习题课

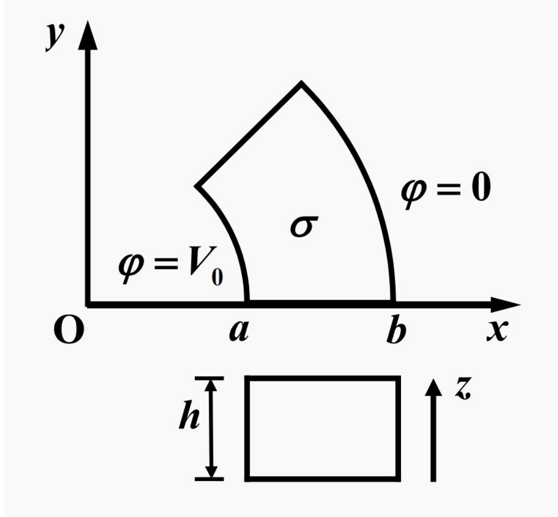
第3.5章，第四章

1、设介电常数为ε、电导率为σ的线性、各向同性非理想介质中的恒定电流密度为$\vec{J}_f$。如果介质非均匀，证明介质中将存在自由电荷，且密度为

$$\rho_f=\nabla(\frac{\varepsilon}{\sigma})\cdot\vec{J}_f$$

$$\rho_f=\nabla\cdot(\varepsilon\vec{E})=\nabla\cdot(\varepsilon\frac{\overrightarrow{J_f}}{\sigma})=\nabla(\frac{\varepsilon}{\sigma})\cdot\overrightarrow{J_f}+\underbrace{\boxed{\nabla\cdot\overrightarrow{J_f}}}_{0}(\frac{\varepsilon}{\sigma})=\nabla(\frac{\varepsilon}{\sigma})\cdot\overrightarrow{J_f}$$

2、求如图所示导体的电导。（用三种方法）

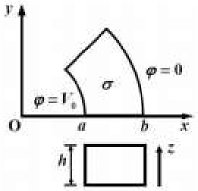


（习题 2）

●**电导定义** $G=\frac{I}{V}$

$I\to\vec{J}\to\vec{E}\to V/\varphi$

$I=\int_s \vec{J}\cdot d\vec{S}$ $\quad\vec{J}=\sigma\vec{E}$ $\quad V=\int \vec{E}\cdot d\vec{r}$



$G=\frac{I}{V}$

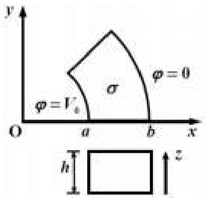
$I=\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S}$ $\Rightarrow \vec{J}(r)=\frac{I}{r\theta_0 h}\hat{r} \Rightarrow \vec{E}=\frac{1}{\sigma}\vec{J}=\frac{I}{\sigma h\theta_0}\frac{1}{r}\hat{r}$

$V=\int_{R_1}^{R_2}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_{R_1}^{R_2}\frac{I}{\sigma h\theta_0}\frac{1}{r}dr=\frac{I}{\sigma h\theta_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$

故 $G=\frac{I}{V}=\sigma h\theta_0/\ln\frac{R_2}{R_1}$

●**串并联电阻**

R方向串联 θ方向并联



$R=\frac{l}{\sigma S}$

串联：$\Delta R_r=\frac{\Delta l}{\sigma h l\Delta\theta}=\frac{\Delta r}{\sigma h r\Delta\theta}$

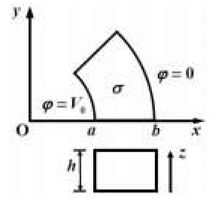
故 $R_r=\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{\sigma h r\Delta\theta}=\frac{1}{\sigma h\Delta\theta}\ln\frac{R_2}{R_1}$

$\Rightarrow G_r=\sigma h\Delta\theta/\ln\frac{R_2}{R_1}$

并联：$G=\int_0^{\theta_0}G_r d\theta=\frac{\sigma h\theta_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$

●**求解Laplace方程**

$\boxed{\nabla^2\varphi(r)=\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}=0}$ $\quad\boxed{\varphi(\theta)}=A\ln r+B$



由边界条件：$\begin{cases}\varphi(R_1)=V_0\\ \varphi(R_2)=0\end{cases}$ $\Rightarrow A=V_0/\ln\frac{R_1}{R_2}$

$\therefore E(r)=\frac{\partial\varphi}{\partial r}=A\cdot\frac{1}{r}=V_0/\ln\frac{R_1}{R_2}\cdot\frac{1}{r}$

传导电流欧姆定律：$\vec{J}=\sigma\vec{E}=\sigma V_0/\ln\frac{R_1}{R_2}\frac{1}{r}\hat{r}$

而 $I=JS=\sigma h\theta_0 V_0/\ln\frac{R_1}{R_2}$

故 $G=\frac{I}{V}=\sigma h\theta_0/\ln\frac{R_1}{R_2}=\frac{\sigma h\theta_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$

3、一球形电容器，内径为 a，外径为 b。其中填满两层非理想介质，电导率分别为 σ_1 和 σ_2，两介质分界面也为球面，半径为 c。若两电极间加一电压 V_0，求：

（1）两电极之间各点的电位 φ、电场强度 $\vec{E}$ 和电流密度 $\vec{J}$；（2）漏电导 G。

$$I \rightarrow \vec{J} \rightarrow \vec{E} \rightarrow V/\varphi$$

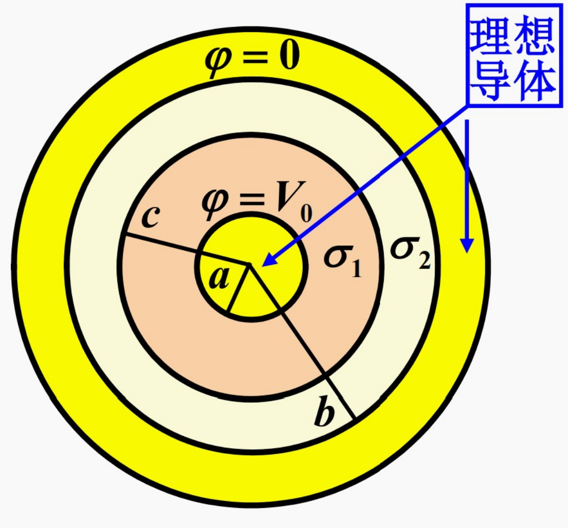
$$I=\int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} \qquad \vec{J}=\sigma\vec{E} \qquad V=\int \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$$I=\int_S \vec{J}\cdot d\vec{S}=4\pi r^2 J\hat{r} \Longrightarrow J=\frac{I}{4\pi r^2}\hat{r} \Longrightarrow \vec{E}=\frac{\vec{J}}{\sigma}=\frac{I}{4\pi\sigma r^2} \Longrightarrow U_0=\int_a^c \frac{I}{4\pi\sigma_1 r^2}d_r+\int_c^b \frac{I}{4\pi\sigma_2 r^2}d_r$$

$$\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{I}{4\pi\sigma_1 r^2}\hat{r}, & R_1<r<R_0\\[2mm] \dfrac{I}{4\pi\sigma_1 r^2}\hat{r}, & R_0<r<R_2\end{cases} \Longleftarrow I=\frac{4\pi U_0\sigma_2 abc}{\sigma_2 b(c-a)+\sigma_1 a(b-c)}$$

$$\varphi=\begin{cases}-\displaystyle\int_a^r \frac{I}{4\pi\sigma_1 r^2}dr+U_0=\frac{I}{4\pi\sigma_1}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}\right)+U_0, & a<r<c\\[2mm] \displaystyle\int_r^b \frac{I}{4\pi\sigma_2 r^2}dr=\frac{I}{4\pi\sigma_2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{b}\right), & c<r<b\end{cases}$$

$$G=\frac{I}{U_0}=\frac{4\pi U_0\sigma_2 abc}{\sigma_2 b(c-a)+\sigma_1 a(b-c)}$$



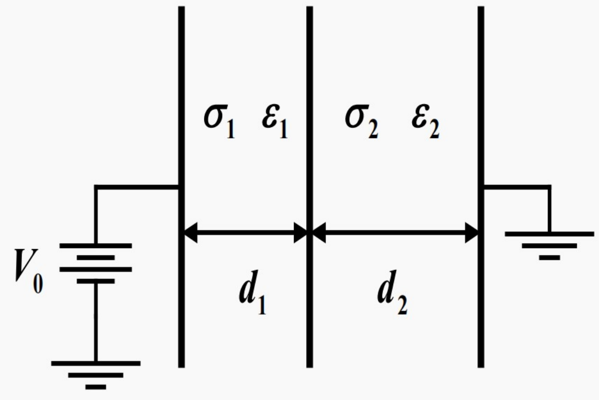
（习题 3）

4、如图所示，设在一个极板面积为 S 的平行板电容器中充有两层非理想介质，在两极板间加上恒定电压 V_0，求：

（1）每种介质中的电场强度及二种介质分界面上的自由电荷密度。

（2）求该电容器的漏电导。

（3）若介质的参数满足条件 $\sigma_1\varepsilon_2=\sigma_2\varepsilon_1$，求该电容器的漏电导 G 与电容 C 之比值 G/C。



（习题 4）

解：①根据传导电流欧姆定律求电场：

由 $\vec{J}=\sigma\vec{E}$，知：

$\vec{E}_1=\frac{\vec{J}}{\sigma_1}$，$\vec{E}_2=\frac{\vec{J}}{\sigma_2}$

故

$U_0=\int_{l_1}\vec{E}_1 d\vec{l}+\int_{l_2}\vec{E}_2 d\vec{l}=\frac{J}{\sigma_1}d_1+\frac{J}{\sigma_2}d_2$

$\Rightarrow \vec{J}=\frac{U_0\sigma_1\sigma_2}{d_1\sigma_2+d_2\sigma_1}\hat{i}$

故电场：

$\vec{E}_1=\frac{U_0\sigma_2}{d_1\sigma_2+d_2\sigma_1}\hat{i}$，$\vec{E}_2=\frac{U_0\sigma_1}{\sigma_1 d_2+\sigma_2 d_1}\hat{i}$

故 $\rho_{sf}=\hat{n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\hat{n}\cdot(\vec{E}_2\varepsilon_2-\vec{E}_1\varepsilon_1)$

$\Rightarrow \rho_{sf}=\frac{U_0(\sigma_1\varepsilon_2-\varepsilon_1\sigma_2)}{\sigma_1 d_2+\sigma_2 d_1}$

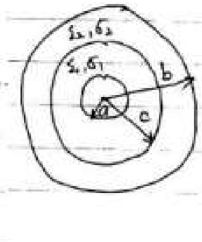
② $I=\vec{J}\cdot\vec{S}=\frac{U_0\sigma_1\sigma_2 S}{\sigma_2 d_1+\sigma_1 d_2}$

$G=\frac{I}{U_0}=\frac{\sigma_1\sigma_2 S}{\sigma_1 d_2+\sigma_2 d_1}$

$\sigma_1\varepsilon_2=\sigma_2\varepsilon_1$

(3) $\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}=\frac{d_1}{\varepsilon_1 S}+\frac{d_2}{\varepsilon_2 S}\Rightarrow C=\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 S}{\varepsilon_1 d_2+\varepsilon_2 d_1}$，则 $\frac{G}{C}=\frac{\sigma_1\sigma_2(\varepsilon_1 d_2+\varepsilon_2 d_1)}{\varepsilon_1\varepsilon_2(\sigma_1 d_2+\sigma_2 d_1)}=\frac{\sigma_1}{\varepsilon_1}=\frac{\sigma_2}{\varepsilon_2}$

5、设同轴线内导体半径为 a，外导体半径为 b。内外导体间填充两层介质，电导率分别为 σ_1 和 σ_2，介电常数分别为 ε_1 和 ε_2，两介质分界面为同轴圆柱面，其半径为 c。如在内外导体间加 V 伏电压，求该同轴电缆的电位和电场强度分布、分界面上的自由电荷密度以及单位长度的绝缘电阻。



解：由 $\vec{J}=\sigma_1\vec{E}_1=\sigma_2\vec{E}_2$

而 $\vec{J}=\dfrac{I}{2\pi r}\hat{r}$

故 $\vec{E}_1=\dfrac{I}{2\pi r\sigma_1}\hat{r}$，$\vec{E}_2=\dfrac{I}{2\pi\sigma_2 r}\hat{r}$

而 $V=\int_a^c\vec{E}_1 d\vec{r}+\int_c^b\vec{E}_2 d\vec{r}=\dfrac{I}{2\pi\sigma_1}\ln\dfrac{c}{a}+\dfrac{I}{2\pi\sigma_2}\ln\dfrac{b}{c}$

$\Rightarrow I=\dfrac{2\pi V\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1\ln\frac{b}{c}+\sigma_2\ln\frac{c}{a}}$

$$\Rightarrow \vec{E}=\begin{cases}\dfrac{V\sigma_2}{\sigma_1\ln\frac{b}{c}+\sigma_2\ln\frac{c}{a}}\dfrac{\hat{r}}{r} & a<r<c\\[2ex] \dfrac{V\sigma_1}{\sigma_1\ln\frac{b}{c}+\sigma_2\ln\frac{c}{a}}\dfrac{\hat{r}}{r} & c<r<b\end{cases}$$

介质分界面 $\rho_{sf}=\hat{n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)$

$\Rightarrow \rho_{sf}=\dfrac{V(\varepsilon_2\sigma_1-\varepsilon_1\sigma_2)}{\sigma_1\ln\frac{b}{c}+\sigma_2\ln\frac{c}{a}}\cdot\dfrac{1}{c}$

$$\varphi=\begin{cases}-\int_a^r Edr+V & a<r<c\\ \int_r^b Edr & c<r<b\end{cases}$$

$$R=\frac{V}{I}=\frac{\sigma_2\ln\frac{c}{a}+\sigma_1\ln\frac{b}{c}}{2\pi\sigma_1\sigma_2}$$

4-5　一厚度为 d 的无限大的平板，除位于其中心的半径为 a 的圆柱孔（参看题图4-2）外，整个板中电流的体密度是均匀的，且为 $\boldsymbol{J}=J_0\hat{\boldsymbol{z}}$，求各处的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$。

4-5 解：总的磁感应强度 $\vec{B}$ 可以看为 $\vec{J}=J_0\hat{z}$ 的整块平板与 $-J_0\hat{z}$ 的圆柱体所产生的 $\vec{B}$ 的叠加

① 整块平板在空间各处的磁感应强度 $\vec{B}$（P_{114}，例4.3）

$$\vec{B}_1=\begin{cases}-\frac{1}{2}\mu_0 J_0 d\,\hat{x} & (y>\frac{d}{2})\\ \frac{1}{2}\mu_0 J_0 d\,\hat{x} & (y<-\frac{d}{2})\\ -\mu_0 J_0 y\,\hat{x} & (-\frac{d}{2}\le y\le\frac{d}{2})\end{cases}$$

安培环路定律

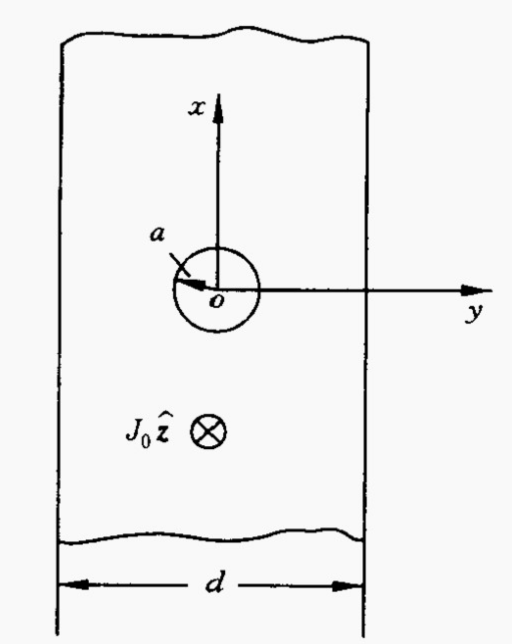
② 圆柱体所产生的在空间各处的 $\vec{B}$（无限长直线恒定电流 I 产生的 $\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{\phi}$）

$$\vec{B}_2=\begin{cases}-\frac{\mu_0 a^2 J_0}{2\rho}\hat{\phi} & (\rho>a)\\ -\frac{\mu_0 J_0\rho}{2}\hat{\phi} & (\rho\le a)\end{cases}$$

坐标变换，圆柱坐标单位矢量与直角坐标单位矢量之间关系：

$$\hat{\phi}=-\sin\phi\,\hat{x}+\cos\phi\,\hat{y}=-\frac{y}{\rho}\hat{x}+\frac{x}{\rho}\hat{y},\quad \rho=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\therefore\ \vec{B}_2=\begin{cases}-\frac{\mu_0 J_0 a^2}{2}\left(\frac{x}{\rho^2}\hat{y}-\frac{y}{\rho^2}\hat{x}\right), & (x^2+y^2>a)\\ -\frac{\mu_0 J_0}{2}(x\hat{y}-y\hat{x}), & (x^2+y^2\le a)\end{cases}$$



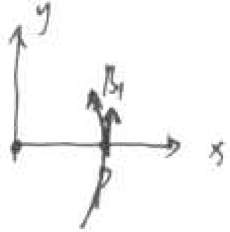
题图 4-2

4-6　一半径为 a 的无限长的圆柱（参看题图4-3）通有均匀电流，密度为 $\boldsymbol{J}=J_0\hat{\boldsymbol{z}}$，其中开有一半径为 b，中心离圆柱的轴线为 d 的无限长小圆柱孔，求孔中心 P 点的磁感应强度。

4.6

解：孔中心P点的磁感应强度B可看作是大小圆柱所产生的磁感应强度的叠加

① $J_0\hat{z}$的大圆柱体在P点产生的B

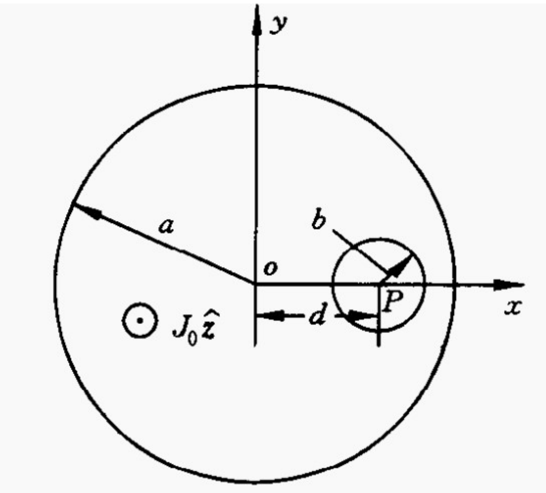


$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 J_0 \cdot \pi d^2}{2\pi d}\hat{\phi} = \frac{\mu_0 J_0 d}{2}\hat{\phi} = \frac{\mu_0 J_0 d}{2}\hat{y}$$

② $-J_0\hat{z}$的小圆柱体在P点产生的B

$$\vec{B}_2 = 0$$

所以总磁感应强度 $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 J_0 d}{2}\hat{y}$



题图 4-3

4-11　证明

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\boldsymbol{J}}{R}\mathrm{d}V$$

是方程 $\nabla^2\boldsymbol{A}=-\mu_0\boldsymbol{J}$ 的解。

4.11

解: ① $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$, $\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R}dV'$

$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{J}(\vec{r}')\times\vec{R}}{R^2}dV'=\nabla\times\vec{A}$

② $\nabla\cdot\vec{A}=0$

③ $\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}$

$\Rightarrow\nabla\times\vec{B}=-\nabla^2\vec{A}=\mu_0\vec{J}$

$\Rightarrow\nabla^2\vec{A}=-\mu_0\vec{J}$

$\therefore\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R}dV'$ 是方程 $\nabla^2\vec{A}=-\mu_0\vec{J}$ 的解

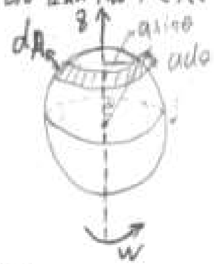
$$\boxed{\nabla^2\left(\frac{1}{4\pi R}\right)=-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}$$

4-12　一半径为 a 的导体球带净电量为 q，以角速度 ω 绕它的直径旋转，求磁矩。

4-12

解：第4章PPT中 半径为a的圆电流线圈的磁偶极矩 $\vec{m}$

$\vec{m} = IS\,\hat{z}$



本题中：面电荷密度 $\rho_s = \dfrac{q}{4\pi a^2}$

将导体球面分割成面积为 ds 的线圈，

当其以角速度 w 绕它的圆心旋转时，产生电流 I

由图可知 $dA = 2\pi a\sin\theta \cdot a\,d\theta = 2\pi a^2 \sin\theta\, d\theta$

$\therefore I = \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{dq}{\frac{2\pi}{w}} = \dfrac{w}{2\pi} dq$

$dq = \rho_s \cdot dA = \dfrac{q}{4\pi a^2} \cdot 2\pi a^2 \sin\theta\, d\theta = \dfrac{q\sin\theta}{2} d\theta$

$\therefore I = \dfrac{qw\sin\theta}{4\pi} d\theta$

$\therefore \vec{m} = \int_s I \cdot ds$ ， $ds = \pi(a\cdot\sin\theta)^2$

$= \int_0^{\pi} \dfrac{qw\sin\theta\, d\theta}{4\pi} \cdot \pi a^2 \sin^2\theta$

$= \dfrac{1}{3} qwa^2\,\hat{z}$