

# 2018 年中国研究生数学建模竞赛 B 题

## 光传送网建模与价值评估

### 1. 背景

2009 年诺贝尔物理学奖授予了英籍华人高锟（Charles K. Kao）博士，以表彰他对光纤通信发展所做出的贡献，诺贝尔奖委员会在给公众的公开信中写到：

“当诺贝尔物理学奖宣布的时候，世界大部分地方几乎瞬间收到了这条信息...文字、语音和视频信号沿着光纤在世界各地来回传输，几乎瞬时地被微小而便捷的设备接收，人们已经把这种情况当做习惯。光纤通信正是整个通信领域急速发展的前提。”

从诞生至今，50 多年里基于数字光纤通信技术的光传送网构建起了全球通信的骨架。从城市内的传输，直到跨越大洋的传输，光传送网为人类提供了大容量、高可靠性和低能耗的信息传输管道，人类对通信容量的追求也成为光传送技术发展的源源不断的动力。

光传送网的规划与建设是运营商、设备商以及政府必须考虑的课题。光传送的基本规律是——在相同技术条件下传输的容量会随着传输距离增加而减小。网络规划者需要在有限资源的条件下，综合考虑传输距离，传输容量、网络拓扑等各种因素，以最大化网络的价值。本课题中，请你们站在上述角度，从底层物理出发为光传送链路建模，制定光传送网规划，探索光传送网有关规律。

本课题的内容包括：

- 1) 对光传送链路进行简单建模
- 2) 制定光传送网的规划，并探讨网络的价值
- 3) 改进调制格式

### 2. 问题-1：光传送链路建模

现代数字传输系统可认为是对 0101 二进制序列进行编码传输的系统，1 个二进制的 0 或 1 称为 1 个比特（bit）。无论是语音、视频还是任何类型的消息，都可以数字化为一串串“0101...”的二进制比特序列，经编码并调制为某个“载体信号”后，再经过特定的“信道”（信息的通道）传输到目的地。图 1 中给出了简化的模型。在光纤通信中，光纤就是信道，光纤传输的光波就是信息的载体。信道中无法避免的噪声可能导致最终接收的二进制序列中比特出错，即产生误码。

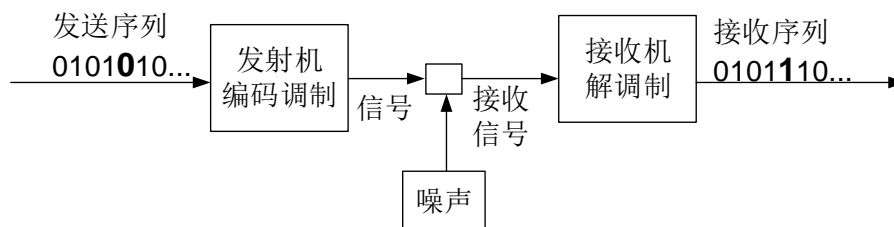


图 1 简化后的数字传输模型

二进制序列通常需要将  $K$  个比特作为一个“符号”进行传输，每个符号有  $2^K$  个不同状态。光传输利用光波的复振幅承载信号，因此可用复平面上不同的点来对应不同的符号状态，

这种将符号状态画在复平面上的图称为“星座图”，图上的点称为“星座点”。如图 2(a)所示的 QPSK（Quadrature Phase Shift Keying）调制，经过信道叠加噪声和接收机处理后，接收端的星座图不再是理想的四个点，而是会出现扩散。当接收机收到 1 个符号时，就将发送的符号判定为离该符号最近的星座点。显然，如果噪声过大，接收到的符号可能被判错从而产生误码，如图 2(b)中的蓝点。误码率（Bit Error Ratio, BER）定义为错误的比特数占总传输比特数的比例，例如传输了 50 个符号共 100 个比特，其中有 1 个符号被误判为相邻的符号，错误了 1 个 bit，则误码率为 0.01。BER 是衡量通信系统性能的最根本指标，采用纠错编码，只要纠错前 BER 小于某个门限值（BER 容限点），纠错编码后就能实现纠错后误码率为零的传输，本题中 BER 都是指纠错编码前的误码率（纠错前 BER）。

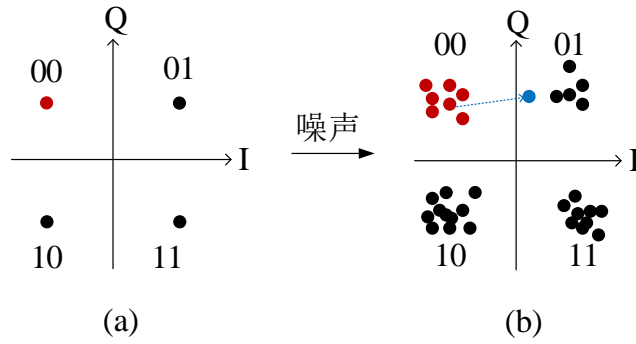


图 2 星座图与噪声导致误码的示意图

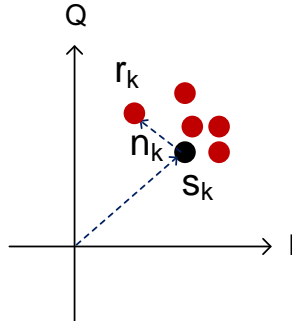


图 3 信号和噪声的相关定义示意图

图 3 中理想星座点用  $s_k$  表示，接收到的符号用  $r_k$  表示，则噪声为

$$n_k = r_k - s_k \quad (1)$$

噪声通常服从均值为 0 的正态分布。噪声的方差等于噪声的平均功率，定义为

$$P_n = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |n_k|^2 \quad (2)$$

其中 N 为总共传输的符号数。信号平均功率定义为发送符号绝对值平方的均值：

$$P_s = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |s_k|^2 \quad (3)$$

定义信号和噪声功率的比值为信噪比（Signal-to-Noise Ratio, SNR），

$$SNR = P_s / P_n \quad (4)$$

工程上通常用 dB 作为 SNR 的单位，定义为

$$SNR(dB) = 10\log_{10}(P_s/P_n) \tag{5}$$

增大十倍为加 10dB，减小 0.5 倍为减去 3dB。本题中功率单位统一为毫瓦（mW），星座图实部和虚部单位为 $\sqrt{mW}$ 。

光传输链路由多个相同跨段的级联而成。如图 4 所示，几十 km 的光纤和一个放大器构成了 1 个跨段。信号每传输 15km，光功率衰减一半，经过一段光纤传输后，需要用放大器对光功率进行补偿。在信号、噪声同步放大的同时，放大器还引入自发辐射噪声，公式为  $P_n = 2\pi\hbar f B(NF + 1/Gain)$ ，其中是  $\hbar$  是普朗克常数 ( $6.62606896 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{S}$ )， $f$  是光波频率（可定为 193.1THz），B 为带宽（设为 50GHz），NF 为噪声指数（可设为 4），Gain 为补偿光纤衰减所对应的功率增益。另一方面，光纤作为一种传输介质，其本身的非线性效应也会等效地引入噪声。其等效噪声功率与入纤功率近似呈平方关系，光纤功率为 1mW 时的非线性噪声约等于单个放大器噪声的 2/3。放大器的自发辐射噪声和光纤的非线性噪声都是加性噪声。非线性噪声在每跨开头叠加，放大器噪声在每跨末尾叠加；每跨中间信噪比保持不变。每跨叠加的噪声间相互独立。

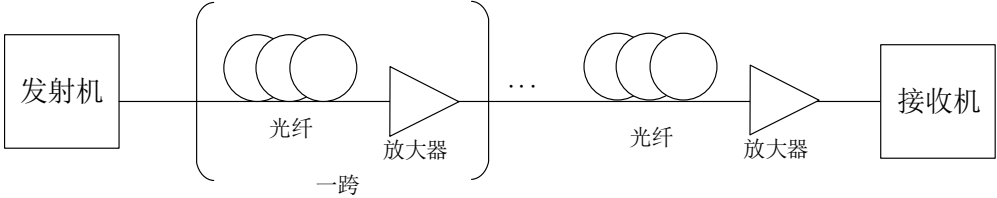


图 4 基本的光传输链路模型

子问题-1) 纠前误码率与信噪比计算

星座图的编码分布模式也称为调制格式，对于给定的调制格式，BER 和 SNR 呈一一对应的关系，纠前 BER 门限对应的 SNR 记做“SNR 容限点”。给出图 5 中所示的三种调制格式及编码方式（相邻星座点距离相等），每个符号等概率出现，分别称为 QPSK，8QAM (Quadrature Amplitude Modulation, QAM)，16QAM。请给出 BER 与 SNR 的关系曲线，BER=0.02 时 SNR 容限点分别为多少？

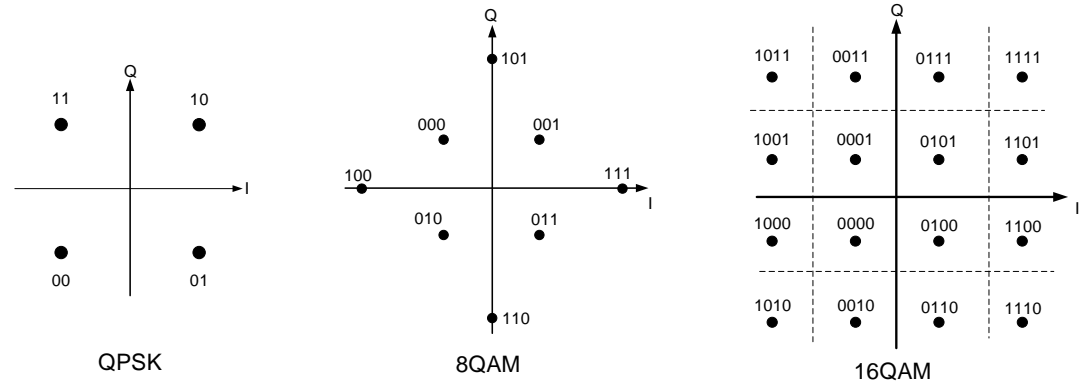


图 5 三种调制格式的编码方案

子问题-2) 光链路性能计算

当单跨传输距离为 80km 和 100km 两种情况，以纠前误码率 0.02 为门限，图 5 给出的

传输格式最远的传输距离（每跨距离×跨段数量）是多少？

3. 问题-2 光传送网规划

表 1 给出进一步优化升级后的三种典型光传输设备参数。考虑到通信网络的目的是把更多的人更充分地连接到一起，我们按照如下方式定义网络的价值：

- 1) 每条直接连接两个城市/区域的链路当做 1 个连接，每个连接的价值定义为传输的容量与连接区域人口数的乘积（取两区域人口数乘积的 0.5 次方）
- 2) 网络的价值则是所有连接价值的加权和

网络价值 =  $\sum \text{权重} * \text{容量} * \text{人口}$  (6)

以图 5 给出的北京、南京、上海三座城市为例，若相互之间均互有连接，根据城市的距离可得出能传输的容量。若每条链路的权重为 1，进而再由人口算出网络价值(Network Value, NV) 为

$NV = \sqrt{21 \times 24}m \times 16Tb/s + \sqrt{21 \times 8}m \times 16Tb/s + \sqrt{24 \times 8} \times 32Tb/s \approx 1010mTb/s$  (7)

其中 m 代表百万人(million)，Tb/s = 10<sup>12</sup>bit/s, 该网络的连接数为 3。

然而由于资源等因素制约，网络往往并不能让每对节点都直接连接，但可通过中间节点连接起来。以图 5(b)为例，网络连接数为 2，北京和南京之间需通过上海中转。若北京上海之间的传输仅保留一半容量(100Gb/s)，而另一半容量用于南京到北京的信号传输(100Gb/s)，相应地南京与上海之间的直接传输容量也会降低至 300Gb/s，此时网络的价值为

$NV = \sqrt{21 \times 24}m \times 8Tb/s + \sqrt{21 \times 8}m \times 8Tb/s + \sqrt{24 \times 8} \times 24Tb/s \approx 616mTb/s$  (8)

根据需要两个节点之间也可以有多个连接。

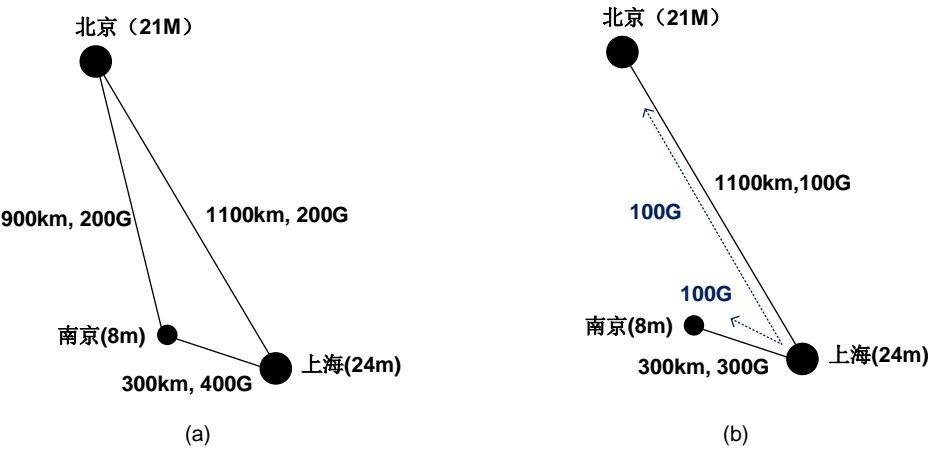


图 6 三个节点网络示意图

表 1 不同传输格式的传输距离

单波传输容量	最大传输距离	总容量
100 Gb/s	3000 km	8 Tb/s
200 Gb/s	1200 km	16 Tb/s

400 Gb/s	600 km	32 Tb/s
----------	--------	---------

请你们队考虑价值与需求为图 6 中的我国城市群制定光传送网规划，图中共有 12 个区域(其中北京/天津，深圳/广州均按 1 个区域对待)，

**子问题-1:**如果连接数从 16 增加到 33 条时，不考虑中间节点，给出你们的两个网络规划及其价值。网络价值最多是多少？

**子问题-2:** 存在中间节点，且两个节点之间可以有多个连接的情况下，重新解决子问题-1 并给出所有中间节点传输容量的分配，假定每条链路容量可任意分配，只要总容量不超过表 1 的规定。如果由市扩大为省（区）影响如何？（人口请从网上查找）

**子问题-3:**光传送网络价值有多个侧面，例如从运营商的角度，连接经济发达的地区会带来更多的收入，从政府的角度保障发展相对滞后地区的通信是均衡发展的要求等。你队认为制定光传送网络规划的目标函数应该是什么？前面制定的规划有无变化？

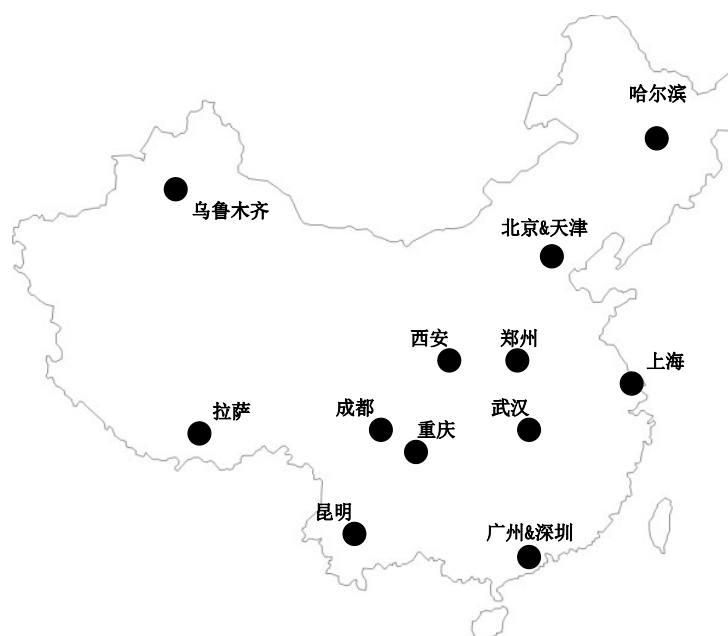


图 7 需要考虑的城市群

### 问题-3 改善星座图

由第一问可知，纠前 BER 不变时，降低 SNR 容限点可以提高系统容忍噪声的能力，从而延长链路的总长度。请尝试任意改变 16QAM 方案中星座点的位置、数量或每个点的概率，探索产生比图 5 中 8QAM（相邻各星座点之间距离相等）具有更低 SNR 容限点的调制方案？调制格式的信息熵需保持为 3bit。

信息熵定义为：

$$\Omega = -\sum_1^N p_k \log_2(p_k) \quad (9)$$

其中  $p_k$  为每个符号状态出现的概率，N 为状态数。图 5 所示的等概率情况下，QPSK、8QAM 和 16QAM 的信息熵分别为 2bit, 3bit 和 4bit。

符号	意义	单位	备注
$V_i$	城市节点 $i$		
$E(i,j)$	城市 $V_i$ 与城市 $V_j$ 之间的连接		
$connect(V_i,V_j)$	城市 $V_i$ 与城市 $V_j$ 之间的带宽容量		
$dist(V_i,V_j)$	城市节点 $V_i, V_j$ 之间的距离		
$popu(V_i, V_j)$	城市 $V_i$ 与城市 $V_j$ 之间的人口容量		
$pep(i)$	城市 $V_i$ 的人口数目		
$value(V_i, V_j)$	城市 $V_i$ 与城市 $V_j$ 之间的网络价值		
$K$	城市之间 的最大连接数	个	
$N$	城市数目	个	
$X$	带宽容量矩阵		
$A$	人口权重矩阵		
$F$	目标函数		
$Cap(V_i, V_j)$	最大容量		
$\lambda$			
$\alpha$	目标函数调节系数		
$eco(V_i)$			
$diseco(V_i,V_j)$			
$Y$			
$Z$			
$\beta$	经济发展水平权重因子		