**PDIPM算法**

在PDIPM算法中，需要最小化的目标函数如下

式中，的取值为1或2。那么，一共有四种情况，分别是L2-L2、L2-L1、L1-L2和L1-L1。L为正则化矩阵，J为雅可比矩阵，是惩罚系数，W是加权矩阵，其本身的形式是一个对角矩阵，可以看成是对Thikonov正则化的加权。对于差分图像，，但在下面的推导时仍保留原始的形式。本文仅讨论使用L2-L2、L2-L1和L1-L1获得重建图像的图像质量和重建运算速度，并进行比较。

**原始-对偶内点法**

PDIPM又称原始-对偶内点法，是结合了原始-对偶法和内点法的优点而衍生出来新算法。原始-对偶法于1987年被首次提出，它将原问题转换成对偶问题，分别求解两个问题的最优值，使得算法不断逼近最优解。而内点法于1984年被首次提出，它能够使得整个迭代过程都在可行域内。PDIPM算法流程如下：

1. 将原问题转换成对偶问题
2. 求出对偶间隙表达式，要求对偶间隙为0，获得互补条件
3. 将原问题的最优化问题转换成互补条件的最优化问题，可以通过牛顿类算法获得原问题和对偶问题的迭代公式
4. 利用迭代公式不断更新原问题和对偶问题的变量，直至逼近最优解

**L2-L2算法**

L2-L2算法是PDIPM中最简单的情况，其目标函数如下

使用L2-L2算法时，可以使用NR算法直接写出其迭代公式为

在实际应用中，一般使用牛顿一步误差算法（NOSER），直接获得重建矩阵

**L2-L1算法**

L2-L1算法的目标函数如下

由于使用了L1范数，使得我们不能像L2-L2一样直接写出重构矩阵的表达式，只能通过迭代法逼近真实解。原问题P可改写为

记y为对偶问题的辅助变量，对于上式的第二项，有

式中，，且对所有的均成立。此时，对偶问题D为

将上式转换为对偶问题常见的形式，即将求辅助变量最大值放在外围

对于求内部的最小值，可以对求导并使导数为0，有

式中，在牛顿法推导中已经提到过，即为雅可比矩阵，有

上式可改写为

在原始-对偶法中，已经证明原问题的最优值必定大于等于对偶问题的最优值，而当原问题与对偶问题的自变量在某处取值满足KKT条件时，原问题的最优解与对偶问题的最优解相等。此时，可以构造一个函数，代表原问题与对偶问题的差值，那么求解原问题与对偶问题的最优值就转变为求该函数的零点，该函数被称为对偶间隙。

令对偶间隙G为0，有

上式是对偶间隙G为0的必要条件。因为需要对上式进行求导，但当时，上式不可导，对其进行改写有

式中，。那么，原始-对偶法的公式如下

对上述第一条和第三条式子对和分别求偏导，有

式中

由此，可以得到牛顿法的更新方程为

求解上述方程组，可以得到牛顿法的更新方向为

由于牛顿法只确定了更新方向，如果使用原始的迭代步长，可能会导致牛顿法无法收敛或者收敛速度过慢。由于并无任何约束条件，所以使用线搜索更新。那么，迭代方程则为

式中，为通过线搜索得到的步长。而变量y的约束条件为，所以使用步长法则更新，对应的迭代方程为

式中，，每迭代一次步长就需要重新计算一次。

**L1-L1算法**

损失函数与惩罚函数均采用L1范数，称为L1-L1算法。其目标函数如下

将上述目标函数改成累加写法，原问题P可改写为

记对偶问题的辅助变量为，则对偶问题D可以表示为

式中，辅助变量满足约束条件

继续改写上式，将求最大值和最小值的顺序交换

如L2-L1算法一样，对上式求偏导有

对应的原始对偶间隙为

可以看出，与L2-L1算法不同的地方是，没有任何一项被消除掉，所以需要两个辅助变量进行迭代。令原始对偶间隙为0，有

原始对偶间隙为0的必要条件为

同样，需要对上述两式求偏导，但是，当与时不可导，所以要将其改写为

式中，。完整的原始对偶法公式如下

对原问题与对偶问题的变量求偏导有

综合上述所有偏导方程，可以得到牛顿方程的更新方程为

式中，的表达式已在前文提到过，剩余符号表达式如下

通过求解上述方程组，可以获得牛顿法的更新方向为

迭代公式与前文类似，使用传统的线性搜索更新原始问题的变量，使用步长法则更新对偶问题的变量。