中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

电　磁　学
(Electromagnetism)

第六章　电磁感应1

§ 6.1 电磁感应定律

- 继1820年丹麦物理学家奥斯特发现了电流的磁效应后,人们便关心它的逆效应。
- 1831年法拉第终于发现了电磁感应现象。
- 1845年才由诺埃曼（F.E.Neumann)和韦伯（W.E.Weber)将其实验成果表达为数学形式，建立了电磁感应定律。
- 这是电磁学发展史上最辉煌的成就之一。为工业革命、人类进入电气化时代做出了巨大的贡献，为后来麦克斯韦普遍电磁场理论的建立奠定了基础。

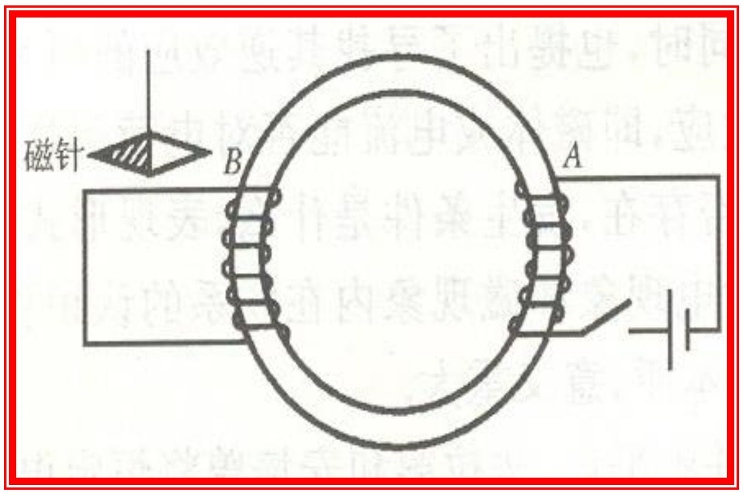
一、电磁感应定律的发现过程

法拉第通过各种实验，不仅发现了电磁感应现象，而且深入研究了电磁感应的规律。

Michael Faraday
(1791-1867)

穷且益坚 不坠青云之志

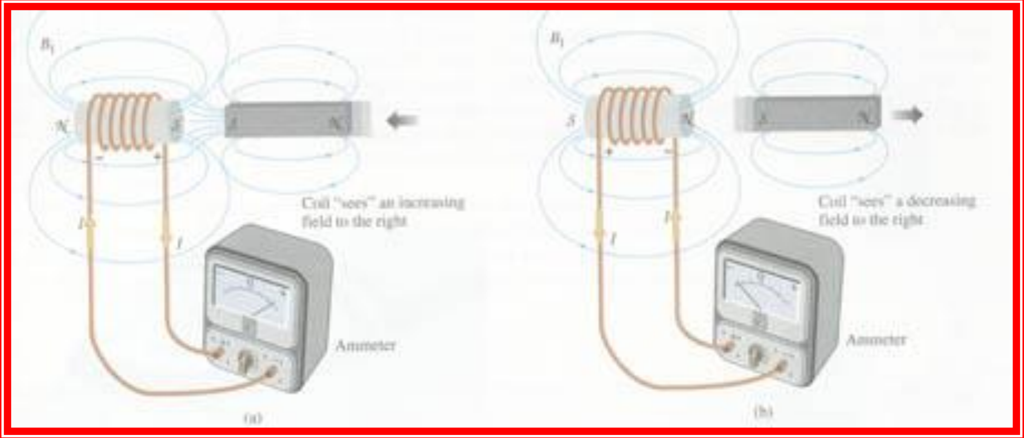
1831年8月29日，在一个偶然的机会，当法拉第把电键S闭合的瞬间，他观察到了磁针的偏转；而S断开瞬间，磁针会反向偏转。当S稳定后，磁针回到原状。他意识到这是个非稳恒效应。



结论：
只有变化的电流才会在另一线圈中感应出电流，从而产生磁场，使磁针偏转。稳定的电流不可能。

深入的思考，法拉第的一系列实验

1. 是变化的电流还是变化的磁场产生感应电流？
法拉第用运动磁铁代替瞬变通电线圈（1831.10.17）



法拉第又用运动的载有稳恒电流的线圈代替运动的磁铁，两种实验的结果相同。

法拉第得出结论：　　变化的磁场产生了感应电流。

2. 产生的感应电流还是感应电动势?

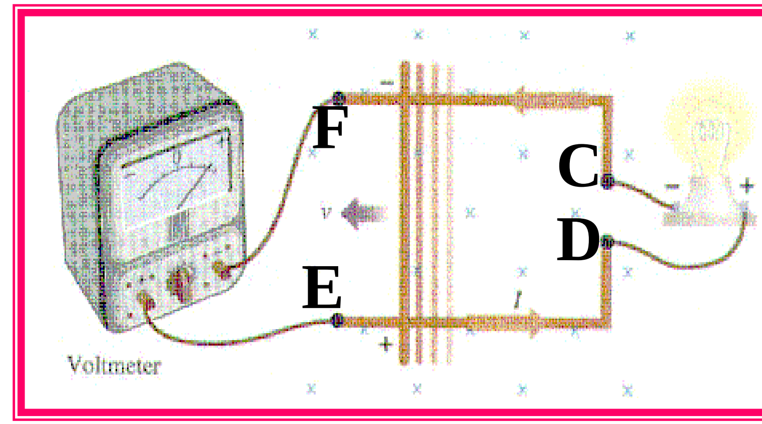
■1832年，法拉第用实验证明，在相同的条件下，几何形状、大小相同而电阻不同的受感应线圈，感应电流的大小与线圈的电阻成反比，$I \propto 1/R$

■法拉第认识到:感应电动势与导体性质无关，这些线圈的感应电动势应该相同；感应电流应满足欧姆定律，便会有上面的结果。

■这说明感应电流是由与导体性质无关的感应电动势产生的。所以变化的磁场在导体中产生的是感应电动势。

3. 变化的磁场与变化的磁通，谁更本质?

如图所示（按现代的演示），接有电压表的导体框CDEF放于均匀的磁场中，B垂直于框平面，当EF以速度v向右滑动时，电流计指针发生偏转，速度越大偏转越厉害，EF反向运动时，电压计指针反向偏转。



- 法拉第由此得出：变化的磁通产生了感应电动势。
- EF的速度越大，单位时间内通过导体框的磁通量变化越大，电压越大。

法拉第实验结论：

当通过导体回路的磁通量随时间发生变化时，回路中就有感应电动势产生，从而产生感应电流。这个磁通量的变化可以是由磁场变化引起的，也可以是由于导体在磁场中运动或导体回路中的一部分切割磁力线的运动而产生的。

(1)电磁感应现象的实质是磁通量的变化产生感应电动势；

(2)感应电动势的大小与磁通量变化的快慢有关；

二、法拉第电磁感应定律

1845年，法拉第的实验研究成果先后被Neumann、Weber等人写成数学形式，后来发展成现在的形式：

$$\varepsilon = k\frac{d\Phi}{dt} \qquad \frac{d\phi}{dt} \propto \frac{BS}{t} \propto \frac{Blx}{t} \propto \underline{B}\,\underline{V}\,l$$

其量纲与[E][l]相同，即[伏特]，与ε 的单位一致，则k 无量纲。

选取SI单位制，实验确定$k= -1$ 。

法拉第电磁感应定律:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

说明:

1. 如果被感应的线圈是N匝时，各圈的感应电动势应叠加，若第i圈的磁通量为ϕ_i，则有：

$$\Psi = \sum_{i=1}^{N} \phi_i$$

Ψ:全磁通,又称磁通匝链数

各匝磁通量相同时，$\Psi = N\Phi$, 整个线圈的总感应电动势为:

$$\varepsilon = -\frac{d\psi}{dt} = -N\frac{d\phi}{dt}$$

2. 在回路中产生感应电动势的原因是由于通过回路平面的**磁通量的变化，而不是磁通量本身**，即使通过回路的磁通量很大，但只要它不随时间变化，回路中依然不会产生感应电动势。

通过平面s的磁通量为：

$$\Phi=\vec{B}\cdot\vec{S}=BS\cos\theta$$

$$\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{dB}{dt}S\cos\theta-\frac{dS}{dt}B\cos\theta-\frac{d\theta}{dt}BS\sin\theta$$

3. 法拉第电磁感应中，“ - ”的物理意义在于，负号指明了感应电动势的“方向”，确切地说，是指明了感应电流的方向。

楞次定律：

感应电流所产生的磁场通过回路的磁通量总是阻止引起感应电流的那个磁通量的变化。

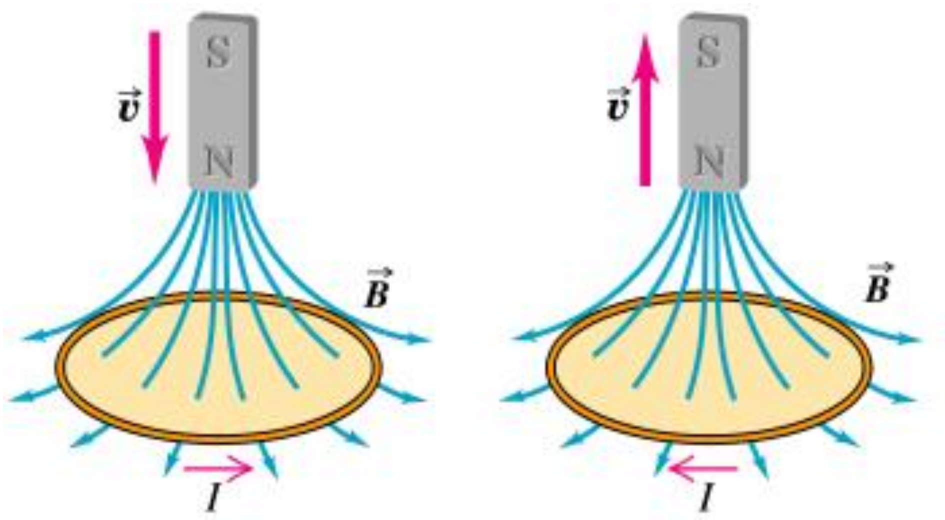
阻止的意思：

(1)磁通增加时，感应电流的磁通与原来磁通“方向”相反;

(2)磁通减少时，感应电流的磁通与原磁通“方向”相同。

楞次定理的另一种表述：

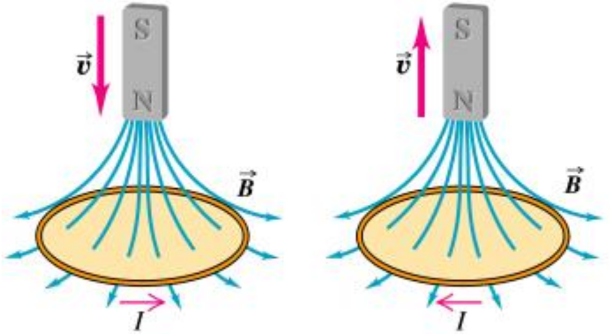
当导体在磁场中运动时，导体中由于出现感应电流而受到的磁场力必然阻碍此导体的运动。



感应电动势 “方向”的讨论

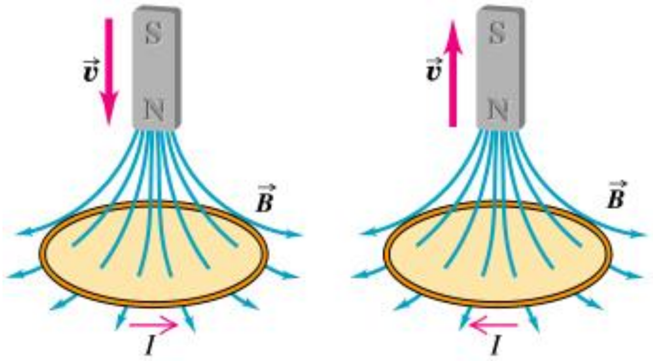
1. 感应电动势的“方向”是能量守恒定律的要求。

- 当磁铁插入线圈时，穿过线圈的磁通量增加，按照楞次定律，线圈将对磁棒产生一个排斥力，阻碍磁棒继续往下插入。
- 要使感应电流连续不断，则外界必须克服这个排斥力对磁棒作功。
- 线圈中感应电流的获得，即电能的获得，是以消耗机械能为代价的。



假如感应电动势的“方向”与楞次定律规定的方向相反

- 只要磁铁稍有运动，在线圈中产生感应电流，感应电流产生的磁通就会增强这种变化，于是能连续不断的产生感应电流，而不再消耗能量
- 违背能量守恒定律，不可能
- 感应电动势的“方向”一定是楞次定律规定的方向

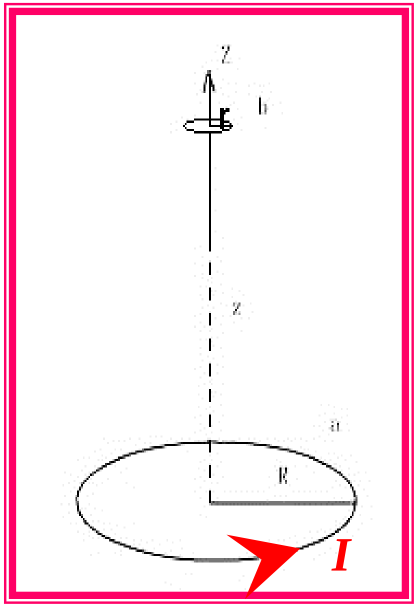


2. 感应电动势正负的确定方法

电动势ε与磁通量Φ的正负都与回路的绕行方向有关，所以，要讨论感应电动势和磁通量的“方向”，首先要选定回路的绕行方向。

绕行方向选定后，若计算电动势为正值，表明电动势的“方向”与回路绕行的方向一致。反之，则相反。

[例] 如图所示，两个半径分别为R , r 相距为 z 的同轴平面线圈 a 和 b ，假设 $R >> r$，$z >> R$，线圈a载有恒定的电流I，线圈b以速率v沿z轴向上运动，试计算线圈b中的感应电动势，并确定其方向。

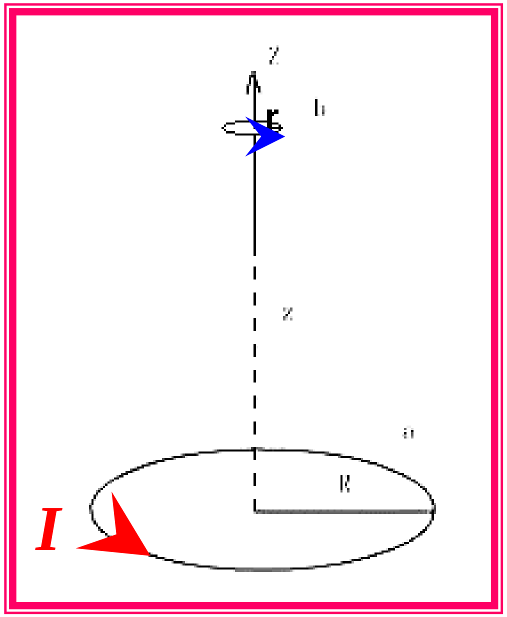


[解]载流线圈a在轴线上z点所产生的磁感强度为：

$$B=\frac{\mu_0 I}{2}\cdot\frac{R^2}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}$$

(*a*)选取线圈b的绕行方向为逆时针方向

$$\Phi=\iint_s \vec{\mathbf{B}}\cdot d\vec{\mathbf{S}}=\iint_s BdS=B\pi r^2 \quad =\frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\pi r^2>0$$



因为z>>R，得到：

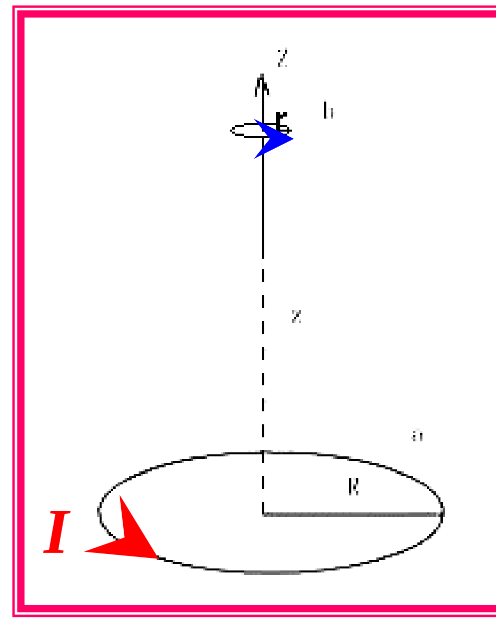
$$\Phi=\frac{\mu_0 I}{2}\cdot\frac{R^2}{z^3}\pi r^2$$

根据法拉第电磁感应定律求得感应电动势为：

$$\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{\mu_0 I}{2}R^2\pi\ r^2\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{z^3}\right)=\frac{3\pi\mu_0 IR^2r^2}{2z^4}\frac{dz}{dt}$$

$$\because \frac{dz}{dt}=v,$$

$$\therefore \varepsilon=\frac{3\pi\mu_0 IR^2r^2}{2z^4}v$$

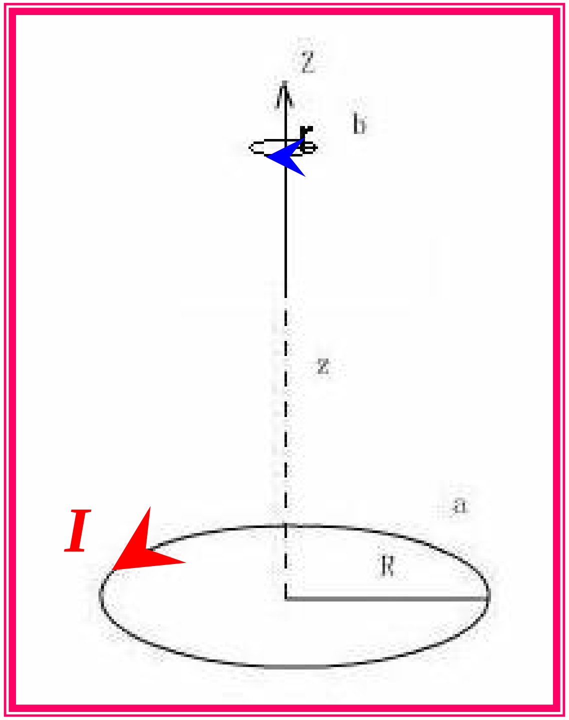


$\varepsilon>0$，**感应电流I的方向与回路的绕行方向一致，即逆时针方向。**

(b)选取线圈b的绕行方向为顺时针方向

$$\Phi = -\frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(R^2+Z^2)^{3/2}}\pi r^2 < 0$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{3\pi\mu_0 I R^2 r^2}{2z^4} v < 0$$



ε < 0 ，感应电流的方向与选定的回路b的绕行方向相反，即沿逆时针方向，结果与（*a*）相同。

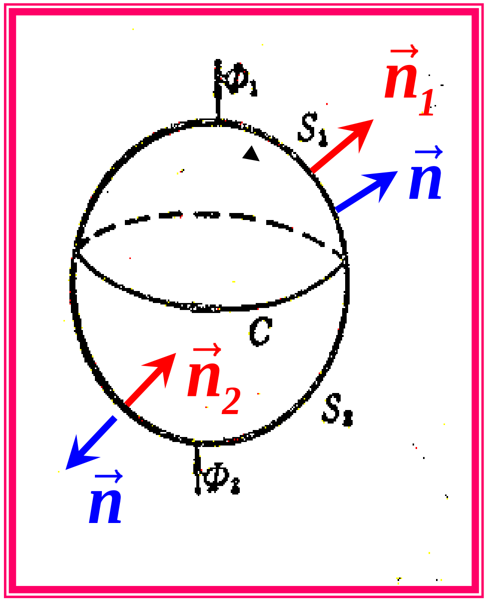
说明：

- 在解题过程中为了计算通过回路的磁通量和考虑电动势的“方向”，必须先选定回路的绕行方向作为参考方向
- 应用法拉第定律得到的感应电动势大小和“方向”由物理过程唯一确定,与回路方向的选定无关

三、高斯定理的推广

由静磁场的高斯定理可得：

$$\iint_{s_1} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \iint_{s_2} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \cdots\cdots$$



由法拉第电磁感应定律：

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\iint_{s} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}$$

其中B可以随时间变化。

法拉第定律要求对同一物理过程ε唯一。

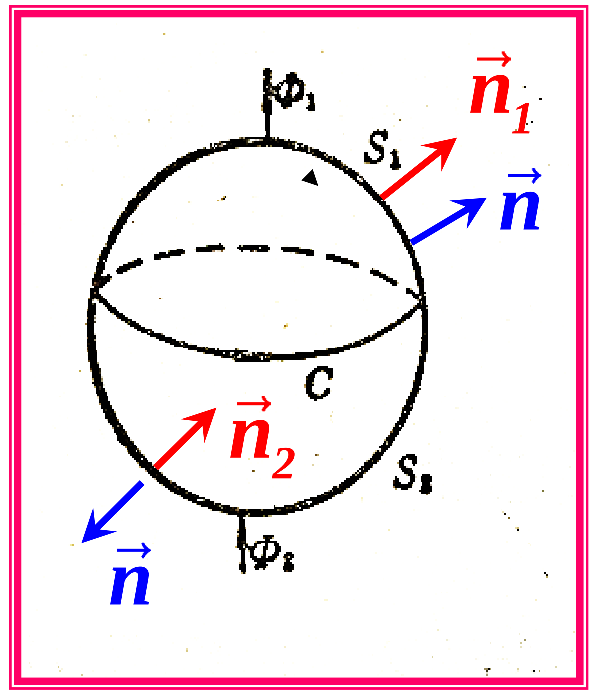
对变化的磁场，法拉第定律要求：

$$\iint_{S_1} \vec{\mathbf{B}}(t)\cdot d\vec{\mathbf{S}} = \iint_{S_2} \vec{\mathbf{B}}(t)\cdot d\vec{\mathbf{S}} = \cdots\cdots$$

$$\iint_{S_1} \vec{\mathbf{B}}(t)\cdot \vec{\mathbf{n}}_1 dS = \iint_{S_2} \vec{\mathbf{B}}(t)\cdot \vec{\mathbf{n}}_2 dS$$

$$\iint_{S_1} \vec{\mathbf{B}}(t)\cdot \vec{\mathbf{n}}\ dS = -\iint_{S_2} \vec{\mathbf{B}}(t)\cdot \vec{\mathbf{n}}\ dS$$

$$\oint\!\!\!\oint_{S} \vec{\mathbf{B}}(t)\cdot d\vec{\mathbf{S}} = 0$$



随时间变化的磁场**B**也应满足高斯定理。

§ 6.2 动生电动势与感生电动势

电磁感应定律： $\varepsilon = -\dfrac{d\phi}{dt}$

引起磁通量变化的两种情况：

(1)导体回路或其一部分在磁场中运动，回路回路面积或回路的法线与磁感应强度B的夹角随时间变化，从而使回路中的磁通量发生变化；

(2)回路不动，磁感强度随时间变化，从而使通过回路的磁通量发生变化。

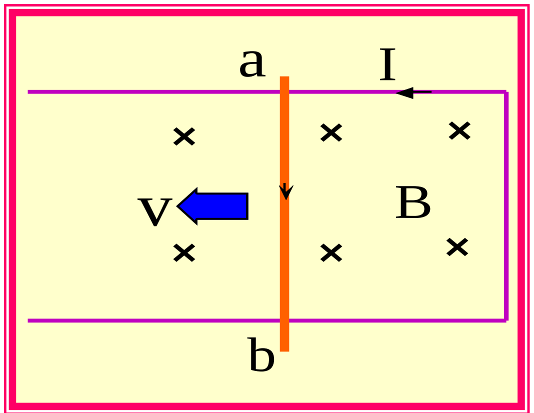
动生电动势:第一种原因而在回路中产生的感应电动势;

感生电动势:第二种原因而在回路中产生的感应电动势。

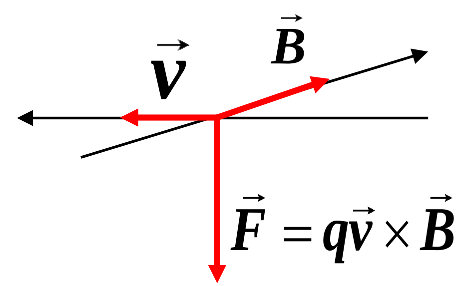
一、动生电动势

动生电动势的**产生原因**，可以用在磁场中运动的电荷将受到**洛仑兹力**加以解释。

如图，U形导体框置于匀强磁场B中，长为L的导体棒ab可以在导体框上无摩擦地滑动，外力F作用于导体棒，使之获得向左的速度v 。



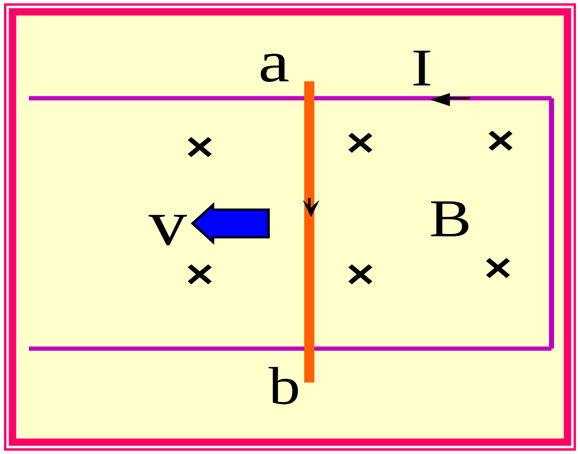
导体棒内的载流子也获得了速度v ，在磁场中受到沿着杆长度方向的**洛伦兹力**作用，并移动形成电流。



电动势定义：使**单位正电荷**从电源的负极通过内部到达电源正极的过程中，**非静电力所作的功**。

此处非静电力就是**洛仑兹力**，单位正电荷所受的非静电力$\boldsymbol{K}$为：

$$\vec{K} = \vec{F}/e = \left(e\vec{v} \times \vec{B}\right)/e = \vec{v} \times \vec{B}$$



所以**动生电动势**为：

$$\varepsilon = \int_{-}^{+} \vec{K} \cdot d\vec{l} = \int_{a}^{b} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

动生电动势的产生是导体在磁场中运动时，导体中的载流子获得了一个沿导体运动方向的定向宏观速度，受到洛仑兹力作用的结果。

有时形象的说，当导线作切割磁感应线运动时，就会产生感应电动势。

在普遍情况下，一个任意形状的导体线圈L（不一定闭合）在任意恒定的磁场中运动或发生形变时，L中的动生电动势为：

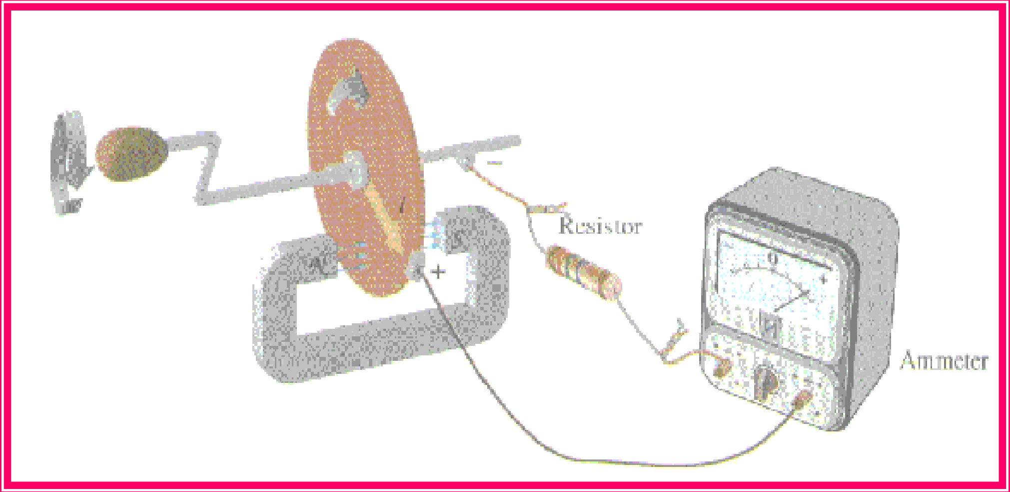
$$\varepsilon = \int_L \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot d\vec{l}$$

动生电动势只产生于在磁场中运动的导体上

- 若运动导体是闭合导体回路的一部分，则在回路中产生感应电流
- 若运动导体不构成回路，则导体两端有一定的电势差，相当于一个开路的电源

应用：直流发电机（法拉第，1831年10月28日）

- 下图是法拉第设计的直流发电机的原理图，当导体圆盘绕轴以角速度ω旋转时，电流计指针发生偏转，ω越大，偏转越厉害。这里v=ωr，*dl*=*dr*，积分区间为：*0*→*R*。



$$\varepsilon_{\mathrm{OA}} = \int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{A}} \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot d\vec{l}$$

$$= \int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{A}} vBdr$$

$$= \frac{1}{2} B\omega R^2$$

洛仑兹力不作功的讨论

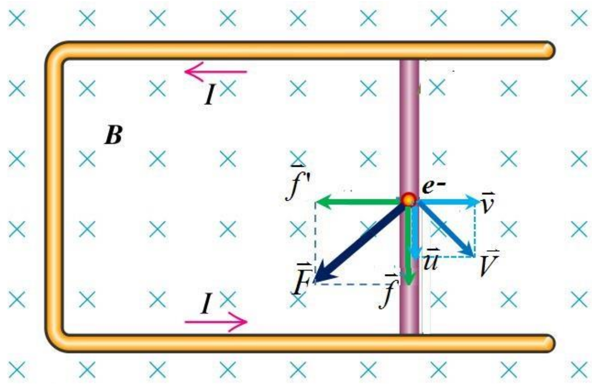
洛仑兹力始终与带电粒子的运动方向垂直，所以它对电荷是不作功的.

但在上面讨论动生电动势的时候，又认为动生电动势是非静电力----洛仑兹力移动单位正电荷所做的功。这和洛仑兹力不作功发生矛盾？！

电荷-e所受的完整的洛仑兹力为：

$$\vec{\mathbf{F}} = -e(\vec{\mathbf{v}} + \vec{u}) \times \vec{B}$$

$$= -e\vec{\mathbf{v}} \times \vec{B} + (-\mathrm{e})\vec{u} \times \vec{B} = \vec{f} + \vec{f}\,'$$



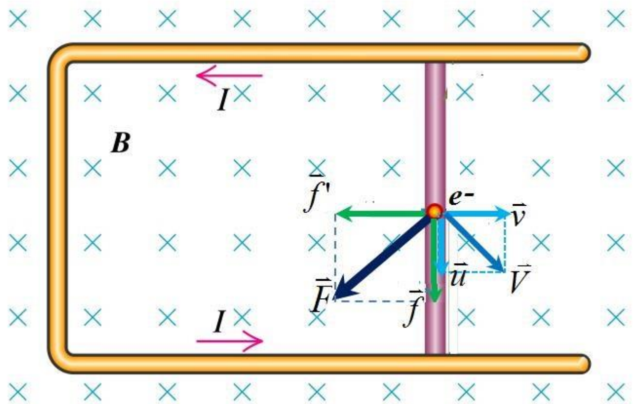
$$\vec{f} = -e\vec{\mathbf{v}} \times \vec{B}, \quad \vec{f}\,' = (-\mathrm{e})\vec{u} \times \vec{B}$$

- f：产生感应电流的驱动力，即非静电力
- f'：与 f 垂直直，与导体棒的运动速度 v 反向，阻碍导体棒向右运动
- 要使导体棒保持以 v 匀速运动，外力必须克服 f' 对棒作功
- 外力通过洛仑兹力传递而作功，转化为电能

把电子a从移动到b，

f 的功率： $$P_1 = -e\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{u}$$

f'的功率： $$P_2 = -e\left(\vec{u}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{v}$$



由矢量运算：

$$\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{u} = \vec{v}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{u}\right) = -\left(\vec{u}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{v}$$

所以总的洛仑兹力F的功率为：

$$P = P_1 + P_2 = -e\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{u} - e\left(\vec{u}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{v} = 0$$

洛仑兹力不作功！！

二、 感生电动势

当置于磁场中的导体回路不动，而磁场随时间变化时，也会在导体回路中产生感应电动势，这种感应电动势称为感生电动势。

根据法拉第电磁感应定律

$$\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{d}{dt}\iint_{s}\vec{B}\cdot d\vec{S}=-\iint_{s}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

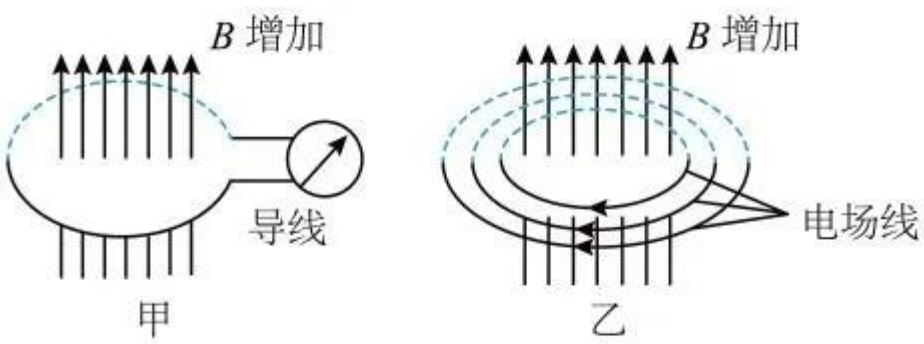
那么产生感生电动势的非静电力是什么呢？

- 首先，它不是洛仑兹力。因为导体并没有运动，所以导体中的载流子没有定向宏观的运动速度
- 当磁场变化时，导体回路中产生了感应电流，说明带电粒子一定受到了一种力
- 这种对电荷的作用力不是磁场力，那么只能是电场力
- 所以，当磁场随时间变化时，在空间激发了一种新的电场，导体中的载流子在这个电场的作用下，在闭合回路中产生了感应电流

1. 涡旋电场假说

J.C.Maxwell在分析电磁感应现象的基础上，提出了一个大胆的假设：

变化的磁场在其周围空间激发一种新的电场，这种电场是涡旋电场，或称感应电场。产生感生电动势的非静电力就是这个涡旋电场力。



对涡旋电场：
$$\varepsilon = \boxed{\oint_L \vec{E}_{旋} \cdot d\vec{l} =} -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \boxed{-\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}}$$

对库仑场有：
$$\oint_L \vec{E}_{库} \cdot d\vec{l} = 0$$

当空间同时存在库仑电场和涡旋电场时，总电场为：

$$\vec{E} = \vec{E}_{旋} + \vec{E}_{库} \Rightarrow \boxed{\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}}$$

当空间不存在随时间变化磁场时，即稳恒情况下,上式回到静电场的环路定理。

2. 法拉第电磁感应定律的微分形式：

$$\oint_L \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = \iint_S (\nabla \times \vec{\mathbf{E}}) \cdot d\vec{\mathbf{S}} = -\iint_S \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \cdot d\vec{\mathbf{S}},$$

$$\therefore \quad \nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$$

变化的磁场在空间激发涡旋电场。

麦克斯韦对感生电动势成因的解释，揭示了电磁感应定律更深层次的物理本质。

新电场环路定理的说明

$$\oint_L \vec{E}\bullet d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\bullet d\vec{S}$$

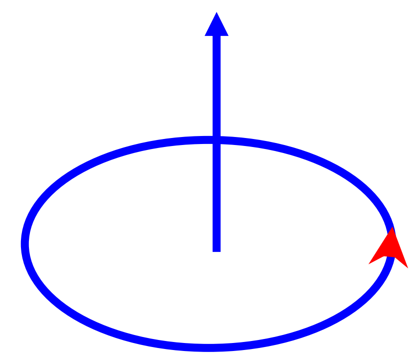
$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

1）此式反映变化磁场和感生电场的相互关系，即感生电场是由变化的磁场产生的。

2）这是电磁场基本方程之一。

3）*S* 是以 *L* 为边界的任一曲面。

法线方向与曲线 L的积分方向成右手螺旋关系



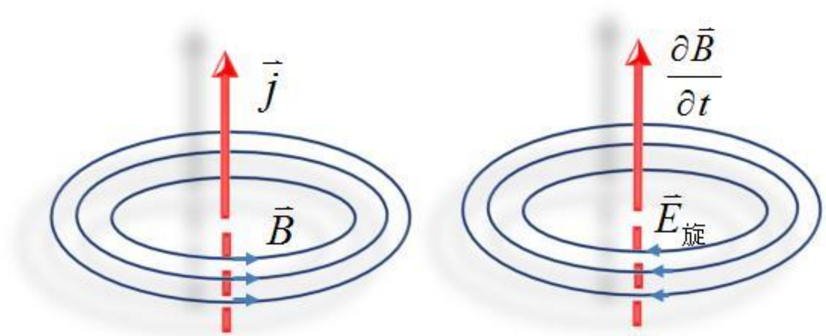
4）某一段细导线AB内的感生电动势： $\varepsilon_i = \int_A^B \vec{E}\bullet d\vec{l}$

讨论：

$$\boxed{\oint_L \vec{E}\bullet d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\bullet d\vec{S} \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

1、变化的磁场在空间激发的涡旋电场与空间中是否有导体无关。

2、负号表示 $\vec{E}_{旋}$ 与 $\Delta\vec{B}$ 成左螺旋关系；



$\vec{B}$ 与 $\vec{j}$ 成右手关系　　　$\vec{E}_{旋}$ 与 $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 成左手关系

3. 涡旋电场的环量

$$\boxed{\oint_L \vec{E}\bullet d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\bullet d\vec{S} \qquad \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

1）涡旋电场的环量与具体路径有关，涡旋电场是非保守场，无明确电势的定义。

2）环量的大小只与 $\frac{d\Phi_B}{dt}$ 有关，而与 Φ_B 本身的大小无关；

3）$\vec{E}_{旋}$ 的大小和方向只由 $\frac{d\vec{B}}{dt}$ 决定，与 $\vec{B}$ 的大小和方向无关；

4. 涡旋电场的通量

高斯定理 $$\oint\!\!\oint_S \vec{E}_{库}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q$$

$\vec{E}_{库}$ ：发散场，场线“有头有尾”

麦克斯韦假设 $$\oint\!\!\oint_S \vec{E}_{旋}\cdot d\vec{S}=0$$

类比 $$\oint\!\!\oint_S \vec{\mathrm{B}}\cdot d\vec{S}=0$$

涡旋电场的场线是连续闭曲线，没有起点和终点，所以涡旋电场是无源场。

涡旋电场是有旋无源场

涡旋电场和库仑电场的比较

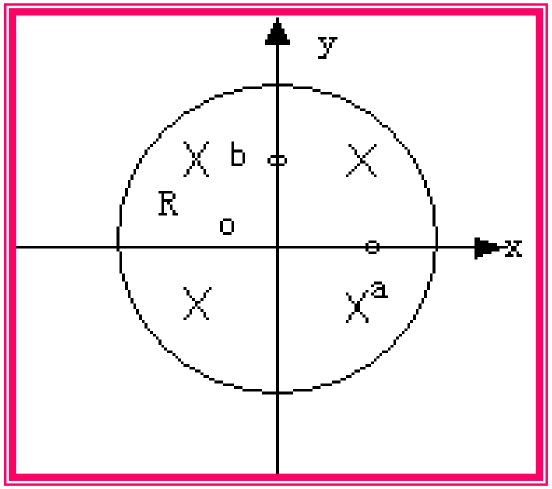
相同之处：它们都是一种客观存在的物质，它们对电荷都能施加力的作用。

不同之处：

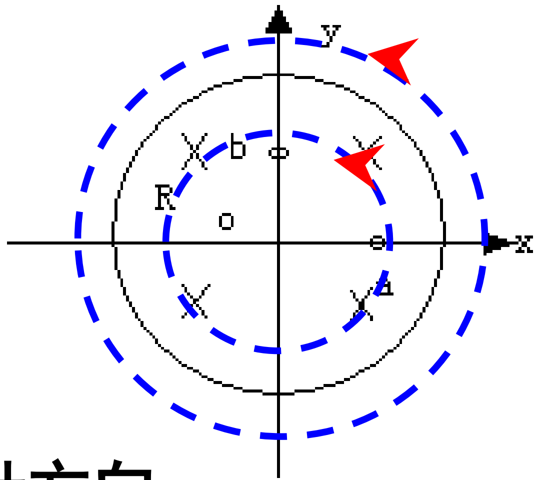
- **涡旋电场**--由变化的磁场激发的，电力线是一些闭合的曲线，环量不为零，不是保守力场或势场，是**无源有旋场**
- **库仑电场**--由电荷产生的,电力线不闭合，是保守力场或有势场，是**有源无旋场**

[例]如图，磁感应强度*B*在圆内均匀，且以恒定速率随时间变化。若 dB/dt 已知，求涡旋电场，并求下列情况*a*、*b*两点间的电势差：

(1)*a*、*b*之间用跨过第二、三、四象限的圆弧导线相连;
(2)*a*、*b*之间用跨过第一象限的圆弧导线相连；
(3)*a*、*b*之间没有导线连接。



[解] 由题图坐标，B沿-z方向，取半径为r、绕行方向为逆时针的圆形回路:



$$\oint_L \vec{\mathbf{E}}_{旋} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = -\iint_S \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \cdot d\vec{\mathbf{S}}$$

涡旋场呈柱对称，方向沿同心圆切向，逆时针方向。

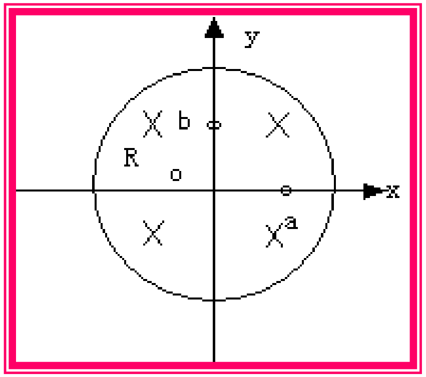
$$2\pi r \mathbf{E}_{旋} = -\iint_S \left(-\frac{dB}{dt}\right) d\mathbf{S} = \iint_S \frac{dB}{dt} d\mathbf{S}$$

(1)r<R时 $E_{旋} \cdot 2\pi r = \frac{dB}{dt}\pi r^2$ $\boxed{E_{旋} = \frac{r}{2}\frac{dB}{dt}}$

(2)r>R时 $E_{旋} \cdot 2\pi r = \frac{dB}{dt}\pi \mathrm{R}^2$ $\boxed{E_{旋} = \frac{R^2}{2r}\frac{dB}{dt}}$

a、b之间有导线连接时,开路电压等于电动势:

(1) $V_{ab}=\int_a^b \vec{E}_{库}\cdot d\vec{l}=-\int_{\substack{a\\(2\to3\to4)}}^{b}\vec{E}_{旋}\cdot d\vec{l}=\int_{\substack{b\\(2\to3\to4)}}^{a}\vec{E}_{旋}\cdot d\vec{l}=\frac{3\pi r^2}{4}\frac{dB}{\partial t}.$



(2) $V_{ab}=\varepsilon=\int_{\substack{b\\(1)}}^{a}\vec{E}_{旋}\cdot d\vec{l}=-\frac{\pi r^2}{4}\frac{dB}{\partial t}.$

(3) a、b之间没有导线连接：这时没有空间电荷分布， $E_{势}=0$，以至

$$V_{ab}=-\int_b^a \vec{E}_{势}\cdot d\vec{l}=0$$

电势差和电动势概念

1）电势差由有势电场$E_{势}$产生，决定于电荷分布。由于各种原因形成一定的电荷分布后，产生有势电场、电势分布。

两点的电势差为： $V_{ab} = -\int_b^a \vec{E}_{势} \cdot d\vec{l}$

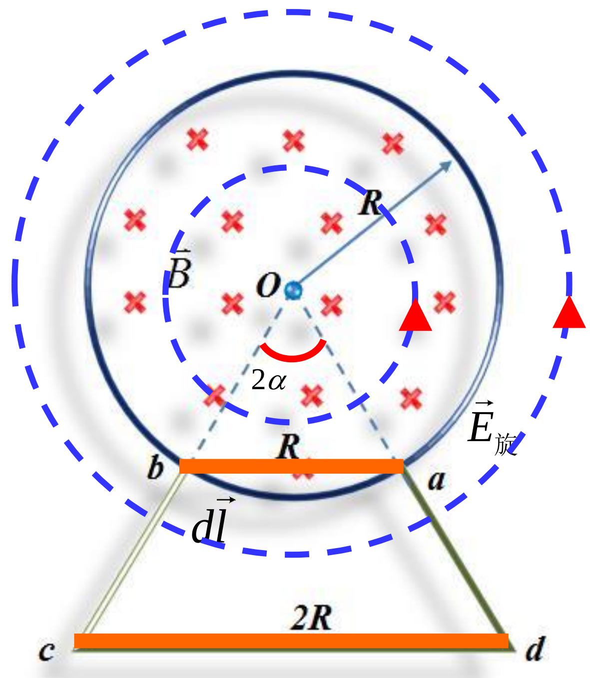
积分路径可以任意选取，积分值和积分路径的选取无关，所以有两点电势差的说法。

2）电动势由非静电力搬运电荷产生。本例中由涡旋电场$E_{旋}$产生，涡旋电场的线积分和积分路径有关，谈两点的电动势没有物理意义，不能说两点的电动势，只能说ab两点沿某路径的电动势。

3）ab两点的电势差是由感应电动势维持的导体中的电荷分布形成的。

例 在半径为R的无限长圆柱形空间内部有均匀的磁场B以恒定的变化率dB/dt=k（k>0）变化，一内阻可以忽略的等腰梯形导线框如图放置，cd=2ab=2R，bc边和ad边延长线正好通过圆心O，求导线框中的感应电动势大小和方向。

$$令\ \frac{dB}{dt}=k \qquad E_{旋}=\begin{cases}\dfrac{k}{2}r & (r<R)\\[2ex] \dfrac{kR^2}{2r} & (r\geq R)\end{cases}$$



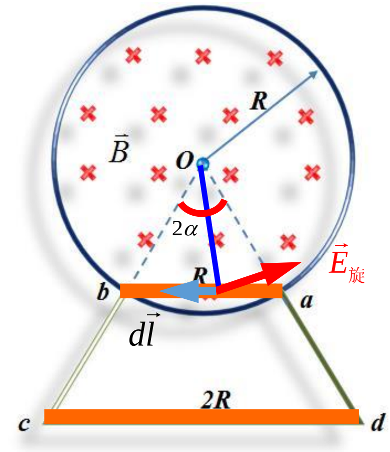
$$\varepsilon=\oint_{abcda}\vec{E}_{旋}\cdot d\vec{l}=\int_a^b\vec{E}_{旋}\cdot d\vec{l}+\int_c^d\vec{E}_{旋}\cdot d\vec{l}$$

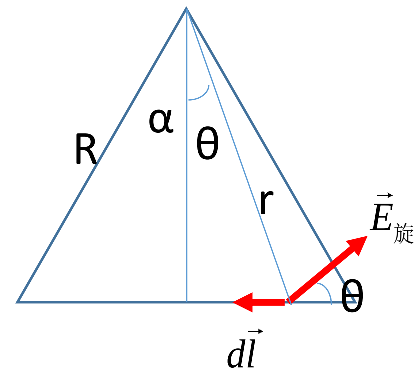
$$r < R:\quad E_{旋} = \frac{k}{2}r$$

$$\varepsilon_{ab} = \int_a^b \vec{E}_{旋} \cdot d\vec{l} = -\int_a^b E_{旋}\cos\theta dl$$

$$= -\int_a^b \frac{k}{2} r\cos\theta dl = -\frac{1}{2}kR\cos\alpha\int_a^b dl$$

$$= -\frac{1}{2}kRl_{ab}\cos\alpha = \boxed{-kS_{\Delta oab}}$$



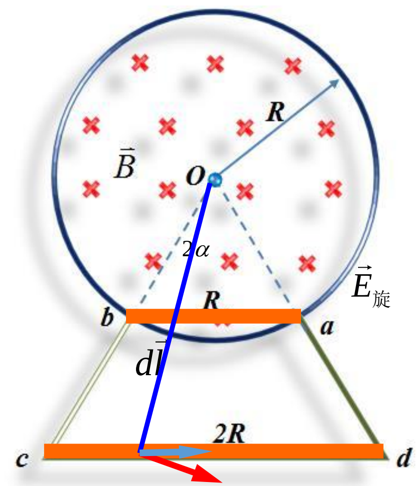


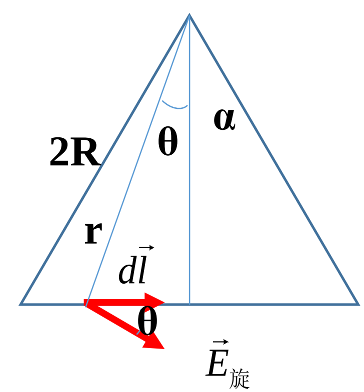
$$r \geq R:\quad E_{旋} = \frac{kR^2}{2r}$$

$$\varepsilon_{cd} = \int_c^d \vec{E}_{旋} \cdot d\vec{l} = \int_c^d E_{旋}\cos\theta dl$$

$$= \int_c^d \frac{kR^2}{2r}\cos\theta dl = \frac{1}{2}kR^2\int_a^b d\theta$$

$$= \frac{k}{2}R^2 \cdot 2\alpha = \boxed{kS_{扇oab}}$$





$$dl\cos\theta = rd\theta$$

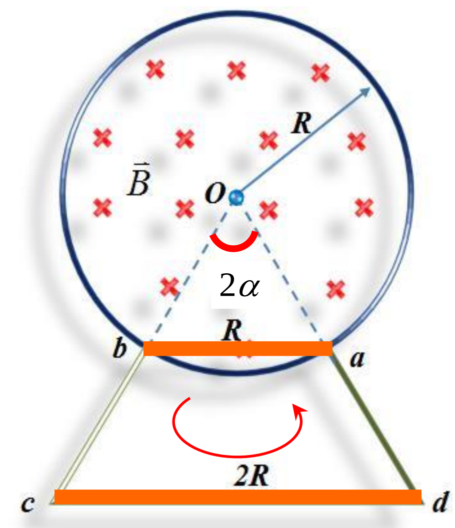
取 abcda 方向为参考方向。

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_{abcda}}{dt} = -\frac{d\left[-B(S_{扇oab} - S_{\Delta oab})\right]}{dt}$$

$$= \frac{dB}{dt}(S_{扇oab} - S_{\Delta oab})$$

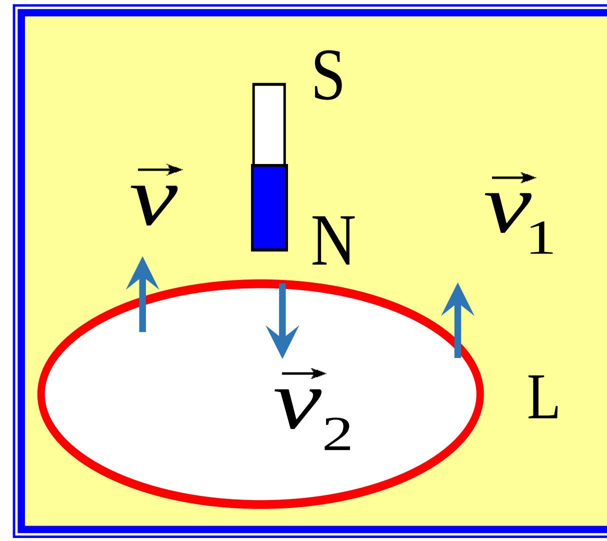
$$\varepsilon = k\left(R^2\alpha - \frac{1}{2}R\cos\alpha\, l_{ab}\right)$$

方向沿 *abcda*



三、电磁感应和相对性原理

考虑以速度v相对运动着的线圈L和磁棒，在线圈L中产生感应电动势的情况。我们选3个坐标系:S系固定在磁棒上，S′系固定在线圈L上，S″系固定在地面上，从3个惯性系中静止的观察者的角度出发分析:

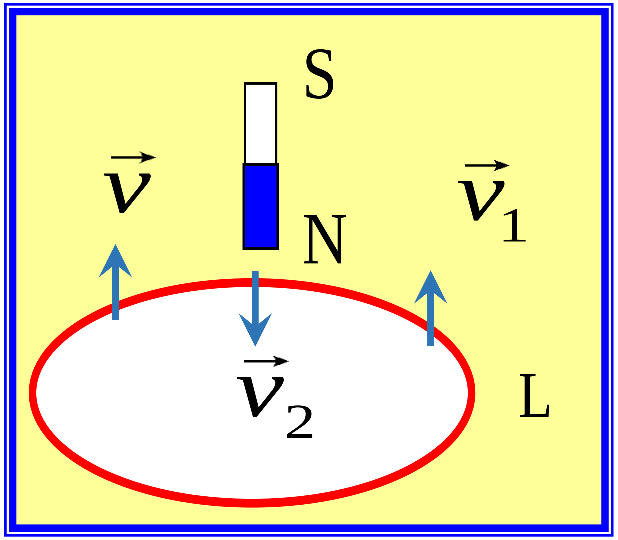


a.对于磁棒静止的观察者，看到的是：磁铁是静止的，而线圈以速度-V向着磁棒运动，即线圈在磁棒产生的磁场B中运动，所以他认为导体回路中的电动势是动生电动势，其大小为:

$$\varepsilon = -\oint_L (\vec{v} \times \vec{\mathbf{B}}) \cdot d\vec{l}$$

b. 相对于线圈静止的观察者看到的是：线圈L是静止不动的，磁棒以速度v向着线圈运动，所以使磁场的空间分布随时间变化，穿过静止的导体回路的磁通量随之发生变化，这一变化将在回路中产生涡旋电场，所以他认为导体回路中的电动势是感生电动势。其大小为：

$$\varepsilon' = \oint_{L'} \vec{\mathbf{E}}'_{旋} \cdot d\vec{l}' = -\iint_{S'} \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}'}{\partial t'} \cdot d\vec{\mathbf{S}}'$$

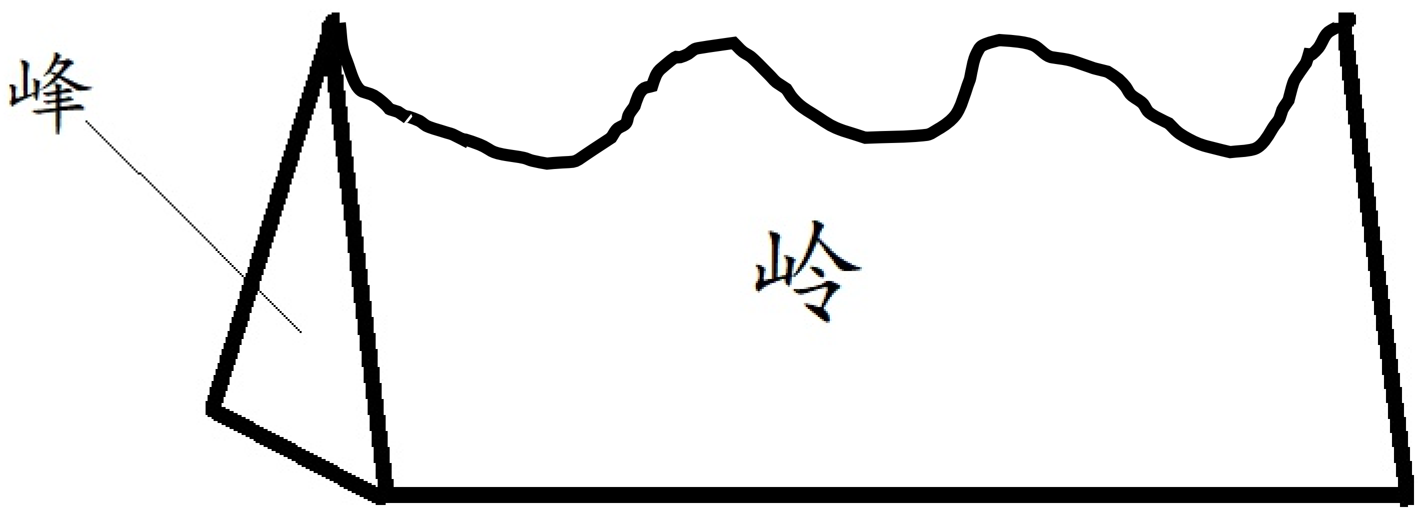


c.对于地面的观察者，看到的是磁棒和导体都在运动，所以他认为导体回路中的电动势是动生电动势和感生电动势的和，即

$$\varepsilon'' = \oint_{L''} (\vec{\mathbf{v}}'' \times \vec{\mathbf{B}}'') \cdot d\vec{l}'' + \oint_{L''} \vec{\mathbf{E}}''_{旋} \cdot d\vec{l}''$$

爱因斯坦的解释

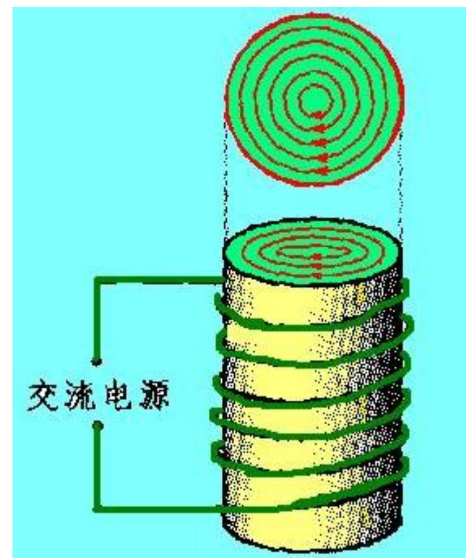
- 电磁场是一个整体，将它划分为电场和磁场只有相对意义，这种划分与观测者所在的参考系、即所在的惯性系有关，所以才产生不同的看法。
- 电磁场作为一个整体，在不同惯性系中满足同样的规律。



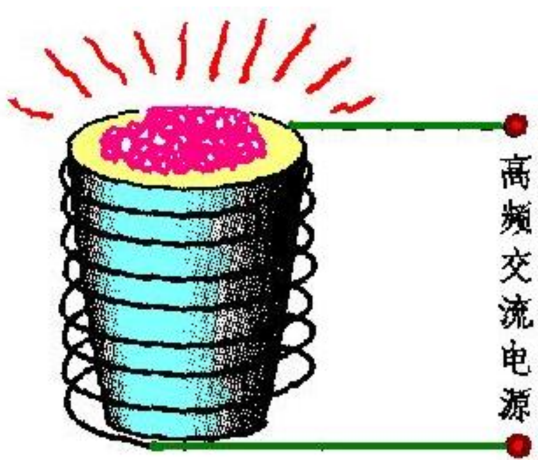
四、涡电流和趋肤效应

1. 涡电流（Eddy Current）

- 1855年傅科发现金属块处在变化的磁场中或相对于磁场运动时，其内部会产生感应电流。
- 铁芯可看作是由一系列半径逐渐变化的圆柱状薄壳组成，每层薄壳自成一个闭合回路，在交变磁场中，通过这些薄壳的磁通量都在不断地变化，所以一层层地产生感应电流。



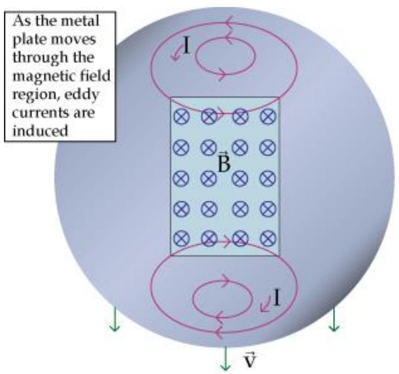
电流线呈闭合的涡旋状，因而这种感应电流叫做**涡电流**，简称**涡流**。由于大块金属的电阻很小，因此涡流强度可达非常大。



高频电磁感应炉（冶炼金属）

利用涡电流—电磁制动

涡电流除了热效应外，还有机械效应，大块金属在磁场中运动会受到很大的阻力。

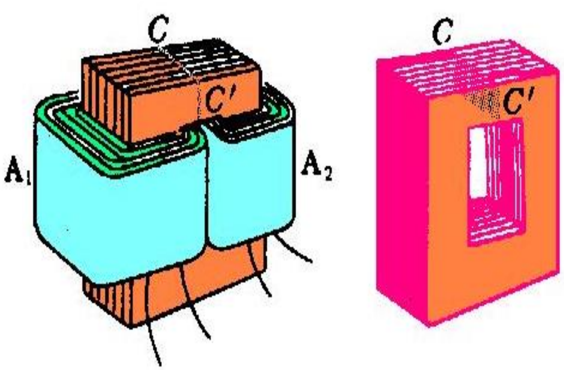


涡电流的方向可以通过楞次定律来判定

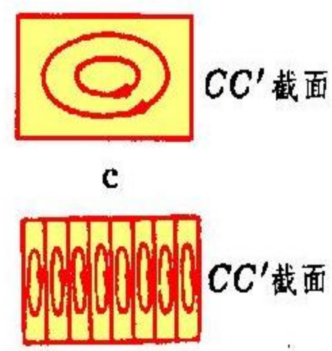
减少涡电流的方法

（1）高电阻材料，**硅钢**，在钢中增加硅，而磁导率与铁差不多。

（2）多层绝缘片叠加而成，减少涡电流的导体截面积。



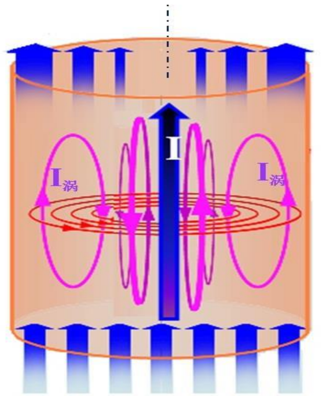
a　　b



d

2. 趋肤效应

当交变电流通过柱体时，电流密度不均匀分布，越靠近导体表面处，电流密度越大，称趋肤效应。



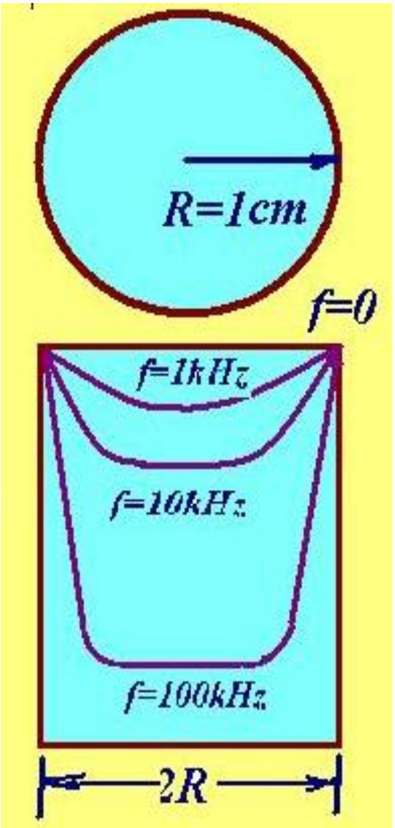
趋肤深度：

$$d_s = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\mu\sigma}}$$

铜：

$$f = 1kHz,\quad d_s = 0.21cm$$

$$f = 100kHz,\quad d_s = 0.021cm$$

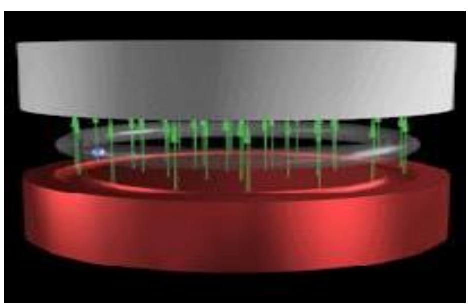


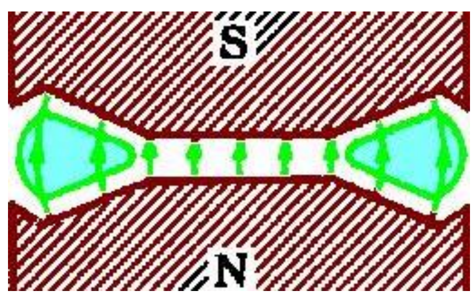
铁的趋肤效应更明显。

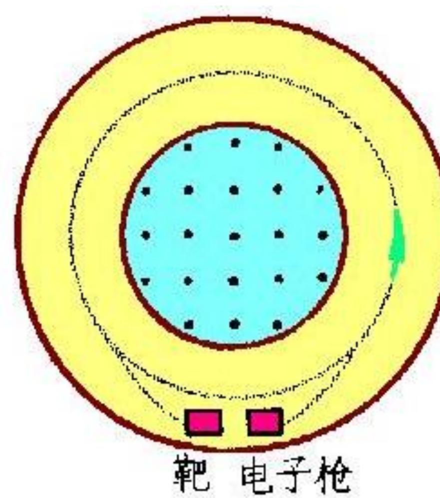
- 趋肤效应会使得导线有效面积减少，电阻增加。
- 采用细导线编织成束代替单芯导线。
- 高频电路中用空心导线代替实心导线。
- 应用：表面淬火，表面变硬。

五、电子感应加速器

- 电子感应加速器(Betatron)是加速电子的装置。
- 即使没有导体存在，变化的磁场也在空间激发涡旋状的感应电场。

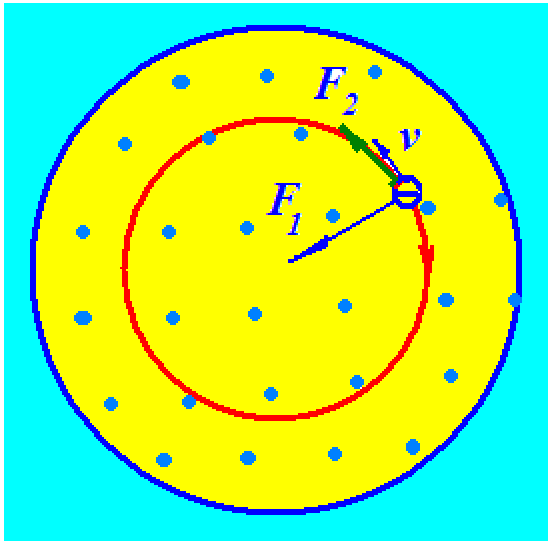






- 曲线加速电子需要2个力作用:
  - 向心力：与速垂直度、**洛仑兹力**
  - 切向力：与速度同向、**涡旋电场力**
- 变化量的**相位**需要同步

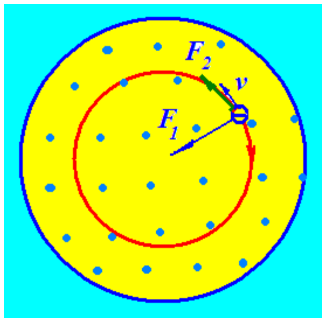
$$\vec{B}=\vec{B}_0\sin\omega t \qquad \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\vec{B}_0\omega\cos\omega t$$



$$\nabla\times\vec{E}_{旋}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\vec{B}_0\omega\cos\omega t$$

因 $\nabla\times$ 不对t作用, 故 $E_{旋}\sim-\cos\omega t$

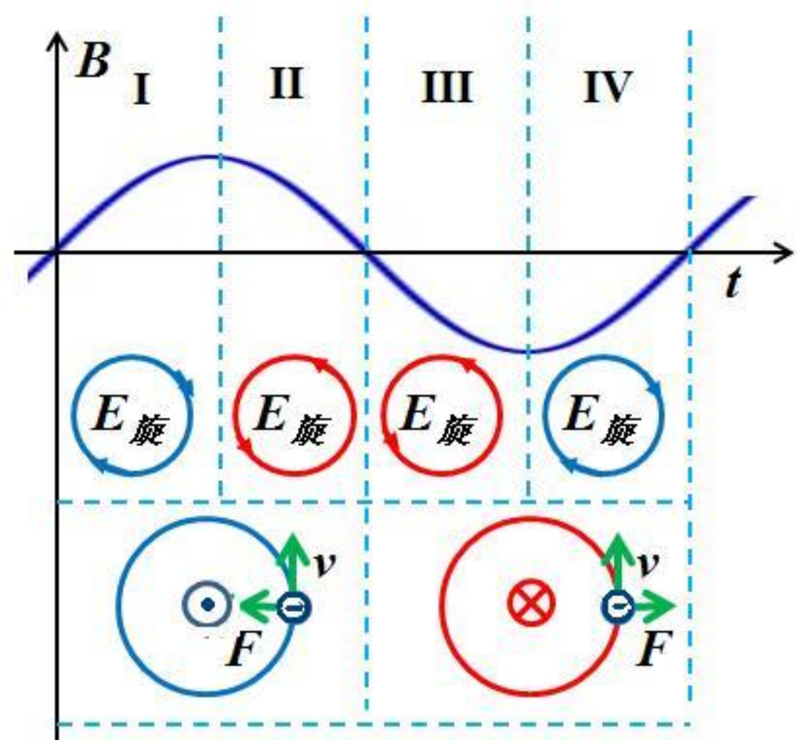
$$f_{电场}=-eE_{旋}\sim+e\cos\omega t$$



$$\vec{B} = \vec{B}_0 \sin \omega t$$

$$E_{旋} \sim -\cos \omega t$$

$$f_{电场} \sim e \cos \omega t$$



在第I, IV象限,电子加速;

在第I象限, 洛仑兹力向圆心, 提供向心力;

在第IV象限, 洛仑兹力向外, 不提供向心力.

仅在第一象限的1/4周期内，电子沿圆周运动并加速.

$$evB_R = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow mv = eRB_R$$

只要mv与B_R成比例增加，则可保持R不变.

$$\frac{d(mv)}{dt} = -eE = \frac{e}{2\pi R}\frac{d\Phi}{dt}$$

$$t = 0\text{时}, \ \Phi = 0, \ \ v = 0$$

$$mv = \frac{e}{2\pi R}\pi R^2 \overline{B} = \frac{eR}{2}\overline{B}$$

故有

$$B_R = \frac{1}{2}\overline{B}$$

$$\boxed{mv = eRB_R}$$

$$\boxed{B_R = \frac{1}{2}\overline{B}}$$

- 这是电子感应加速器的物理条件，随着电子能量增加，轨道磁场及轨道内平均磁场要同步增加，维持1：2的比例关系。
- 在1/4周期内，电子可以运动几十万圈，被涡旋电场加速至很高能量：一台100MeV的大型电子加速器，可将电子加速到0.999986c。
- 需在1/4周期结束时将 电子引出。