**Tv正则化**

全变差正则化（total variation (TV) regularization）是在目标泛函中加入了变差正则项的正则化方法，其关键在于利用了变差函数作为正则项，克服了Thikonov正则化过度平滑的缺点，有效保留了边缘信息，使得目标物体能从背景中识别并分离出来。

**全变差函数的数学原理**

要理解全变差函数，就要先理解有界变差函数，亦称为圃变函数。有界变差函数是解决弧长存在性相关问题的有效工具，所以，我们先从弧长的定义入手。

设曲线S：是一条光滑的连续曲线，曲线段两端存在两个端点，分别为A与B，在端点A和B之间将曲线任意分成n条曲线段，即往曲线中插入n-1个点，记插入的这些点为，端点A和B分别记为和，用直线按顺序将这些点连接起来，得到一条折线段

当插入点的数量n趋于无穷大且σ收敛时，折线段会无限逼近曲线，其极限值称为曲线段AB的弧长。

由定义可以看出，并不是所有的曲线都能定义长度，若σ发散时，其长度便不存在。而曲线长度存在的充要条件是其坐标函数为有界变差函数。对于平面上的曲线，记，。曲线长度存在的充要条件就可以表达为对于曲线AB上的所有的点，数集与收敛。

由弧长存在性定义，可以得出变差函数的定义。

记有界函数在定义域为[a,b]的区间上进行任意分割，分割出来的曲线段集合记为S，对于所有的S，都有收敛，则函数称为在区间[a,b]上的有界变差函数，其收敛值称为全变差，记为。

当改变时，其收敛值σ也会跟着改变，所以变差函数本质上是一个以为自变量的泛函数，记变差函数为。当我们需要构建一个变差函数时，需要找到一个有界的分布函数，其定义域是一个闭区间且是连续可分的，这两点是构造变差函数的必要条件。

**变差函数降噪原理**

运用变差函数能够很好地抑制图像的噪声，提高图像的信噪比。记为一维分布函数簇，，在中任意选取5条不同的线段，其能代表所有的选取情况，路径分别如下： 为连续单调不减直线，为连续单调不减曲线，为离散单调不减曲线，为连续曲线，为离散曲线。其图像如下：

由公式可得，的泛函收敛值为b-a，的泛函收敛值大于等于b-a。可见，对于，不论其分割方式如何，或是否连续，只要函数为单调不减函数，最终的收敛值都为b-a，即函数的收敛值与路径的选择无关。而对于来说，有下确界为b-a。当函数出现剧烈波动时，其收敛值也会跟着增大。也就是说，变差函数能够描述函数的波动程度。

在求解FEM后得到的有限元为一个小三角片，我们认为这个小三角片的阻抗是均匀的，其电导率是一个稳定的常数，而且小三角片与小三角片之间是离散的，与前文提到的离散曲线较为相似。当图像出现噪声时，噪声像素点的灰度值与周围像素的灰度值相比会出现剧烈变化，而变差函数的函数值也会跟着变大，通过使用正则化的手段就可以在噪声的位置给予较大的惩罚项，减小噪声带来的影响，获得一幅高信噪比的图像。

除了能够提高信噪比之外，使用变差函数作为惩罚项的TV正则化还能使得目标物体的边缘变得清晰，能够从背景中分离出来。由变差函数的定义可以看出，由于组织内部是均一的，其电导率差值很小，保持相对稳定。在组织与组织之间，其差值会变大，但又不会像噪声一样发生剧烈变化，由此，能够将组织间的边界清晰地显示出来。而Thikonov正则化是全局平滑，虽然使得解的结果稳定，但是放弃了边缘轮廓。TV正则化能够保证解稳定的前提下，有效克服Thikonov正则化的缺点。

**全变差正则化**

全变差正则化是将全变差函数引入到目标泛函的惩罚项中，使得目标泛函变成：

可见，全变差正则化是一种L1正则化。其中的表达式为

即两个图像像素之间的距离。那么，目标泛函可表示为

全变差正则化还可以这样理解，记k代表边的编号，标号为和有限元的共同边为k，其长度为。对和有限元的边长差值作矩阵化表达，得到，。那么，惩罚项就可以表达为

其物理意义为当两个有限元相邻，我们希望这两个有限元的差值很小，如果其差值变化很大，那么惩罚项也会跟着变大，使解稳定。