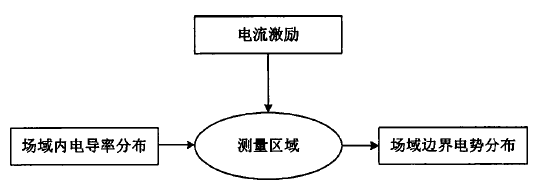
**EIT正问题**

对于EIT问题，其对应的数学模型为

y为电极上的电压值，J为雅可比矩阵，可以通过有限元方法获得，x则为生物体内部的信息，即截面的阻抗分布。当生物体内部的阻抗分布x已知，要求解电极上的电压值y时，此问题称为正问题。正问题的解通常是唯一的，稳定的。



**麦克斯韦方程组**

EIT问题是以麦克斯韦方程组作为物理基础，使用麦克斯韦方程组对人体建立模型，能有效描述人体的电生理效应。下述方程组是麦克斯韦方程组的微分形式

式中，D为电位移，为电荷密度，E为电场强度，B为磁场强度，H为磁场强度，J为电流密度，为哈密顿算子。除此之外，式中各物理量还有如下关系

*（1.3）*

式中，为磁导率，为介电常数，为电导率。

描述EIT正问题时，并不需要用到麦克斯韦方程组的所有公式，仅需使用其对电场的描述公式即可建立起场域内电导率分布与场域边界电势分布的关系。除此之外，由于直接应用麦克斯韦方程组建立模型会使得EIT问题变得非常复杂，难以求解，所以一般会作出如下假设：

1、EIT问题所研究的场域是一个准静态场，亦可称为似稳场。只要场域边界给出激励信号，场域内部即可产生相应的变化。而且只要激励信号相同，场域内部的变化也就相同。换句话说，人体组织内部随时间的变化所造成的误差被直接忽略掉了。

2、我们在场域边界所注入的特定频率的电流在场域内部不会存在响应，即在场域内不存在该频率的电流源，电流汇与涡流效应。反映在公式上为散度恒为0：

（1.4）

记场域内的电位为，则电场强度与电位的关系如下：

（1.5）

由式（1.3）、（1.4）和（1.5）可推导出

和与场域中的位置有关，即其都是关于位置(x,y)的函数。由此，可以推导出EIT的控制方程为：

（1.6）

该方程为拉普拉斯方程，求解EIT问题的本质就是求解此方程。设置不同的边界条件可以使得拉普拉斯方程有不同的解。记n为方向向外的法向量，为场域的边界。

1. 狄利克雷（Dirichlet）条件：

狄利克雷条件又称为第一类边界条件，直接给定场域边界的函数值。

1. 诺伊曼（Neumann）条件：

诺伊曼条件又称为第二类边界条件，给定的是场域边界外法线的方向导数。

1. 混合边界条件

该条件给定的是场域边界上的函数值和外法线的方向导数的线性组合。

使用不同的边界条件，可以建立不同的EIT模型，其求解结果也会随之改变。常见的模型有：连续电极模型（CEM）、间隔电极模型（GEM）、分流电极模型（SEM）和完备电极模型（CEM）。目前，许多EIT研究都使用完备电极模型作为场域的边界条件，因为其精确性较高，能够与实际问题相贴合。

记为所研究的场域，为电极区域。在场域内，应满足拉普拉斯方程（1.6）。而其边界条件有两种可能，当该边界区域为无电极区时，边界条件为

当该边界区域为电极电流注入区域时，则边界条件为

可以看出，在EIT问题中，完备电极模型的边界条件为Neumann条件，其积分形式为

式中，为第个电极，而为第个电极输入的激励电流，为已知值。

而在测量电极处，完备电极模型需要将接触阻抗考虑在内，其公式为

式中，为第个电极的接触阻抗，为第个测量电极的测量电压，为已知值。

除此之外，完备电极模型还需要假设两个条件，一是输入电流不会在生物体内被消耗掉，而是由剩余的电极流出。二是如果一个测量电极上的测量电压为正，剩余的测量电极上的测量电压相加与该电压呈相反数。即完备电极模型需要符合生物体是一个似稳场的假设。其用数学公式表达为

式中，为电极数量，在本文中。

所以，完备电极模型的完整公式为

**正问题求解**

求解拉普拉斯方程有两类方法，一类是解析法，一类是数值法。解析法的应用范围比较有限，求解的场域只能是圆形或者球形，且介质要均匀，解析解也被称为调和函数。数值法相较于解析法应用范围比较广泛，其主要的方法有：有限元法（FEM）、边界元法（BEM）、有限差分法（FDM）、无单元法（EFM）以及有限体元法（FVM）。

有限元法：

有限元法是一种求解偏微分方程的数值方法，其主要利用变分原理，将拉普拉斯方程求根问题转变为泛函求极值问题。求解时需要对整个场域进行分解，分解成一个个小的有限元，然后对每一个有限元求近似解，把这些解联系起来，使得它们满足某些约束关系，从而获得问题的解。有限元法的优点在于目前的研究比较成熟，而且有限元的思想比较清晰明了，目前广泛应用在求解各种物理问题中。

边界元法：

边界元法是在有限元法的基础上发展而来的，它只在边界划分单元，通过用满足拉普拉斯方程的泛函逼近边界条件。边界元法能够有效减轻对数据的依赖，以及减少划分有限元的数量。

有限差分法：

有限差分法同样需要对场域进行划分，它是用有限的网格点代替连续的场域，利用泰勒公式，用网格上的函数值的差分代替微分，将连续问题离散化，从而求解出数值解。有限差分法的优点在于简单，便于编写计算机程序。

无单元法：

无单元法不需要分割场域，而是利用更灵活的点对场域进行离散。即有限元法的基本单位是有限元，而无单元法的基本单位为结点。无单元法的优点为在保证计算精度的前提下，可以有效地提高效率。

有限体元法：

**等价变分问题**

本文采用有限元法对EIT问题进行求解。根据变分原理，E-L方程和格林公式，可以把偏微分方程转换为积分方程，其中格林公式主要解决边界问题，设如下泛函

积分第一项（在场域中）对应的E-L方程为

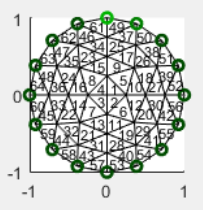
积分第二项（在边界上）对应的E-L方程为

所以，根据EIT问题的完备电极模型，可以获得如下泛函

求等价变分问题，就是将求拉普拉斯方程的求根问题转变为泛函的求极值问题。

**有限元划分**

有限元法将场域划分为多个小三角形，称为有限元。这些有限元按逆时针顺序给予编号，各个有限元紧紧相连在一起。假设在该有限元区域内的阻抗为一常数，每个有限元都有三个顶点，称为节点，其上的电位用表示。

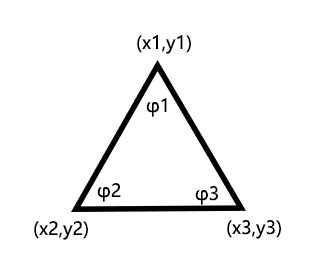


而对于有限元内部的电位，我们需要利用线性插值来获得。有如下公式

其中，m代表有限元的编号。

要确认和的值，就需要三个约束条件，即三条方程。而有限元的三个节点的坐标和电位是已知的，所以很容易推出以下公式。

式中对应的参数如图



将方程组转换为矩阵

求解方程组，可以获得和的表达式为

式中，为第m个有限元的面积，其计算公式为

则有限元内任意一点的电位公式为

*(1.7)*

为方便用矩阵表示，设

则式（1.7）可用矩阵表示为

对于每一个有限元，都需要满足EIT控制方程，第m个有限元对应的泛函为

式中，为该有限元的场域，为该有限元的边界。

(1.8)

记

则

记

则式（1.8）可进一步化简为

记

为有限元系数矩阵，其对应的泛函用矩阵表示为

**系统合成**

记

式中，,为正定矩阵。

为场域中总的节点数，为节点上的电位。为Neumann条件的积分形式，即在节点上输入的电流。则整个场域的泛函为

使得取得极值的条件为对每个节点上的电位作偏导数，其结果为0。用公式表示为

由此可知，当泛函取得极值时，如下公式成立

则电极上的电位为

（1.9）

需要注意的时，为一个正定方阵，其逆矩阵必然存在，所以式（1.9）在任何条件下都成立。