较难的题目

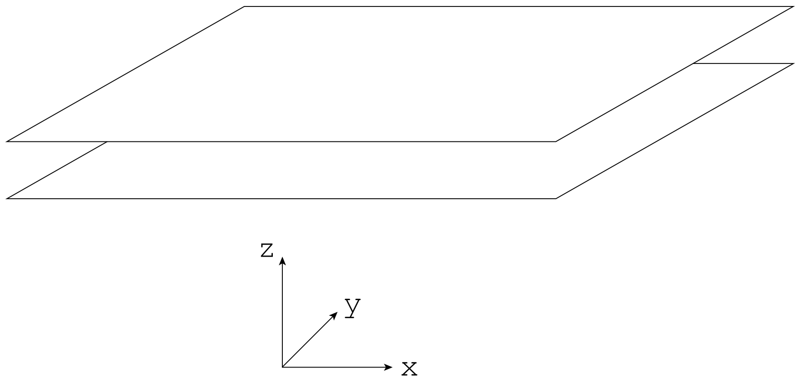


图 A

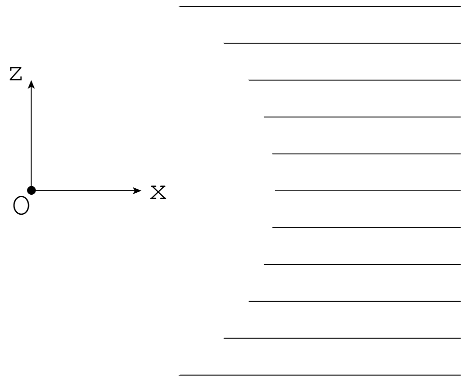


图 B

一、如图 A 所示的两块平行薄板，由理想导体构成，板间距为 d，y 方向无限延伸。两板间的电磁波沿 x 正向以行波形式传播，其电场强度沿 y 方向，可表述为

$$\mathbf{E} = E_0 \sin\left(\frac{2\pi z}{\lambda_z}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda_x} - \omega t\right) \mathbf{j},$$

式中 ω 为圆频率，t 为时间，λ_z, λ_x 为待定参量，$\lambda_z, \lambda_x > 0$。

(1) 证明 λ_z 只能取如下值: $\lambda_z = 2d/m,\ m = 1, 2, \ldots$

(2) 当 $m = 1$ 时，求 λ_x。

(3) 如将一系列板间距相等而长度不等的理想导体板相对于沿 y 方向无限延伸的线状波源「与纸面交于 O 点」平行对称叠排，板的右端对齐，而板的长度有一定分布「此结构于纸面相交的截面图如图 B 所示」，则在这一结构的右端可输出沿 x 方向传播的平面电磁波。试给出满足这一要求的板在 xOz 截面内左侧边缘「如图 B 所示」所满足的曲线方程「取 $m = 1$，已知波源到最中间板的左端水平距离为 L，曲线方程可以用极坐标 $r = f(\theta)$ 表示」。

解答：

(1)
因为平行薄板由理想导体构成，所以内部的电场强度为 0。因此，在 $z=0$ 与 $z=d$ 时，$\mathbf{E}\equiv 0$。这也表明

$$\sin\left(\frac{2\pi d}{\lambda_z}\right)\equiv 0,$$

$$\frac{2\pi d}{\lambda_z}=\pi m,$$

$$\lambda_z=\frac{2d}{m},$$

其中 m 为正整数。

(2)
此时

$$\mathbf{E}=E_0\sin\left(\frac{\pi z}{d}\right)\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda_x}-\omega t\right)\mathbf{j},$$

根据 Maxwell 方程组，再利用真空中电荷密度 $\rho=0$ 与电流密度 $\mathbf{J}=0$ 的性质，可得

$$\begin{cases}\mathrm{curl}\ \mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},\\ \mathrm{curl}\ \mathbf{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t},\end{cases}$$

因此

$$\mathrm{curl}\circ\mathrm{curl}\ \mathbf{E}=-\frac{\partial(\mathrm{curl}\ \mathbf{B})}{\partial t}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2},$$

而

$$\mathrm{curl}\circ\mathrm{curl}\ \mathbf{E}=\mathrm{grad}\circ\mathrm{div}\ \mathbf{E}-\Delta\mathbf{E},$$

$$\mathrm{div}\ \mathbf{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0,$$

因此

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\Delta \mathbf{E},$$

$$\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{E} = \left(\left(\frac{2\pi}{\lambda_x}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{d}\right)^2\right)\mathbf{E},$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \left(\frac{2\pi}{\lambda_x}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{d}\right)^2,$$

$$\lambda_x = \frac{1}{\sqrt{(\omega/2\pi c)^2 - 1/(2d)^2}}.$$

(3)

在平面 $x = L$ 上的任意一点，电磁波的相位处处相等，否则电磁波会相互干涉。令曲线的极坐标方程为 $r = f(\theta)$，电磁波首先从 O 点发射到极坐标 $(f(\theta), \theta)$ 的位置，波长为 $\lambda_1 = 2\pi c/\omega$；之后电磁波向右传播，波长为 $\lambda_2 = \lambda_x$。因此，电磁波在平面 $x = L$ 与 O 点之间的相位差为

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda_1}r + \frac{2\pi}{\lambda_2}(L - r\cos\theta) = \frac{2\pi}{\lambda_1}f(\theta) + \frac{2\pi}{\lambda_2}(L - f(\theta)\cos\theta),$$

这个值与 θ 是无关的。而 $f(0) = L$，因此

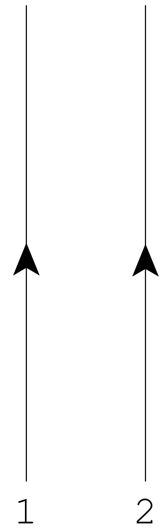
$$\phi = \phi\Big|_{\theta=0} = \frac{2\pi}{\lambda_1}f(0) + \frac{2\pi}{\lambda_2}(L - f(0)) = \frac{2\pi}{\lambda_1}L,$$

$$\frac{2\pi}{\lambda_1}f(\theta) + \frac{2\pi}{\lambda_2}(L - f(\theta)\cos\theta) = \frac{2\pi}{\lambda_1}L,$$

$$f(\theta) = \frac{1/\lambda_1 - 1/\lambda_2}{1/\lambda_1 - \cos\theta/\lambda_2}L = \frac{1-a}{1-a\cos\theta}L,$$

其中 $a = \sqrt{1 - (\pi c/\omega d)^2}$。

二、如图所示，竖直固定平行放置的两条相同长直导线 1 和 2 相距为 a ($a \ll$ 长直导线的长度)，两导线中通有方向和大小都相同的稳恒电流，电流方向向上。导线中正离子都是静止的，每单位长度的导线中正离子的电荷量为 λ；形成电流的导电电子以速度 v_0 沿导线向下匀速运动，每单位长度的导线中导电电子的电荷量为 $-\lambda$。已知：单位长度电荷量为 η 的无限长均匀带电直导线在距其距离为 r 处产生的电场的电场强度大小为 $E = k_e \dfrac{2\eta}{r}$，其中 k_e 是常量；当无限长直导线通有稳恒电流 I 时，电流在距导线距离为 r 处产生的磁场的磁感应强度大小为 $B = k_m \dfrac{2I}{r}$，其中 k_m 是常量。试利用狭义相对论中的长度收缩公式求常量 k_e 和 k_m 的比值。



提示： 忽略重力；正离子和电子的电荷量与惯性参照系的选取无关；真空中的光速为 c。

解答：

在相对于正离子静止的参考系 S 中，导线中的正离子不动，导电电子以速度 v_0 向下匀速运动；在相对于导电电子静止的参考系 S' 中，导线中导电电子不动，正离子以速度 v_0 向上匀速运动。下面分四步进行分析。

第一步：
在参考系 S' 中，考虑导线 2 对导线 1 中正离子施加电场力的大小和方向。若参考系 S 中一些正离子所占据的长度为 l，在参考系 S' 中这些正离子所占据的长度变为 l'_+，由相对论中的长度收缩公式有

$$l'_+ = l\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}},$$

设在参考系 S 和 S' 中，每单位长度导线中正离子电荷量分别为 λ 和 λ'_+，由于正离子的电荷量与惯性参考系的选取无关，故

$$\lambda'_+ l'_+ = \lambda l,$$

因此

$$\lambda'_+ = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}},$$

设在参考系 S 中一些导电电子所占据的长度为 l，在参考系 S' 中这些正离子所占据的长度变为 l'_-，由相对论中的长度收缩公式有

$$l = l'_-\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}},$$

设在参考系 S 和 S' 中，每单位长度导线中导电电子电荷量分别为 $-\lambda$ 和 λ'_-，由于导电电子的电荷量与惯性参考系的选取无关，故

$$\lambda'_- l'_- = -\lambda l,$$

因此

$$\lambda'_- = -\lambda\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}},$$

在参考系 S' 中，导线 2 单位长度带的电荷量为

$$\lambda' = \lambda'_+ + \lambda'_- = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}} + (-\lambda)\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}\frac{v_0^2}{c^2},$$

它在导线 1 处产生电场的电场强度的大小为

$$E' = \frac{2k_e\lambda'}{a} = \frac{2k_e\lambda v_0^2}{c^2 a\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}},$$

电场强度方向水平向左。导线 1 中电荷量为 q 的正离子受到的电场力的大小为

$$f'_{e+} = qE' = \frac{2k_e q\lambda v_0^2}{c^2 a\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}},$$

电场力方向水平向左。

第二步：

在参考系 S' 中，考虑导线 2 对导线 1 中正离子施加磁场力的大小和方向。在参考系 S' 中，以速度 v_0 向上运动的正离子形成的电流为

$$I' = \lambda'_+ v_0 = \frac{\lambda v_0}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}},$$

导线 2 中的电流 I' 在导线 1 处产生磁场的磁感应强度大小为

$$B' = \frac{2k_m I'}{a} = \frac{2k_m\lambda v_0}{a\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}},$$

磁感应强度方向垂直纸面向外。导线 1 中电荷量为 q 的正离子受到的磁场力的大小为

$$f'_{m+} = q\,v_0 B' = \frac{2k_m q\lambda v_0^2}{a\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}},$$

磁场力方向水平向右，与正离子所受到的电场力的方向相反。

第三步：
在参考系 S 中，考虑导线 2 对导线 1 中正离子施加电场力和磁场力的大小和方向。由题设条件，导线 2 所带的正电荷与负电荷的和为零，即

$$\lambda+(-\lambda)=0,$$

因而，导线 2 对导线 1 中正离子施加电场力为零，

$$f_{e+}=0,$$

注意到在参考系 S 中，导线 1 中正离子不动，

$$v_{1+}=0,$$

导线 2 对导线 1 中正离子施加磁场力为零，

$$f_{m+}=q v_{1+}B=0,$$

式中，B 是在参考系 S 中导线 2 的电流在导线 1 处产生的磁感应强度的大小。于是，在参考系 S 中，导线 2 对导线 1 中正离子施加电场力和磁场力的合力为零。

第四步：
已说明在参考系 S 中导线 2 对导线 1 中正离子施加电场力和磁场力的合力为零，如果导线 1 中正离子还受到其他力的作用，所有其他力的合力必为零「因为正离子静止」。在参考系 S' 中，导线 2 对导线 1 中正离子施加的电场力和磁场力的合力的大小为

$$f'=f'_{m+}-f'_{e+},$$

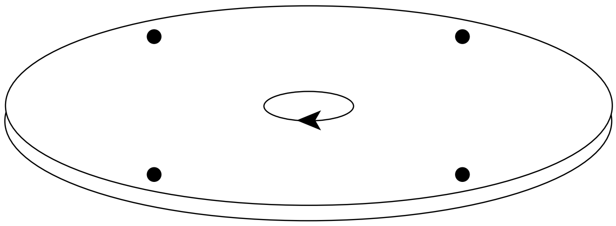
因为相对参考系 S'，上述可能存在的其他力的合力仍应为零，而正离子仍处在匀速运动状态，所以上述表达式应等于零，故

$$f'_{m+}=f'_{e+},$$

因此

$$\frac{2k_m q\lambda v_0^2}{a\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}=\frac{2k_e q\lambda v_0^2}{c^2 a\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}},$$

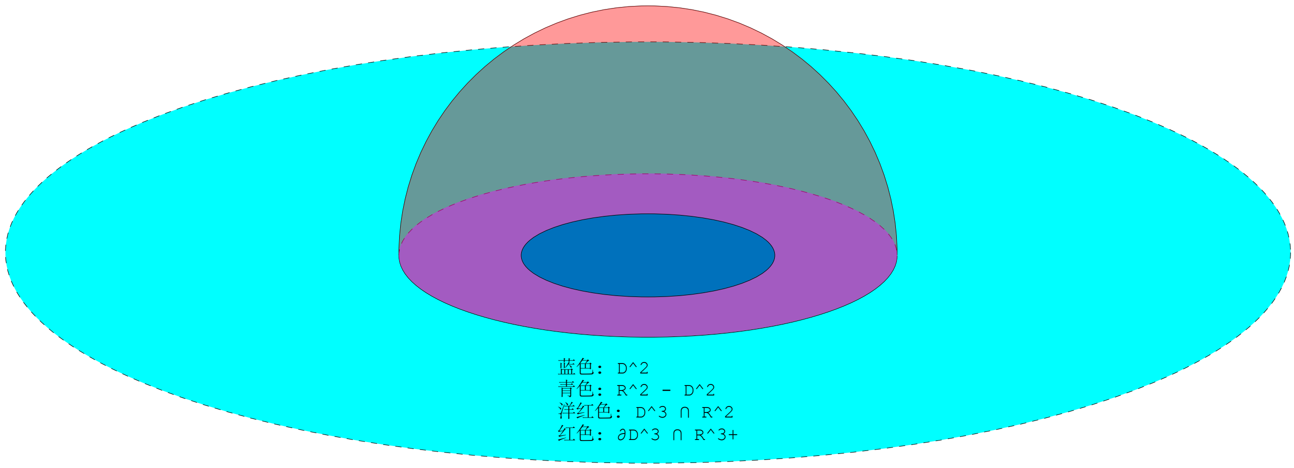
$$\frac{k_e}{k_m}=c^2.$$



三、如图所示，一半径为 R 的轻质「质量可以忽略不计」绝缘塑料薄圆盘水平放置，可绕过圆盘中心的竖直固定轴无摩擦地自由转动。一半径为 a $(a \ll R)$ 的轻质小圆线圈固定在盘面上，圆线圈与圆盘共轴。在盘边缘处等间隔地固定 4 个质量均为 m 的带正电的均匀小球，每个小球所带电荷量均为 q。初始时圆盘静止，圆线圈中通有恒定电流 I，方向沿顺时针方向「从上往下看」。若切断圆线圈中的电流，则圆盘将发生转动。求薄圆盘转动的角速度大小。

假设金属小球可视为质点，不计小圆线圈的自感和带电金属小球因运动所产生的磁场。已知固定在圆盘面上的半径为 a，通有电流 I 的圆线圈在圆盘平面内，距线圈圆心的距离为 r $(r \gg a)$ 处产生的磁感应强度的大小为 $B = \dfrac{\mu_0 a^2 I}{4r^3}$，当线圈中的电流沿顺时针方向时，磁场方向垂直于圆盘平面且竖直向上。

解答：



记圆盘通过的磁通量为 Φ，圆盘边缘的感应电场为

$$E=-\frac{1}{2\pi R}\frac{d\Phi}{dt},$$

每个金属小球受到的作用力均为

$$F=qE=-\frac{q}{2\pi R}\frac{d\Phi}{dt},$$

总力矩为

$$\tau=4RF=-\frac{2q}{\pi}\frac{d\Phi}{dt},$$

转动惯量为

$$J=4mR^2,$$

圆盘的角加速度为

$$\dot{\omega}=\frac{\tau}{J}=-\frac{q}{2\pi mR^2}\frac{d\Phi}{dt},$$

切断圆线圈中的电流后，通过圆盘的磁通量从 Φ_0 降为 0，因此，切断电流后，圆盘的角速度为

$$\omega=\int_0^{\infty}\dot{\omega}\,dt=-\frac{q}{2\pi mR^2}\int_0^{\infty}\frac{d\Phi}{dt}dt=\frac{q\Phi_0}{2\pi mR^2},$$

因此，只需要知道初始时刻，通过圆盘的磁通量 Φ_0 即可。

选取半径为 ρ ($\rho \gg R$) 的半球，它的边界分为两部分，一部分可以视为半径为 ρ 的球 D^3 的边界 ∂D^3 与上半区域 $\mathbb{R}^3_+$ 的交集 $\partial D^3 \cap \mathbb{R}^3_+$，另一部分可以视为半径为 ρ 的球 D^3 与平面 $\mathbb{R}^2$ 的交集 $D^3 \cap \mathbb{R}^2$。半球的边界是一个封闭并紧致的曲面，根据高斯定理

$$\int_{\partial D^3 \cap \mathbb{R}^3_+} \mathbf{B} \cdot \mathbf{N}\, dA + \int_{D^3 \cap \mathbb{R}^2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{N}\, dA = 0,$$

其中 $\mathbf{N}$ 为垂直于曲面，方向向外的单位矢量。在 $\rho \to \infty$ 时，$\int_{\partial D^3 \cap \mathbb{R}^3_+} \mathbf{B} \cdot \mathbf{N}\, dA$ 这一项趋近于 0「这是因为在 $r \to \infty$ 时，磁矩产生的磁场 $\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(-\frac{\mathbf{m}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5}\right)$ 的大小满足 $B \le \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{m}{r^3} + \frac{3(mr)r}{r^5}\right) = \frac{\mu_0 m}{\pi r^3}$，因此曲面积分 $\left|\int_{\partial D^3 \cap \mathbb{R}^3_+} \mathbf{B} \cdot \mathbf{N}\, dA\right| \le B 2\pi r^2 = \frac{2\mu_0 m}{r}$，这个曲面积分在 $r \to \infty$ 时收敛于 0」，因此

$$\lim_{\rho \to \infty} \int_{D^3 \cap \mathbb{R}^2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{N}\, dA = 0,$$

因此

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{N}\, dA = 0,$$

$$\int_{D^2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{N}\, dA + \int_{\mathbb{R}^2 - D^2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{N}\, dA = 0,$$

而圆盘通过的磁通量为「这个时候 $\mathbf{N}$ 的方向竖直向下」

$$\Phi_0 = -\int_{D^2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{N}\, dA,$$

因此

$$\Phi_0 = \int_{\mathbb{R}^2 - D^2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{N}\, dA,$$

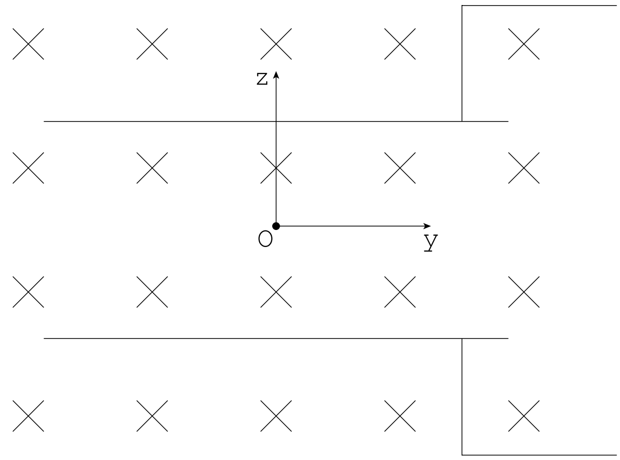
而根据题目提示，在区域 $\mathbb{R}^2 - D^2$ 处，$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 a^2 I}{4r^3}\mathbf{N}$，因此

$$\Phi_0 = \int_{\mathbb{R}^2 - D^2} -\frac{\mu_0 a^2 I}{4r^3}\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}\, dA = \int_R^\infty -\frac{\mu_0 a^2 I}{4r^3} 2\pi r\, dr = -\frac{\pi \mu_0 a^2 I}{2R},$$

切断电流后，圆盘的角速度为「负号表明圆盘是顺时针方向转动的」

$$\omega = \frac{q\Phi_0}{2\pi m R^2} = -\frac{\mu_0 q a^2 I}{4 m R^3}.$$

四、平行板电容器两极板分别位于 $z = \pm d/2$ 的平面内，电容器起初未被充电。整个装置处于均匀磁场中，磁感应强度为 $\mathbf{B} = (-B, 0, 0)$，如图所示。在电容器参考系 S 中只存在磁场；而在以 y 轴正方向恒定速度 $\mathbf{v} = (0, v, 0)$ 相对于电容器运动的参考系 S' 中，可能既有电场 $\mathbf{E}' = (E'_x, E'_y, E'_z)$ 又有磁场 $\mathbf{B}' = (B'_x, B'_y, B'_z)$。试在非相对论情形下，从伽利略速度变缓，求出在参考系 S' 中电场 $\mathbf{E}' = (E'_x, E'_y, E'_z)$ 和磁场 $\mathbf{B}' = (B'_x, B'_y, B'_z)$ 的表达式。已知电荷量和作用在物体上的合力在伽利略变换下不变。



解答：

在参考系 S 中，速度为 $\mathbf{v}_0$ 的电荷受力为

$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B},$$

变换到参考系 S'，电荷速度变为

$$\mathbf{v}_0' = \mathbf{v}_0 - \mathbf{v},$$

因此，在参考系 S' 中，电荷受力为

$$\mathbf{F}' = q(\mathbf{E}' + \mathbf{v}_0' \times \mathbf{B}'),$$

根据题目条件

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}',$$

因此

$$\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B} = \mathbf{E}' + \mathbf{v}_0' \times \mathbf{B}',$$

当 $\mathbf{v}_0' = 0$，即 $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}$ 时

$$\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B} = \mathbf{E}',$$

因此

$$\mathbf{E}' = \mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

写成分量形式

$$\begin{cases} E_x' = 0, \\ E_y' = 0, \\ E_z' = vB, \end{cases}$$

代入 $\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B} = \mathbf{E}' + \mathbf{v}_0' \times \mathbf{B}'$ 可得

$$\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{v}_0' \times \mathbf{B}',$$

因此

$$(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}) \times \mathbf{B} = \mathbf{v}_0' \times \mathbf{B}',$$

$$\mathbf{v}_0' \times \mathbf{B} = \mathbf{v}_0' \times \mathbf{B}',$$

这个等式对于任意 $\mathbf{v}_0'$ 都成立，因此

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B},$$

写成分量形式

$$\begin{cases} B_x' = -B, \\ B_y' = 0, \\ B_z' = 0. \end{cases}$$

接下来的内容与习题无关，可以选择性欣赏，但是不看也完全没关系。「我觉得你也看不懂」

Exterior Algebra：
对于矢量空间 V^*，定义运算 $\wedge$，满足如下性质：

(a) 线性：对于 $c, c' \in \mathbb{R}$，$\alpha, \beta \in V^*$，

$$(c\alpha + c'\alpha') \wedge \beta = c(\alpha \wedge \beta) + c'(\alpha' \wedge \beta),$$
$$\beta \wedge (c\alpha + c'\alpha') = c(\beta \wedge \alpha) + c'(\beta \wedge \alpha'),$$

(b) 结合律：对于 $\alpha, \beta, \gamma \in V^*$，

$$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma,$$

所以 $(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_m) \wedge (\alpha'_1 \wedge \cdots \wedge \alpha'_n) = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_m \wedge \alpha'_1 \wedge \cdots \wedge \alpha'_n$。

(c) 反对称性：对于 $\alpha, \beta \in V^*$，

$$\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha,$$

所以 $\alpha \wedge \alpha = 0$。

定义矢量空间 $\Lambda^n(V^*)$，$\Lambda^n(V^*)$ 中的任意元素都可以表述为 0 或者形如 $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$ 形式的线性组合，其中 $\alpha_i \in V^*$。根据性质 (a) (b) 可以得出，当 $\omega \in \Lambda^k(V^*), \eta \in \Lambda^l(V^*)$ 时，

$$\omega \wedge \eta \in \Lambda^{k+l}(V^*),$$

定义矢量空间的运算

$$\Lambda^k(V^*)\Lambda^l(V^*) = \left\{ \omega \wedge \eta \,\middle|\, \omega \in \Lambda^k(V^*), \eta \in \Lambda^l(V^*) \right\},$$

因此

$$\Lambda^k(V^*)\Lambda^l(V^*) \subseteq \Lambda^{k+l}(V^*),$$

如果定义

$$\Lambda(V^*) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda^k(V^*),$$

那么 $\wedge$ 是 $\Lambda(V^*)$ 上的二元运算。

为了让表述更加简便，以下表达式省略了光速 c。

在相对论情形下，可以定义 2–微分形式「2–Form」$\omega \in \Lambda^2(V^*)$

$$\omega = E_x dx \wedge dt + E_y dy \wedge dt + E_z dz \wedge dt + B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy,$$

相对论的洛伦兹变换 $F: M \to N,\ F(x, y, z, t) = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t})$ 满足

$$\begin{cases} \tilde{x} = \gamma(x - \beta t), \\ \tilde{y} = y, \\ \tilde{z} = z, \\ \tilde{t} = \gamma(t - \beta x), \end{cases}$$

其中 $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$。因此 1–微分形式「1–Form」的拉回「Pullback」为

$$\begin{cases} F^*(d\tilde{x}) = d(\gamma(x - \beta t)) = \gamma(dx - \beta dt), \\ F^*(d\tilde{y}) = dy, \\ F^*(d\tilde{z}) = dz, \\ F^*(d\tilde{t}) = d(\gamma(t - \beta x)) = \gamma(dt - \beta dx), \end{cases}$$

利用上一页中运算 $\wedge$ 的性质，可得 2–微分形式的拉回为

$$\begin{aligned} &F^*\left(\tilde{E}_x d\tilde{x} \wedge d\tilde{t} + \tilde{E}_y d\tilde{y} \wedge d\tilde{t} + \tilde{E}_z d\tilde{z} \wedge d\tilde{t} + \tilde{B}_x d\tilde{y} \wedge d\tilde{z} + \tilde{B}_y d\tilde{z} \wedge d\tilde{x} + \tilde{B}_z d\tilde{x} \wedge d\tilde{y}\right) \\ &= \tilde{E}_x dx \wedge dt + \gamma(\tilde{E}_y + \beta\tilde{B}_z) dy \wedge dt + \gamma(\tilde{E}_z - \beta\tilde{B}_y) dz \wedge dt + \tilde{B}_x dy \wedge dz + \gamma(\tilde{B}_y - \beta\tilde{E}_z) dz \wedge dx + \gamma(\tilde{B}_z + \beta\tilde{E}_y) dx \wedge dy \\ &= E_x dx \wedge dt + E_y dy \wedge dt + E_z dz \wedge dt + B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy, \end{aligned}$$

因此，电磁场的相对论变换为

$$\begin{cases} E_x = \tilde{E}_x, \\ E_y = \gamma(\tilde{E}_y + \beta\tilde{B}_z), \\ E_z = \gamma(\tilde{E}_z - \beta\tilde{B}_y), \\ B_x = \tilde{B}_x, \\ B_y = \gamma(\tilde{B}_y - \beta\tilde{E}_z), \\ B_z = \gamma(\tilde{B}_z + \beta\tilde{E}_y). \end{cases}$$