Laplace正则化

拉普拉斯正则化属于L2L2正则，它也有对应的重构矩阵，即也是一步就能求得稳定解，不需要用迭代获得数值解。拉普拉斯矩阵应用在图像上能够使图像平滑，而应用在正则化上同样能使参数平滑，即使得参数变化不会那么剧烈，从而降低模型的复杂性，有效地防止过拟合的情况发生。

一个像素在二维坐标平面上，会与其周围8个像素产生联系，这种关系称为图像的空间结构信息。而在算法中，我们通常会将一幅图像的矩阵信息记录成向量信息，因为这符合计算机内存的物理存储规律，能够有效地提升运算速度。但是，如果我们这么做的话，空间结构信息就会被破坏掉，因为向量是一维的，而矩阵是二维的，而且没有辅助矩阵去记录空间结构信息。空间结构信息作为一种先验信息，应该要尽可能被算法利用起来，而拉普拉斯正则化就可以帮助我们利用这种先验信息。

加入了拉普拉斯正则的泛函表示如下

式中，的表达式为

式中，和均为拉普拉斯算子，和均为单位矩阵，为克罗内克积。该式的意义为第一项保留了图像中列的空间结构信息，而第二项保留了图像中行的空间结构信息。相加时，图像的空间结构信息自然得到保留。

记

那么，克罗内克积为

即把克罗内克积右边的矩阵与左边矩阵的每一个元素相乘，放到对应的分块矩阵的位置。如果A是一个的矩阵，B是一个的矩阵，那么克罗内克积得出来的矩阵大小是的。

对目标泛函进行求导，并使其导数等于0，可推出如下公式

与Thikonov正则化的重构矩阵是一样的，只不过这里的L为拉普拉斯矩阵。

当我们建立有限元模型时，模型的有限元空间信息，编号信息，节点信息等都是已经确定的。由此，我们可以写出该有限元模型的邻接矩阵。邻接矩阵是一个实对称矩阵，当编号为的有限元与编号为的有限元相邻时，邻接矩阵中坐标为的元素的值为1，用公式表达为

然后，我们需要计算度矩阵，即将邻接矩阵的行或列上所有元素的值相加，放到该行或该列的主对角线上。用公式表示为

那么。拉普拉斯矩阵即为

而在EIDORS软件中，拉普拉斯矩阵要更简单一些。我们知道在二维平面进行有限元划分的时候，内部的有限元总会与3个有限元相邻接，即该有限元的度恒为3。而在边界上的有限元总会与2个有限元相邻接，即该有限元的度恒为2。但是在软件中，边界有限元与场域内部的有限元均简化为度为3的有限元。其可以表示为

拉普拉斯矩阵可被看成是一个二阶的高通滤波器。