2020-2021 学年信息论 B 期末试题

学生所在系：_________　姓名：_________　学号：_________

$\log 3 = 1.5850$，$\log 5 = 2.3219$，$\log 7 = 2.8074$，$\log 11 = 3.4594$

1. (每题 4 分，共 8 分) 选择题 (多选题)

   (a) 设 X, Y, Z 均为离散随机变量, 取值空间分别为 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$，$f$ 和 g 为任意两个定义域为 $\mathcal{X}$ 的函数, 则以下等式或不等式成立的是 (　)

   $$(A) I(X; Z \mid Y = y) \geqslant 0, y \in \mathcal{Y}$$
   $$(B) H(X \mid Y) = H(Y \mid X)$$
   $$(C) H(g(X)) \leqslant H(X)$$
   $$(D) H(f(X) \mid g(X)) = 0$$

   (b) 以下 D 元字母表上的码字长度符合即时码要求的是 (　)

   $$(A) D = 2, l_i = 1, 2, 3, 3, 4$$
   $$(B) D = 2, l_i = 1, 3, 3, 3, 4, 5, 5$$
   $$(C) D = 4, l_i = 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4$$
   $$(D) D = 5, l_i = 1, 1, 1, 1, 1, 3, 4$$

2. (每题 4 分，共 8 分) 判断题 (若判断为对，简要说明或证明；若判断为错，简要说明或举出反例)

   (a) 对于离散无记忆信道, $C = \max_{p(X)} I(X; Y)$, 则达到信道容量时的输入概率分布 $p(X)$ 是唯一的。

   (b) 对任意连续随机变量 X 和 $a \neq 1, h(aX) \neq h(X)$ 。

3. (每题 4 分，共 8 分) 填空题

(a) 有三个二元离散随机变量 X, Y, Z, 若要使得 $I(X;Y) = 1$ 比特,$I(X;Y \mid Z) = 1$ 比特, 则 X, Y, Z 的联合概率分布为__________________ 。(给出一个满足条件的例子即可)

(b) 设一带宽有限信道的带宽为 3kHZ ，信噪比 (P/N_0W) 为 20 dB, 则该信道的信道容量为 C=______________ 。

4. (10 分) 设 X, Y 均为二元离散随机变量，且 $p(X=0,Y=0) = p(X=1,Y=1) = p(X=0,Y=1) = \frac{1}{3}$ 。令二元离散随机变量 $Z = X \oplus Y$，其中 $\oplus$ 为模 2 加。求：

(a) $H(X), H(Y), H(X \mid Y), I(X;Y)$；

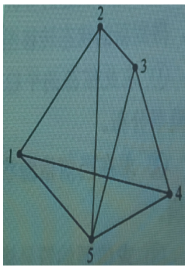
(b) $H(X \mid Z), H(X,Y,Z)$ 。

5. (10 分) 若 X_1, X_2, Y 均为离散随机变量并满足 $Y = X_1 + X_2$，在什么条件下以下等式成立。

$$H(Y) = H(X_1) + H(X_2)$$

当 X_1 和 X_2 都只能取两个可能的值时, 给出满足上述条件的一个例子。

6. (12 分) 设 $\{X_i, i=1,2\cdots\}$ 为如下图所示的五状态的时间不变马尔可夫过程，初始状态概率分布为均匀分布，且每个状态也是以等概率转移到它所连通的其他状态。



(a) 给出该马尔可夫过程的状态概率转移矩阵和平稳分布；

(b) 求解该马尔科夫过程的熵率；

(c) 设该马尔可夫过程在第 n_0 时刻进入平稳分布, 当 $n > n_0$ 时, 求 $I(X_{n+1}; X_n)$ 。

7.（12 分）设离散信源的概率分布为

$$\begin{bmatrix} S \\ P(S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 & s_7 & s_8 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.05 & 0.05 & 0.05 & 0.05 \end{bmatrix}$$

(a) 请给出该信源的三元哈夫曼编码并计算平均码长；

(b) 假设我们对该信源的三元编码增加一个约束，要求信源编码输出码字的第一位可以从 $\{0,1,2\}$ 中选取，但后续位数都只能从 $\{0,1\}$ 中选取，例如 210,011 是合法码字，12,002 是非法码字。请给出在这个约束下该信源的三元最优编码。

8. (12 分) 设有一连续随机变量，其概率密度函数为

$$p(x)=\begin{cases} bx^2 & 0\leqslant x\leqslant a \\ 0 & x \text{ 取其它值} \end{cases}$$

(a 为已知量, b 未知, 最终答案中只允许出现 a, 不允许出现 b。)

(a) 求该随机变量的微分熵；

(b) 令 $Y_1=X+K(K>0), Y_2=2X$，试分别求 Y_1 和 Y_2 的微分熵 $h\left(Y_1\right)$ 和 $h\left(Y_2\right)$ 。

9. (10 分) 一个离散时间无记忆加性噪声信道的输入 X 限制在 $[-2,2]$ 区间，独立于 X 的噪声 Z 在 $(-1,1)$ 区间均匀分布，信道输出为 Y，计算该信道的信道容量。

10. (10 分) 考虑一个概率密度函数为 $p(x)$ 的信源 X，给定失真度量 $d(x,\hat{x}), x\in\mathcal{X}, \hat{x}\in\hat{\mathcal{X}}$ ，率失真函数为 $R(D)$ 。现假设我们在 $\hat{\mathcal{X}}$ 中增加一个新的元素 $\hat{x}_0$，真函数 $\tilde{R}(D)$ 必然不大于原来的率失真函数，即 $\tilde{R}(D)\leqslant R(D)$ 。