**Thikonov正则化**

由于逆问题的解具有不确定性，所以一般用将预测值与真实值作差构建目标函数，其值称为误差。当误差足够小，即预测值无限逼近真实值时，我们便可以认为预测值是逆问题的解。若使误差的均方最小，这种方法便被称为最小二乘法，这类问题被称为最小二乘优化问题。其公式如下：

在常见的EIT设备中，一般为16或32电极系统，而人体截面有限元的数量一般都是几千个到几万个的数量级。用如此少的已知条件求解未知方程，会使问题的解及其不稳定，即微小的扰动可能会导致两次求解之间有较大的差异。同时，由于噪声的影响，会使得雅可比矩阵J产生比较多的小的奇异值，其条件数（最大的奇异值与最小的奇异值之比）接近于正无穷。所以，通常在求解逆问题时在目标泛函后添加一项惩罚项，即正则化，使得解能够收敛稳定。Thikonov正则化的泛函一般形式如下：

在EIT问题中，其形式为：

（1.1）

其中y∈为两帧图像之间的电压差，其中为电压测量次数。是用于成像的阻抗变化，为模型中的有限元个数。为测量噪声的自相关矩阵，一般情况下可以认为其是对角阵，且为常数。为阻抗变化的期望值，对于差分图像，。

令，式（1.1）可化简为：

其中，λ称为超参数，L为正则化矩阵。

由于F(x)为凸函数，所以F(x)存在极小值，对其求导有

令其导数为0，得到x的值为

对于Thikonov正则化，L为单位矩阵。

（1.2）

可以看到，Thikonov正则化使用代替了，对非满秩的方阵主对角线上的每一个元素都添加一个扰动，使得对奇异阵求逆变成了对非奇异阵的求逆，极大提高了求解结果的稳定性，降低了条件数。

**SVD分解**

对于使用了Thikonov正则化的最小二乘法，可以使用SVD分解进行求解。SVD公式如下：

其中，U和V均为单位正交阵，有和。此时，U称为左奇异阵，是一个m阶方阵；V称为右奇异阵，是一个n阶方阵。∑的主对角线为对应的奇异值，其余位置均为0，∑矩阵形式如下：

所以，解可表示为

（1.3）

由于必然是一个满秩方阵，所以其逆必然存在，Thikonov正则化的结果即为式（1.3）。

可见，求解加入Thikonov正则化的最小二乘法步骤如下

1. 计算和并对其进行特征值分解，求得单位正交阵U和V
2. 对特征值分解后的对角矩阵的主对角线元素开方，获得奇异值并构造对角矩阵
3. 选取正确的超参数
4. 代入电极电压数据y，使用公式求得生物体截面的阻抗分布。