

2022 春信息论 B 第一次习题课补充材料

考察范围： 重要结论和技巧 课程助教： 高源

1. Jensen 不等式。对于给定的凸函数 f 和随机变量 X , 有

- 等号成立当且仅当_____.

2. 利用 Jensen 不等式证明相对熵非负。

- 等号成立当且仅当_____.
- 注意, Jensen 不等式在连续情形也是成立的, 连续情形下相对熵非负证明方法相同。

3. 利用相对熵非负证明熵的极值性。

- 等号成立当且仅当_____.

4. 利用相对熵非负证明功率受限条件下正态分布取得最大微分熵。

5. 利用相对熵非负证明均值受限（取值非负）条件下指数分布取得最大微分熵。

6. 利用相对熵非负证明峰值受限条件下均匀分布取得最大微分熵。

7. 数据处理不等式。若 $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ ，则有 $I(X; Y) \geq I(X; Z)$ 。

- 等号成立当且仅当_____。
- 构造一个信息量的不同展开式是一个重要的证明技巧。

8. 利用构造一个信息量的不同展开式方法证明。随机变量 $X_1 X_2 X_3 X_4$ 构成了马尔科夫链 $X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow X_4$ 。证明：

$$I(X_1; X_3) + I(X_2; X_4) \leq I(X_1; X_4) + I(X_2; X_3)$$

9. 费诺不等式。对于满足 $X \rightarrow Y \rightarrow \hat{X}$ 的估计量 \hat{X} , 记 $P_e = p\{X \neq \hat{X}\}$, 有

$$H(P_e) + P_e \log |\mathcal{X}| \geq H(X | \hat{X}) \geq H(X | Y)$$

- 等号成立条件?
- 引入示性变量结合链式法则是证明和求解问题的重要技巧。

10. 利用示性变量求解并联信道的容量。信道模型

$$X = \begin{cases} X_1, & \text{概率 } \alpha \\ X_2, & \text{概率 } (1 - \alpha) \end{cases}$$