中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

电　磁　学
(Electromagnetism)

第五章 介质中的静磁场1

一、磁性 磁化 磁介质

- 磁性：磁体具有吸引铁磁性物质的能力。
  - 不仅磁体具有磁性，而且被吸引着的铁磁性物质也具有磁性。
  - 处于磁场中的其它物质都或多或少具有磁性，只是在多数情况下远不如铁磁性物质的磁性那样强。
- 磁化：使物质具有磁性的物理过程。
- 磁介质：一切能够被磁化的物质。

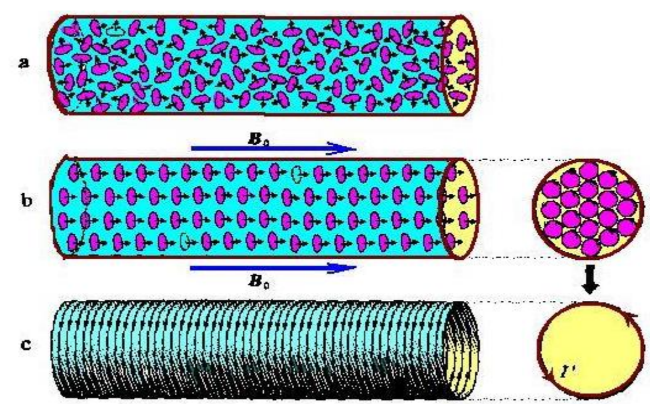
二、磁性的经典解释

□**分子电流**：每个分子都有一个等效的小分子环形电流。

□**分子磁矩**：分子环形电流的磁矩。

大多数原子或分子的合磁矩为零。有一部分原子或分子的电子合磁矩不为零，因而这种原子或分子就具有**固有磁矩**。

□ 磁介质在外场中被磁化会出现**磁化电流**（**等效的宏观电流，不伴随带电粒子的宏观位移**），**磁化电流也会产生磁场**，即**磁介质被磁化后会反过来影响磁场的分布**。



三、 磁化强度

根据安培分子电流假说，已磁化物质的磁性来源于物质内部有规则排列的分子电流，即分子磁矩。

磁化强度：

$$\vec{M}=\frac{\Sigma\vec{\mu}_{分子}}{\Delta V}=\frac{N\vec{\mu}_a}{\Delta V}=n\vec{\mu}_a$$

ΔV宏观上无限小区域，微观足够大

非磁化状态（$M=0$）：

1）分子固有磁矩为零；

2）分子有固有磁矩，但取向随机，分子磁矩和为零。

- **磁化后：** $\sum \vec{\mu}_i \neq 0$ $\vec{M} = \frac{\sum \vec{\mu}_i}{\Delta V} \neq 0$

- **均匀磁化：** $\vec{M}$ 处处相等

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial z} = 0$$

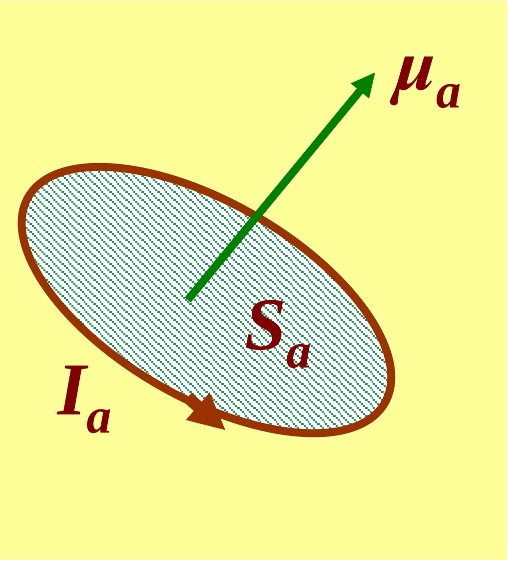
- **非均匀磁化：** $\vec{M} = \vec{M}(x, y, z)$

- **分子平均磁矩：** $$\vec{\mu}_a=\frac{\sum\vec{\mu}_i}{n\Delta V}=I_a\vec{S}_a$$

（I_a磁介质分子平均电流，S_a磁介质分子电流所围的面积）

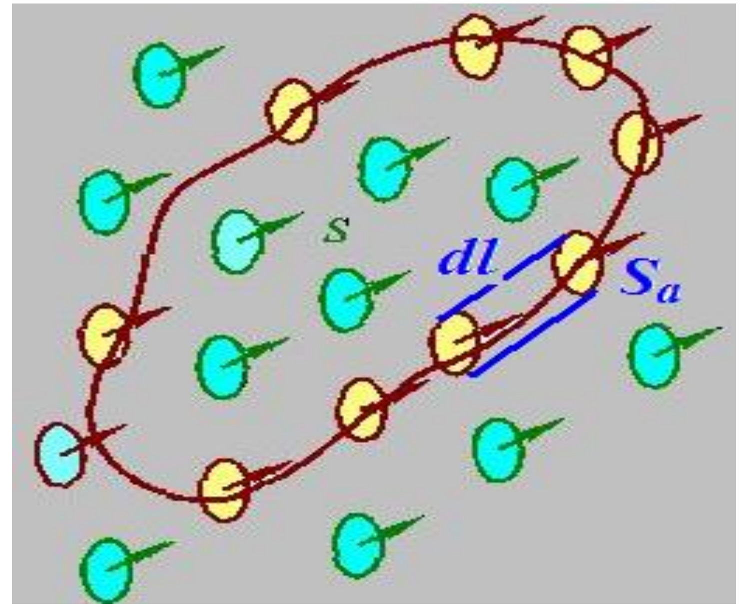
- **磁化强度**定义为单位体积内的各分子磁矩之和：

$$\vec{M}=\frac{\sum\vec{\mu}_i}{\Delta V}=\frac{N\vec{\mu}_a}{\Delta V}=nI_a\vec{S}_a$$



三、磁化电流

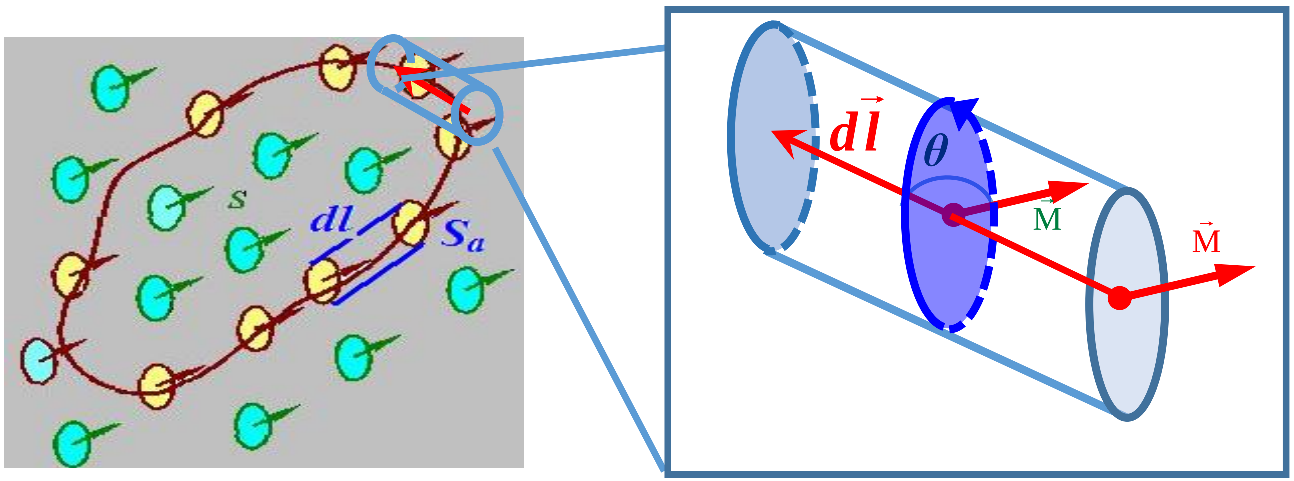
1. 磁化强度的环量



分子磁矩都取平均磁矩，取磁介质中任一闭合有向回路L和以它为周线的有向曲面S（方向满足右手定则），通过S的总磁化电流设为 $\Sigma I'$。

只有从S内穿过并在S外闭合的分子电流才对 $\Sigma I'$有贡献；其它分子电流，或者来回穿过S，或者根本不与S相交，对$\Sigma I'$的净贡献为零。

L上取一段矢量线元，方向沿回路绕行方向，磁化强度与线元的夹角 θ。对$\Sigma I'$有贡献的分子的中心应位于所示的圆柱体中：



斜柱体：
斜高dl，方向平行于线元、
底面园就是平均分子环流，面积S_a。

$$\Delta\sum I' = I_a n S_a \cos\theta dl = n\vec{\mu}_a \cdot d\vec{l} = \vec{M} \cdot d\vec{l}$$

$0 \le \theta \le \pi/2$ 时，磁化电流为正；

$\pi/2 < \theta \le \pi$ 时，磁化电流为负。

*M*的环量为将上式沿*L*积分,得到它与穿过*S*的总磁化电流的关系:

$$\oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l} = \Sigma I'$$

- 这一关系不仅对介质内部的回路成立，而且对跨过介质界面的回路也成立

- 如果介质均匀磁化，即*M*=常矢量，则

$$\oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l} = \vec{M} \cdot \oint_L d\vec{l} = 0$$

即均匀磁化介质内，磁化电流为零。

$$I' = \oint_l \vec{M}\cdot d\vec{l} \overset{stocks}{=} \iint_S (\nabla\times\vec{M})\cdot d\vec{S}$$

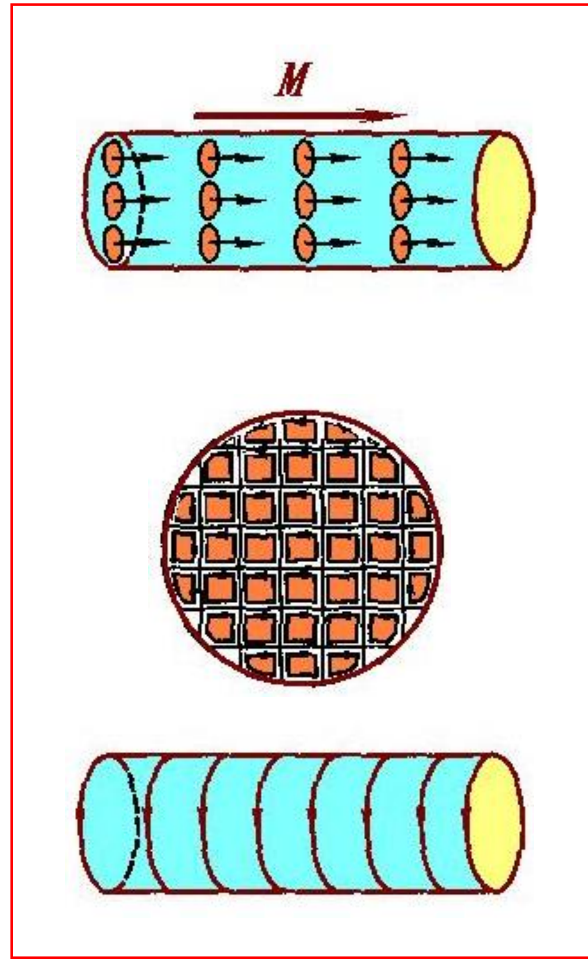
$$I' = \iint_S \vec{j}'\cdot d\vec{S}$$

$$\vec{j}' = \nabla\times\vec{M}$$

- 均匀磁化介质内部没有磁化电流：

$$\vec{j}' = \nabla\times\vec{M} = 0$$

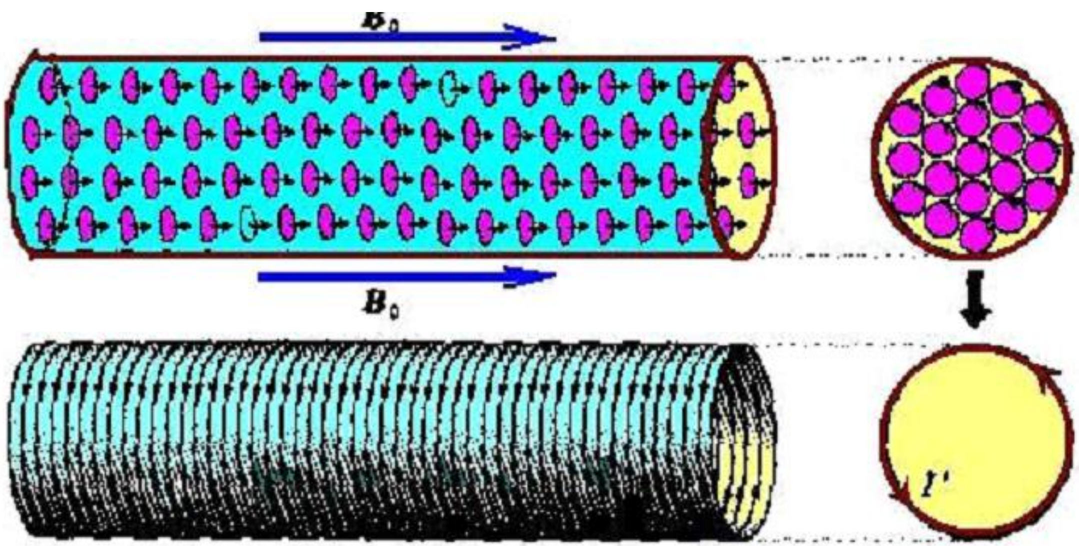
- 磁化电流出现在磁化强度不均匀处或介质表面



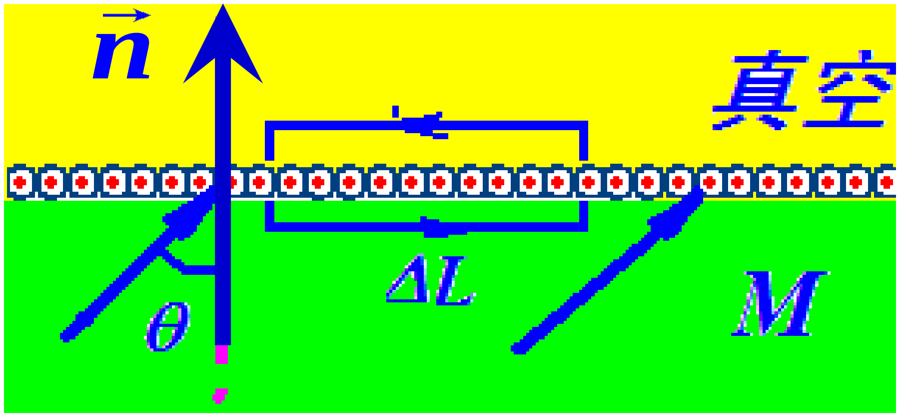
2. 磁化面电流密度

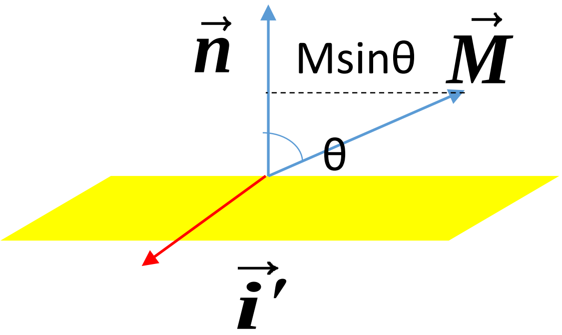
（ 只讨论 均匀磁化介质 ）

- 介质的表面上存在着面分布的磁化电流
- 两种不同介质的交界面上、都会有面分布的磁化电流



磁化电流和$\vec{M}$垂直

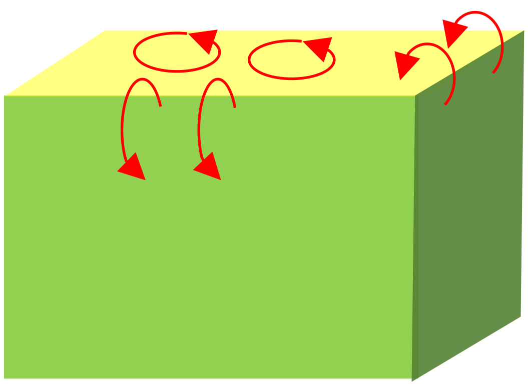




$$I' = \oint \vec{M} \cdot d\vec{l} \quad \Rightarrow i'\Delta l = \vec{M}_\tau \cdot \Delta\vec{l}$$

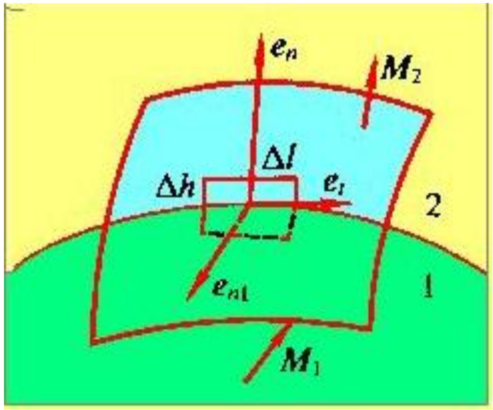
$$i' = M_\tau \quad or \quad i' = M\sin\theta$$

$$\boxed{\vec{i}\,' = \vec{M} \times \vec{n}}$$



同理，在两种不同介质的交界面上：

$$\boxed{\vec{i}\,' = \left(\vec{M}_1 - \vec{M}_2\right) \times \vec{n}}$$



或： $$\boxed{i' = M_{1\tau} - M_{2\tau}}$$

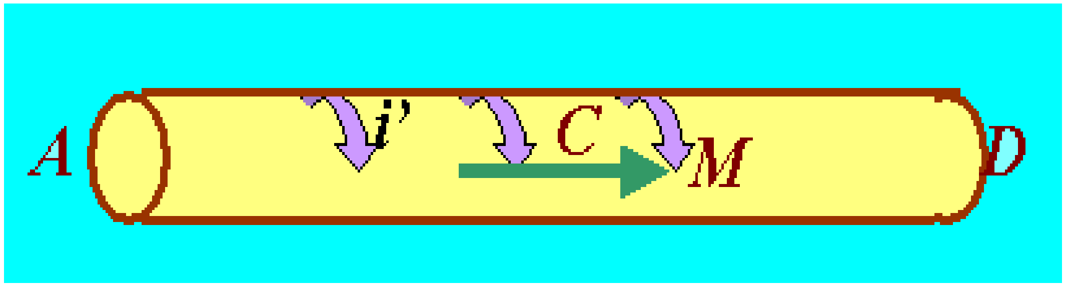
3. 磁化电流和传导电流的比较

磁化电流是磁介质在磁化状态下，由于分子电流的有序排列而出现的宏观电流。其特点是：

1. 磁化电流的产生不伴随电荷的宏观位移。相反，凡伴随电荷的宏观位移的电流称为传导电流；
2. 磁化电流可存在于一切磁介质(包括绝缘体和导体)中，不具有焦耳热效应；传导电流则只能存在于导体(包括半导体和电离气体)中，具有焦耳热效应。

■尽管两种电流在产生机制和热效应方面存在区别，但在激发磁场和受磁场作用方面却是完全等效的。

均匀磁化棒，磁化强度为M，求在中间和两侧产生的B′。



$$\begin{cases} \text{两侧}A,\ D\text{处，} & i'=0 \quad \left(\because \vec{n}\,//\,\vec{M}\right) \\ \text{中间}C, & \vec{i}'=\vec{M}\times\vec{n}=M\vec{\tau}, \end{cases}$$

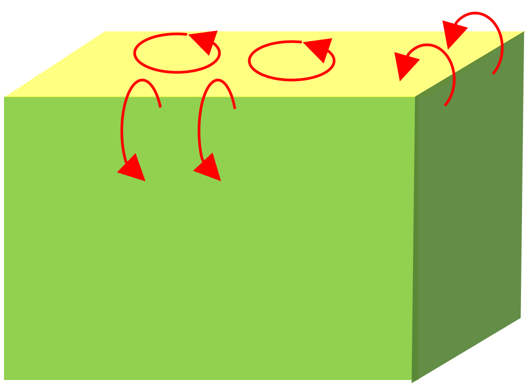
i′相当于螺线管的nI，故：

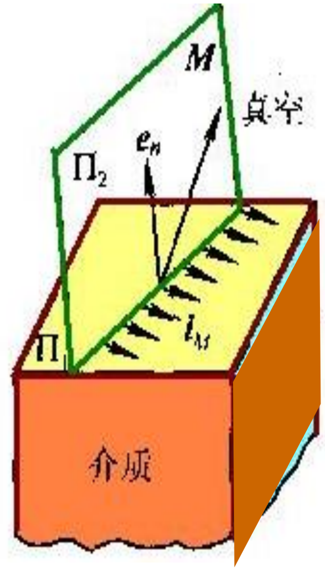
$$\vec{B}_c=\mu_0\vec{M}$$

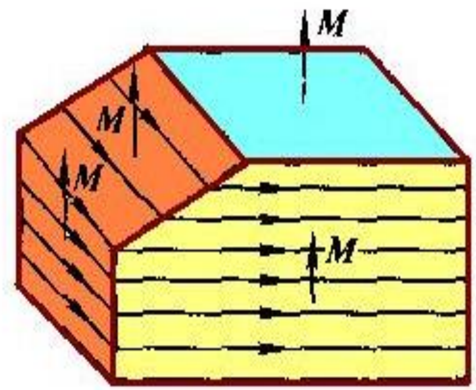
$$\vec{B}_A=\vec{B}_D=\frac{1}{2}\mu_0\vec{M}$$

不同的界面上磁化电流与磁化强度的关系

$$\vec{i}' = \vec{M} \times \vec{n}$$

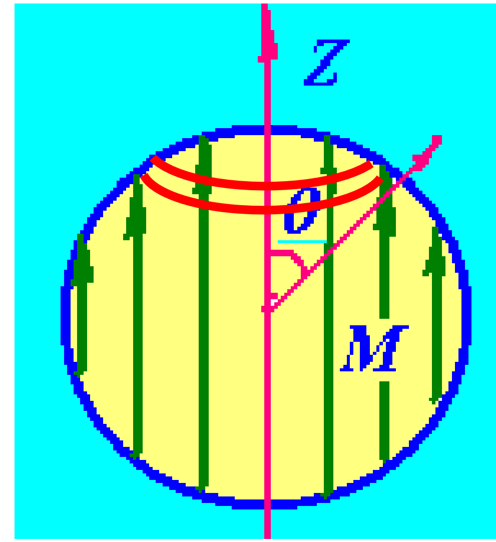






$i = M_\tau$　　电流方向垂直于M在平面上的切向分量

[例] 求均匀磁化介质球轴线的磁场。

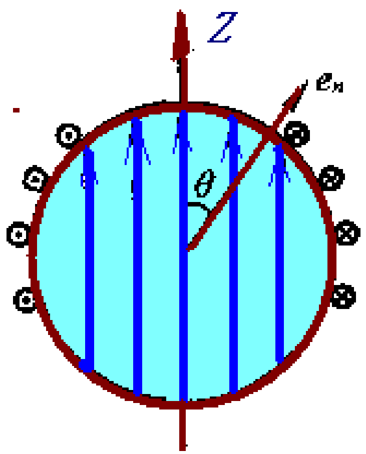


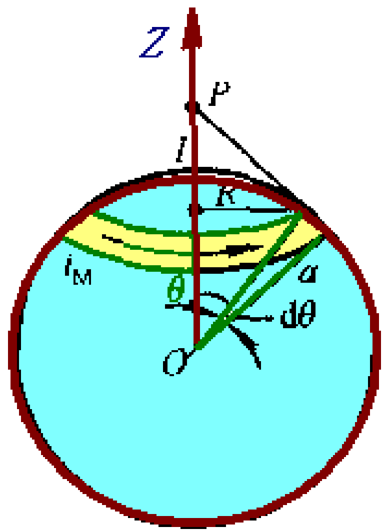
[解]磁介质球半径为a，因为均匀磁化，磁化强度M为恒量，只有在球的表面上有面分布的磁化电流，其电流面密度为：

$$\vec{i}\,' = \vec{M} \times \vec{e}_n = M \sin\theta \, \vec{e}_\phi$$

面电流密度与θ有关，赤道处最大，两极处为零。把整个球面分成许多球带，通过宽度为$ad\theta$的一条球带上的电流为：

$$i' a d\theta = M a \sin\theta \, d\theta$$





$$i'ad\theta = Ma\sin\theta d\theta$$

$$B_Z = \frac{\mu_0}{2}\frac{R^2 I}{(R^2+Z^2)^{3/2}}$$

设 *P* 距球心 *z*，则半径为 R = *a*sin*θ* 的球带在P点产生的磁场为：

$$dB = \frac{\mu_0}{2}\frac{Ma^3\sin^3\theta d\theta}{\left[a^2\sin^2\theta + (z-a\cos\theta)^2\right]^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 Ma^3}{2}\frac{\sin^3\theta d\theta}{(a^2+z^2-2az\cos\theta)^{3/2}}$$

于是轴线上任一点P的磁场为：

$$B(z)=\frac{\mu_0 Ma^3}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin^3\theta d\theta}{(a^2+z^2-2az\cos\theta)^{3/2}}$$

令 $u=\cos\theta,\quad du=-\sin\theta d\theta$

$$B(z)=\frac{\mu_0 Ma^3}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{(1-u^2)du}{(a^2+z^2-2azu)^{3/2}}$$

$$=\frac{\mu_0 M}{3z^3}\left\{(z^2+a^2)\left[|z+a|-|z-a|\right]-za\left[|z+a|+|z-a|\right]\right\}$$

（1）球外：

$$|z-a| = z-a$$

$$B(z) = \frac{2\mu_0 M a^3}{3|z|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mu}{|z|^3}$$

$$\text{式中}\ \mu = \frac{4}{3}\pi a^3 M$$

是整个球内所有分子的分子磁矩总和

一个均匀磁化的球在球外的磁场等效于一个磁矩为μ的圆电流的磁场。

（2）球内：

$$|z-a| = a-z$$

$$\boldsymbol{B(z) = \frac{2}{3}\mu_0 M}$$

与在直径上的位置无关，方向平行于磁化强度。

§5.2 介质中磁场的定理

一、介质中的高斯定理和环路定理

磁介质的全部作用在于提供磁化电流作为附加场源

设由传导电流和磁化电流产生的磁感应强度分别为B_0和B'，则总磁感应强度为

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'.$$

B应满足真空中静磁场的高斯定理和安培环路定理：

$$\begin{cases} \oiint\limits_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint\limits_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\sum I_0 + \mu_0\sum I' \end{cases}$$

只要已知传导电流 I_0 和磁化电流I' 的分布，就可决定磁介质内、外的静磁场。

■大多数情况下问题并非如此简单。这是因为磁介质在外磁场中磁化，磁化后的介质又会改变空间的磁场分布，并反过来影响磁介质的磁化状态。这种相互牵制的关系使我们难以自洽地决定介质的磁化强度或磁化电流的分布。

■类似引入电位移矢量的思路，对于磁介质中的静磁场：

$$\oint_L \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}\right) \cdot d\vec{l} = \sum I_0$$

令 $\boxed{\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M},}$ 得：$\boxed{\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \Sigma I_0}$

$$\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}$$

■H是B和M的组合，是引入的辅助矢量，不是一个实际的物理量，从这个意义上讲H是没有明确的物理含义。

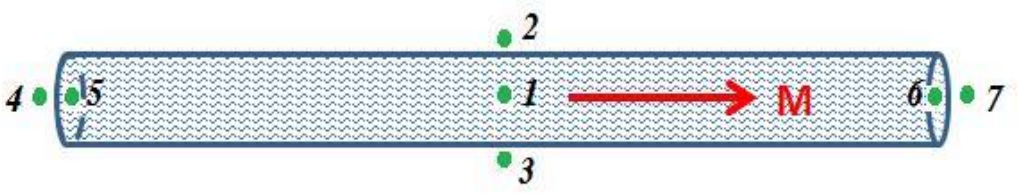
■H是磁荷理论中的磁场强度，即磁场对单位磁荷的作用力，但是H不能反映磁场对运动电荷和载流导体的作用力，实际上磁感应强度B才是反映磁场强弱的物理量，才具有"磁场强度"的含义。

■"命相近，运相远"的D和H：H与D都是描写场的辅助矢量，实际应用中H常用而D不常用。

磁场通常是用传导电流产生的，传导电流可以用仪表测量，与传导电流相联系的是H的环量。

电场通常通过两极间加电压建立，电压较易用仪表测量，而与电压联系的是E的线积分，而D和自由电荷相关，如果测量电荷比测电压容易，D就可能比E用得广泛了。

- **一细长的均匀磁化棒，磁化强度为M，M沿棒长方向，如图所示。求图中各点的磁场强度H和磁感应强度B。**



$$M_1 = M_5 = M_6 = M \qquad M_2 = M_3 = M_4 = M_7 = 0$$

$$B_1 = \mu_0 i' = \mu_0 M \qquad B_4 = B_5 = B_6 = B_7 = \frac{1}{2}\mu_0 M \qquad B_2 = B_3 = 0$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

$$H_1 = H_2 = H_3 = 0,$$

$$H_4 = -H_5 = -H_6 = H_7 = \frac{1}{2}M$$

磁介质中电磁场基本定理：

$$\begin{cases} \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \Sigma I_0 \end{cases}$$

- 磁介质中静磁场的安培环路定理的右边不再出现磁化电流。对于线性各向同性介质，传导电流及介质都具有一维对称性的情况，可用安培环路定理简化静磁场的计算。
- 引入*H*后，还必须通过引入*B*和*H*之间的关系才能完全确定静磁场的具体形式。这说明，在引入辅助矢量*H*之后，表面上回避了直接计算磁化电流的复杂性，但却带来了分析*B*和*H*的关系的新问题。

线性均匀各向同性磁介质

线性均匀各向同性磁介质： $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$.

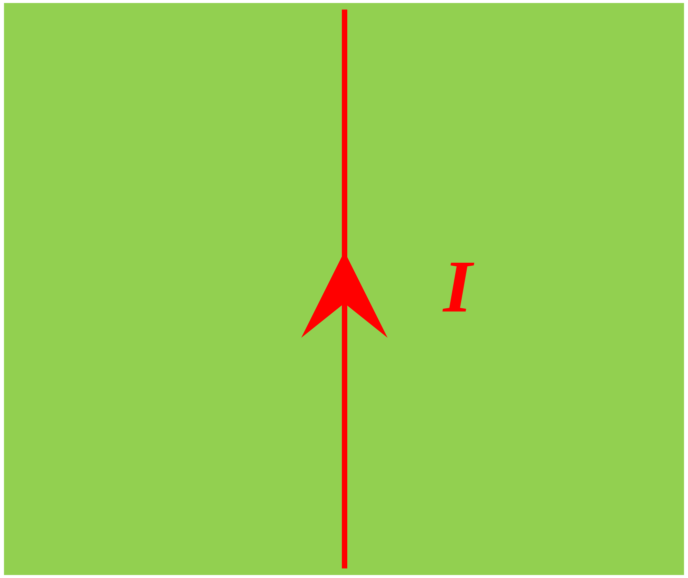
$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

磁介质的性能方程： $\vec{\mathbf{B}} = \mu \vec{\mathbf{H}}$ $\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$

- χ_m 称为磁化率, μ称为磁导率。
- 在真空， $\chi_m = 0$ ， $M = 0$ ， $\mu = \mu_0$

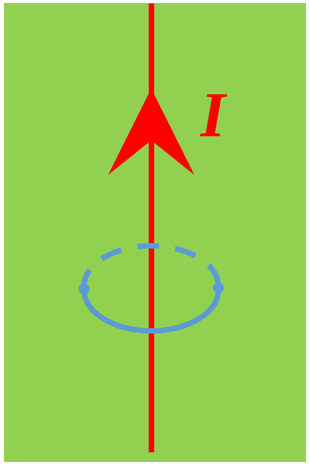
  μ--为绝对磁导率， $\mu_r \equiv \mu / \mu_0$ 为相对磁导率。

[例]求一电流为I_0的无穷长直导线在磁导率为μ的无限均匀线性各向同性磁介质中的磁场分布。



[解]本问题具有轴对称性质，是一维问题，磁感应线为以长直导线为轴的圆，磁场强度的大小只与圆半径r有关。对以长直导线为轴、半径为r的圆回路，得：

$$2\pi r H = I_0, \qquad H = \frac{I_0}{2\pi r}$$

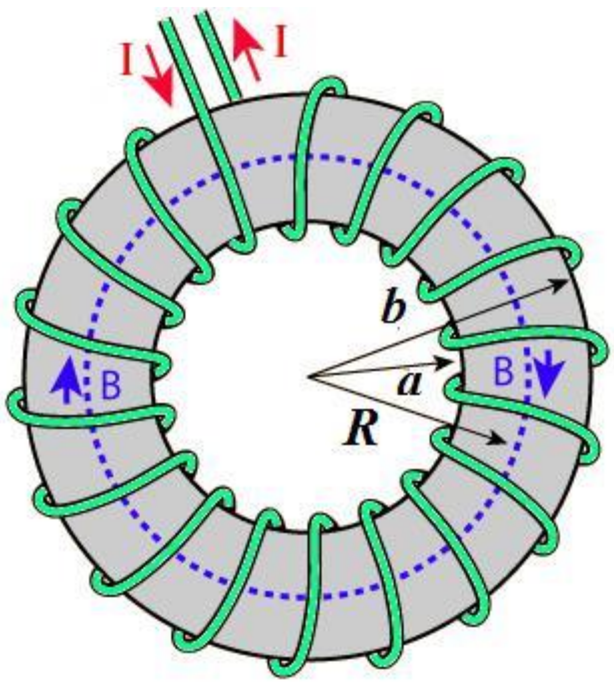


$$B = \mu H = \mu I_0 / (2\pi r)$$

为真空中磁感应强度的 μ/μ_0 倍，方向垂直于电流，沿环向。

若$\mu/\mu_0 > 1$，B增强了？

[例]设匝数为N、电流为I_0、平均半径为R的细螺绕环内填满磁导率为 μ 的均匀线性各向同性磁介质，求管内磁感应强度的大小。

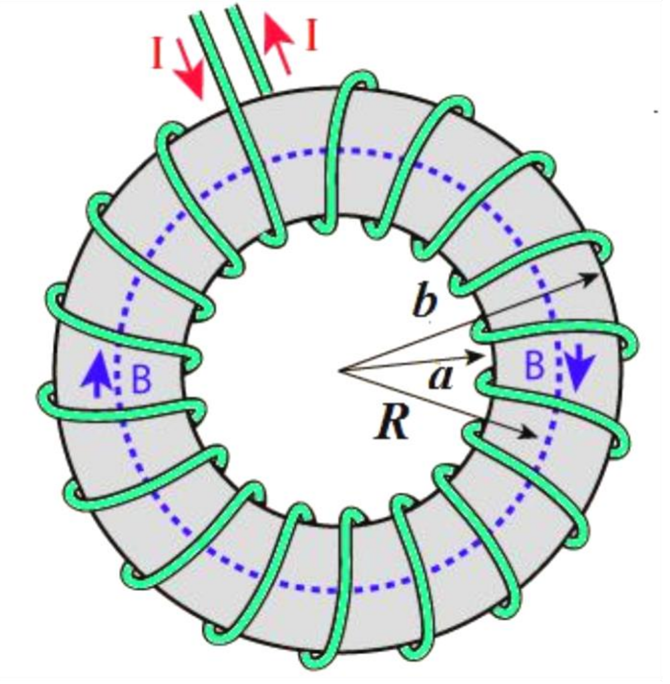


[解]对管内与环同轴的半径为*R*的圆回路应用安培环路定理得:

$$2\pi RH = NI_0$$

$$H = \frac{NI_0}{2\pi R} = nI_0$$

*n*为单位长度上的匝数。



$$B = \mu H = \mu I_0 / (2\pi R)$$