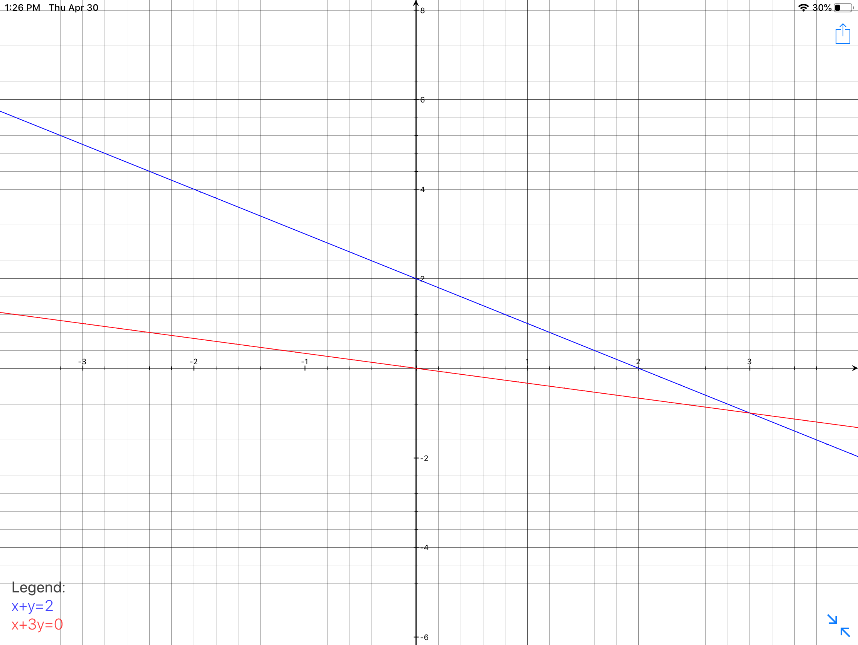
**原问题与对偶问题**

**二维线性规划**

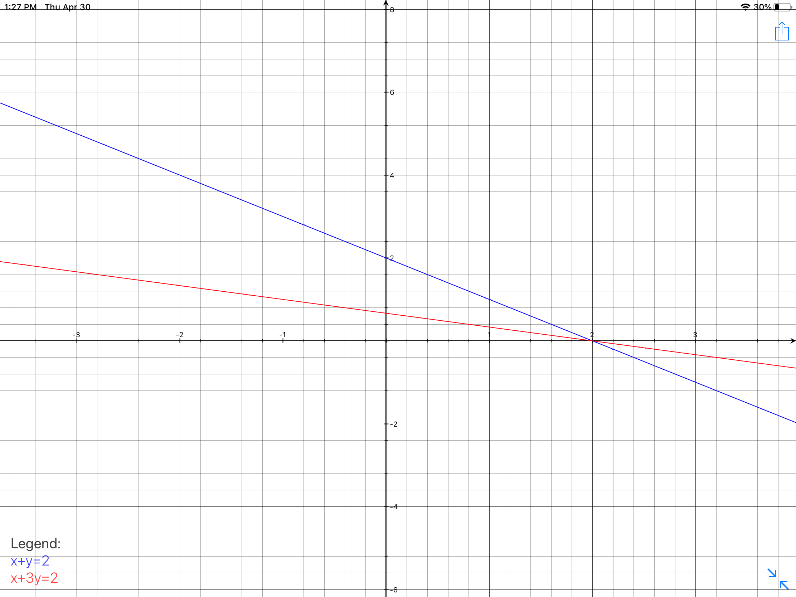
引例：考虑如下线性规划（LP）问题。在条件和的情况下，求取的最小值。

这是一个非常简单的二维线性规划问题，用数学语言进行描述则为

我们习惯上用图解法来获得该问题的解，有图



其中，蓝线以上与第一象限相交的区域即为可行域。目标函数为红线，可以通过移动红线，获得最优解。



可见，当红线过点（2,0）时，有最优解为2，此时，目标函数与可行域相切。

除此之外，还可以利用以下变换获得目标函数的最小值，这种变换的方法是推导对偶问题的基础。

即可获得最小值为2。

现考虑一种情况，目标函数不再为，而是一般情况，约束条件保持不变。有LP问题

使用上述变换方法，得到

只需令和，即可获得目标函数的最小值为2a。称2a为的下确界。注意，这里的a是我们引入的变量，我们需要将下确界最大化，才能逼近目标函数的最小值。由此，我们就将求目标函数的最小值转化为求2a的最大值。

转变后的问题就变为

这个问题就是原问题的对偶问题，总结就一句话，将求目标函数最小值的问题转变为求引入变量的最大值问题。

**高维空间的线性规划**

现将二维的线性规划推广至高维空间的线性规划。考虑以下问题

按照二维的思路，引入新的变量u和v。注意，u，v均为列向量。

与目标函数相比较，可以得出当符合条件

时，就可以得出目标函数的下确界为

这里有两个问题，一是为什么等式左右两边要同时加上一个负号，这是由于你要求的是最小值，即要保证取到最小，如果两边同时加上一个数，就不能保证是最优解。

第二个问题是向量与矩阵乘法的不直观表达。一般情况下，矩阵乘法要求左乘或右乘同一个矩阵才能保证等式成立，但要注意的是，这里的均为向量。考虑以下方程组

写成矩阵的表达形式有

即

其中

当我们在方程组中要乘以一个系数时，有

可以看出，上述方程组要写成矩阵形式，就有

很自然地得出

关于这一块的知识，回忆起学过的线性代数，好像并无涉及。虽然将方程展开，这样的乘法是显而易见的，但是用矩阵表达时，就会带来困惑。

**拉格朗日函数**

利用拉格朗日乘子法，构建拉格朗日函数

式中，。由于，所以第二项为0。由于而，所以第三项为一个负数。那么，则有

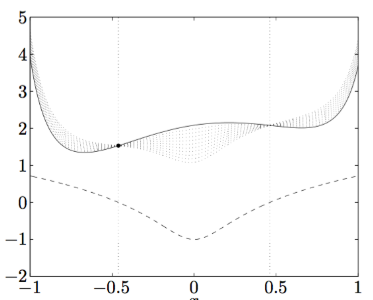
记C为原问题的可行域，为可行域中的最优解，那么，对于任意u和v，有下式成立

可见，函数里并没有包含变量x，是关于x的仿射函数，只要x的系数不为0，则该函数最小值为负无穷。所以，如果要保证原问题有最小解，必须要保证。此时，我们只要求的最大值即可。的一般表达形式为

现考虑一般的约束优化问题

该问题的拉格朗日函数为

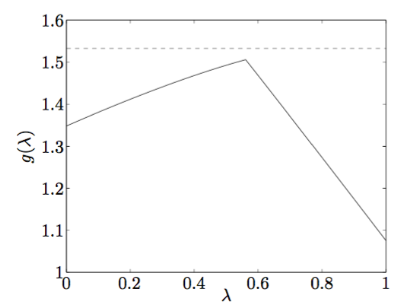
式中，。对于任意x，恒有成立。



在该图中，实线表示，虚线表示，可见，当区间为[-0.46,0.46]时，。也就是说在该区间内才满足约束条件。点线表示，在区间[-0.46,0.46]中，有。从该图中也可以看出来，无约束最优解并不在可行区间内。

设可行域为C，即上图中的[-0.46,0.46]。为最优解，下式恒成立

为拉格朗日对偶函数，其上确界为的下确界。求的最大值即可求得的逼近解。如下图所示



上图中，虚线为，实线为。

**通俗解释**

第一个问题：为什么要用到拉格朗日乘数法？

学过高等数学之后，求最值的最直接的方法就是求导求零点，即原函数的驻点。但是该点是在整个实数域中的极值，即是无约束条件下函数的极值。当我们约束了自变量的取值（定义域也算是一种约束），该函数的极值点可能就会不满足约束，就如上图所示，目标函数的最值并不在可行域内。也就是说，加上约束条件后，我们连函数长什么样都不知道。如果要使用同样的求导方法求取最值，就要用到拉格朗日乘数法。它能将带有多个约束条件的函数变成一个目标函数，通过对目标函数求驻点获得满足约束条件的原函数的极值。

第二个问题：如何理解强对偶性？

强对偶意味着原问题与对偶问题的最优解的数值相等。

关键在于这条式子

如何让中间两个大于等于号变成等于号。首先把这条式子展开，有

第二项为0，第三项小于等于0。此时，只需要让第三项等于0，拉格朗日函数在可行域内的最优解就为目标函数的最优解。而第二个大于等于号要变成等于号，就要满足，相当于最优解取在了边界条件上。试想一下，当最优解取在可行域的内部时，相当于是无效的，也就只剩下了等式约束。当最优解取在边界上时，这个约束就变成了，同样也变成了等式约束问题。

若上面两个等号同时成立时，的最大值即为目标函数的最优解，而使得上面两个等号同时成立的条件称为KKT条件，简单来说，就是拉格朗日函数求得极值的必要条件。