**对偶上升法**

**共轭函数**

对于原函数，其共轭函数为

其中，sup为上确界。为内积。若

1、x，y均为标量，有

2、x，y均为矢量，有

3、x，y均为矩阵，有

共轭函数表达式有几点需要注意：

1. x要属于可行域D
2. 上界存在

对于共轭函数，还可以把y看成是直线的斜率（二维），将其作为自变量，共轭函数其实就是在求在某一斜率y下的直线与原函数的差值的上确界，即最大值。也就是说，当y固定时，x取何值会使得直线与原函数的差值最大，这时一般通过对x求偏导求驻点来获得（y看成是常数）。

可得出

即当原函数的斜率与直线的斜率相等时，取得最大值。

举个简单的例子，考虑以下函数

其共轭函数必须要满足x属于可行域D及上界存在两个条件，易得，第一个条件必然成立，关键在于第二个条件是否成立。记

1. 当时，为减函数。由于也为减函数，所以上界取在处
2. 当时，为增函数，同样为增函数。考虑，即的增速要大于的增速，所以上界必然存在。

综上，的共轭函数存在。

求的共轭函数首先要求x在何处取得最大值，即有

将其代回共轭函数表达式有

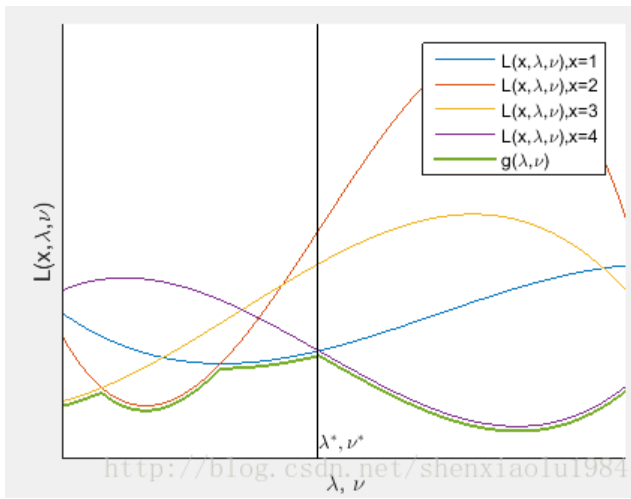
**拉格朗日函数与对偶函数**

考虑以下问题

其对应的拉格朗日函数为

对应的对偶函数为

其对偶函数与原函数可用下图解释



拉格朗日对偶函数可以看成是x取值固定时，各拉格朗日函数的下界。由约束条件易知

若要使等号成立，需满足KKT条件。上述关系也很容易从上图中看出来。

**对偶函数的共轭函数表示**

记等式约束条件为，不等式约束条件为。其中b，d，x均为向量，A，C均为矩阵。其拉格朗日对偶函数可写成

分离出与x有关的系数

其中，sup项即为共轭函数的表达形式，进一步简化可写为

**对偶问题**

要获得原问题的下界，可以转换为求对偶问题的上界。即

如上图，绿色线的最大值即对偶问题的最优解，是对于原问题的下界的最好估计。当对偶问题最优解存在，且满足KKT条件，即强对偶性成立，则对偶问题的最优解在数值上与原问题的最优解相等。即

所以，拉格朗日函数就为原问题与对偶问题的联系建立起了桥梁。

如果原问题求解复杂，可以先求解对偶问题，确定了一些拉格朗日量后，再求原问题。

1. 求的最大值得到
2. 求的最小值得到

**对偶上升法**

记迭代第k次获得原问题的解为，对偶问题的解为

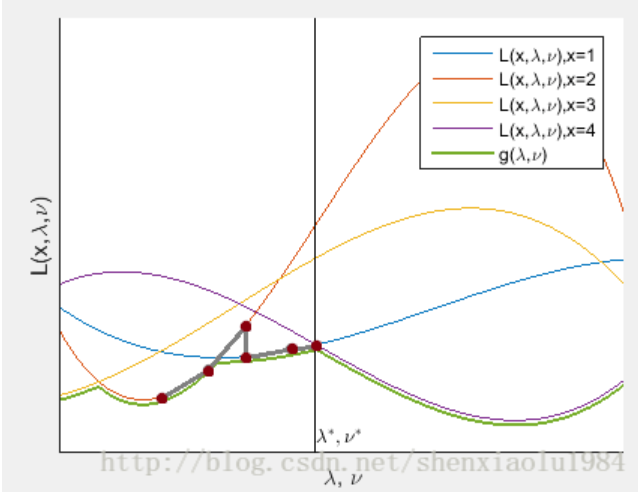
1. 假设为对偶问题在该次迭代中的最优解
2. 此时，我们需要获得原问题的最优解，有如下公式

如上图，均是常数，相当于确定了横轴。当x不同时，为不同的曲线，而最优解为在最下面的曲线。此时，令

1. 接下来要用到梯度上升法更新和，有

至此，为迭代一个周期。当最后得到的误差小于某个数值时，迭代停止，即可获得最优解的近似值。

使用对偶上升法的路径如图



可见，最优解为绿色线的最大值，而绿色线在所有其它颜色线的最下面。