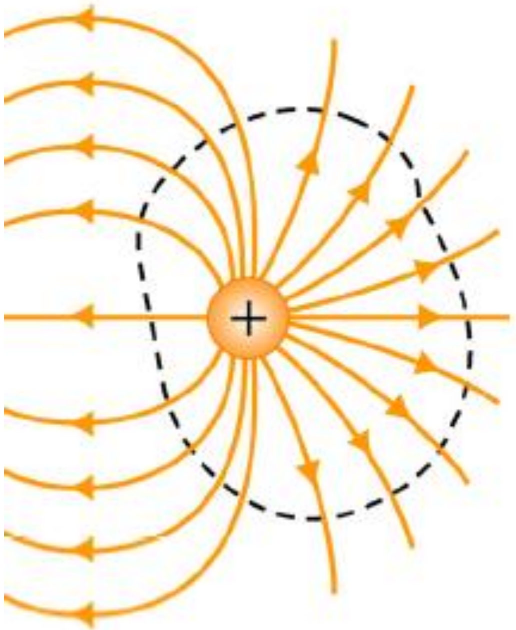
$$\vec{E} = \vec{E}_{势} + \vec{E}_{旋}, \quad 则\ \vec{D} = \vec{D}_{势} + \varepsilon_0 \vec{E}_{旋}$$

$$\therefore \oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \oiint_S \vec{D}_{势}\cdot d\vec{S} + \varepsilon_0 \oiint_S \vec{E}_{旋}\cdot d\vec{S} = \sum_{S内} q_0$$

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum_{S内} q_0$$

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho_0$$

"形式"不变!



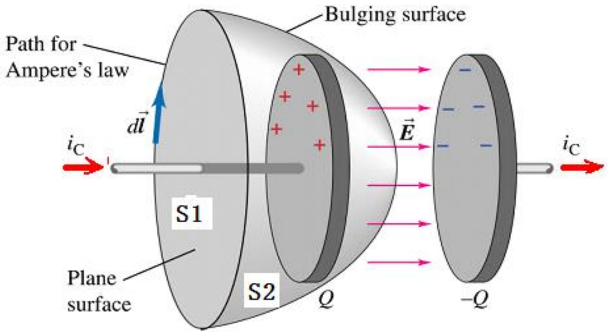
$$\vec{D}=\vec{D}(\vec{r},t) = \varepsilon_0\vec{E}+\vec{P} = \varepsilon_0\left(\vec{E}_{势}+\vec{E}_{旋}\right)+\vec{P}$$

## 4. 时变磁场的环路定理

静磁场安培环路定理: $$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum_i I_i = \iint_s \vec{j}\cdot d\vec{S}$$

这个规律在时变场的情况下不再适用.

根据安培回路定理对$S_1$有:




$$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum I_i = \iint_{S_1} \vec{j}\cdot d\vec{S} = I_c$$

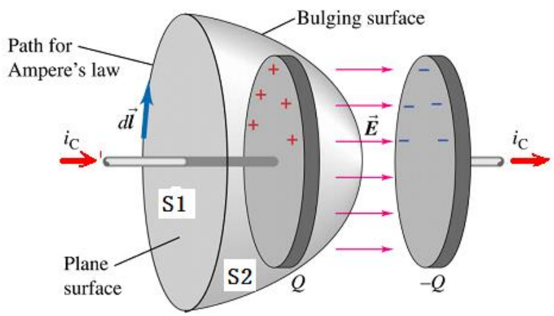
对$S_2$有: $$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = \iint_{S_2} \vec{j}\cdot d\vec{S} = 0$$

安培环路定理在稳恒电流条件下成立，在电流随时间变化时不再适用。

根据**电荷守恒律**,有： $$\oiint_S \vec{j}_0 \cdot d\vec{S} = -\frac{dq_c}{dt}$$

上式S是由 $S_1$ 和 $S_2$ 构成的闭合曲面，$q_c$ 是积聚在 S 面内的自由电荷，根据**高斯定理**有：

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_c$$




$$\therefore \frac{dq_c}{dt} = \frac{d}{dt}\oiint_s \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oiint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

则 $$\oiint_s \vec{j}_0 \cdot d\vec{S} = -\oiint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}, \qquad \boxed{\oiint_s \left( \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = 0}$$

电位移矢量的时间变化率 $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 和传导电流密度 $\vec{j}_0$ 有相同的量纲, 麦克斯韦将其定义为位移电流密度.

位移电流密度 $\vec{j}_d = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

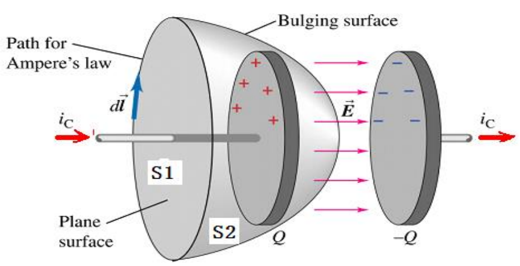
通过S面的位移电流 $I_D = \iint_s \vec{j}_d \cdot d\vec{S} = \iint_s \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$

- **传导电流与位移电流合称为全电流 I，即：**

$$I = \iint_s \vec{j}_0 \cdot d\vec{S} + \iint_s \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \iint_s \left( \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

**由前** $\oiint_s \left( \vec{j}_0 + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = 0$

$$\oiint \left( \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = \iint_{s1} \left( \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} - \iint_{s2} \left( \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = 0$$




- **通过面$S_1$、$S_2$的全电流相等，**

**$I_1$=$I_2$**

- 上式说明，在非稳定的情况下，传导电流终止的地方，由位移电流接上,传导电流和位移电流一起保证了在非稳恒情况下电流连续。

- 由此，麦克斯韦把安培回路定律推广到了在非恒定情况下也适用的普遍形式：

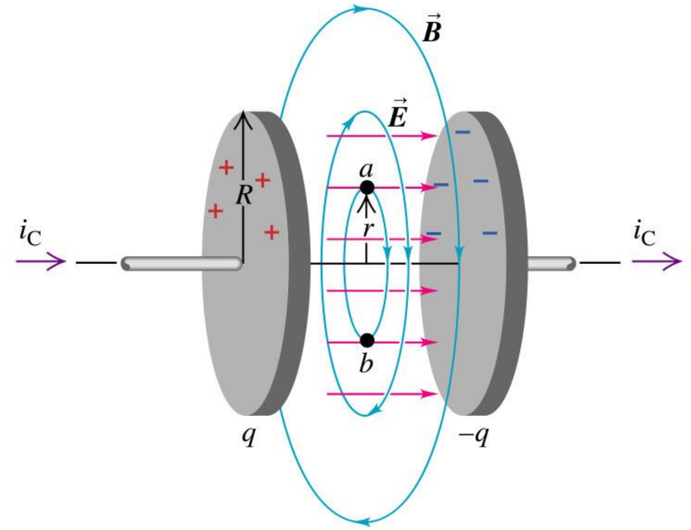
$$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum I_0 + \iint_s \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

- 微分形式为：

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

## □ 位移电流:

$$\vec{\mathbf{j}}_d \equiv \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\mathbf{P}}}{\partial t}$$




■ 位移电流概念的新物理:

- 随时间变化的电场可以激发磁场
- 随时间变化的电场和极化电流与传导电流一样能产生磁场，这是它们的共同点

■ 位移电流与传导电流的区别：

- 位移电流并非自由电荷的定向运动所产生，在真空和电介质中也存在；
- 它不伴随焦耳热效应；
- 它与外磁场无洛仑兹力的关系。

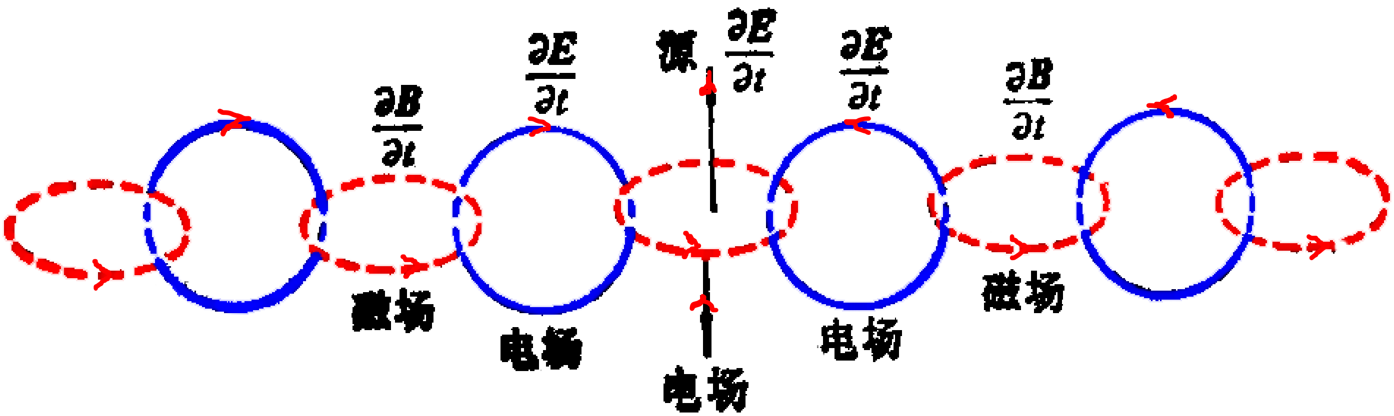
## 电磁波：如果场空间中不存在自由电荷和传导电流：

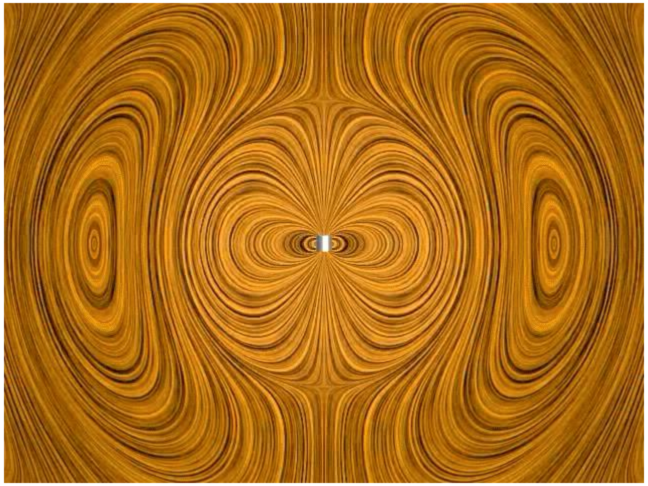
$$\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

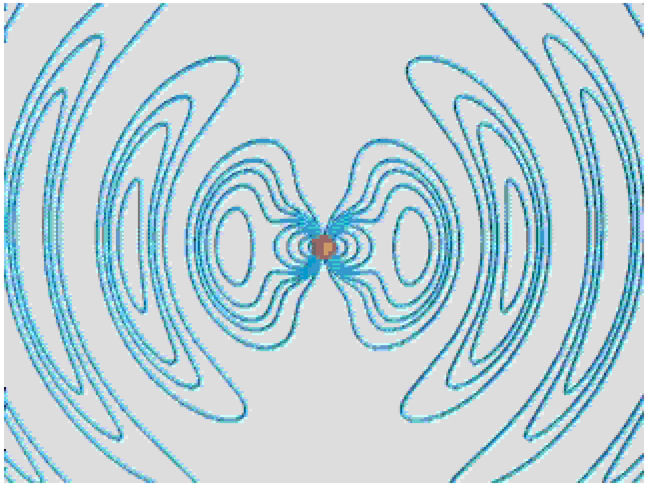
$$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = \iint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = \varepsilon_0\varepsilon_r \iint \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

- 它们分别表示**随时间变化的磁场在空间激发电场**和**随时间变化的电场在空间激发磁场**
- **两方程相差一个符号**，而这恰恰是电磁波在空间传播所需要的。

## ■电磁波传播的物理图像：


源
$\frac{\partial E}{\partial t}$
$\frac{\partial E}{\partial t}$
$\frac{\partial E}{\partial t}$
$\frac{\partial B}{\partial t}$
$\frac{\partial B}{\partial t}$
磁场
电场
电场
电场
磁场





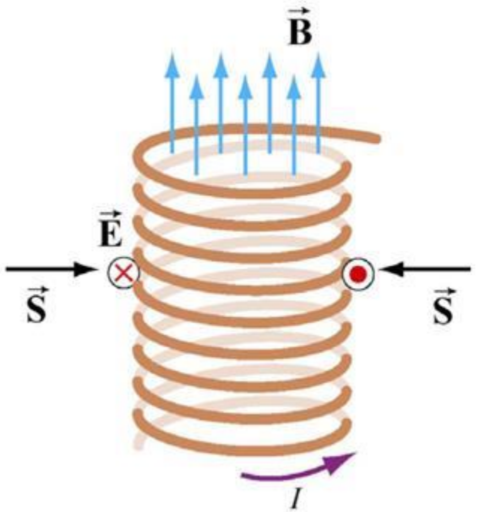
[例]一无限长直螺线管，横截面的半径为R，单位长度的匝数为$n$，当导线中载有交流电流。

$$I = I_0 \sin \omega t$$

试求管内外的位移电流密度。

**[解] 通电螺线管磁场**

$$B=\begin{cases}\mu_0 nI=\mu_0 nI_0\sin\omega t & (\text{管内})\\ 0 & (\text{管外})\end{cases}$$




**管内：感应电场强度**

$$E_1=-\frac{1}{2\pi r}\frac{d\Phi}{dt}$$

$$=-\frac{1}{2\pi r}\frac{d}{dt}(\mu_0 nI_0\sin\omega t\cdot\pi r^2)=-\frac{1}{2}\mu_0 nI_0\omega r\cos\omega t$$

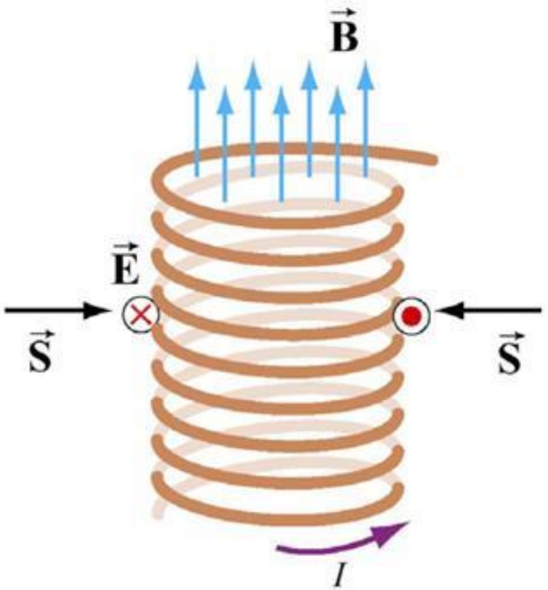
**位移电流密度为：** $j_d=\frac{\partial D}{\partial t}=\varepsilon_0\frac{\partial E_1}{\partial t}=-\frac{1}{2}\varepsilon_0\mu_0 nI_0\omega^2 r\sin\omega t$

管外：感应电场强度

$$\boxed{E_2 = -\frac{1}{2\pi r}\frac{d\Phi}{dt}}$$

$$= -\frac{1}{2\pi r}\frac{d}{dt}(\mu_0 n I_0 \sin\omega t \cdot \pi R^2)$$

$$= -\frac{1}{2r}\mu_0 n I_0 \omega R^2 \cos\omega t$$




位移电流密度为：

$$\boxed{j_d = \frac{\partial D}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_2}{\partial t}} = -\frac{1}{2r}\varepsilon_0 \mu_0 n I_0 \omega^2 R^2 \sin\omega t$$

# 三. 麦克斯韦方程组

积分形式　　　　微分形式

$$\oiint_S \vec{\mathbf{D}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \iiint_V \rho_0 dV, \qquad \nabla \cdot \vec{\mathbf{D}} = \rho_0,$$

$$\oint_C \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = -\iint_S \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \cdot d\vec{\mathbf{S}}, \qquad \nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t},$$

$$\oiint_S \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = 0, \qquad \nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0,$$

$$\oint_C \vec{\mathbf{H}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = \iint_S (\vec{\mathbf{j}}_0 + \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t}) \cdot d\vec{\mathbf{S}}. \qquad \nabla \times \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{j}}_0 + \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t}.$$

- 麦克斯韦方程组适用于变化的电磁场,如果电/磁场不随时间变化，则自动满足静电场、静磁场的高斯定理、环路定理。
- 麦克斯韦方程组的“两个推广、两个假设”
  - “两个推广”指静电场、静磁场的高斯定理直接将使用范围推广位适用于变化的电场、磁场即可，定理形式保持不变。
  - “两个假设”是指在改写静电场、静磁场的环路定理时引入了涡旋电场假设、位移电流假设，这两个假设解决了物理理论上困难，并得到了实验证实。

## □ 麦克斯韦方程组的两个预言

麦克斯韦方程组是电磁场的普通规律，它不仅可以解释当时已知的一切电磁现象，而且从麦克斯韦方程组很容易导出电磁场所满足的波动方程，从而麦克斯韦预言了电磁波的存在.

从真空中波动方程得到的电磁波的速度恰好为真空中的光速，从而麦克斯韦大胆地预言了光波就是电磁波.

■麦克斯韦电磁理论的建立是物理学史上的一个伟大创举。

■ 爱因斯坦的评价:

“自牛顿以来,物理学经历最深刻、最富有成果的、真正的、概念上的变革。”

■ 它开辟了无线电时代的新纪元，对科学技术和人类文明的发展起到了不可估量的作用。


J. C. Maxwell
(1831∽1879)

## 四. 边值关系

从麦克斯韦方程组的积分形式出发，作圆柱形曲面或矩形回路横跨并无限接近两介质的界面，从而得到边值关系：

$$\vec{\mathbf{n}}\cdot(\vec{\mathbf{D}}_2-\vec{\mathbf{D}}_1)=\sigma_0,$$
$$\vec{\mathbf{n}}\times(\vec{\mathbf{E}}_2-\vec{\mathbf{E}}_1)=0,$$
$$\vec{\mathbf{n}}\cdot(\vec{\mathbf{B}}_2-\vec{\mathbf{B}}_1)=0,$$
$$\vec{\mathbf{n}}\times(\vec{\mathbf{H}}_2-\vec{\mathbf{H}}_1)=\vec{\boldsymbol{i}}_0,$$

其中，$\sigma_0$ 是界面上的自由面电荷密度，

$\vec{\boldsymbol{i}}_0$ 是界面上的传导面电流密度。

# §8-2 平面电磁波

## 一. 波动方程

从微分形式的麦克斯韦方程和均匀各向同性线性介质的电磁性能方程出发，可以得到自由空间中电磁场的运动规律，这是麦克斯韦方程方程组最重要的应用之一。

自由空间条件：

$$\boxed{\rho_0=0,\ j_0=0}$$

真空电磁性能方程：

$$\boxed{\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E},\ \ \vec{B}=\mu_0\vec{H}}$$

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{D}=\rho_0 \\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\vec{B}=0 \\ \nabla\times\vec{H}=\vec{j}_0+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{cases}
\xrightarrow[\boxed{\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E},\ \vec{B}=\mu_0\vec{H}}]{\boxed{\rho_0=0,\ j_0=0}}
\begin{cases} \nabla\cdot\vec{E}=0 \\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\vec{B}=0 \\ \nabla\times\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

$$\boxed{\nabla\times(\nabla\times\vec{E})=-\nabla\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{B})=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}}$$

$$\because\quad \nabla\times(\nabla\times\vec{E})=\nabla(\nabla\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E}=-\nabla^2\vec{E}$$

$$\Rightarrow\quad \nabla^2\vec{E}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0$$

波动方程

**波动方程**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \dfrac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \nabla^2 \vec{E} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \dfrac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \nabla^2 \vec{B} = 0 \end{cases}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{(4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{T \cdot m/A})(8.85 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2/N \cdot m^2})}} = 2.997 \times 10^8\,\mathrm{m/s} = c$$

令 $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \vec{E} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \vec{B} = 0 \end{cases}$$

## 无限均匀线性各向同性介质中电磁场的波动方程（$\rho_0$=0，$j_0$=0）：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial \boldsymbol{t}^2} - \dfrac{1}{\varepsilon\mu}\nabla^2 \vec{\boldsymbol{E}} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial \boldsymbol{t}^2} - \dfrac{1}{\varepsilon\mu}\nabla^2 \vec{\boldsymbol{B}} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{H}}}{\partial \boldsymbol{t}^2} - \frac{1}{\varepsilon\mu}\nabla^2 \vec{\boldsymbol{H}} = 0$$

## 2. 定态电磁波的解

- 设电磁波的激发源以确定的频率$\omega$作简谐振动，因而辐射的电磁波也以相同频率作简谐振动
- 这种以一定频率作简谐振动的波，常称为定态电磁波或单色波
- 一般的非单色的电磁波，可以用傅里叶分析方法分解为不同频率的单色波的叠加，因此只须研究定态电磁波

## □ 设电磁波沿z轴正向传播，只讨论平面电磁波

设平面波解的复数形式为：

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}(z)e^{-j\omega t} \\ \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{H}}(z)e^{-j\omega t} \end{cases}$$

即在与z 轴正交的平面上各点有相同的值（相位相同）

代入波动方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2} - \dfrac{1}{\mu\varepsilon}\dfrac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial Z^2} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 \vec{\mathbf{H}}}{\partial t^2} - \dfrac{1}{\mu\varepsilon}\dfrac{\partial^2 \vec{\mathbf{H}}}{\partial Z^2} = 0. \end{cases}$$

得：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}(z)}{\partial z^2} + \omega^2 \mu\varepsilon \vec{\mathbf{E}}(z) = 0, \\ \dfrac{\partial^2 \vec{\mathbf{H}}(z)}{\partial z^2} + \omega^2 \mu\varepsilon \vec{\mathbf{H}}(z) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{E}}(z) = \vec{\mathbf{E}}_0 e^{jkz}, \\ \vec{\mathbf{H}}(z) = \vec{\mathbf{H}}_0 e^{jkz}. \end{cases}$$

- 波振幅矢量 $\vec{E}_0$、$\vec{H}_0$ ：由电磁波的激发源确定
- 波数K： $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$

$$\begin{cases}\vec{\mathbf{E}}(z) = \vec{\mathbf{E}}_0 e^{jkz}, \\ \vec{\mathbf{H}}(z) = \vec{\mathbf{H}}_0 e^{jkz}.\end{cases}$$

$$K \equiv \frac{2\pi}{\lambda}$$

- **波数$K$：表示在空间 $2\pi$ 长度上有多少个电磁波长**

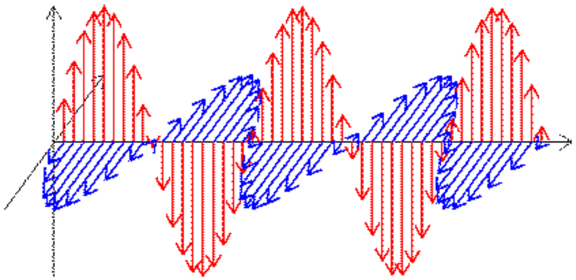
- **相速度(波的相位的传播速度)：**

$$V_p = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi/T}{2\pi/\lambda} = \frac{\omega}{K}$$

$$\boxed{K=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}\ ,\quad \boxed{\frac{\omega}{K} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}} = \sqrt{\frac{\mu_0\varepsilon_0}{\mu\varepsilon}}C = V$$

## 平面波解的一般式：

$$\begin{cases}\vec{\mathbf{E}}(z,t)=\vec{\mathbf{E}}(z)e^{-j\omega t}=\vec{\mathbf{E}}_0 e^{jkz}e^{-j\omega t}\\ \vec{\mathbf{H}}(z,t)=\vec{\mathbf{H}}(z)e^{-j\omega t}=\vec{\mathbf{H}}_0 e^{jkz}e^{-j\omega t}\end{cases}$$



$$\therefore\begin{cases}\vec{\mathbf{E}}(z,t)=\vec{\mathbf{E}}_0 e^{j(kz-\omega t)}\\ \vec{\mathbf{H}}(z,t)=\vec{\mathbf{H}}_0 e^{j(kz-\omega t)}\end{cases}$$

平面波解的一般式：

$$\begin{cases}\vec{\mathbf{E}}(\vec{r},t)=\vec{\mathbf{E}}_0 e^{-j(\omega t-\vec{\mathbf{K}}\cdot\vec{r})}\\ \vec{\mathbf{H}}(\vec{r},t)=\vec{\mathbf{H}}_0 e^{-j(\omega t-\vec{\mathbf{K}}\cdot\vec{r})}\end{cases}$$

波矢 $\vec{K}$：大小就是波数 $k=2\pi/\lambda$，方向是电磁波传播的方向

# 3. 平面电磁波的性质(讨论所得解)

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{E}}(\vec{r},t) = \vec{\mathbf{E}}_0 e^{-j(\omega t - \vec{\mathbf{K}}\cdot\vec{r})} \\ \vec{\mathbf{H}}(\vec{r},t) = \vec{\mathbf{H}}_0 e^{-j(\omega t - \vec{\mathbf{K}}\cdot\vec{r})} \end{cases}$$

$$\nabla \Rightarrow j\vec{\mathbf{K}},\ \frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow -j\omega$$

$$\nabla\vec{\mathbf{E}}(\vec{r},t) = \vec{\mathbf{E}}_0 e^{-j(\omega t - \vec{K}\cdot\vec{r})}\nabla\left(-j\left(\omega t - \vec{K}\cdot\vec{r}\right)\right) = \vec{\mathbf{E}}(\vec{r},t)\nabla\left(j\vec{K}\cdot\vec{r}\right)$$

$$\nabla\left(j\vec{K}\cdot\vec{r}\right) = j\nabla(k_x x + k_y y + k_z z) = j\vec{K},$$

即 $\nabla\vec{\mathbf{E}}(\vec{r},t) = j\vec{K}\vec{\mathbf{E}}(\vec{r},t),$ $\boxed{\nabla \Rightarrow j\vec{\mathbf{K}}}$

$$\frac{\partial\vec{\mathbf{E}}(\vec{r},t)}{\partial t} = \vec{\mathbf{E}}_0 e^{j\vec{K}\cdot\vec{r}}\frac{\partial e^{-j\omega t}}{\partial t} = -j\omega\vec{\mathbf{E}}_0 e^{j\vec{K}\cdot\vec{r}} e^{-j\omega t} = -j\omega\vec{\mathbf{E}}_0 e^{-j(\omega t - \vec{K}\cdot\vec{r})}$$

即 $\dfrac{\partial\vec{\mathbf{E}}(\vec{r},t)}{\partial t} = -j\omega\vec{\mathbf{E}}(\vec{r},t),$ $\boxed{\dfrac{\partial}{\partial t} \Rightarrow -j\omega}$

$$\nabla \Rightarrow j\vec{\mathbf{K}},\quad \frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow -j\omega$$

代入

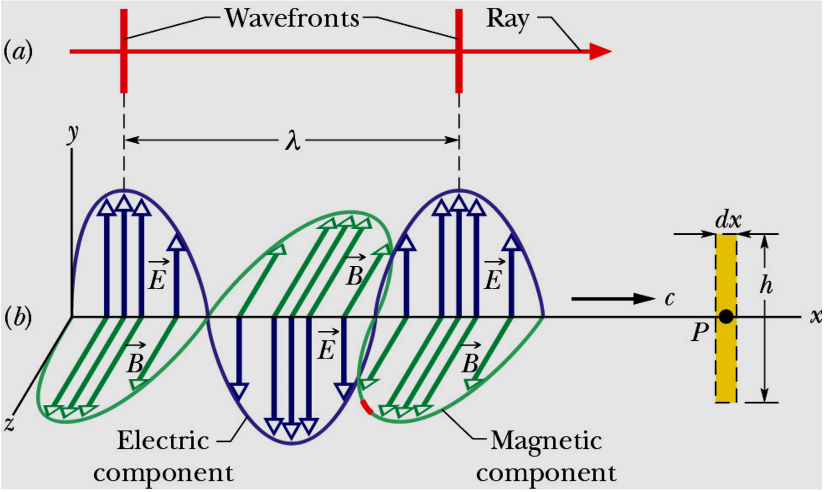
$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{K}} \cdot \vec{\mathbf{E}} = 0, \\ \vec{\mathbf{K}} \times \vec{\mathbf{E}} = \mu\omega \vec{\mathbf{H}}, \\ \vec{\mathbf{K}} \cdot \vec{\mathbf{H}} = 0, \\ \vec{\mathbf{K}} \times \vec{\mathbf{H}} = -\varepsilon\omega \vec{\mathbf{E}}. \end{cases}$$

- $\vec{K} \perp \vec{E}$, $\vec{K} \perp \vec{H}$ ，即电磁场强度与波的传播方向垂直，故平面电磁波是横波。

- $\vec{E} \perp \vec{H}$， 即电场强度和磁场强度垂直，且E、H和K三个矢量构成一个右旋直角坐标系。



$$\begin{cases} \vec{\mathbf{K}}\cdot\vec{\mathbf{E}}=0, & \vec{\mathbf{K}}\times\vec{\mathbf{E}}=\mu\omega\vec{\mathbf{H}}, \\ \vec{\mathbf{K}}\cdot\vec{\mathbf{H}}=0, & \vec{\mathbf{K}}\times\vec{\mathbf{H}}=-\varepsilon\omega\vec{\mathbf{E}}。 \end{cases}$$

$$\vec{\mathbf{K}}\times(\vec{\mathbf{K}}\times\vec{\mathbf{E}})=(\vec{\mathbf{K}}\cdot\vec{\mathbf{E}})\vec{\mathbf{K}}-K^2\vec{\mathbf{E}},$$

$$\vec{\mathbf{K}}\times(\vec{\mathbf{K}}\times\vec{\mathbf{E}})=\mu\omega\vec{\mathbf{K}}\times\vec{\mathbf{H}}=\mu\varepsilon\omega^2\vec{\mathbf{E}}$$

$$\Rightarrow \boxed{(K^2-\mu\varepsilon\omega^2)\vec{\mathbf{E}}=0}$$

此式要有非零解，必须 $K^2-\mu\varepsilon\omega^2=0,$ 得：$K=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$

$$\boxed{\vec{\mathbf{K}}\times\vec{\mathbf{E}}=\mu\omega\vec{\mathbf{H}}}\Rightarrow \mathbf{KE}=\mu\omega\mathbf{H}$$

$$E\sqrt{\varepsilon}=H\sqrt{\mu}\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}\varepsilon E^2=\frac{1}{2}\mu H^2}$$

$$\frac{E}{B}=\frac{E}{\mu H}=\frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}=\sqrt{\frac{1}{\mu\varepsilon}}=\frac{\omega}{K}=V$$

- 在介质中任一点，任一时刻其**电场能量密度与磁场能量密度相等**。
- E和H的幅值成比例，E和B比值就是电磁波的相速度；

$$V=\frac{\omega}{K}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=\sqrt{\frac{\mu_0\varepsilon_0}{\mu\varepsilon}}C$$

真空中$v=c$，麦克斯韦预言光即是电磁波,并且指出

$$\frac{C}{V}\equiv n=\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{\mu_0\varepsilon_0}}\approx\sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}},$$ n是介质的折射率

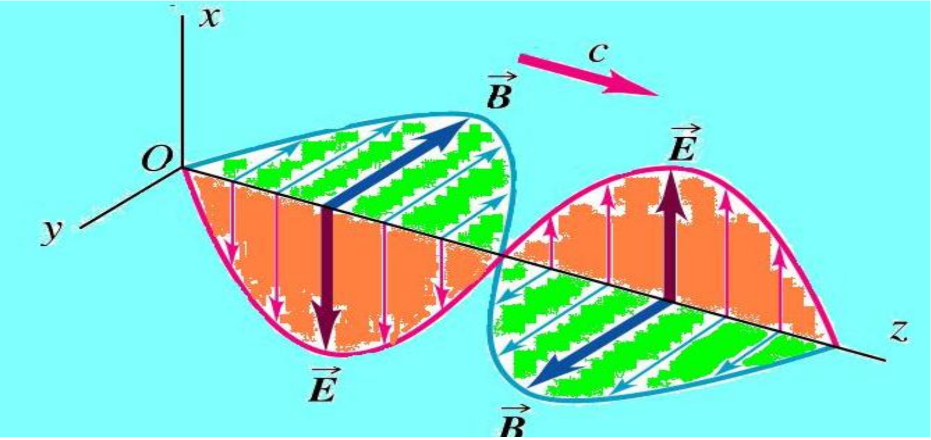
一般情况下，介质$\mu$和$\varepsilon$是电磁波的频率$\omega$的函数，所以$n$ 也是$\omega$的函数。

$$\boxed{V(\omega)=\frac{\omega}{K}=\frac{C}{n(\omega)}}$$ 又称色散关系。

## 电磁波的性质小结：

（1）电磁波是**横波**

（2）电场强度与磁场相垂直，且 $E, H, k$ 三个矢量构成一个**右手螺旋系**。




（3） $E$ 与 $H$ 的幅度成比例。

（4）传播速度为：$v=\dfrac{\omega}{k}=\dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}$ $\qquad v=\dfrac{c}{n}$

- **电场强度与磁感应强度的振幅之比为电磁波传播速度 $v$。**
- 在真空中有：$\boxed{C=\dfrac{E}{B}}$

## 一、一般表达

对静止各向同性介质中的电磁场的能量密度$w$，能流密度（又称坡印亭矢量）$\vec{\mathbf{S}}$，动量密度 $\vec{\mathbf{g}}$，角动量密度$\vec{l}$，表达式如下：

$$w=\frac{1}{2}\vec{\mathbf{D}}\cdot\vec{\mathbf{E}}+\frac{1}{2}\vec{\mathbf{B}}\cdot\vec{\mathbf{H}},$$

$$\vec{\mathbf{S}}=\vec{\mathbf{E}}\times\vec{\mathbf{H}},$$

$$\vec{\mathbf{g}}=\vec{\mathbf{D}}\times\vec{\mathbf{B}},$$

$$\vec{l}=\vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{g}}.$$

于是，体积$V$ 中电磁场的总能量、总动量和总角动量分别为如下体积分：

$$W=\iiint_V w dV,\qquad \mathbf{G}=\iiint_V \vec{\mathbf{g}} dV,\qquad \vec{\mathbf{L}}=\iiint_V \vec{l}\, dV,$$

能量守恒定律的表达式为：

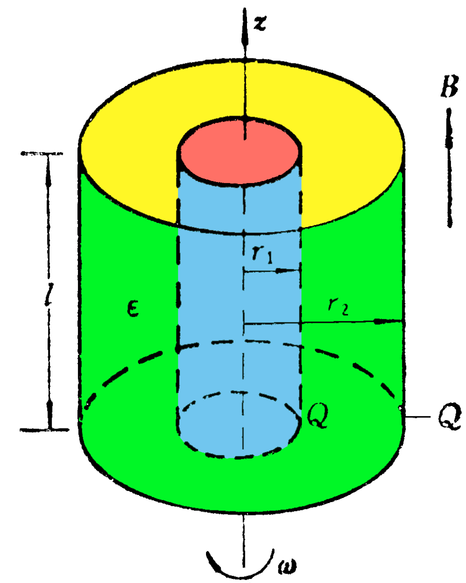
$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{\mathbf{S}}\cdot d\vec{\mathbf{A}}=-\frac{d}{dt}(W+W_n)$$

上式中 $d\vec{\mathrm{A}}$ 为积分的面元，$W_n$ 是非电磁的总能量。可将上式与电荷守恒定律比较，以便加深理解。

## 电磁场角动量演示实验

如图，一圆柱形介质电容器，长度为$l$，充满介电常数为ε的均匀各向同性介质，内外半径为$r_1$、$r_2$，绕轴的转动惯量为$I$，板极充电荷为$\pm Q$，置于一均匀磁场 B 中。

当电容器放电后，电容器便绕轴旋转，其角速度为ω，ω 的大小可通过电磁场的角动量计算。



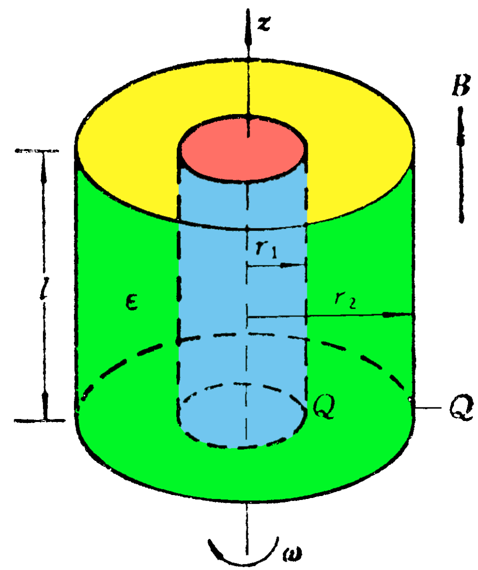

轴向均匀磁场中的圆柱电容器

充电后，略去边缘效应，电容器中： $\oiint_S \vec{\mathbf{D}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = Q$

$$D = \frac{Q}{2\pi r l}, \qquad \vec{\mathbf{D}} = \frac{Q}{2\pi r l}\hat{\mathbf{r}}$$

$$\vec{\mathbf{g}} = \vec{\mathbf{D}} \times \vec{\mathbf{B}} = DB\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{z}} = -\frac{QB}{2\pi r l}\hat{\boldsymbol{\varphi}},$$

$$\vec{l} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{g}} = -\frac{QB}{2\pi l}\hat{\mathbf{z}},$$




于是电容器内电磁场的总角动量为：

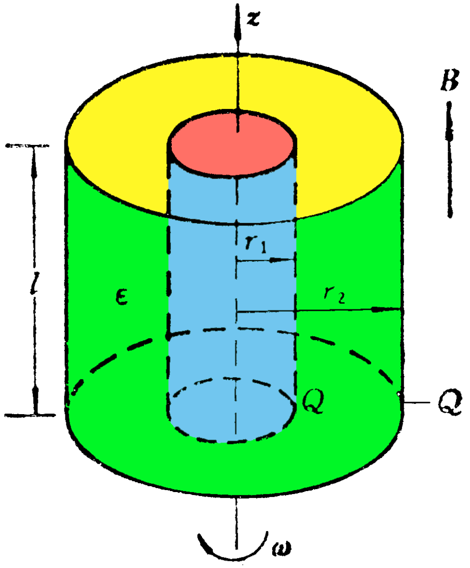
$$\vec{\mathbf{L}} = \iiint_V \vec{l}\, dV = -\frac{QB}{2\pi l}(\pi r_2^2 - \pi r_1^2) \cdot l\hat{\mathbf{z}} = -\frac{1}{2}QB(r_2^2 - r_1^2)\hat{\mathbf{z}}$$

放电后，电容器内 $\vec{\mathbf{E}}=0,\quad \vec{\mathbf{D}}=0$

电磁场的角动量为零。由总角动量守恒，则

$$0+\vec{\mathbf{L}}_n=\vec{\mathbf{L}}$$

即 $I\omega=-\frac{1}{2}QB(r_2^2-r_1^2).$




于是得：

$$\omega=-\frac{1}{2I}QB(r_2^2-r_1^2)$$

上式中负号表示电容器顺时针旋转。

## 二、平面电磁波的能量、动量

$$\left.\begin{aligned}
&\text{能量密度}: w=\varepsilon E^2=\mu H^2 \\
&\text{能流密度}: \vec{\mathbf{S}}=\vec{\mathbf{E}}\times\vec{\mathbf{H}}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E^2\frac{\vec{\mathbf{v}}}{v}=\frac{\varepsilon E^2}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{\vec{\mathbf{v}}}{v}=w\vec{\mathbf{v}} \\
&\text{动量密度}: \vec{\mathbf{g}}=\mu\varepsilon\vec{\mathbf{E}}\times\vec{\mathbf{H}}=\frac{\vec{\mathbf{S}}}{v^2}=w\frac{\vec{\mathbf{v}}}{v^2}
\end{aligned}\right\}\text{瞬时值}$$

**如果在真空中，则有：**

$$v=c,\qquad S=wc,\qquad g=\frac{w}{c}=\frac{S}{c^2}$$

**按时间的平均值：**

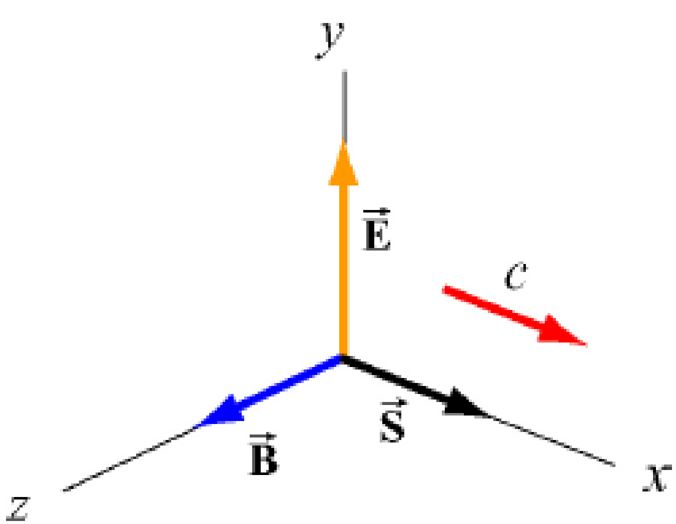
$$\overline{w} = \frac{1}{T}\int_0^T w(t)dt = \frac{1}{2}\varepsilon E_0^2$$

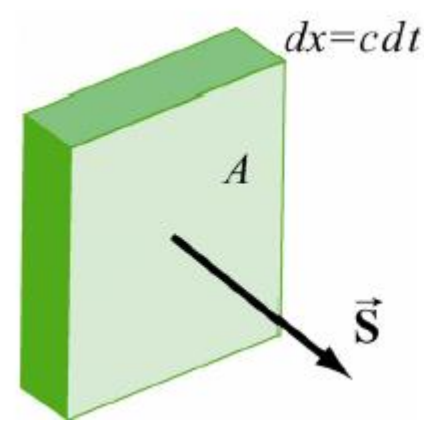
$$\overline{\vec{\mathbf{S}}} = \frac{1}{2}\varepsilon E_0^2 \vec{\mathbf{v}} = \overline{w}\vec{\mathbf{v}}$$

$$\overline{\vec{\mathbf{g}}} = \frac{1}{2}\varepsilon E_0^2 \frac{\vec{\mathbf{v}}}{v^2} = \frac{\overline{\vec{\mathbf{S}}}}{v^2}$$

# 三、坡印廷矢量（Poynting Vector）

$$\text{能流密度}:\vec{\mathbf{S}}=\vec{\mathbf{E}}\times\vec{\mathbf{H}}=w\,\vec{v}$$

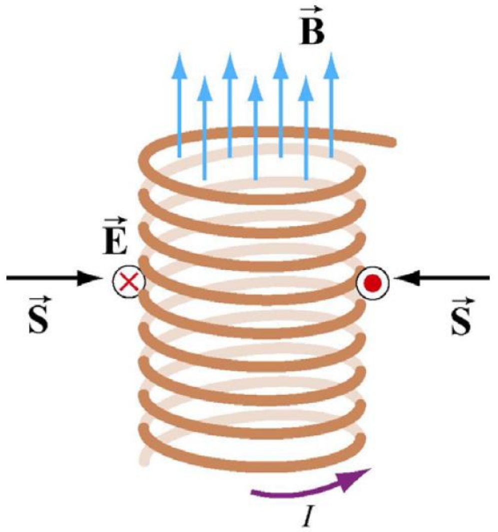


## 螺线管充电时的坡印廷矢量

$$\vec{B} = \mu_0 n I \hat{k}$$

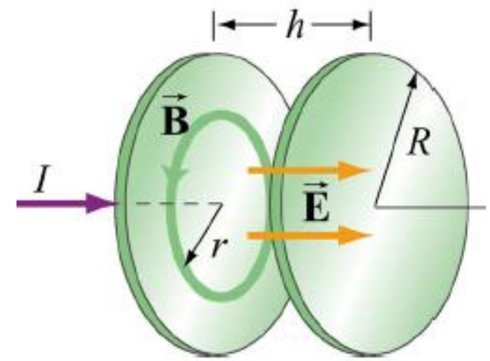
$$\vec{E} = -\frac{\mu_0 n r}{2}\left(\frac{dI}{dt}\right)\hat{\varphi}$$

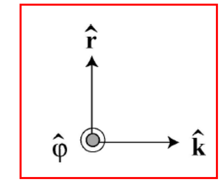



$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0}\left[-\frac{\mu_0 n r}{2}\left(\frac{dI}{dt}\right)\hat{\varphi}\right]\times\left(\mu_0 n I\hat{k}\right) = -\frac{\mu_0 n^2 I}{2}\left(\frac{dI}{dt}\right)\vec{r}$$

# 电容器充电时的坡印廷矢量

$$\vec{E}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{k}=\frac{Q}{\pi R^2\varepsilon_0}\hat{k} \qquad \vec{B}=B\hat{\varphi}$$

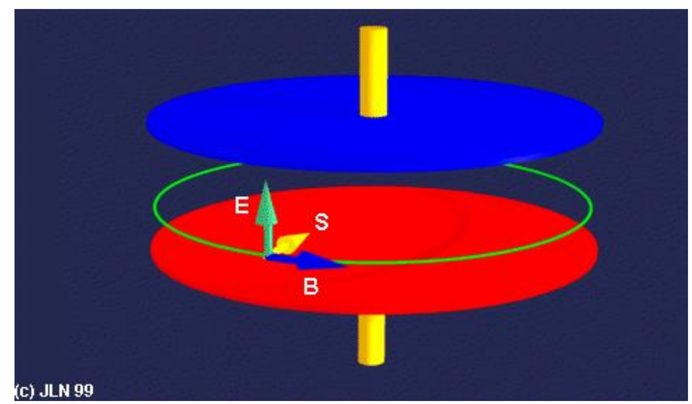



$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 I+\mu_0\varepsilon_0\frac{d}{dt}\iint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$r<R:\ \ 2\pi B=\mu_0\varepsilon_0\frac{dE}{dt}\pi r^2$$

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 r}{2\pi R^2}\frac{dQ}{dt}\hat{\varphi}$$




$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}=\frac{1}{\mu_0}\left[\frac{Q}{\pi R^2\varepsilon_0}\hat{k}\right]\times\left(\frac{\mu_0 r}{2\pi R^2}\frac{dQ}{dt}\hat{\varphi}\right)=-\left(\frac{Q}{2\pi^2 R^4\varepsilon_0}\right)\frac{dQ}{dt}\vec{r}$$

## 四、电磁场是什么？

- 电磁场是物质的一种形态
- 电磁场和实物是物质存在的两种不同的形态
  - 电磁场与实物有很多相同点，例如，它们都具有能量、动量及角动量
  - 电磁场与实物存在一些差异

## 电磁场与实物的不同

1）电磁场的基本组成是光子，没有静止质量，构成实物的电子、质子等微观粒子都具有静止质量；

2）电磁场以波的形式在空间中传播，在真空中的速率永远是c $=3*10^8$m/s，在折射率为$n$的介质中的传播速度为$c/n$；

3）一种实物占有的空间不能同时被另一种实物占领，即实物具有不可入性，但频率不同的电磁波，可以同时占有同一空间，独立存在，各自保持自己的特性不变.

合则相濡以沫，分则相忘于江湖