



中国科学技术大学

University of Science and Technology of China

电 磁 学

(Electromagnetism)

第四章 真空中的静磁场2

§ 4.3 毕奥—萨伐尔定律



安培力公式（线电流元受磁场作用力）：

$$d\vec{F} = I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{B}$$

安培定律(电流元电流元之间的作用力公式):

$$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times (I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{r}_{12})}{r_{12}^3} = I_1 d\vec{l}_1 \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right)$$

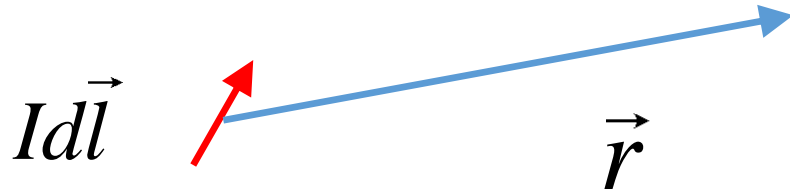


$$d\vec{B}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 d\vec{l}_2 \times \frac{\vec{r}_{12}}{r^3}$$



毕奥—萨伐尔定律：

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\vec{l} \times \frac{\vec{r}}{r^3}$$



体电流元、面电流元产生的磁场：

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{j} dV \times \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{i} dS \times \frac{\vec{r}}{r^3}$$

载流导线回路产生的磁场：

$$\vec{B} = \oint d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint I d\vec{l} \times \frac{\vec{r}}{r^3}$$

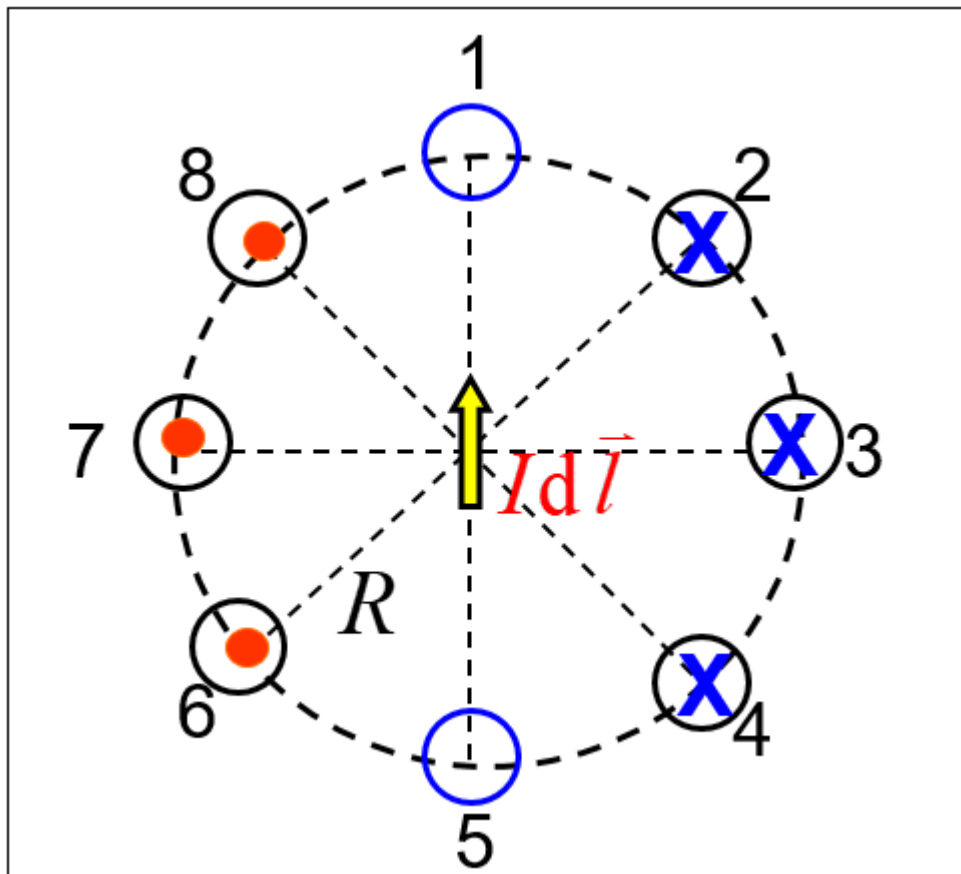


两定律的关系：

安培定律 = 安培力公式 +
毕一萨定律



例 判断下列各点磁感强度的方向和大小.



1、5 点：

3、7 点：

2、4、6、8 点：

[例] 一段线电流中垂面上的磁场.

[解]: $Id\vec{l} = Idz\vec{e}_z$

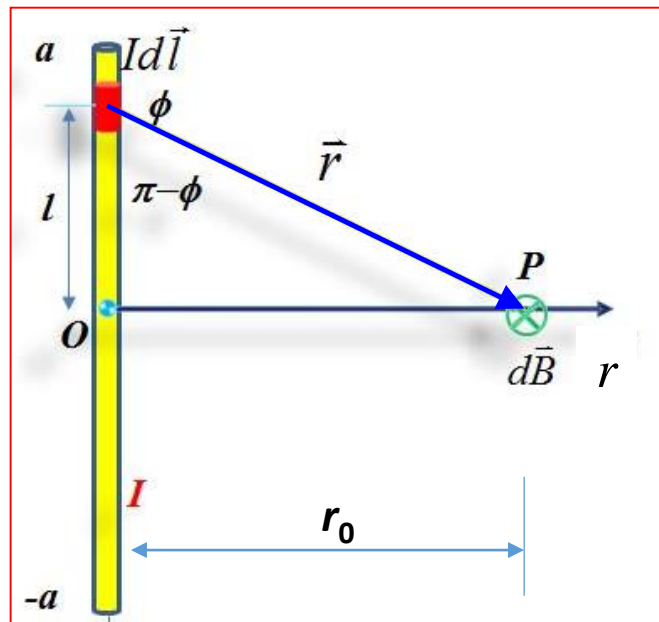
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} Idz\vec{e}_z \times \frac{r_0\vec{e}_r - z\vec{e}_z}{(r_0^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} r_0\vec{e}_\theta \int_{-a}^a \frac{dz}{(r_0^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} r_0\vec{e}_\theta \frac{1}{r_0^2} \frac{z}{\sqrt{r_0^2 + z^2}} \Big|_{-a}^a = \frac{a}{\sqrt{r_0^2 + a^2}} \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0} \vec{e}_\theta$$

$$a \rightarrow \infty, \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0} \vec{e}_\theta$$

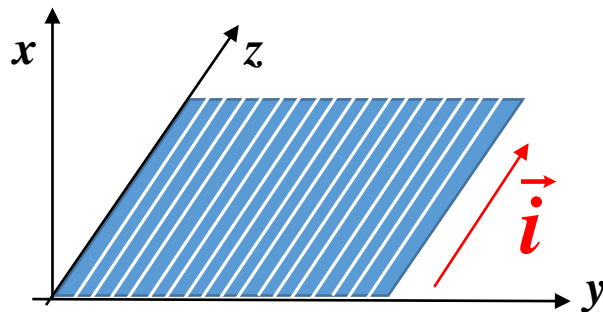
此结果与实验结果一致。



空间其他地方的
磁场方向?

■ 无限大平面电流

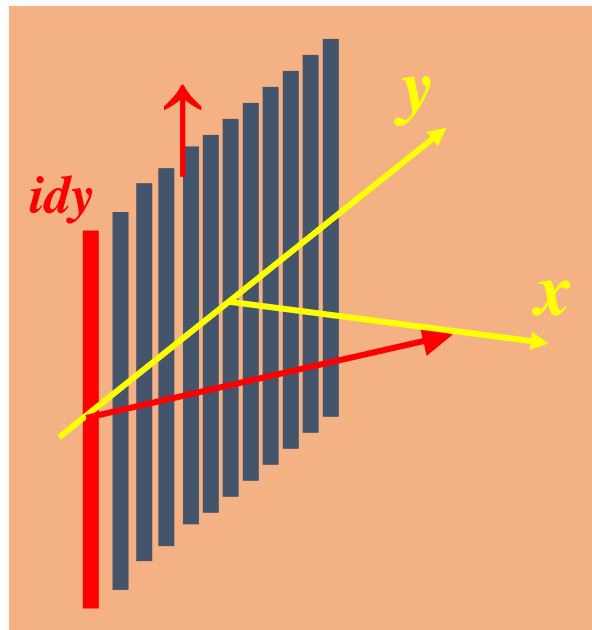
无限大平面电流产生的磁场可以视为无数根无限长线电流产生磁场的叠加，建坐标系如图



考虑y方向dy宽度的无限长线电流产生的磁场

$$\vec{i}dy = idy\vec{e}_z, \quad \vec{r} = -y\vec{e}_y + x\vec{e}_x$$

$$\begin{aligned} d\vec{B} &= \frac{\mu_0 idy}{2\pi r} \vec{e}_z \times \vec{e}_r = \frac{\mu_0 idy}{2\pi r^2} \vec{e}_z \times \vec{r} \\ &= \frac{\mu_0 idy}{2\pi r^2} \vec{e}_z \times (-y\vec{e}_y + x\vec{e}_x) \\ &= \frac{\mu_0 idy}{2\pi r^2} (y\vec{e}_x + x\vec{e}_y) \end{aligned}$$

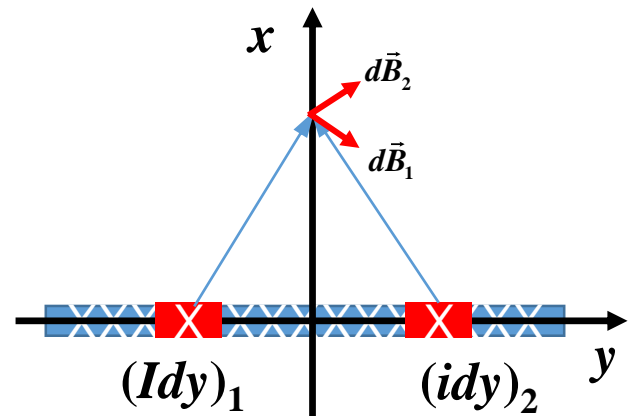
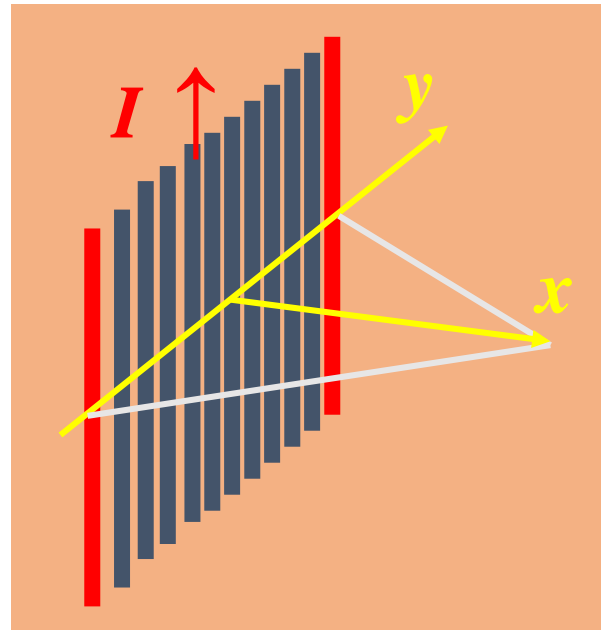


$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i dy}{2\pi r^2} (y\vec{e}_x + x\vec{e}_y)$$

取对称线电流，则磁场的 x 方向抵消，
故只需要考虑磁场的 y 分量。

$$dB_y = \frac{\mu_0 i dy}{2\pi r^2} x = \frac{\mu_0 i x dy}{2\pi (x^2 + y^2)}$$

$$\begin{aligned} B = B_y &= \int_{-\infty}^{\infty} dB_y = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 i x dy}{2\pi (x^2 + y^2)} \\ &= \frac{\mu_0 i x}{2\pi} \frac{1}{x} \arctan \frac{y}{x} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\mu_0}{2} i \end{aligned}$$



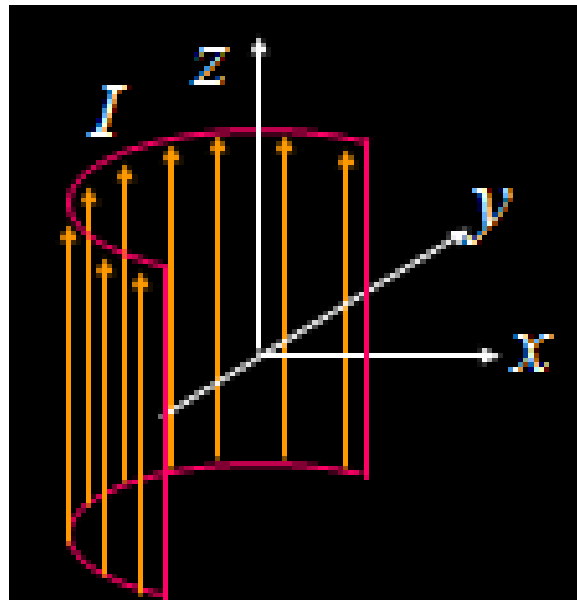
两侧都分别是匀强磁场，在电流平面处跃变



■课后试求：

有限大平面/平板电流，无限大平板电流；

圆弧面电流，圆弧体电流，圆柱面电流，圆柱体电流；



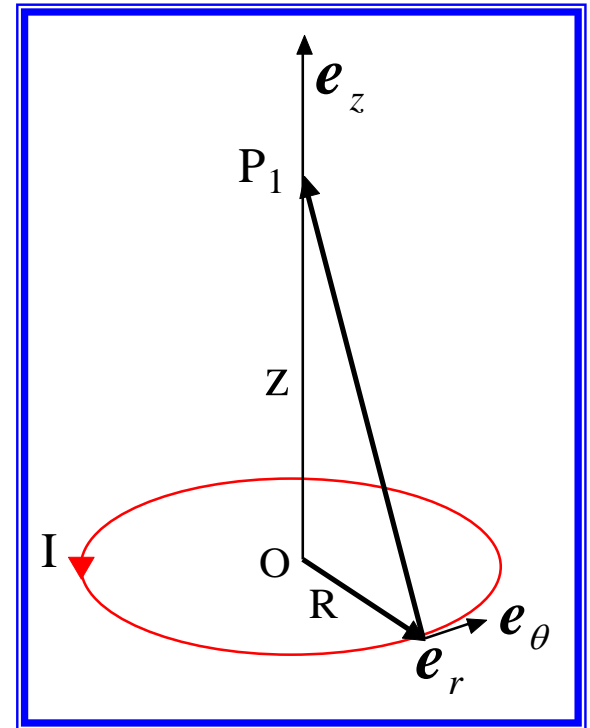
[例] 求圆电流 I 轴线上的磁场。

[解]：采用柱坐标系

$$\text{线电流元 } Id\vec{l} = IRd\theta\vec{e}_\theta$$

$$\text{场点 } P_1 \text{ 的位置 } \vec{r} = -R\vec{e}_r + z\vec{e}_z$$

$$\begin{aligned} d\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} IRd\theta \vec{e}_\theta \times \frac{z\vec{e}_z - R\vec{e}_r}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} IRd\theta \frac{z\vec{e}_r + R\vec{e}_z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned}$$



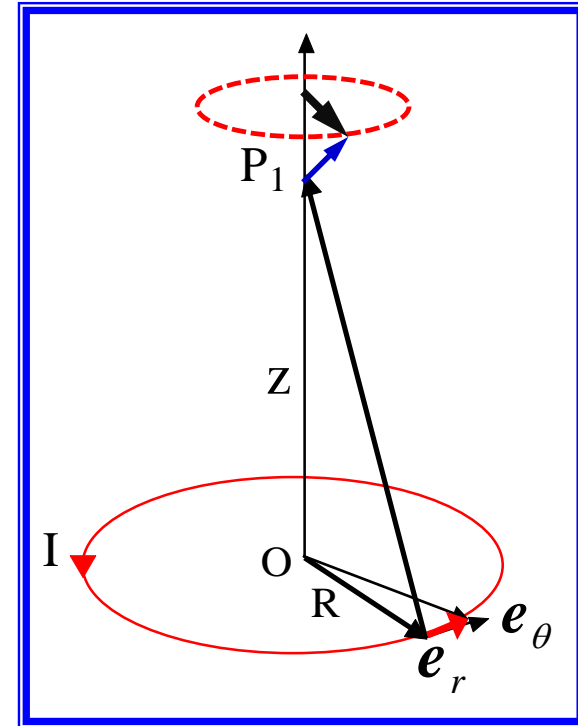


由对称性，B方向沿z轴，只需要对dB的z分量积分。

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} d\theta$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{e}_z \int dB = \vec{e}_z \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} d\theta$$

$$= \vec{e}_z \frac{\mu_0 IR^2}{4\pi(R^2 + z^2)^{3/2}} \int d\theta = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$



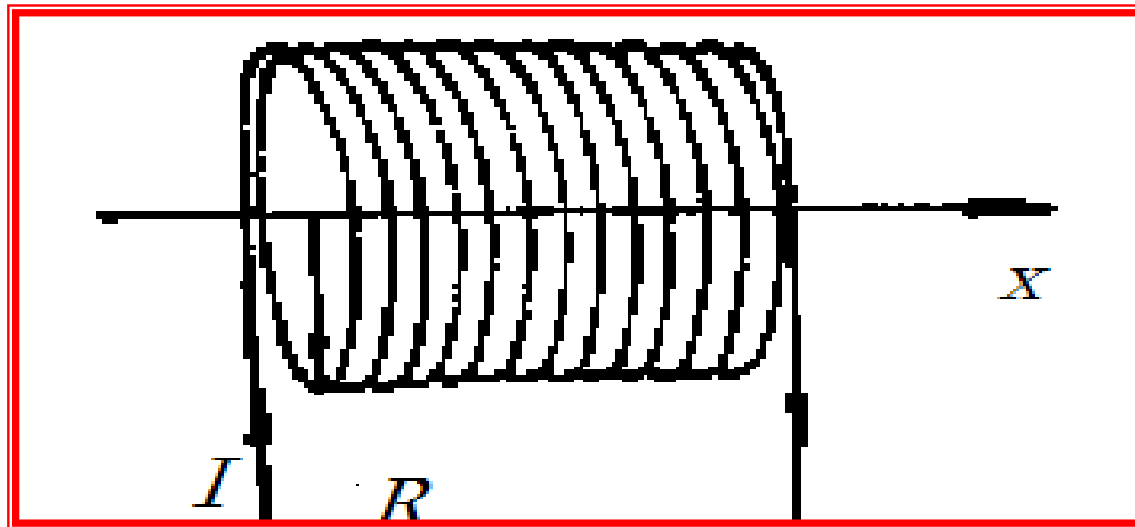
定义圆线圈电流的磁矩：

$$\vec{\mu} = I\pi R^2 \vec{e}_z$$

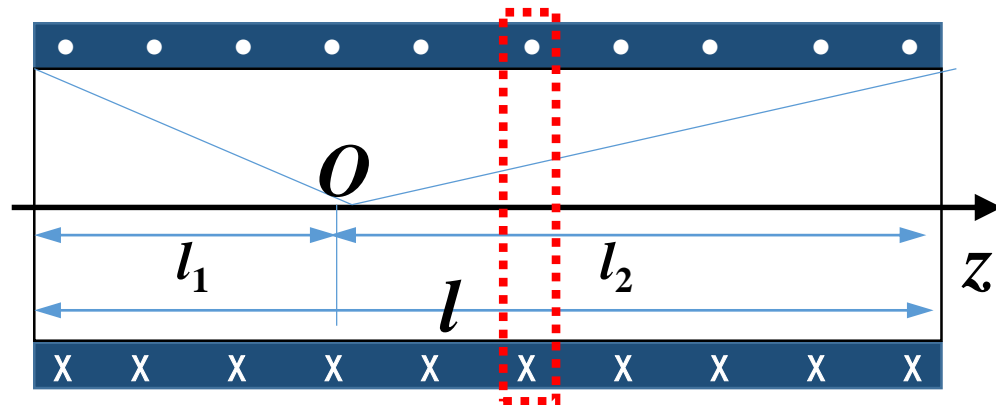
$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{\mu}}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$



[例]绕在圆柱面上的螺旋形线圈叫螺线管（下图）。
设它的长 l ，半径为 R ，单位长度的匝数为 n ，电流强度为 I ，求螺线管轴线上的磁感应强度分布。



[解]设螺线管是密绕的，它的**磁场近似可看作一系列圆线圈磁场的叠加。**

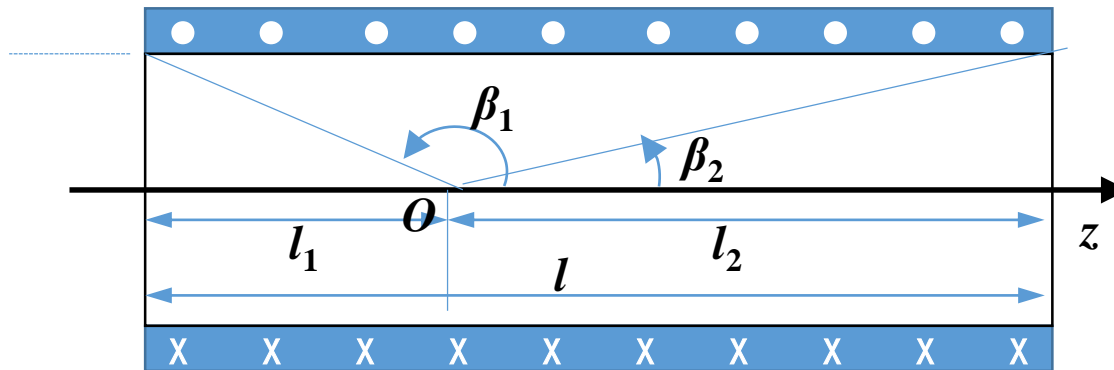


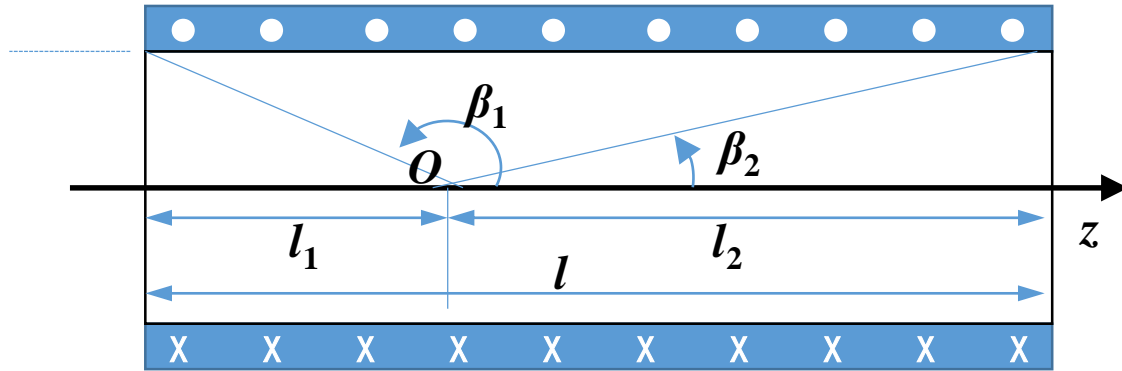
考虑轴线上某点 O 的磁感应强度，取该点为坐标原点， Oz 沿轴线。在位置 z 处长度 dz 内共有匝线圈 ndz ，它在原点产生的磁感应强度只有 z 方向分量，其大小为：

$$dB_z = \frac{\mu_0}{2} \frac{Indz R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 n I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} dz$$

■ 整个螺线管在原点O产生的磁感应强度为：

$$B_z = \frac{\mu_0 n I R^2}{2} \int_{-l_1}^{l_2} \frac{dz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 n I}{2} \left[\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right]_{-l_1}^{l_2}$$
$$= \frac{n \mu_0 I}{2} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1),$$



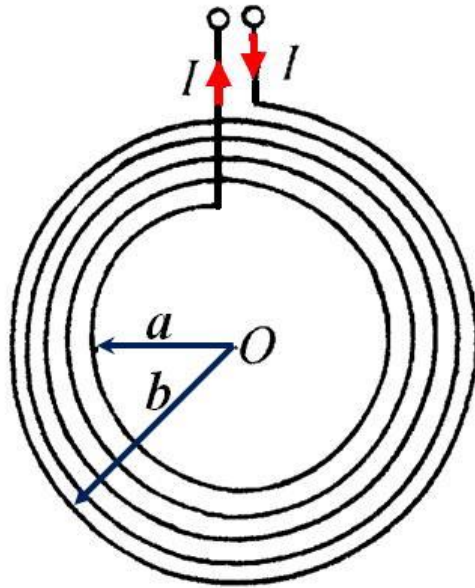


$$B_z = \frac{n\mu_0 I}{2} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1)$$

■ 无穷长螺线管 $\beta_1 = \pi$, $\beta_2 = 0$, 则 $B_z = \mu_0 n I$ 。

■ 对半无限长螺线管的一端, $\beta_1 = \pi/2$, $\beta_2 = 0$,
则 $B_z = \mu_0 n I / 2$ 。

细导线绕成“蚊香型”线圈，共 N 匝，内外径分别为 a 、 b ，求导线通电流 I 时 O 点的磁场。



如前，单匝线圈在中心的磁场：

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{\mu}}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \bigg|_{z=0} = \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{n}$$

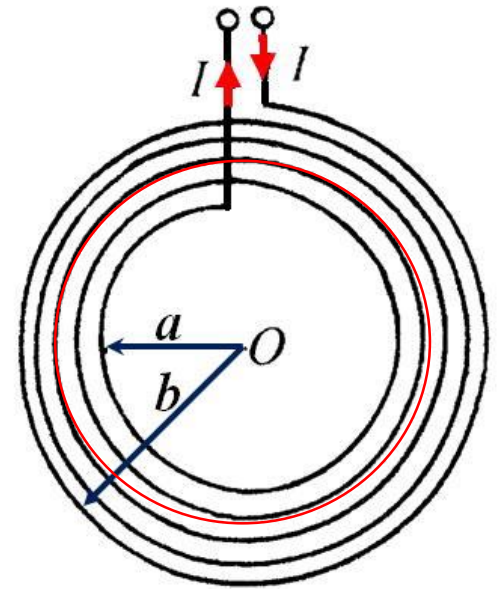


径向的匝密度 $n = \frac{N}{b-a}$

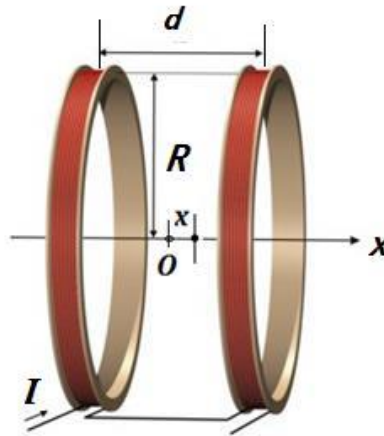
R处dR长的电流为: $IndR = \frac{NI}{b-a} dR$

其磁场为: $d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2R} \frac{NI}{b-a} dR$

总磁场为: $\mathbf{B} = \int_a^b d\mathbf{B} = \int_a^b \frac{\mu_0}{2R} \frac{NI}{b-a} dR = \frac{\mu_0}{2} \frac{NI}{b-a} \ln \frac{b}{a}$



亥姆霍兹线圈：



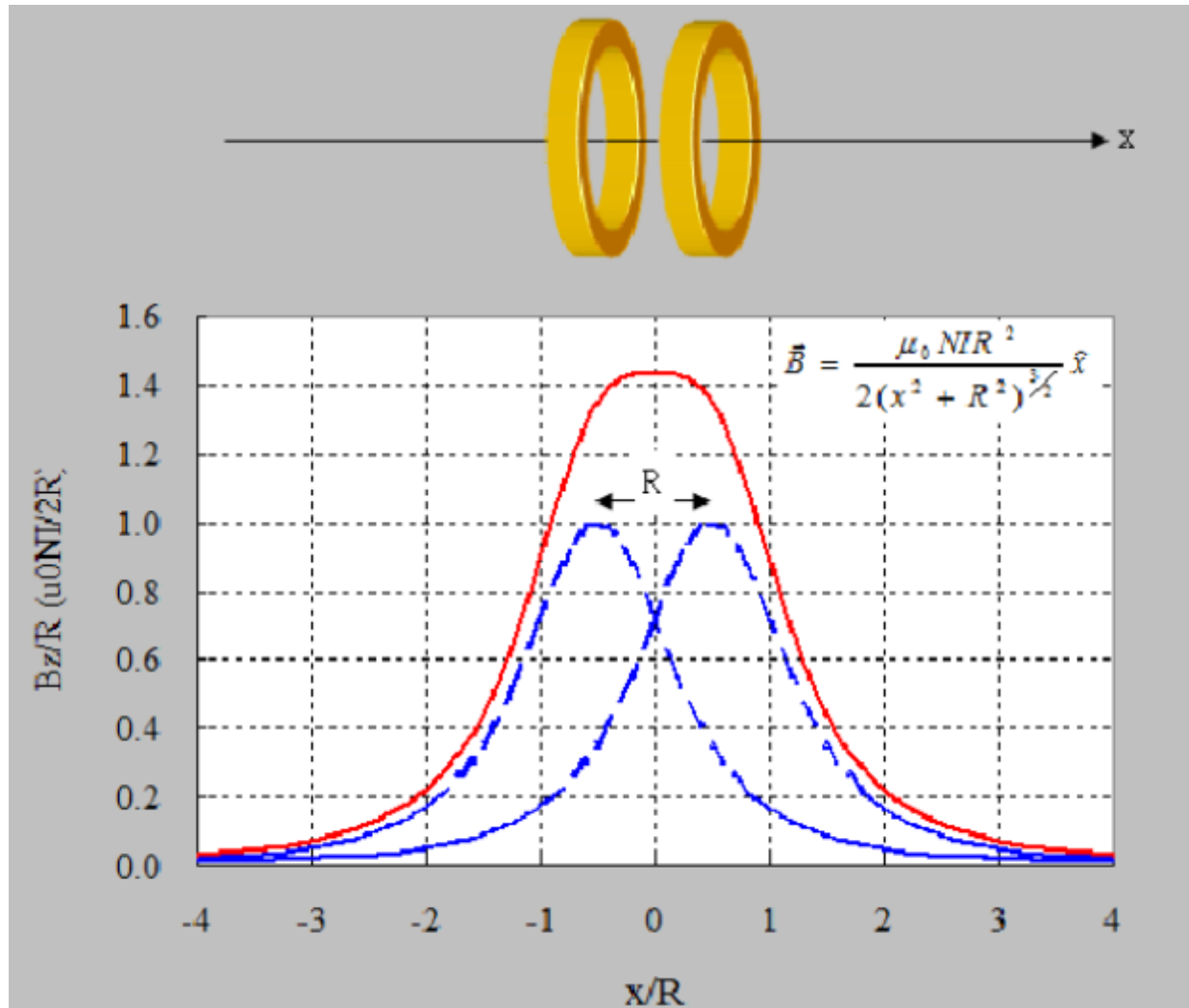
$$B(x) = \frac{\mu_0 I R^2}{2[R^2 + (\frac{d}{2} + x)^2]^{3/2}} + \frac{\mu_0 I R^2}{2[R^2 + (\frac{d}{2} - x)^2]^{3/2}}$$



$$\frac{dB(x)}{dx} = 0 \Rightarrow x = 0, \quad \left. \frac{d^2 B(x)}{dx^2} \right|_{x=0} = 0 \Rightarrow d = R$$

d=R时，在中心区域形成均匀磁场：

$$B_0 = \left(\frac{4}{5} \right)^{3/2} \frac{\mu_0 I}{R}$$





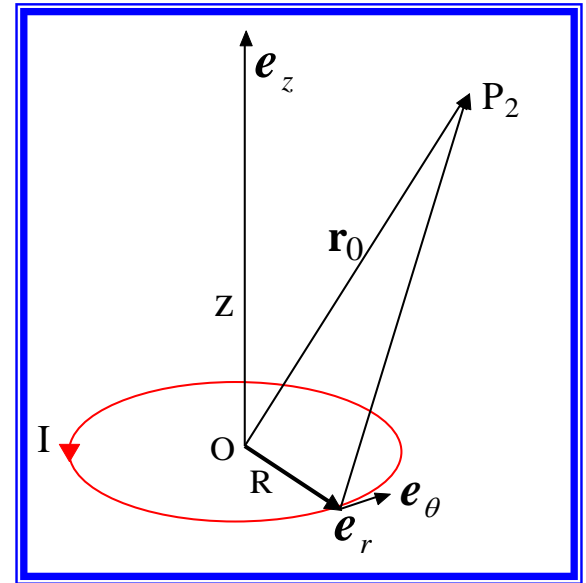
圆线圈周围的磁场

远处任一点 P_2

$$(r_0 \gg R)$$

$$\vec{\mathbf{B}} = -\frac{\mu_0 \vec{\mu}}{4\pi r_0^3} + \frac{3\mu_0 (\vec{\mu} \cdot \vec{\mathbf{r}}_0)}{4\pi r_0^5} \vec{\mathbf{r}}_0$$

$$\vec{\mu} = I\vec{\mathbf{S}}, \quad \vec{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \oint_L \vec{\mathbf{R}} \times d\vec{\mathbf{R}}$$



以上结论对任意载流线圈成立。

与电偶极子的电场公式相似：

$$\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\vec{\mathbf{p}}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{3(\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{r}})}{4\pi\epsilon_0 r^5} \vec{\mathbf{r}}$$

一、磁感应线与磁通量

1. 磁感应线

磁感应线即磁场空间中一些有方向的曲线，规定：

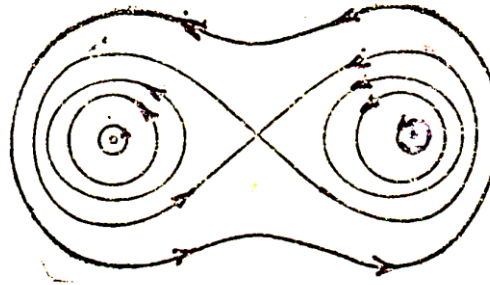
- 1) 其上每点的切线方向与该点的磁感应强度方向一致；
- 2) 过该点垂直于磁感应线的截面的数密度与磁感应强度成正比，即

$$|\mathbf{B}| = \frac{\Delta N}{\Delta S}$$

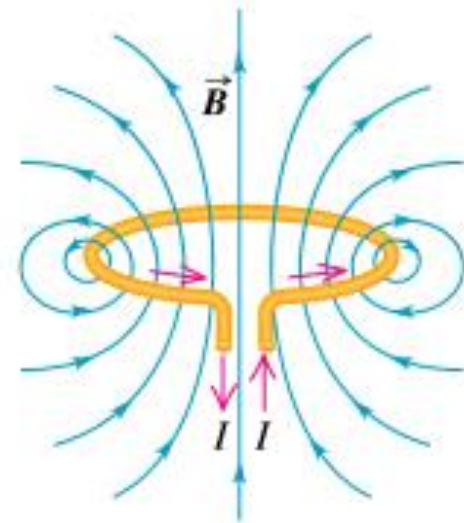
几种磁场线



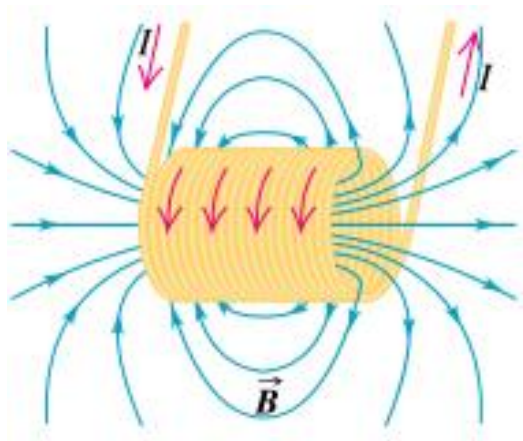
(a) 直线电流



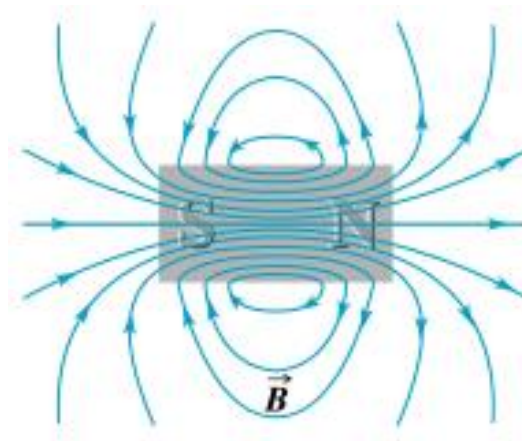
(b) 两根平行直线电流



(c) 圆环电流



(d) 有限长螺线管电流



(e) 电磁铁



2. 磁通量

通过 ΔS 面的磁通量:

$$\Delta \Phi_B \equiv \vec{B} \cdot \Delta \vec{S}$$

磁通量是垂直通过 ΔS 的磁感应线的根数。

通过某曲面 S 的磁通量:

$$\Phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

磁通量也满足叠加原理。

磁通量的单位为**韦伯**(Wb), $1Wb = 1 T \cdot m^2$ 。

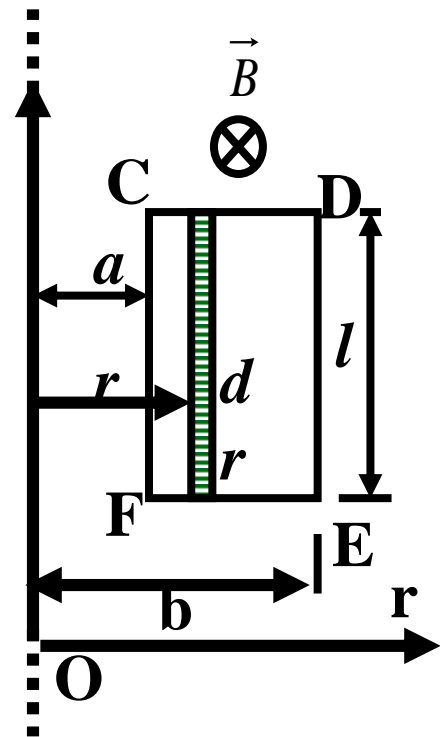
如图所示载流无限长直导线的电流为 I ，求通过矩形面积的磁通量（直线在矩形面内）。

$\hat{\theta}$ 为矩形面积 $CDEF$ 的法线方向

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\theta} \quad d\vec{S} = l dr \hat{\theta}$$

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\theta} \cdot l dx \hat{\theta} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot l dr$$

$$\Phi = \iint_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot l dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot l \ln \frac{b}{a}$$





二、高斯定理（通量定律）

1. 高斯定理：

通过任意闭合曲面 S 的磁通量等于零，即

$$\oiint_S \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = 0$$

2. 物理意义：

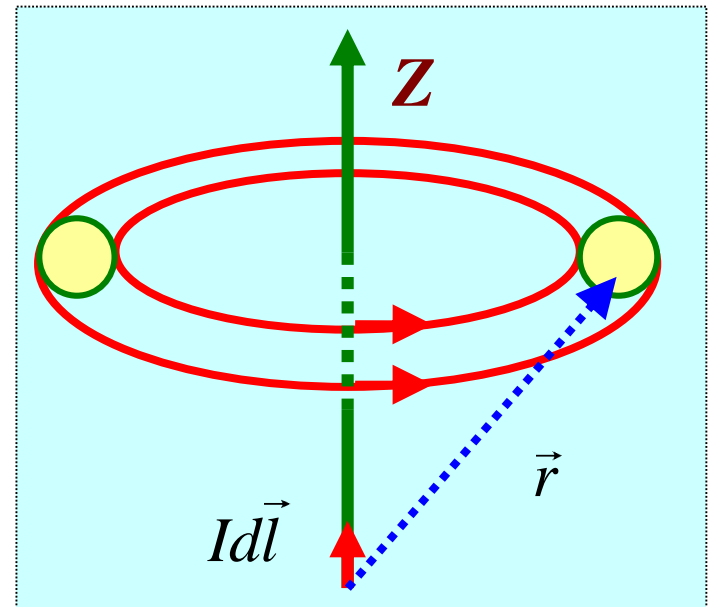
反映了磁场的“无源性”，孤立的磁荷不可能存在，
磁场线闭合。

3.高斯定理的证明

[证明]: 因为任意一磁场, 都是由许多**电流元**产生的磁场叠加而成, 其**磁通量也满足叠加原理**, 所以只需证明**电流元**产生的磁场遵守高斯定理。取电流元为坐标原点, Z轴沿电流元的方向, **以Z为轴的任意圆上**, 由毕---沙定律得

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin\theta}{r^2} \hat{\phi}$$

此式表明, 在圆上任意一点 dB 的大小相同、方向与圆相切。于是, 穿过以Z为轴的任一环形管内任意截面的磁通量为常量, 与截面在管中的位置以及取向无关。



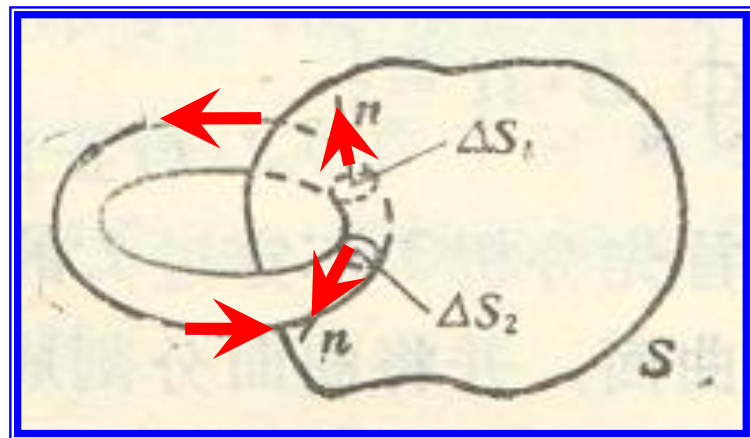
■ 对于任一封闭曲面 S ，环形管每穿过 S 一次，均会在 S 上切出两个面元，见图中 ΔS_1 、 ΔS_2 ，且其磁通量

$$\vec{B}_1 \cdot \Delta \vec{S}_1 + \vec{B}_2 \cdot \Delta \vec{S}_2 = B \Delta S_{\perp} - B \Delta S_{\perp} = 0$$

■ 对曲面 S 上，任一面元，都可作一个环形管，且可找到 S 上的另一个面元与之对应，这两个面元的磁通量之和为零。

故穿过 S 的总磁通为零。

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$



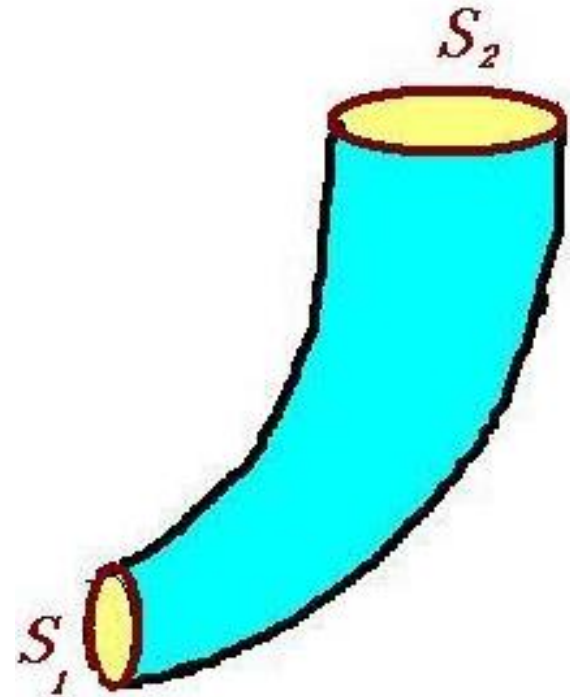
讨论:

■ 对于截面不均匀的磁力线管

$$\iint_{S_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_1 = \iint_{S_2} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_2$$

$$B_1 \Delta S_1 = B_2 \Delta S_2$$

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{\Delta S_2}{\Delta S_1}$$





■ 磁场服从叠加原理,磁场高斯定理对线电流、面电流和体电流产生的磁场均成立。

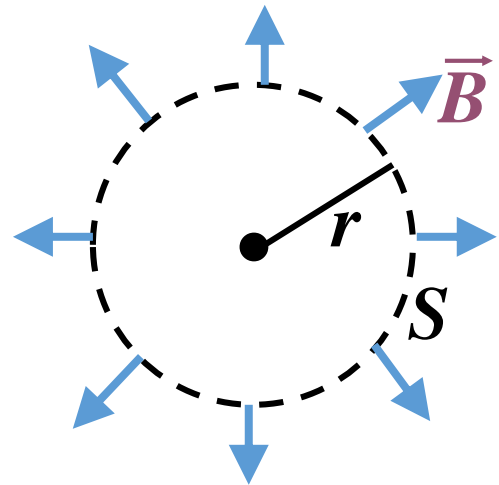
$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oiint_S \left(\sum_i \vec{B}_i \right) \cdot d\vec{S} = \sum_i \oiint_S \vec{B}_i \cdot d\vec{S} = 0$$

■ 高斯定理表明磁场是**无源场**, 或自然界不存在磁荷。

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

磁场处处无源。

利用高斯定理证明不存在如图所示的球对称辐射状磁场：



$$\vec{B} = f(r) \vec{e}_r$$

证：取半径为 r 的球面高斯面 S ，由题设：

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = f(r) \cdot 4\pi r^2 \neq 0$$

这与 $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ 矛盾。

\therefore 不存在 $\vec{B} = f(r) \vec{e}_r$ 形式的磁场。

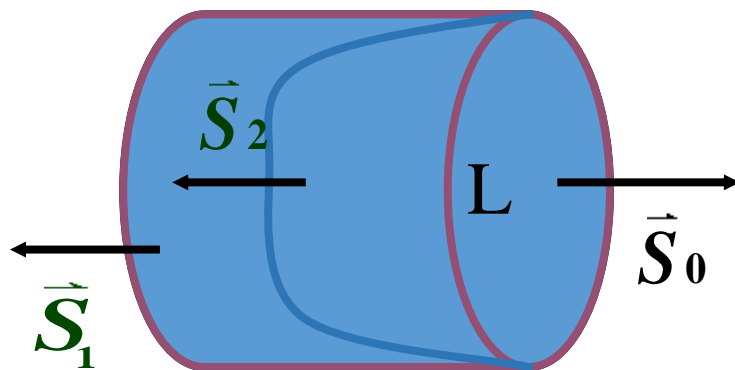
穿过任意闭合曲线L的磁通量

在磁场中以任意闭合曲线L为边线的所有曲面 S_1 、 S_2 、 S_0 都有相同的磁通量

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \iint_{S_0} \vec{B} \cdot d\vec{s}_0 + \iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{s}_1$$

$$= \iint_{S_0} \vec{B} \cdot d\vec{s}_0 + \iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{s}_2 = 0$$

$$\therefore \iint_{S_0} \vec{B} \cdot d\vec{s}_0 = -\iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{s}_1 = -\iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{s}_2$$

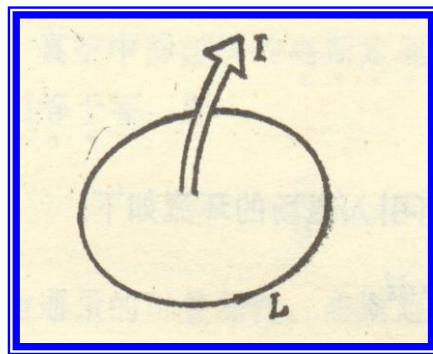


三、安培环路定理（环量定律）

磁场的环量定义： $\text{环量} = \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{L}$

安培环路定理：沿任何闭合曲线 L 磁感应强度 B 的环流等于穿过 L 的电流强度的**代数和**的 μ_0 倍，即

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{L} = \mu_0 \sum (\pm I)$$



I 的正负确定规则：

在设定了 L 绕行方向后，采用右手 定则，四指沿 L 方向，则电流方向与大拇指一致时取正，反之取负。

物理意义： 磁场是有旋场。



安培环路定理的证明

[证明] 因为任何磁场都是由一些稳恒的线闭合电流产生的，**只要证明**对其中**任一**稳恒的线闭合电流 I 和**任一**闭合回路 L 满足：

$$\oint_L \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = \begin{cases} 0, & (\mathbf{I} \text{ 不穿过 } \mathbf{L}) \\ \mu_0 I. & (\mathbf{I} \text{ 正向穿过 } \mathbf{L}) \end{cases}$$

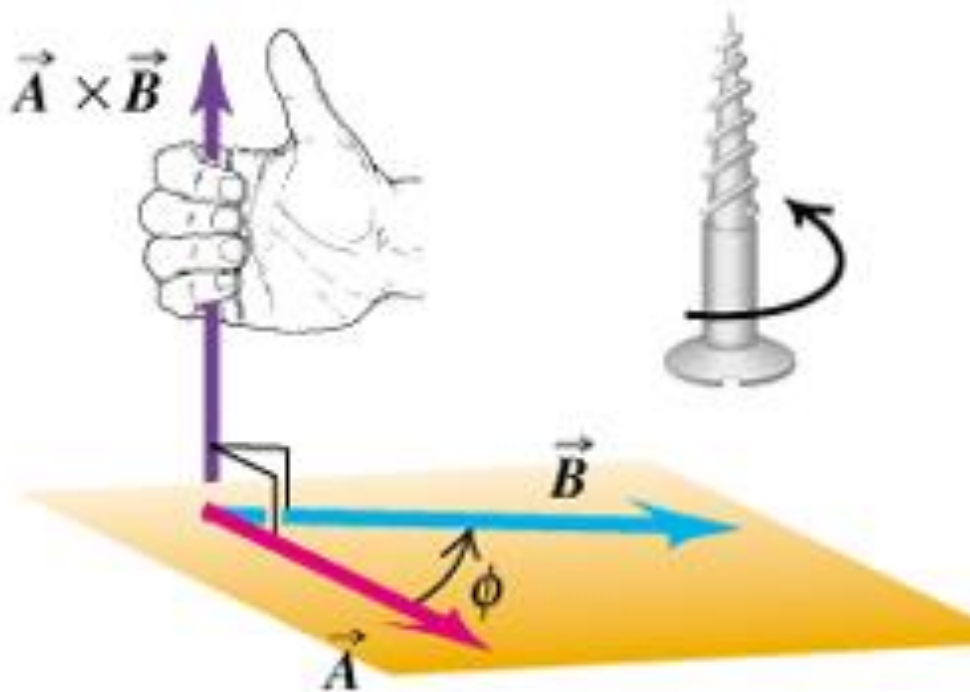
则按照**叠加原理**，安培环路定理便成立。

1. 矢量及立体角：

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

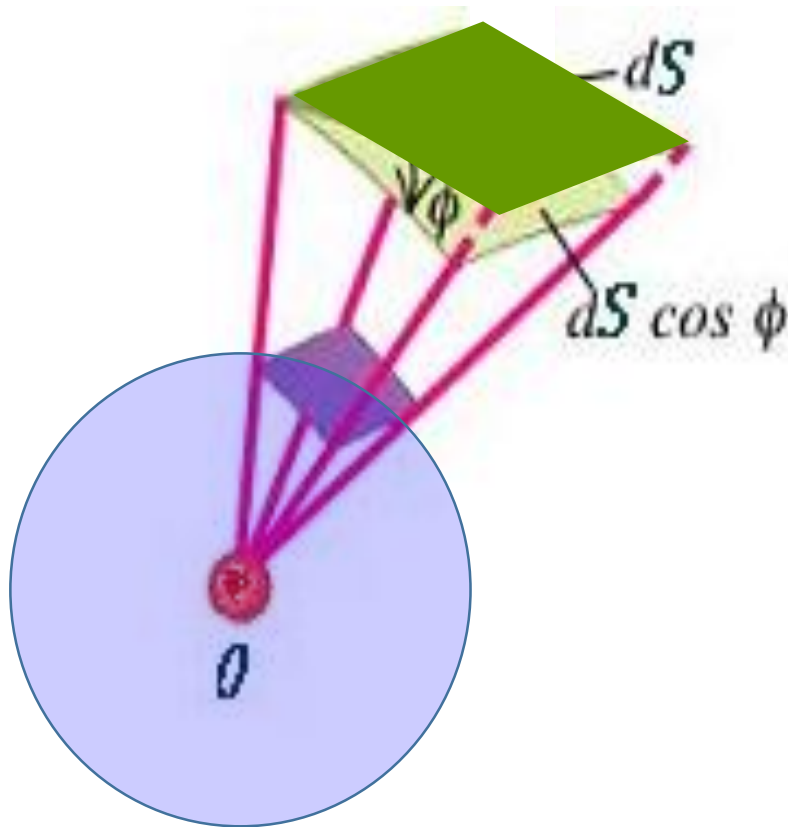
数值等于以A和B为邻边的平行四边形面积，故可改写为：

$$\vec{S} = \vec{A} \times \vec{B}$$



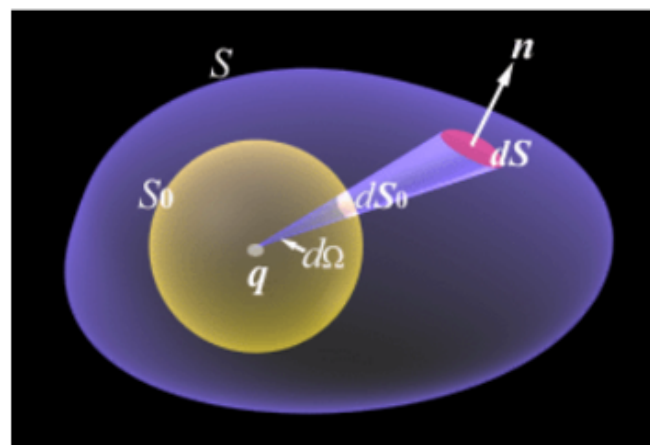
立体角：

$$d\Omega = \frac{dS_0}{r^2} = \frac{d\vec{S} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

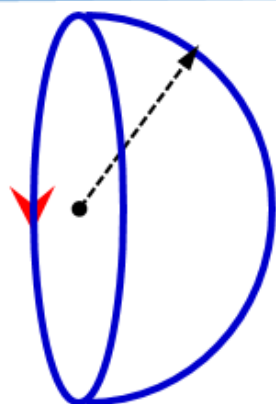
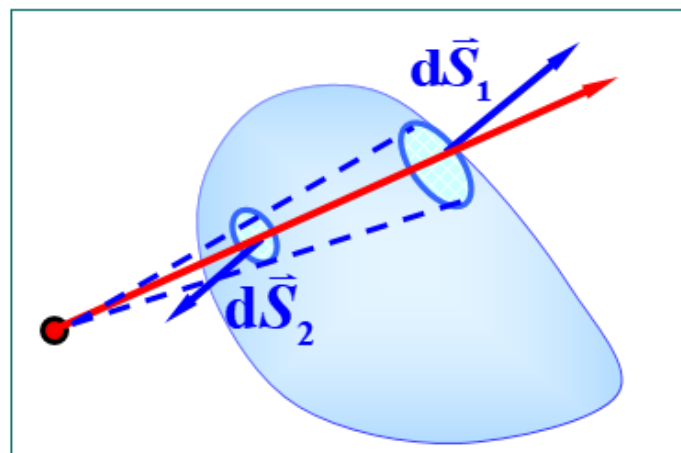


- dS 是有向面元
- 立体角可正可负可为零
- 球面对球心的立体角为 4π
- 图中不同半径的两个面元对O点所张立体角相同

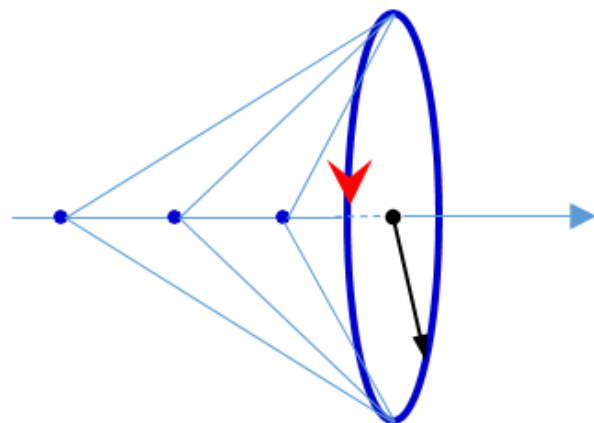
封闭曲面对曲面内任一点所张立体角为 4π 。



闭合曲面对曲面外任一点所张立体角为0。



半球面对底面上的点所张的立体角为 -2π

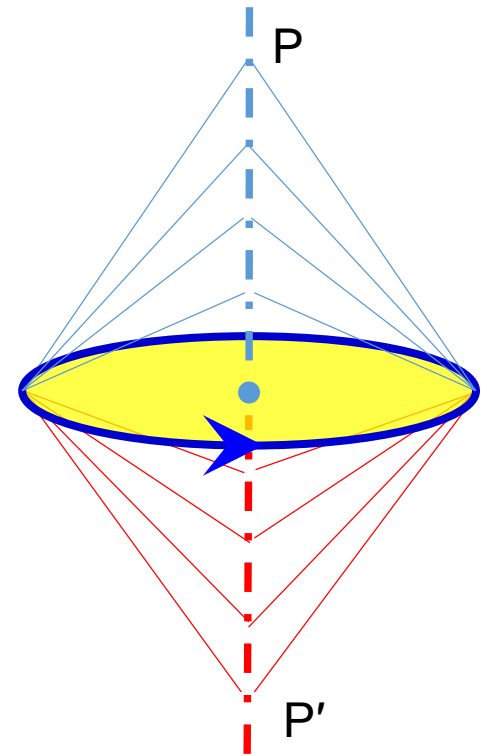


点无限接近平面时，所张的立体角为 2π



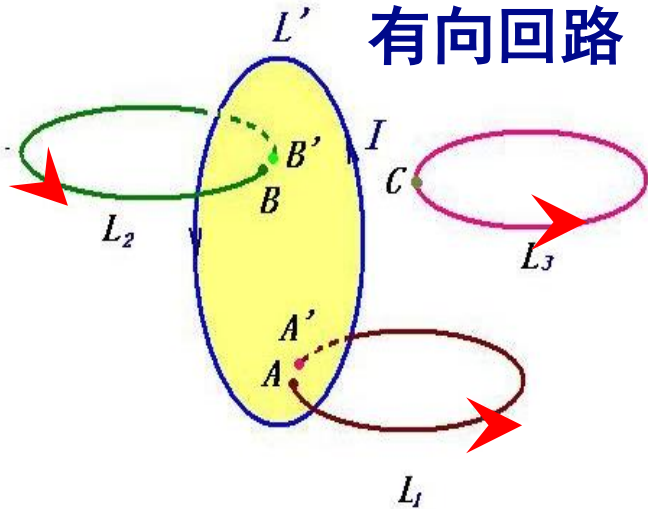
定面对动点的立体角变化规律

$$d\Omega = \frac{dS_0}{r^2} = \frac{d\vec{S} \cdot \vec{r}}{r^3}$$



当P点无限接近有向面时，所张立体角为 -2π ；

当P'点无限接近有向面时，所张立体角为 2π 。

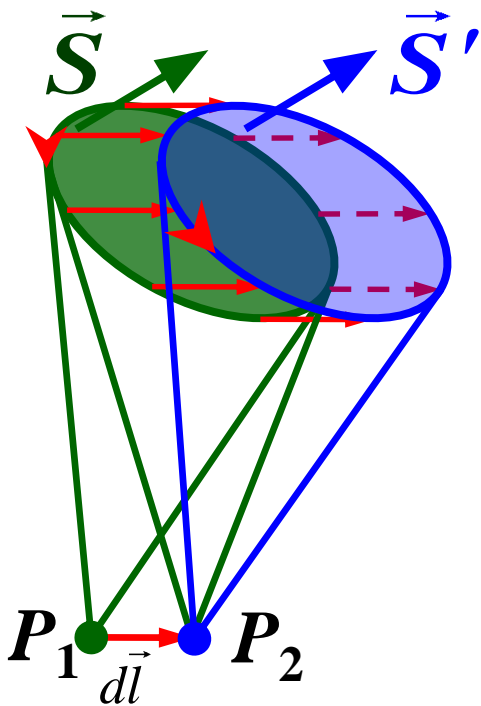


有向回路

变化量
= 末态量 - 初态量

$$\begin{cases} L_1: \text{从} A \text{变至} A' \text{点, 立体角变化} = 2\pi - (-2\pi) = 4\pi \\ L_2: \text{从} B' \text{变至} B \text{点, 立体角变化} = (-2\pi) - 2\pi = -4\pi \\ L_3: \text{从} C \text{变至} C \text{点, 立体角变化} = 0 \end{cases}$$

回路 L_1 、 L_2 都和回路 L 套链： L_1 正向穿过 L 、 L_2 反向穿过 L ；回路 L_3 和回路 L 不套链。



$d\vec{l} = \overrightarrow{P_1 P_2}$, \vec{S}' 是 S 平移 $d\vec{l}$ 所得的面

\vec{S} 面对 P_1 、 P_2 点张的立体角 Ω_{S,P_1} 、 Ω_{S,P_2}

\vec{S}' 面对 P_2 点张的立体角 $\Omega_{S',P_2} = \Omega_{S,P_1}$

S, S' 及侧面组成的闭合曲面对 P_2 张的立体角为零。

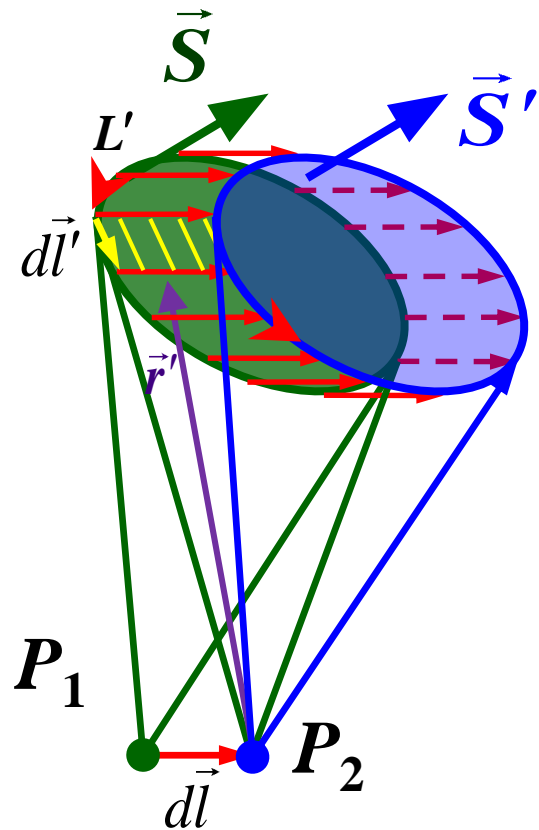
设侧面（方向朝外侧）对 P_2 张的立体角为 ω

$$\omega + \Omega_{S',P_2} - \Omega_{S,P_2} = 0$$

$$\therefore \omega = \Omega_{S,P_2} - \Omega_{S',P_2} = \Omega_{S,P_2} - \Omega_{S,P_1}$$

$$\omega = \Omega_{S,P_2} - \Omega_{S,P_1}$$

平面对某点平移后的新点所张立体角的变化等于该平面平移过程中所扫过的环带面对新点所张的立体角。



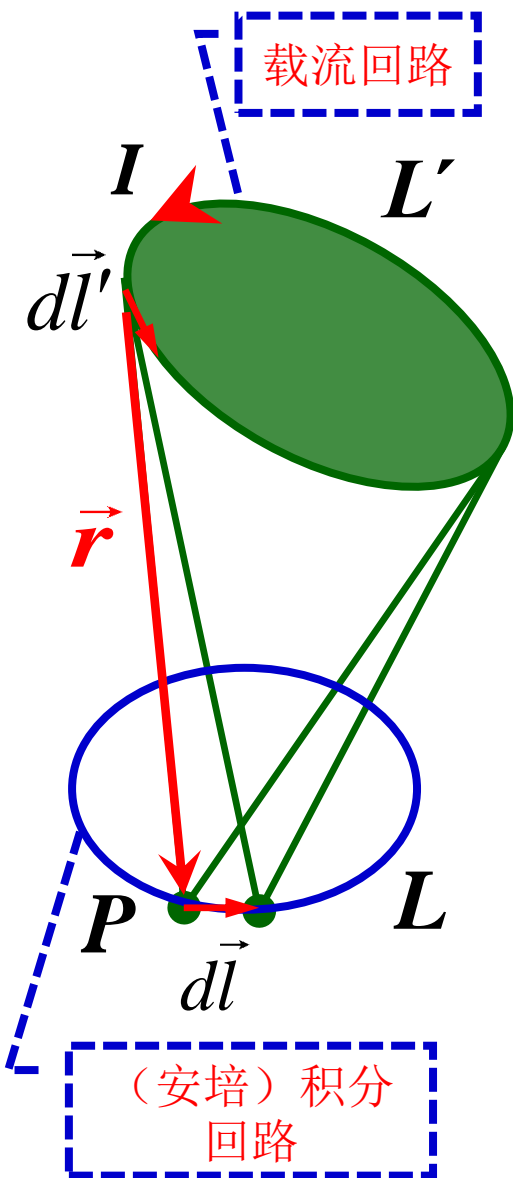
记 $\omega = \Omega_{S, P_2} - \Omega_{S, P_1} = d\Omega$

设S面的边界 L' ，在 L' 沿环路方向取 $d\vec{l}'$

$$d\vec{S}_{\text{侧}} = d\vec{l}' \times d\vec{l}$$

$$\oint_{L'} \frac{(d\vec{l}' \times d\vec{l}) \cdot \vec{r}'}{r^3} = \oint_{L'} \frac{d\vec{S} \cdot \vec{r}'}{r'^3} = \oint_{L'} d\omega = \omega = d\Omega$$

$$\oint_{L'} \frac{(d\vec{l}' \times d\vec{l}) \cdot \vec{r}'}{r'^3} = d\Omega$$



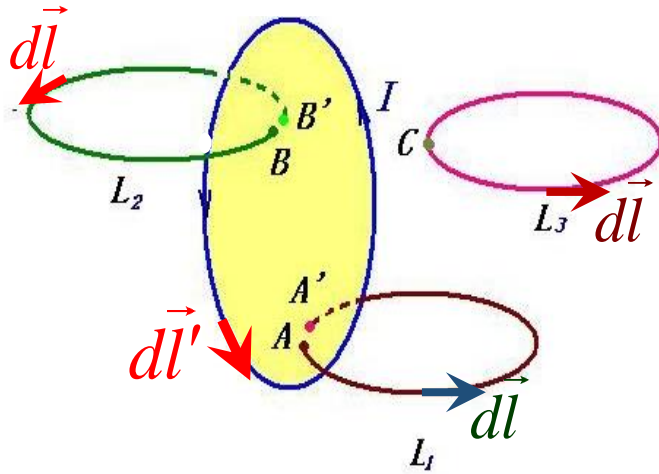
$$d\Omega = \oint_{L'} \frac{(\vec{dl}' \times \vec{dl}) \cdot \vec{r}'}{r'^3} \xrightarrow{\vec{r} = -\vec{r}'} - \oint_{L'} \frac{(\vec{dl}' \times \vec{dl}) \cdot \vec{r}}{r^3}$$

$$= - \oint_{L'} \frac{(\vec{r} \times \vec{dl}') \cdot \vec{dl}}{r^3} = \oint_{L'} \frac{(\vec{dl}' \times \vec{r}) \cdot \vec{dl}}{r^3}$$

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L'} \frac{I d\vec{l}' \times \vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} d\Omega$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L d\Omega$$

L: 有向回路



$$\begin{cases} A \xrightarrow{L_1} A': \oint d\Omega = 4\pi; \\ B' \xrightarrow{L_2} B: \oint d\Omega = -4\pi; \\ C \xrightarrow{L_3} C: \oint d\Omega = 0. \end{cases}$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_L \oint_{L'} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l}' \times \vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L d\Omega$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \begin{cases} \mu_0 I & (L_1, \text{电流正向穿过积分回路}) \\ -\mu_0 I & (L_2, \text{电流反向穿过积分回路}) \\ 0 & (L_3, \text{电流不穿过积分回路}) \end{cases}$$



$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

积分形式

$$\therefore \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{S}$$

$$\therefore \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

微分形式



稳恒电流磁场的基本方程式

$$\left\{ \begin{array}{l} \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_k I_k \end{array} \right.$$

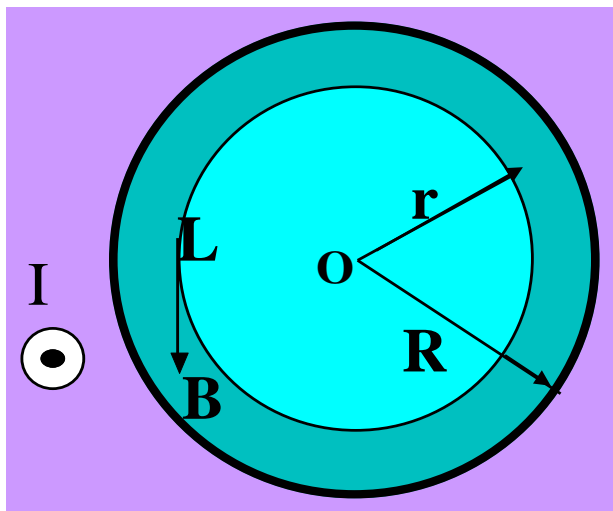
$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{array} \right.$$

稳恒磁场： 无源有旋

四、环路定理应用举例

只能解决磁场对称性好的问题

[例]一**无限长**直圆柱导线，截面半径为 **R** ，电流沿截面均匀分布，电流强度为 **I** ，求导线内、外的磁场分布。



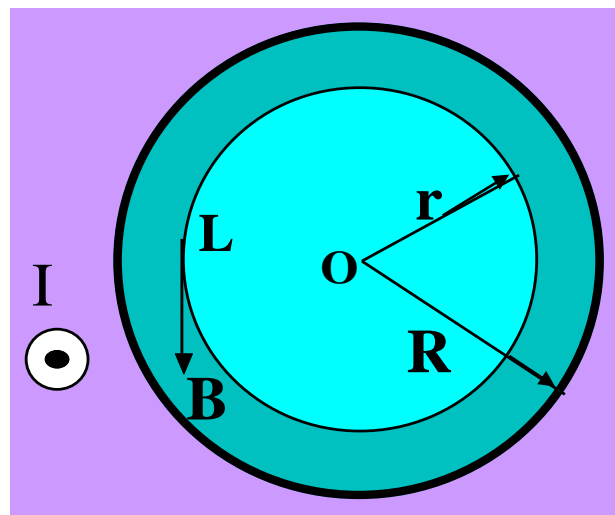
[解]根据电流分布的轴对称性，磁感应强度应沿与圆柱共轴的圆回路的切线方向，大小只与离轴线的距离有关。设圆回路 L 的半径为 r ，则由安培环路定理得

$$\oint_L \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{L}} = 2\pi r B = \mu_0 I',$$

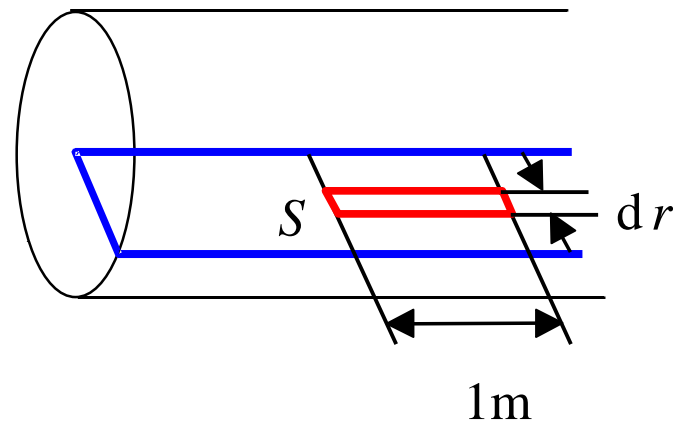
其中 I' 为穿过圆回路 L 的电流。

$$\text{易证: } I' = \begin{cases} I r^2 / R^2, & r < R, \\ I, & r \geq R. \end{cases}$$

$$\text{于是, } B = \begin{cases} \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}, & r < R, \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, & r \geq R. \end{cases}$$



在导体内通过圆柱中心轴线作一平面 S ，如图所示，计算通过每米长导线内 S 平面的磁通量。



解：窄条处的磁感应强度

$$B = \frac{\mu_0 dI}{2\pi r} = \frac{\mu_0}{2\pi r} \cdot \frac{I \pi r^2}{\pi R^2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{Ir}{R^2}$$

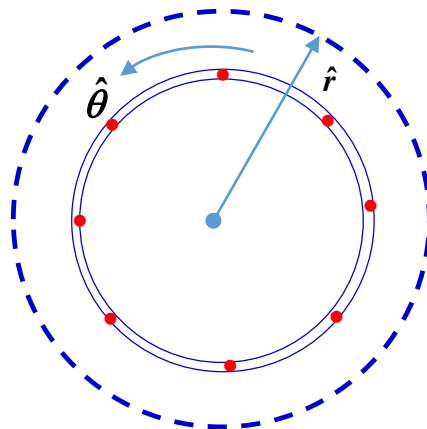
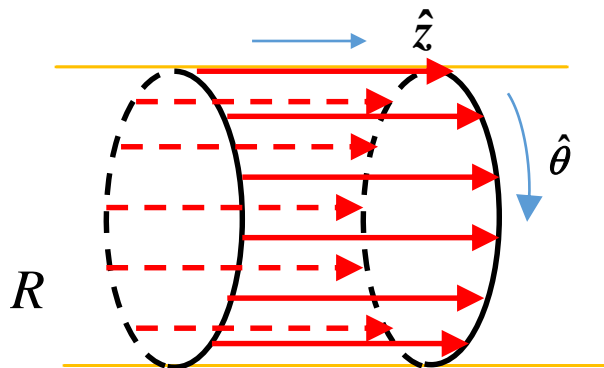
通过 dS 的磁通量：

$$d\Phi = B dS = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{Ir}{R^2} dr$$

通过单位长直导线平面 S 的磁通量：

$$\Phi = \int d\Phi = \int_0^R \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{Ir}{R^2} dr = \frac{\mu_0 I}{4\pi}$$

电流 **I** 均匀分布在一半径为 **a** 的无限长圆柱面**导体薄板**上，讨论磁场分布及面电流受力。



电流密度：

$$i = \frac{I}{2\pi a}$$

磁场：

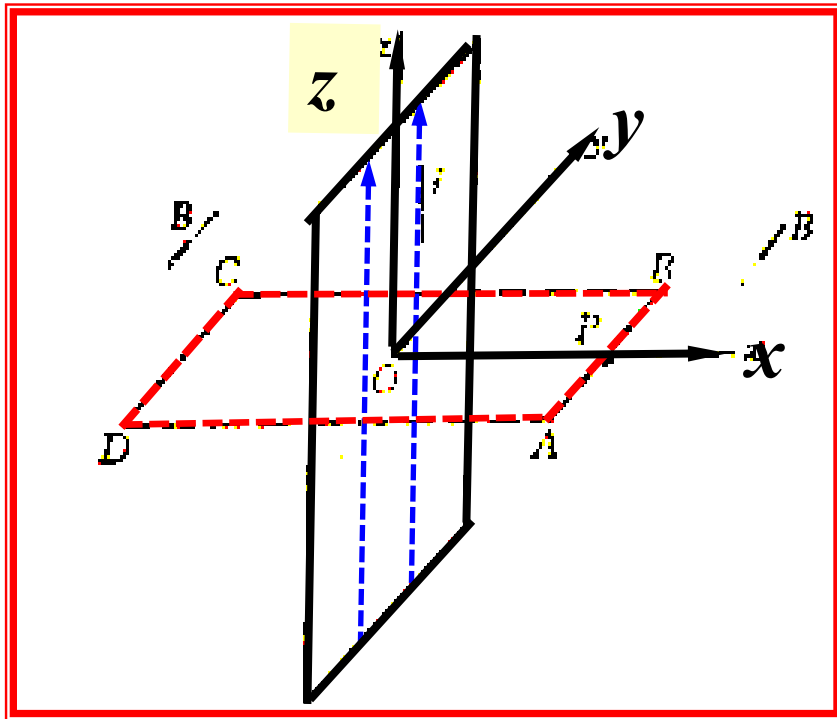
$$B = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, & \hat{\theta} \text{方向} (r > a) \\ \frac{\mu_0 I}{4\pi a} = \frac{1}{2} \mu_0 i, & \hat{\theta} \text{方向} (r = a) \\ 0 & (r < a) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= \vec{i} ds \times \vec{B} \\ &= -\frac{1}{2} \mu_0 i^2 ds \hat{r} \end{aligned}$$

$$\frac{d\vec{F}}{ds} = -\frac{1}{2} \mu_0 i^2 \hat{r}$$

向内正压力

[例] 电流均匀分布在一**无穷大平面导体薄板**上，电流密度为 i ，求空间磁场分布。

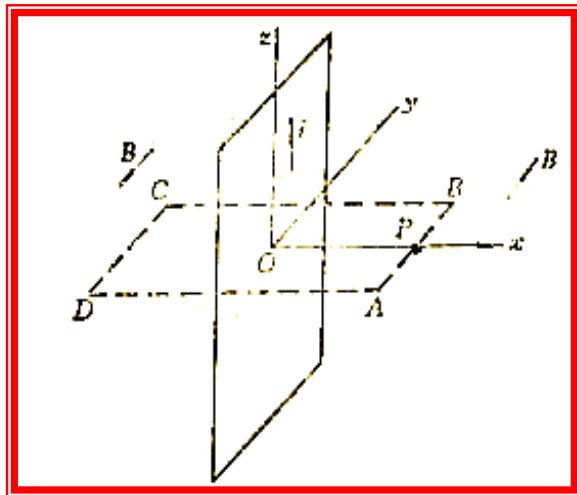


分析：由电流分布的**对称性**，可知磁感应强度**只有y分量**，其大小只与x有关，且 $B(x) = -B(-x)$ 。

考虑 x 轴上一点 P ，以 O 为中心，在 $x-y$ 平面过点 P 作一矩形回路 $ABCD$ ，应用安培环路定理

$$B(x) \cdot 2\overline{AB} = \mu_0 i \cdot \overline{AB}.$$

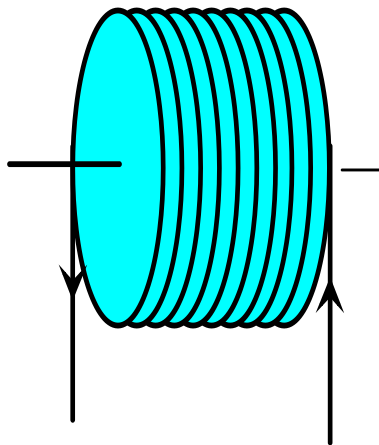
$$B(x) = \frac{\mu_0 i}{2}.$$



无穷大平面电流两侧为均匀磁场，且磁感应强度的大小相等、方向相反。

对有限大小的面电流板，只要 x 远小于该面电流板的尺寸，则它对磁感应强度的贡献也可由此式近似表示。

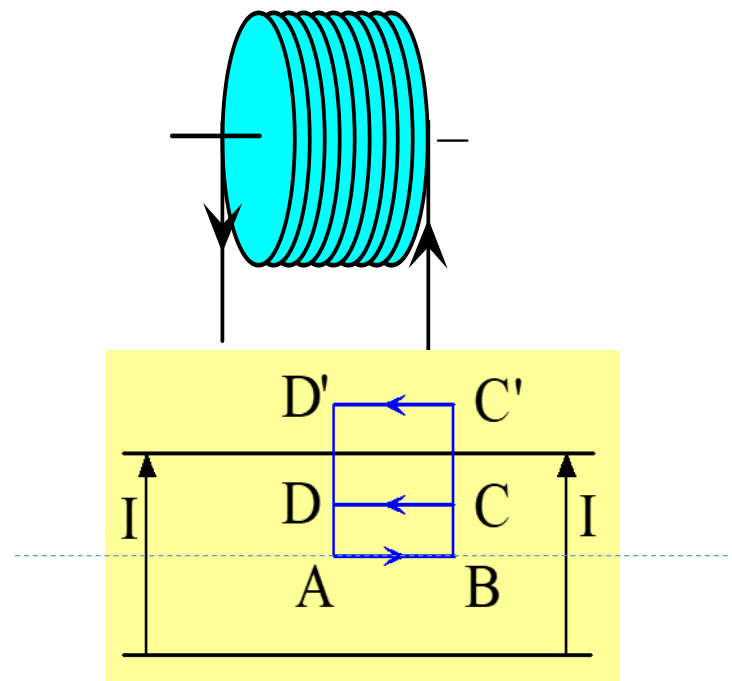
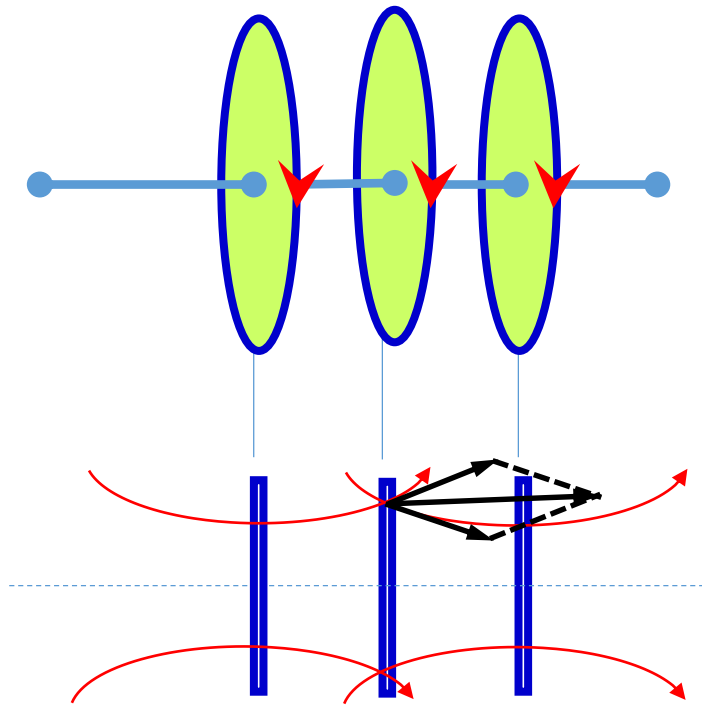
[例] 设一**无限长**螺丝管单位长度上的匝数为 **n** ，电流强度为 **I** ，求管内、外的磁场。



已有结论：

轴线上的磁感应强度大小为 **$\mu_0 n I$** ，沿轴线向左方向。

磁场对称性分析：由电流分布的轴对称性可判断管内磁感应强度 B 只有轴向分量，其大小只与离螺线管轴的距离 r 有关。取矩形回路 $ABCD$ 和 $ABC'D'A$ ， AB 位于螺线管轴上， CD 和 $C'D'$ 分别位于螺线管内和管外。

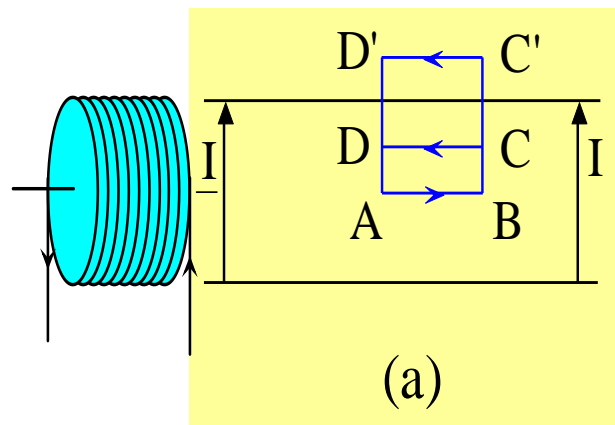


[解] 取矩形回路 $ABCD$ 和 $ABC'D'A$, AB 位于螺线管轴上, CD 和 $C'D'$ 分别位于螺线管内和管外 (见图a)。轴线上的磁感应强度大小为 $\mu_0 nI$, 沿轴线向左方向。对回路 $ABCD$ 应用安培环路定理得:

$$-\mu_0 nI \cdot \overline{AB} + B_i(r) \cdot \overline{AB} = 0$$

$$\text{所以 } B_i(r) = \mu_0 nI$$

无限长螺线管管内磁场均匀。



对回路 $ABC'D'A$ 应用安培环路定理得

$$-\mu_0 nI \cdot \overline{AB} + B_{e||}(r) \cdot \overline{AB} = -\mu_0 nI \cdot \overline{AB}, \quad B_{e||}(r) = 0$$

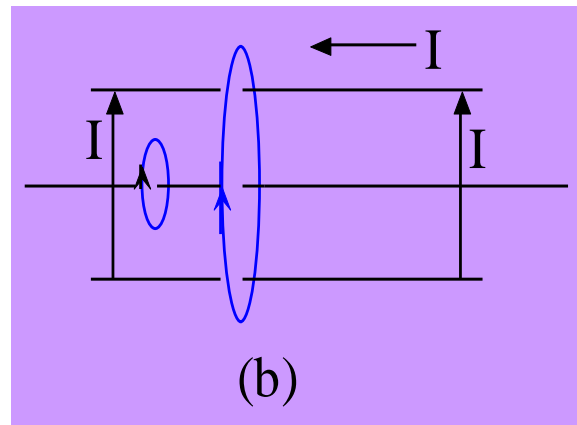
无限长螺线管管外沿轴线方向磁场处处为零。

管外磁场

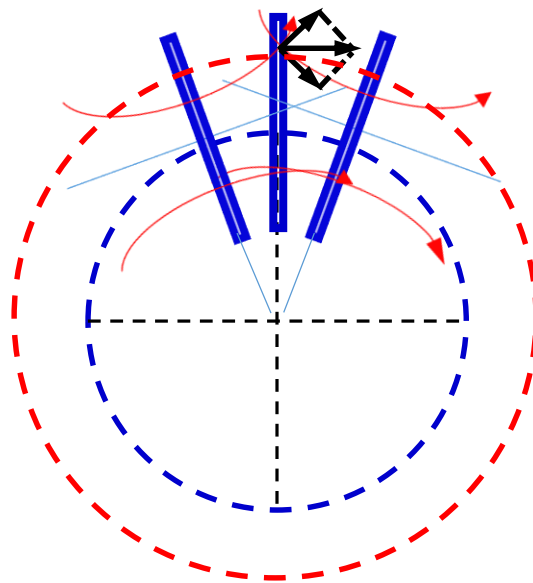
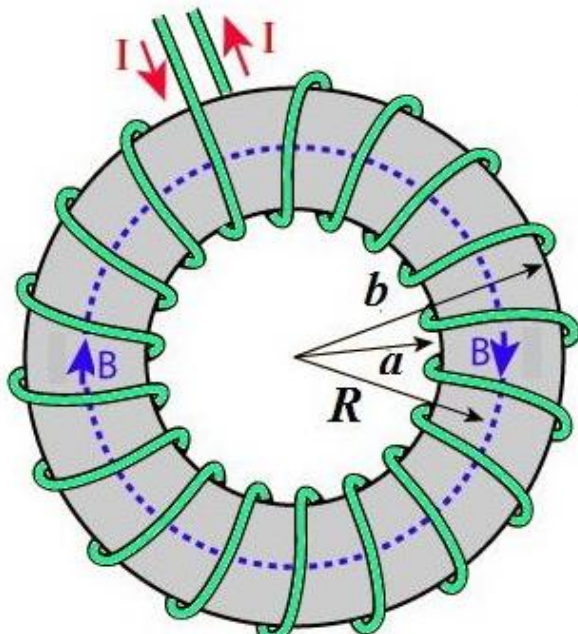
- 另一方面，考虑螺线管存在一自右向左的等效轴向电流 I (见图b)，且该电流可视作沿螺线管表面均匀分布的面电流，由它产生的磁感应强度方向与同螺线管共轴的圆形环路相切，设为 $B_{e\perp}$ 。
- 按图b选择同螺线管共轴的圆回路并应用安培环路定理，不难得出螺线管内磁场 $B_{e\perp}$ 为零，而螺线管外的磁场 $B_{e\perp}$ 与无穷长直线电流的磁场相同，

即
$$B_{e\perp} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \text{其中 } r \geq R$$
 (R 螺线管半径)。

综上：无限长螺线管管内磁场均匀分布，与轴线平行；管外磁场与无穷长直线电流的磁场相同。



[例] 绕在圆环上的线圈叫**螺绕环**，设螺绕环内径为 a ，外径为 b ，总匝数为 N ，电流强度为 I ，求环管内、外的磁场分布。

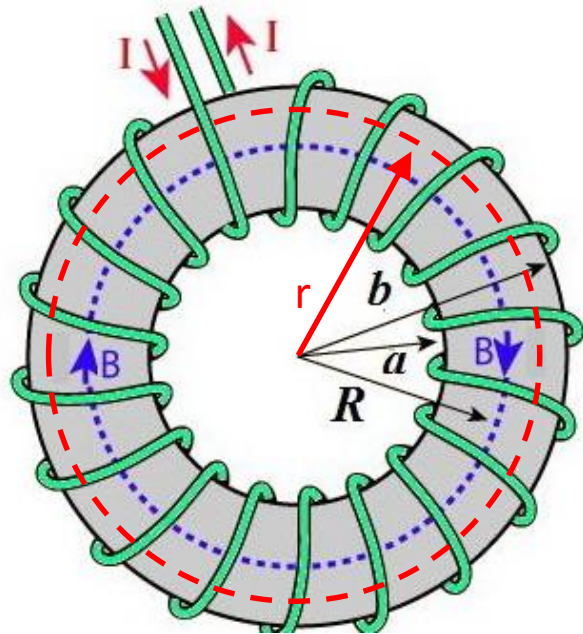


[解]密绕螺绕环，电流轴对称分布。磁感应强度 B 沿与环共轴的圆周的切线方向，大小只与离轴线的距离有关。在环管内部取半径为 r ($a < r < b$) 的圆周回路，由安培环路定理有

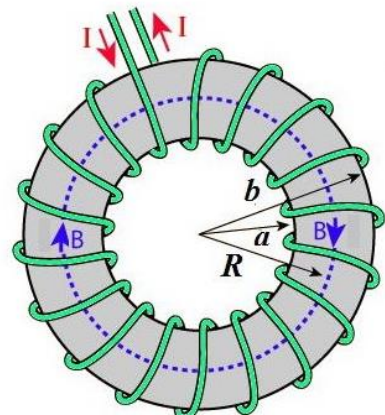
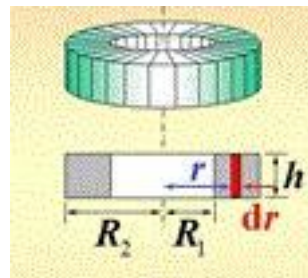
$$2\pi r B = \mu_0 N I$$

磁感应强度为：

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \quad (\text{螺绕环管内})$$



□ 磁场和小环截面形状无关



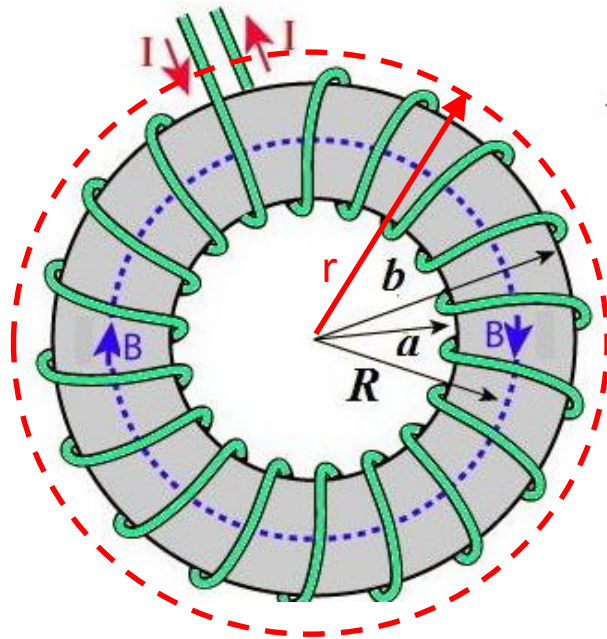
□ 当螺绕环很细即 $a \approx b \approx R$ (R 为螺绕环的平均半径) 时

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R} = \mu_0 nI,$$

细密螺绕环内磁场大小近似均匀，其值与无穷长直螺线管的结果一致。

环外磁场讨论：

- 如果在螺线环管的外部取一与环共轴的圆周回路，则穿过该回路的总电流为零，由安培环路定理可证环管外部的环向磁场处处为零。



- 螺绕环存在一逆时针方向的等效环向电流 I ，该电流沿环管表面分布。对于环管截面很小（ $a \approx b \approx R$ ）的螺绕环来说，该环向电流在环管外部的磁场和一电流强度 I 、半径 R 的圆线圈的磁场相同。



五、两条定理与毕奥—萨伐尔定律的关系

两条定理均**通过**毕奥—萨伐尔定律导出。

□ 从**高斯定理**的证明过程可知，它**不要求**毕奥—萨伐尔定律中的距离平方反比 关系。

□ 如 $\vec{B} \propto \frac{Id \vec{l} \times \hat{r}}{r^n}$ ，当 **$n \neq 2$** 时，高斯定理仍然成立。

□ **安培环路定理**则**要求** $n=2$ 。从证明过程可知，要利用**立体角**定义引出的积分式，而**立体角定义式**是平方反比关系：

□ 当 **$n \neq 2$** 时，该环量值与回路半径 **r** 有关，使**安培环路定理不能成立**。

□ 对**随时间变化的磁场**，高斯定理仍然成立；**但**实验表明，安培环路定理应予修正。