

2023.12.8 第 21 次作业

卢科政 夏业志

2023 年 12 月 17 日

题目 1. (6.25 题) 有一个平绕于圆筒上的螺旋线圈, 长 10cm, 直径 1cm, 共 1000 匝, 用每千米电阻为 247Ω 的漆包线绕制。求: (1) 线圈的自感系数和电阻; (2) 如果把这线圈接到电动势为 2V 的蓄电池上, 那么: ①线圈中通电开始时的电流增长率是多少? ②线圈中的电流达到稳定后, 稳定电流是多少? ③这个回路的时间常数是多少? 经过多长时间电流达到稳定值的一半? ④电流稳定后, 线圈中储存的磁能是多少? 磁能密度是多少?

解答. (1). 这里将螺线管看作理想螺线管, 线圈的自感系数为:

$$L = \mu_0 N^2 S / l = 9.87 \times 10^{-4} H$$

电阻为:

$$R = 1000 \times (2\pi \times 0.005) \times 247 / 1000 \Omega = 7.76 \Omega$$

(2). 电流随时间的变化关系为:

$$I = I_0(1 - e^{-t/\tau}) = \frac{V}{R}(1 - e^{-t/\tau})$$

其中 $\tau = L/R$ 为时间常数。

①开始时电流增长率为:

$$(dI/dt)_{t=0} = V/(R\tau) = V/L = 2.03 \times 10^3 (A \cdot s^{-1})$$

②稳定电流为:

$$I_0 = V/R = 0.258 (A)$$

③时间常数为:

$$\tau = L/R = 1.27 \times 10^{-4} (s)$$

达到稳定值一半的时间为:

$$t_{1/2} = \tau \ln 2 = 8.8 \times 10^{-5} (s)$$

④储存的磁能为:

$$W = LI^2/2 = 3.28 \times 10^{-5} (J)$$

磁能密度为:

$$w = W/V = W/(Sl) = 4.18 (J \cdot m^{-3})$$

题目 2. (6.26 题)(1) 利用磁场能量方法计算如图所示的两个同轴导体圆柱面组成的传输线单位长度的自感系数 L ，内导体圆筒半径为 a ，外导体圆柱半径为 b 。(2) 如果电流为常数，而将外圆柱面半径加倍，那么磁能增加多少？(3) 在上述过程中，磁场做了多少功？电池提供了多少能量？二者与磁能的增加有何关系？(图见书 P416)

解答. (1). 距离轴线为 $r(a < r < b)$ 处的磁感应强度为:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

磁能密度为 $w = \frac{B^2}{2\mu_0} = \mu_0 I^2 / (8\pi^2 r^2)$ ，单位长度储存的磁能为:

$$W = \int_a^b w \cdot 2\pi r dr = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln(b/a)$$

单位长度的磁能密度还可以用 $W = \frac{1}{2} L I^2$ 表示，则单位长度的自感系数为:

$$L = \frac{2W}{I^2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(b/a)$$

(2). 将上述式子中的 b 改为 $2b$ 即可，改变的磁能为:

$$\Delta W = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln(2b/a) - \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln(b/a) = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln 2$$

(3). 计算外表面受力的时候，不可以直接利用总磁场，需要将外表面产生的磁场减去。

外表面单位长度的面电流密度为 $i = I / (2\pi r)$ ，这里的 r 为外表面的半径。它在自身附近产生的磁场为 $\frac{\mu_0 i}{2}$

则去除内表面的磁场后磁场的大小为:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} - \frac{\mu_0 i}{2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}$$

在外圆柱半径增大过程中，运动方向与磁场作用力方向相同，说明磁力做正功:

$$A_1 = \int_b^{2b} i B \cdot 2\pi r dr = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln 2$$

电源做功为:

$$A_2 = - \int I \epsilon dt = \int I d\Phi = \int I^2 dL = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} (\ln(2b/a) - \ln(b/a)) = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \ln 2$$

电源做功等于磁场做功和磁能增加量之和。

题目 3. (6.28 题) 如图所示，截面积为 S 、单位长度匝数为 n 的螺线管环上套有一个边长为 l 的正方形线圈，今在线圈中通以交流电 $I = I_0 \sin \omega t$ ，螺线管环的两端为开端，求 a, b 两端的感应电动势。(图见书 P416)

解答. 螺线环与套在其上的线圈构成一个互感系统。设螺线管中电流为 I_1 ，由安培环路定理:

$$B = \mu_0 n I_1$$

则螺线管在线圈中的激发的磁匝链数为 $\Phi = BS = \mu_0 n I_1 S$ ，根据定义：

$$M = \Phi / I_1 = \mu_0 n S$$

则 ab 两端的感应电动势为：

$$\epsilon = \left| -M \frac{dI}{dt} \right| = |\mu_0 n S \omega I_0 \cos \omega t|$$