USTC

2024

随机过程B

第二次习题课

余汶轩

CONTENTS

01

马尔可夫过程复习

1 马尔可夫链的概念及转移概率

[定义] 设有随机过程 $\{X_n, n \in T\}$， 若对于任意的整数 $n \in T$ 和任意的 $i_0, i_1, \ldots, i_{n+1} \in I$，条件概率满足

$$P\{X_{n+1}=i_{n+1} \mid X_0=i_0, X_1=i_1, \cdots, X_n=i_n\} = P\{X_{n+1}=i_{n+1} \mid X_n=i_n\}$$

则称 $\{X_n, n \in T\}$ 为**马尔可夫链**，简称**马氏链**。

01

马尔可夫过程复习

常返性的定义

1) 若 $f_{ii}=1$，则称状态 i 是常返的；若 $f_{ii}<1$，则称状态 i 是非常返的（或瞬过的）。

2) 称期望值 $\mu_i=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot f_{ii}^{(n)}$ 为状态 i 的平均返回时间。

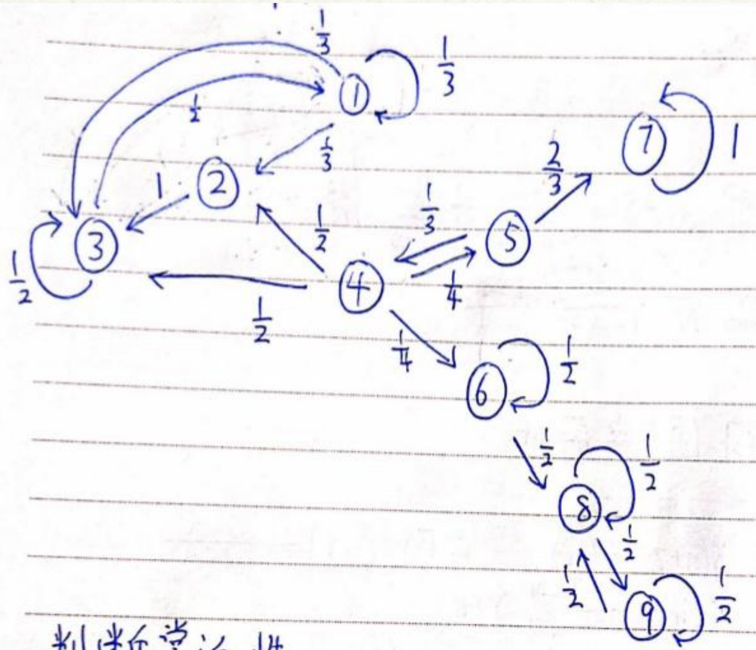
3) 若 $\mu_i<\infty$，则称常返态 i 是正常返的；
若 $\mu_i=\infty$，则称常返态 i 是零常返的。

4) 非周期的正常返态称为遍历态。

01

马尔可夫过程复习

通过实例复习一下几个最重要概念



判断常返性.

②→③→①→② ⇒ {2}常返

状态分类.

②→③, ③→①→② ⇒ 2↔3.

常返态. {1,2,3}, {7}, {8,9}

瞬过. {4,5}, {6}.

判断 正/零常返.

⑧→⑨ $\xrightarrow{\frac{1}{2}}$ ⑧. ⑧

⇓

几何分布, 类比 概率中的掷骰子

常返性: 找出一条路径, 正常返性: 找出所有路径

常返就是可以回到初始状态, 如果能在状态转移图中找到一条路径, 那肯定是常返的。

瞬过有两种理解, 只会在该状态停留有限次或者转移次数超过某一数值后就不会停留在该状态, 所以如果有一条路径能从该状态出发, 但是回不去了, 就是瞬过。

正常返是回到初始状态需要步数的期望是有限值, 所以如果所有路径都会在有限次内返回初始状态, 肯定也是正常返的。

零常返一定和无限状态绑定。

01

马尔可夫过程复习

几个重要结论一定要记得

(1) 可达关系与互达关系

[定义] (1) 若存在 $n>0$，使得 $p_{ij}^{(n)}>0$，则称自状态 i 可达状态 j，并记为 $i\to j$.

(2) 若 $i\to j$，且 $j\to i$，则称状态 i 与状态 j 互达，并记为 $i\leftrightarrow j$.

[定理1] 若 $i\to j$，且 $j\to k$，则 $i\to k$.

若 $i\leftrightarrow j$，且 $j\leftrightarrow k$，则 $i\leftrightarrow k$.

传递性

[定理2] 若 $i\leftrightarrow j$，则

(1) i 与 j 同为常返或非常返;

(2) i 与 j 同为正常返或零常返;

(3) i 与 j 有相同的周期.

互达关系的状态是同一类型

01

马尔可夫过程复习

常返性的定义

1) 若 $f_{ii}=1$，则称状态 i 是**常返**的；若 $f_{ii}<1$，则称状态 i 是**非常返**的（或**瞬过**的）。

2) 称期望值 $\mu_i=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot f_{ii}^{(n)}$ 为状态 i 的**平均返回时间**。

3) 若 $\mu_i<\infty$，则称常返态 i 是**正常返**的；
若 $\mu_i=\infty$，则称常返态 i 是**零常返**的。

4) 非周期的正常返态称为**遍历态**。

01

马尔可夫过程复习

使用转移概率和首达需要的判定条件不同，注意不要记错了。可以结合对于几种状态的理解来记忆。

状态分类的判别

	常返态		非常返态
	零常返态	正常返态	
转移概率 $p_{ij}^{(n)}$	$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$	$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$	$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$
	$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$	$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} > 0$	
首达概率 $f_{ij}^{(n)}$	$\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = f_{ii} = 1$	$\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = f_{ii} = 1$	$\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = f_{ii} < 1$
	$\sum_{n=1}^{\infty} nf_{ii}^{(n)} = \mu_i = \infty$	$\sum_{n=1}^{\infty} nf_{ii}^{(n)} = \mu_i < \infty$	

01

马尔可夫过程复习

几个结论

- 若马氏链有一个零常返态，则必有无限多个零常返态。
- 有限状态的马氏链，不可能含有零常返态，也不可能全是非常返态。
- 不可约的有限状态马氏链必为正常返态。

02

习题讲解

第一次习题课后有一次柏松过程的作业，这里顺带说一下

2.4 设某路口红、黄、蓝三种颜色的汽车的到达数分别为速率 λ_1， λ_2 和 λ_3 的泊松过程，且相互独立.

(1) 试求先后两辆汽车到达时间间隔 X 的概率密度；

(2) 设在时刻 t_0 观察到一辆红车，问下一辆是非红车的概率是多少？

(3) 设在时刻 t_0 观察到一辆红车，问下三辆全是红车，而后是非红车的概率是多少？

2.4 (1) 设 $N(t)$ 为 t 时刻到达的车辆数

$N(t)=N_1(t)+N_2(t)+N_3(t)$ 服从参数为 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$ 的泊松过程

记 $\lambda=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$.

$$P(X>t)=P(N(t)=0)=e^{-\lambda t}$$

$$F_X(t)=P(X\le t)=1-e^{-\lambda t}$$

$$f_X(t)=\frac{dF_X(t)}{dt}=\lambda e^{-\lambda t}\ ,\ t\ge 0.$$

(2) $P\{下一辆非红\}=P\{N_2(t)+N_3(t)=1\mid N(t)=1\}=\dfrac{e^{-\lambda_1 t}(\lambda_2 t\cdot e^{-(\lambda_3+\lambda_2)t}+\lambda_3 t\cdot e^{-(\lambda_2+\lambda_3)t})}{\lambda t\cdot e^{-\lambda t}}$

$$=\frac{\lambda_2+\lambda_3}{\lambda}$$

(3) $P\{下三辆红车,之后为非红车\}=\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda}\right)^3\left(\dfrac{\lambda_2+\lambda_3}{\lambda}\right)$　泊松过程具有增量独立性

02

习题讲解

第一次习题课后有一次柏松过程的作业，这里顺带说一下

2.11 设要做的试验的次数服从参数为 λ 的泊松分布. 试验有 n 个可能的结果，每次试验出现第 j 个结果的概率为 p_j，且 $\sum_{i=1}^{n} p_j = 1$. 设各次试验相互独立，并以 X_j 表示其中第 j 个结果发生的次数.

(1) 问 X_j 服从什么分布？并求其期望与方差 $(j = 1, 2, \cdots, n)$;

(2) 证明：$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立.

2.11 (1) $P\{X_j=k\} = \sum_{m=k}^{\infty} P\{X_j=k \mid X=m\} = \sum_{m=k}^{\infty} C_m^k p_j^k (1-p_j)^{m-k} \frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!}$

$\frac{m!}{k!(m-k)!}$

$$= \sum_{m=k}^{\infty} \frac{[(1-p_j)\lambda]^{m-k}}{(m-k)!} \cdot \frac{\lambda^k p_j^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

$$= \frac{(\lambda p_j)^k}{k!} e^{-\lambda p_j}$$

X_j 服从参数为 λp_j 的泊松分布

$EX_j = \lambda p_j \quad DX_j = \lambda p_j.$

(2) $P\{X_1=n_1, X_2=n_2, \cdots, X_n=n_n\} = \frac{(\sum_j n_j)!}{n_1!\, n_2! \cdots n_n!} \prod_j (p_j)^{n_j} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{(\sum_j n_j)}}{(\sum_j n_j)!}$

$$= \prod_{j=1}^{n} \frac{(p_j)^{n_j}\lambda^{n_j}}{n_j!} \cdot e^{-\lambda}$$

而 $P\{X_1=n_1\}P\{X_2=n_2\}\cdots P\{X_n=n_n\}$

$$= \prod_{j=1}^{n} \frac{(\lambda p_j)^{n_j}}{n_j!} e^{-\lambda p_j} = \prod_{j=1}^{n} \frac{(\lambda p_j)^{n_j}}{n_j!} \cdot e^{-\lambda}.$$

该题目是一道概率论的题目，和“随机过程”无关。

需要注意相互独立和两两独立的区别，另外该题目不适用归纳法

02

习题讲解

第一次习题课后有一次柏松过程的作业，这里顺带说一下

2.12 某甲负责征订杂志. 设前来订阅的顾客数为强度为 λ 的泊松过程，顾客分别以概率 p_1，p_2 和 p_3 订阅 1 季，2 季和 3 季杂志 $(\sum_{i=1}^{3} p_i = 1)$，且各人的选择相互独立. 若以 $N_i(t)$ 表示 $(0,t]$ 时段内订阅 i 季杂志的顾客数 $(i=1,2,3)$.

(1) 试问 $N_i(t)$ $(i=1,2,3)$ 分别是什么过程？它们是否相互独立？为什么？

(2) 若每订出一季杂志，甲可得 1 元手续费，试求其于时间段 $(0,t]$ 内所得全部手续费 $X(t)$ 的期望与方差.

2.12 (1) 计算过程与 2.11 基本相同

$N_i(t)$ 为参数为 p_i 的泊松过程

它们相互独立.

(2) $X(t) = N_1(t) + 2N_2(t) + 3N_3(t)$

$EX(t) = \lambda p_1 + 2\lambda p_2 + 3\lambda p_3 = \lambda(p_1+2p_2+3p_3)$

$DX(t) = DN_1(t) + 4DN_2(t) + 9DN_3(t) = \lambda(p_1+4p_2+9p_3)$

注意题目里说的是2季，不是第二季

02

习题讲解

3. 信号传送问题. 信号只有 0, 1 两种, 分为多个阶段传输. 在每一步上出错的概率为 α. $X_0 = 0$ 是送出的信号, 而 X_n 是在第 n 步接收到的信号. 假定 X_n 为一 Markov 链, 它有转移概率矩阵 $P_{00} = P_{11} = 1 - \alpha, P_{01} = P_{10} = \alpha,\ 0 < \alpha < 1$. 试求

(a) 两步均不出错的概率 $P\{X_0 = 0, X_1 = 0, X_2 = 0\}$;

(b) 两步传送后收到正确信号的概率;

(c) 五步之后传送无误的概率 $P\{X_5 = 0 | X_0 = 0\}$.

3.3 (a) $P\{X_0=0, X_1=0, X_2=0\} = P_{00}P_{00} = (1-\alpha)^2 = \alpha^2-2\alpha+1$

(b) $P\{X_0=0, X_2=0\} = P_{00}P_{00} + P_{01}P_{10} = (1-\alpha)^2+\alpha^2 = 2\alpha^2-2\alpha+1$

(c) 出错偶数次结果正确.

$P\{X_5=0 | X_0=0\} = P\{出错0次\} + P\{出错2次\} + P\{出错4次\}$.

$P\{出错0次\} = P\{X_0=0, X_1=0, \cdots, X_5=0\} = (1-\alpha)^5$

$P\{出错k次\} = \binom{5}{k}(1-\alpha)^{5-k}\alpha^k$

$\Rightarrow P\{X_5=0 | X_0=0\} = (1-\alpha)^5+\binom{5}{2}(1-\alpha)^3\alpha^2+\binom{5}{4}(1-\alpha)\alpha^4$

P.S. 转移矩阵对称且平稳，用这种方法偷懒，不考虑[illegible]正常做计算 $P^{(n)}$

(c) $-16\alpha^5+40\alpha^4-40\alpha^3+20\alpha^2-5\alpha+1$

虽然一般涉及的矩阵运算比较简单，但考试前想要复习得很扎实的同学可以多复习复习线性代数相关内容，线性代数在很多课程中都会涉及，多复习也没什么坏处。

02

习题讲解

遇事不决，画状态转移图

11. 一 Markov 链有状态 0, 1, 2, 3 和转移概率矩阵

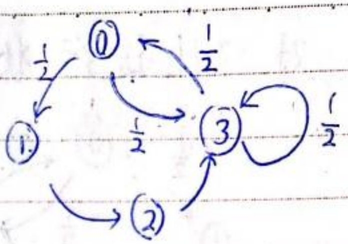
$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

试求 $f_{00}^{(n)}, n = 1, 2, 3, 4, 5, \cdots$，其中 $f_{ii}^{(n)}$ 由

$$P\{X_n = i, X_k \neq i, k = 1, \cdots, n-1 | X_0 = i\}$$

定义.

3.11 $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$



$f_{30}^{(k)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^k}$ 记 $k \le 0$ $f_{41}^{(k)} = 0$

$f_{00}^{(n)} = P_{01}P_{12}P_{23}f_{30}^{(n-3)} + P_{03}f_{30}^{(n-1)}$

$= \frac{1}{2} \cdot f_{30}^{(n-3)} + \frac{1}{2}f_{30}^{(n-1)} = \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^n} \quad (n>3) = \frac{5}{2^n}$

$f_{00}^{(2)} = \frac{1}{4}$ $\quad f_{00}^{(3)} = \frac{1}{8}$ $\quad f_{00}^{(1)} = 0$

($f_{00} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{00}^{(k)} = 2 \cdot \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$

另: $f_{30} = 1$, $f_{03} = 1 \Rightarrow f_{00} = 1$)

02

习题讲解

遇事不决，画状态转移图

11. 一 Markov 链有状态 0, 1, 2, 3 和转移概率矩阵

$$P=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

试求 $f_{00}^{(n)}, n=1,2,3,4,5,\cdots$，其中 $f_{ii}^{(n)}$ 由

$$P\{X_n=i, X_k\neq i, k=1,\cdots,n-1|X_0=i\}$$

定义.

状态 0→1→2→3→0，所有状态互达，属于同一等价类，Markov链不可约

$p_{00}^{(2)}>0$ $p_{00}^{(3)}>0$ 因此状态是非周期的

$f_{00}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\sum_{n=4}^{\infty}\frac{5}{2^n}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+5\times\frac{1}{2^3}=1$ 常返

$\mu_0=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{00}^{(n)}=2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{8}+\sum_{n=4}^{\infty}\frac{5n}{2^n}$

$=\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+5\times(\frac{1}{2}\times2^2-\frac{1}{2}-\frac{2}{4}-\frac{3}{8})$

$=4<\infty$

正常返.

$\sum x^n=\frac{1}{1-x}$

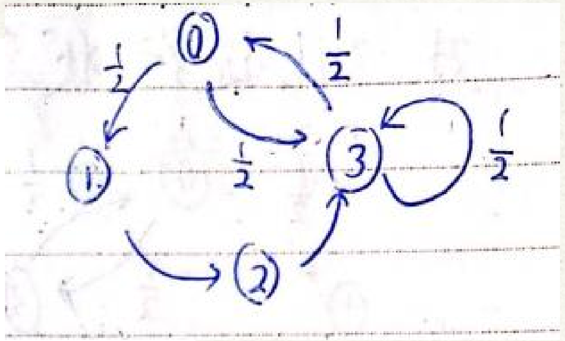
$\sum nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$

$\sum nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}$

或直接利用结论 有限马尔可夫链 必有正常返态.

先通过互达关系找到等价类，在同一个等价类里选择最好判断的状态。

也可以使用之前的结论，不过考试后多写两步用结论检验更稳一点。



02

习题讲解

$p_{ij}^{(n)}$ 与 $f_{ij}^{(n)}$ 的关系

[定理] 对任意状态 $i, j \in I$ 及 $1 \le n < \infty$，有

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} f_{ij}^{(n-k)} p_{jj}^{(k)}$$

注意概率论相关符号的运用

证明：$\forall i,j \in I,\ 1 \le n < +\infty,$

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} f_{ij}^{(n-k)} P_{jj}^{(k)}$$

证明：$P_{ij}^{(n)} = P\{X_n = j \mid X_0 = i\}$

$= \sum_{k=1}^{n} \{X_n = j, X_k = j, X_{k-1} \neq j, \cdots, X_0 \neq j \mid X_0 = i\}$

$+ P\{X_n = j, X_0 = j \mid X_0 = i\}$.

$= \sum_{k=0}^{n} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)}$.

$= \sum_{k=0}^{n} f_{ij}^{(n-k)} P_{jj}^{(k)}$

另：利用 $\sum_{l \neq j} P_{il} f_{lj}^{(k)} = f_{ij}^{(k+1)}$ 进行归纳

02

习题讲解

1、二维对称随机游走常返性判断

常返 $\sum_n p_{00}^{(n)}=\infty$

$p_{00}^{(2n+1)}=0 \quad p_{00}^{(2n)}=\sum_{l_1+l_2=n}\binom{2n}{2l_1}\binom{2l_1}{l_1}\binom{2l_2}{l_2}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$

$$=\sum_{l_1+l_2=n}\frac{(2n)!}{(l_1!)^2(l_2!)^2}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$$

而 $\frac{(2n)!}{(l_1!)^2(l_2!)^2}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{n!}{l_1!\,l_2!}\right)^2$

$$\sum_{l_1+l_2=n}\binom{n}{l_1}\binom{n}{l_2}=\binom{2n}{n}$$

$\therefore p_{00}^{(2n)}=\left[\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right]^2\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$

由Stirling公式 $k!\sim\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k$

$$\left[\frac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}\right]^2\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}=\frac{1}{\pi n}$$

$p_{00}^{(2n)}\sim\frac{1}{\pi n}$

$\sum_{n=1}^{\infty}p_{00}^{(2n)}=+\infty \quad$ 而 $\lim_{n\to+\infty}p_{00}^{(2n)}=0$

故可知其为零常返.

模式化做题，学会这个套路就好。

不能想当然认为可以分解为两个一维对称随机游走，因为这里的l1和l2不一定相等。

02

习题讲解

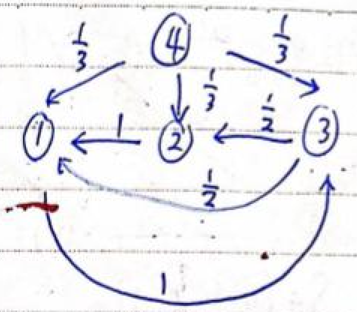
1. $I=\{1,2,3,4\}$.

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

平稳分布？

极限分布？

$$\begin{cases} \pi_1+\pi_2+\pi_3=1 \\ \pi_1=\pi_2+\frac{1}{2}\pi_3 \\ \pi_2=\frac{1}{2}\pi_3 \\ \pi_3=\pi_1 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \pi_1=\frac{2}{5} \\ \pi_2=\frac{1}{5} \\ \pi_3=\frac{2}{5} \end{cases}$$

$\{4\} \cup \{1,2,3\}$

瞬过　正常返

$d(1)=1$. $\Rightarrow$ $\{1,2,3\}$ 非周期正常返

$(\frac{2}{5},\frac{1}{5},\frac{2}{5},0)$ 为平稳分布 也为极限分布

02

习题讲解

➢一般齐次马尔可夫链X

定理6.4.5 设X的状态空间$S=D\cup C_0\cup C_1\cup\cdots$ 其中D是非常返状态集，C_0是零常返状态集，$C_m(m=1,2,\cdots)$是正常返状态的不可约闭集，记$H=\bigcup_{k\geq 1}C_k$，则

（1）X不存在平稳分布的充要条件是H=Φ

（2）X存在唯一平稳分布的重要条件是只有一个正常返的不可约闭集。

（3）X存在无穷多个平稳分布充要条件是至少存在两个以上正常返的不可约闭集。

02

习题讲解

定理 4.3.3 一个不可约的非周期的 Markov 链必属于下述两类之一：

（i）一切状态或者都是暂态，或者都是零常返态；在此情形，在 $n\to\infty$ 时，对一切 i，j 都有 $P_{ij}^n\to 0$，且不存在平稳分布.

（ii）或者其他情形，一切状态都是正常返态，且

$$\pi_j=\lim_{n\to\infty}P_{ij}^n>0.$$

在此情形，$\{\pi_j, j=0,1,2,\cdots\}$ 是一个平稳分布，且不存在其他平稳分布.

注 （1）对于定理 4.3.3 的（ii）部分中所述的情形，我们说，Markov 链是遍历的.

（2）若过程开始于它的极限分布，则所得的 Markov 链是平稳的，这很直观. 对此情形，Markov 链在时刻 0 等价于具有相同的 P 矩阵的独立 Markov 链在时刻 ∞. 因此原过程在时刻 t 等价于第二个过程在时刻 $\infty+t=\infty$，故而是平稳的.

（3）在不可约、正常返、周期情形我们仍有 $\{\pi_j, j=0,1,2,\cdots\}$ 是方程

$$\pi_j=\sum_i\pi_iP_{ij},$$

$$\sum_j\pi_j=1$$

的唯一非负的解.

但是现在 π_j 必须解释为此 Markov 链处在状态 j 的长程时间比例（参见习题 4.17）. 于是，$\pi_j=1/\mu_{jj}$，然而由定理 4.3.1 的（iv）从 j 跨 $nd(j)$ 步到 j 的极限概率为

$$\lim_{n\to\infty}P_{jj}^{nd}=\frac{d}{\mu_{jj}}=d\pi_j,$$

其中 d 是此 Markov 链的周期. □

有关于极限分布和平稳分布的区别，我列一些ross书上的内容

02

习题讲解

四. (15分) 从数$1,2,\ldots,N$任取一个数作为X_1，对$n>1$，从$1,2,\ldots,X_{n-1}$中任取一个数作为X_n，则$\{X_n,n\geq 1\}$为一Markov链.

(1)写出$\{X_n,n\geq 1\}$的一步转移概率矩阵P.

(2) 对该Markov链进行状态分类(几个等价类，周期性，是否常返，正常返等).

(3)极限$\lim_{n\to\infty}P^{(n)}$是否存在？为什么.

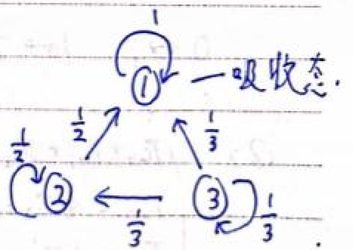
四. $X_1\in\{1,2,\cdots,N\}$，$X_n\in\{1,2,\cdots,X_{n-1}\}$. $\{X_n,n\geq 1\}$.

(1) 一步转移概率矩阵P

(2) 状态分类

(3) $\lim_{n\to\infty}P^{(n)}$ 是否存在.

(1) $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \frac{1}{N-1} & \frac{1}{N-1} & \cdots & & \frac{1}{N-1} & 0 \\ \frac{1}{N} & \frac{1}{N} & \cdots & & \frac{1}{N} & \frac{1}{N} \end{pmatrix}$



(2) $\{1\}\cup\{2,\cdots,N\}$.

非周期正常返　　瞬过

右图为N=3时的状态转移图

$K\to K-1$，$K-1\not\to K$　$\{2\},\cdots,\{N\}$ 为N-1个等价类，$\{1\},\{2\},\cdots,\{N\}$ N个等价类

(3) $\lim_{n\to\infty}P^{(n)}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

注意转移矩阵行和为1

02

习题讲解

五、(20分) 考虑状态空间为 $\mathcal{S}=\{0,1,2,3\}$ 且具有如下转移概率矩阵的 Markov 链 $\{X_n, n\ge 0\}$:

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/2 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

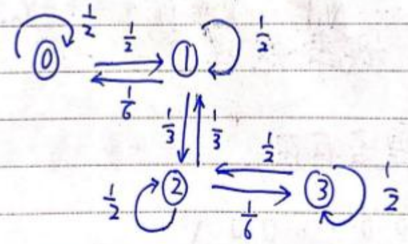
(1) 对状态空间进行分类, 并指出每个状态的周期性、常返和瞬过性;

(2) 求该 Markov 链的平稳分布 $\{\pi_i, i=0,1,2,3\}$;

(3) 若 X_0 具有如上 **(2)** 中的平稳分布，证明 X_n 也具有同样的分布;

(4) 若 X_0 具有如上 **(2)** 中的平稳分布，求 $\mathbf{P}(X_4=0, X_5=1, X_6=2, X_7=1)$;

(1)



$0\leftrightarrow 1,\ 1\leftrightarrow 2,\ 2\leftrightarrow 3,\ d(0)=1, \Rightarrow \{0,1,2,3\}$ 正常返类.

(2)

$$\begin{cases} \pi_0+\pi_1+\pi_2+\pi_3=1 \\ \pi_0=\frac{1}{2}\pi_0+\frac{1}{6}\pi_1 \\ \pi_1=\frac{1}{2}\pi_0+\frac{1}{2}\pi_1+\frac{1}{3}\pi_2 \\ \pi_2=\frac{1}{3}\pi_1+\frac{1}{2}\pi_2+\frac{1}{2}\pi_3 \\ \pi_3=\frac{1}{6}\pi_2+\frac{1}{2}\pi_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_0=\frac{1}{8} \\ \pi_1=\frac{3}{8} \\ \pi_2=\frac{3}{8} \\ \pi_3=\frac{1}{8} \end{cases}$$

(3) X_1 同分布 $\Rightarrow$ X_n 同分布.

$P(X_1=0)=\sum_{i=0}^{3}P(X_1=0\mid X_0=i)=\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{8}$

$P(X_1=1)=\cdots$

$P(X_1=2)=\cdots$

$P(X_1=3)=\cdots$

p.s. 其实这一步计算就是又做了1遍(2), 也算是理解平稳分布中"平稳"的含义.

(4) $P(X_4=0, X_5=1, X_6=2, X_7=1)$

$=P(X_5=1, X_6=2, X_7=1\mid X_4=0)\,P(X_4=0)$

(X_4 同 X_0 分布).

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{8}$

$=\frac{1}{144}$

02

习题讲解

第四章的内容没讲完，只简单说两次作业，不做内容梳理了（毕竟我是老师上课时无数次diss的统计专业学生，这部分内容也是跟着大家一起学习的）

二、(15分) 设随机过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为 λ 的 Possion 过程，随机过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 定义为：

$$\begin{cases} X(t) = 1, & N(t) \text{ 取偶数;} \\ X(t) = -1, & N(t) \text{ 取奇数.} \end{cases}$$

(1) 求 $X(t)$ 的分布；

(2) 讨论过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 的平稳性；

(3) $\{X(t), t \geq 0\}$ 是否具有均值遍历性.

二、(1) $P(X(t)=1) = P(N(t)=\text{偶数}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{2k}}{(2k)!}$

$P(X(t)=-1) = P(N(t)=\text{奇数}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{2k+1}}{(2k+1)!}$

(2) $EX(t) = 1 \cdot P(X(t)=1) - 1 \cdot P(X(t)=-1)$ 若要计算 $R_X(t,s)$

$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{2k}}{(2k)!} - \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)$ $R_X(t,s) = EX(t)X(s) - EX(t)X(s)$

$EX(t)X(s) = 1 \cdot P\{X(t), X(s)\text{同号}\} - 1 \cdot P\{\text{异号}\}$

$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}(-\lambda t)^k}{k!} = e^{-2\lambda t}$ 设 $t \geq s$ 即 $P\{X(t), X(s)\text{同号}\} = P\{N(t-s)\text{偶}\}$

均值不是常数，不是平稳过程. $R_X(t,s) = \cancel{EX(t)X(s)} = e^{-2\lambda(t-s)}(1-e^{-4\lambda s})$

(3) 无均值遍历性.

和出题人比胆量的题目……

02

习题讲解

四、 (20分) 设 $X(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$, ω 是常数, A 与 B 为相互独立的随机变量, 且 $A \sim N(0,1)$, $B \sim N(0,1)$.

(1) 验证 $X(t)$ 是否为宽平稳过程;

四. (1) ① $EX(t) = EA\cos wt + EB\sin wt$　　　$EA = EB = 0$

$= 0$　　　$EA^2 = EB^2 = 1$

② $R_X(t,s) = Cov(A\cos wt + B\sin wt,\ A\cos ws + B\sin ws)$

$= E(A\cos wt + B\sin wt)(A\cos ws + B\sin ws)$

$= EA^2\cos wt\cos ws + EB^2\sin wt\sin ws$

$= \cos w(t-s)$

只与 $t-s$ 有关

③ $R_X(0) = 1 < \infty$

二阶矩存在

$X(t)$ 是宽平稳过程.

3. 设 $X_n=\sum\limits_{k=1}^{N}\sigma_k\sqrt{2}\cos(a_k n-U_k)$, 这里 σ_k 和 a_k 为正常数, $k=1,\cdots,N;U_1,\cdots,U_n$ 是 $(0,2\pi)$ 上独立均匀分布随机变量, 证明 $\{X_n,n=0,\pm1,\cdots\}$ 是平稳过程.

4.3 $X_n=\sum\limits_{k=1}^{N}\sigma_k\sqrt{2}\cos(a_k n-U_k)$. $\sigma_k, a_k>0$.

$U_1,\cdots,U_n \ \text{iid} \sim U(0,2\pi)$.

$$E[X_n]=\sum_{k=1}^{N}E[\sigma_k\sqrt{2}\cos(a_k n-U_k)]$$
$$=\sum_{k=1}^{N}\sigma_k\sqrt{2}\cdot E[\cos(a_k n-U_k)]$$
$$=\sum_{k=1}^{N}\sigma_k\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\cos(a_k n-u)\frac{1}{2\pi}du.$$
$$=-\sum_{k=1}^{N}\frac{\sigma_k\sqrt{2}}{2\pi}\sin(a_k n-u)\Big|_0^{2\pi}.$$
$$=0.$$

$$\mathrm{Cov}(X_{n+s},X_n)=\mathrm{Cov}\Big(\sum_{k=1}^{N}\sigma_k\sqrt{2}\cos(a_k(n+s)-U_k),\sum_{k=1}^{N}\sigma_k\sqrt{2}\cos(a_k n-U_k$$
$$=\sum_{k=1}^{N}\sigma_k^2\cdot 2\cdot\mathrm{Cov}(\cos(a_k(n+s)-U_k),\cos(a_k n-U_k))$$
$$=\sum_{k=1}^{N}\sigma_k^2\cdot 2\int_0^{2\pi}\cos(a_k(n+s)-u)\cos(a_k n-u)\frac{1}{2\pi}du.$$
$$=\sum_{k=1}^{N}\sigma_k^2\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\cos(a_k s)+\cos(a_k(n+s)+a_k n-2u)]du.$$
$$=\sum_{k=1}^{N}\sigma_k^2\cos(a_k s).$$

$\Rightarrow \{X_n, n=0,\pm1,\cdots\}$ 是平稳过程.

加强计算，部分人
漏掉了这里的2

02

习题讲解

02

习题讲解

16. 设 X_0 为随机变量, 其概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} 2x, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

设 X_{n+1} 在给定 $X_0, X_1, \cdots X_n$ 下是 $(1-X_n, 1]$ 上的均匀分布, $n=0,1,2,\cdots$, 证明 $\{X_n, n=0,1,\cdots\}$ 的均值有遍历性.

4.16. X_0, $f(x)=\begin{cases} 2x & 0\leq x\leq 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

$X_{n+1} \sim U(1-X_n, 1]$.

$E[X_0] = \int_0^1 x\cdot 2x\,dx = \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$.

$E[X_1] = 1-\frac{1}{2}E[X_0] = \frac{2}{3}$.

$\cdots$

归纳法, $E[X_n]=\frac{2}{3}$.

$E[X_0^2] = \int_0^1 x^2\cdot 2x\,dx = \frac{2}{4}x^4\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$.

$E[X_1^2] = \int_0^1\int_{1-x}^1 u^2\cdot\frac{1}{x}\,du\cdot 2x\,dx = \frac{2}{3}(\frac{x^4}{4}+\frac{3}{2}x^2-x^3)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$.

$E[X_2^2] = E\{E[X_2^2|X_1]\} = E\{\int_{1-X_1}^1 u^2\cdot\frac{1}{X_1}du\} = E[\frac{1}{3}X_1^2+1-X_1]$

$= \frac{1}{2}$.

$\cdots$

归纳法, $E[X_n^2]=\frac{1}{2}$. $\Rightarrow Var[X_n]=\frac{1}{18}$ $(R(0))$

$E[X_n] = 1-\frac{1}{2}E[X_{n-1}] = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}E[X_{n-2}] = \frac{3}{4}-\frac{1}{8}E[X_{n-3}]$.

$= \frac{5}{8}+\frac{1}{16}E[X_{n-4}] = \cdots$

$\Rightarrow E[X_{n+k}] = \begin{cases} \frac{2}{3}[1-(-\frac{1}{2})^k] + (-\frac{1}{2})^k E[X_n] & k\geq 1. \\ E[X_n] & k=0. \end{cases}$

$Cov(X_{n+k}, X_n) = E[(X_{n+k}-\frac{2}{3})(X_n-\frac{2}{3})]$

$= E\{E[(X_{n+k}-\frac{2}{3})(X_n-\frac{2}{3})|X_n]\} = E\{E[X_{n+k}X_n-\frac{4}{9}|X_n]\}$

$= \frac{2}{3}[1-(-\frac{1}{2})^k]E[X_n] + (-\frac{1}{2})^k E[X_n^2] - \frac{4}{9}$

$= \frac{4}{9}[1-(-\frac{1}{2})^k] - (-\frac{1}{2})^{k+1} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}(-\frac{1}{2})^k$ $k\geq 1$.

$\Rightarrow \{X_n, n\geq 0\}$ 平稳.

02

习题讲解

16. 设 X_0 为随机变量, 其概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & 其他, \end{cases}$$

设 X_{n+1} 在给定 $X_0, X_1, \cdots X_n$ 下是 $(1-X_n, 1]$ 上的均匀分布, $n = 0, 1, 2, \cdots$, 证明 $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ 的均值有遍历性.

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{\tau=0}^{N-1} R(\tau) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\left[\frac{1}{18} + \sum_{\tau=1}^{N-1} \frac{1}{18}\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right]$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\left[\frac{1}{18} + \frac{1}{18}\cdot\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)^N\right)\right] = 0$$

$\Rightarrow \{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$ 有均值遍历性.

最后可以用推论判定，关键
是找到求协方差的步骤

02

习题讲解

17. 设 $\{\varepsilon_n, n=0,\pm1,\cdots\}$ 为白噪声序列，令

$$X_n=\alpha X_{n-1}+\varepsilon_n,\quad |\alpha|<1,\quad n=\cdots,-1,0,1,\cdots,$$

则 $X_n=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k\varepsilon_{n-k}$，从而证明 $\{X_n, n=\cdots,-1,0,1,\cdots\}$ 为平稳序列．求出该序列的协方差函数．此序列是否具有遍历性？

4.17. $E\,\sigma_m\sigma_n=\begin{cases}\sigma^2 & m=n\\ 0 & m\neq n\end{cases}$ $\quad E\sigma_n=0$

$E[|X_n|]\leq E\left[\sum_{k=0}^{\infty}|\alpha^k\varepsilon_{n-k}|\right]\leq E\sum_{k=0}^{\infty}|\varepsilon_{n-k}|$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n}E[\varepsilon_{n-k}]\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}E|\varepsilon_{n-k}|$

$MCT\Rightarrow E\sum_{k=0}^{\infty}|\alpha^k\varepsilon_{n-k}|=\sum_{k=0}^{\infty}E|\alpha^k\varepsilon_{n-k}|$

$DCT\Rightarrow E[X_n]=E\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k\varepsilon_{n-k}\underset{\uparrow}{=}\sum_{k=0}^{\infty}E[\alpha^k\varepsilon_{n-k}]=0$

上述式子就是为了这个"="，严格说明挺繁琐的．一般也不用考虑不成立的情况．

$Cov(X_{n+s},X_n)=E[X_{n+s}X_n]=\lim_{m\to\infty}E\Big[\underbrace{\sum_{k=0}^{m}\alpha^k\varepsilon_{n+s-k}\sum_{k=0}^{m}\alpha^k\varepsilon_{n-k}}_{\downarrow a.s.\ X_{n+s}X_n}\Big]$

（同理，严格来说，需要说明）．

$=\sigma^2\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^{k+s}\alpha^k$

$=\sigma^2\dfrac{\alpha^s}{1-\alpha^2}$

$\Rightarrow$ 平稳．

$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\tau=0}^{N-1}R(\tau)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\tau=0}^{N-1}\sigma^2\frac{\alpha^\tau}{1-\alpha^2}$

$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\cdot\frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}\cdot\frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}$

$=0$

$\Rightarrow$ 具有均值遍历性．

$Y_\tau(n)=X(n+\tau)X(n)\qquad E[Y_\tau(n)]=\frac{\sigma^2\alpha^\tau}{1-\alpha^2}$

$\bar{Y}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}Y(k)$

$Cov(Y_\tau(n+s),Y_\tau(n))=Cov(X(n+s+\tau)X(n+s),X(n+\tau)X(n))$

$=\underline{E[X(n+s+\tau)X(n+s)X(n+\tau)X(n)]}-\left(\frac{\sigma^2\alpha^\tau}{1-\alpha^2}\right)^2$

$\downarrow$

感觉计算不了　没有 $E[\sigma_m\sigma_n\sigma_p\sigma_q]$ 的条件

$\Rightarrow$ 无法判断是否有协方差遍历性

p.s. 协方差遍历性不考，也就不用考虑这些了

这道题大家写的时候都不会考虑这些细节，作为非专业学生也无可厚非。只是写参考答案，我就把一些细节问题写出来，或许能解答一些同学对细节的疑问

USTC

THANKS

余汶轩