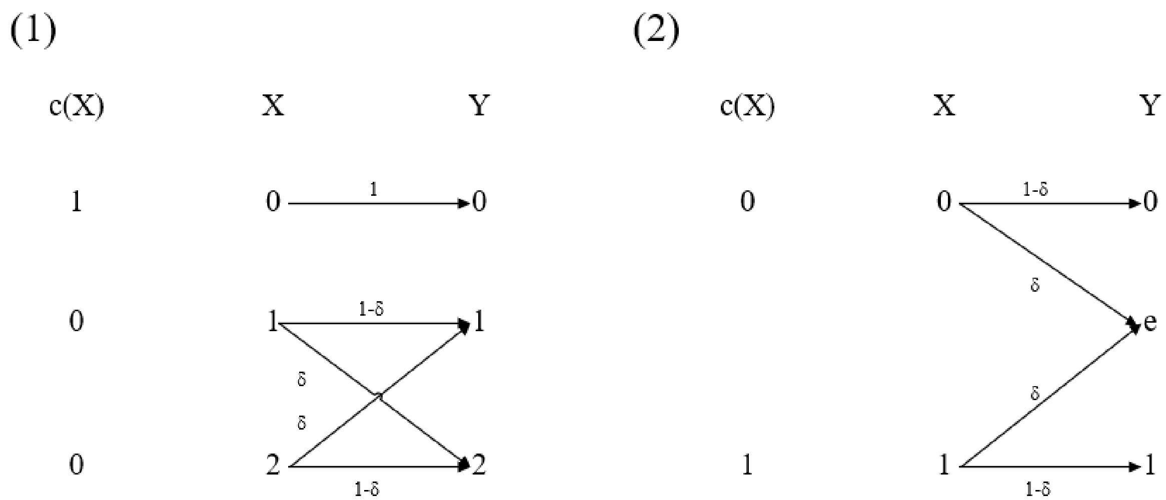
信息论第六次小测解答

中国科学技术大学《信息论 A》006125.01 班助教组

2024 年 5 月 10 日

第 1 题

Calculate $C(\Gamma)$ *for:*



解:

$$C(\Gamma) = \max_{P_X} I(X;Y), \tag{1}$$

$$\text{s.t. } \mathbf{E}[c(X)] \le \Gamma. \tag{2}$$

对于这样的问题，我们需要先确定 $\Gamma_{\min}$ 和 $\Gamma_{\max}$，因为对于所有的 $\Gamma < \Gamma_{\min}$，容量代价函数的优化问题无可行解，视 $C(\Gamma) = 0$；而对于任意 $\Gamma > \Gamma_{\max}$, 我们可以在约束 $\Gamma_{\max}$ 下取到 $C(\Gamma)$ 的极值, 这也便意味着 $C(\Gamma) = C(\infty)$, 等价于无约束；对于任意的 $\Gamma_{\min} \le \Gamma \le \Gamma_{\max}$，容量代价函数的优化问题中的“$\le$”可以变为“$=$”(Corollary 6.1).

$\Gamma_{\min}$：

$$\mathbf{E}[c(X)]=\sum_{x\in\mathcal{X}}p(x)c(x)\geq\Gamma_{\min}:=\min_{x\in\mathcal{X}}c(x),$$

$\Gamma_{\max}$：当我们在无约束下求解 $\max_{P_X}I(X;Y)$ 得到一组 $\mathcal{P}^*$, 从中取得 $p^*(X)$ 使得 $\mathbf{E}[c(X)]$ 最小, 此时便有：

$$\Gamma=\sum p^*(x)c(x):=\Gamma_{\max}\leq\max_{x\in\mathcal{X}}c(x).$$

(1)

只需 $P_X(0)=0$，即可得到 $\Gamma_{\min}=0$. 下面求 $\Gamma_{\max}$，观察信道发现，$X=1$ 和 $X=2$ 具有非常特殊的对称性，因此我们猜测当 $I(X;Y)$ 最大时，$P_X(1)=P_X(2)$，下面我们给出对称性假设的证明：

构建分布 $P_1:P_X(0)=1-a-b,P_X(1)=a,P_X(2)=b$ 和分布 $P_2:P_X(0)=1-a-b,P_X(1)=b,P_X(2)=a$，其中 $a\neq b$. 令分布 $P'=(P_1+P_2)/2$，则：

$$\mathbf{E}[c(X)]_{P_1}=\mathbf{E}[c(X)]_{P_2}=\mathbf{E}[c(X)]_{P'},$$

$$I(X;Y)_{P_1}=I(X;Y)_{P_2}.$$

由 $I(X;Y)$ 关于 P_X 是 concave 得：

$$0.5I(X;Y)_{P_1}+0.5I(X;Y)_{P_2}=I(X;Y)_{P_1}=I(X;Y)_{P_2}\leq I(X;Y)_{P'},$$

故当 $I(X;Y)$ 最大时，$P_X(1)=P_X(2)$.

根据对称性，设 $P_X(1)=P_X(2)=\epsilon$，则 $\mathbf{E}[c(X)]=1-2\epsilon$,

$$I(X;Y)=H(Y)-H(Y|X)=2\epsilon\ln\frac{1}{\epsilon}+(1-2\epsilon)\ln\frac{1}{1-2\epsilon}-2\epsilon h_2(\delta), \qquad (3)$$

对 ϵ 求导得到 $I(X;Y)$ 取极值时:

$$\epsilon^*=\frac{1}{2+e^{h_2(\delta)}},$$

则：

$$\Gamma_{\max}=1-2\epsilon^*=\frac{e^{h_2(\delta)}}{2+e^{h_2(\delta)}},$$

$$C(\Gamma_{\max})=\frac{2}{2+e^{h_2(\delta)}}\ln(2+e^{h_2(\delta)})+\frac{e^{h_2(\delta)}}{2+e^{h_2(\delta)}}\ln(1+\frac{2}{e^{h_2(\delta)}})-\frac{2}{2+e^{h_2(\delta)}}h_2(\delta).$$

对于 $\Gamma_{\min}\leq\Gamma\leq\Gamma_{\max}$，优化问题 (1)、(2) 中 "$\leq$" 可以变为 "$=$"，则 $\mathbf{E}[c(X)]=1-2\epsilon=\Gamma$，将 $\epsilon=\frac{1-\Gamma}{2}$ 代入 (3) 即可，故：

$$C(\Gamma)=\begin{cases}(1-\Gamma)\ln\frac{2}{1-\Gamma}+\Gamma\ln\frac{1}{\Gamma}-(1-\Gamma)h_2(\delta), & 0\leq\Gamma\leq\frac{e^{h_2(\delta)}}{2+e^{h_2(\delta)}}\\ \frac{2}{2+e^{h_2(\delta)}}\ln(2+e^{h_2(\delta)})+\frac{e^{h_2(\delta)}}{2+e^{h_2(\delta)}}\ln(1+\frac{2}{e^{h_2(\delta)}})-\frac{2}{2+e^{h_2(\delta)}}h_2(\delta), & \Gamma>\frac{e^{h_2(\delta)}}{2+e^{h_2(\delta)}}\end{cases} \quad \text{(均以 e 为底)}$$

(2)

只需 $P_X(0)=1$，即可得到 $\Gamma_{\min}=0$.

设 $P_X(0)=\epsilon$，则 $\mathbf{E}[c(X)]=1-\epsilon$，

$$I(X;Y)=H(X)-H(X|Y)=(1-\delta)h_2(\epsilon), \tag{4}$$

对 ϵ 求导得到 $I(X;Y)$ 取极值时：

$$\epsilon^*=0.5,$$

则：

$$\Gamma_{\max}=0.5,$$

$$C(\Gamma_{\max})=(1-\delta)h_2(0.5).$$

对于 $\Gamma_{\min}\le\Gamma\le\Gamma_{\max}$，优化问题 (1)、(2) 中“$\le$”可以变为“$=$”，则 $\mathbf{E}[c(X)]=1-\epsilon=\Gamma$，将 $\epsilon=1-\Gamma$ 代入 (4) 即可，故：

$$C(\Gamma)=\begin{cases}(1-\delta)h_2(1-\Gamma), & 0\le\Gamma\le 0.5\\ (1-\delta)h_2(0.5), & \Gamma>0.5\end{cases}$$

$\square$