**牛顿迭代法**

牛顿迭代法又称为牛顿-拉夫逊方法（Newton-Raphson method），其目的是通过迭代求解方程的根。牛顿法的核心思想是在迭代点处利用泰勒公式对目标函数进行二次展开，求取二次函数的最小值作为新的迭代点。

**牛顿法原理**

假设为方程的根，初始值为离较近的点。作过点的切线L，L的表达式则为：

取切线与x轴的交点为，那么的取值为：

利用数学归纳法，可以推断出任意一个迭代点的表达式为：

上式即为牛顿迭代公式。

**牛顿法与最优化问题**

在最优化问题中，一般是使得目标函数取得极值的点作为最优解，例如最小二乘法就是使得均方误差最小，而极值点的必要条件是该点为驻点，即。记点为目标函数上的点，在该点处使用泰勒公式作二次展开

对上式求导得

令，可得迭代公式为

上式即为应用在最优化问题下得牛顿迭代公式。而在EIT问题中，自变量是一个多维的向量，需要使用高阶牛顿法。高阶牛顿迭代公式为

其中，为哈密顿算子，H为Hessian矩阵。

使用牛顿法求解步骤为

1. 设置误差，取初始点，并令
2. 计算，若时，迭代停止，其极小值点近似为，否则转向3
3. 计算，并使用迭代公式 计算下一个迭代点
4. 令，转2

**牛顿法优缺点**

对于像最小二乘法等以二次函数为目标函数的最优化问题，Hessian矩阵是一个常数矩阵，其收敛速度明显要比传统的梯度下降法快。

而使用牛顿法进行求解时，需要计算Hessian矩阵，当矩阵维度较多时，其计算相对复杂，计算时间比较长。当目标函数为非二次函数时，由于牛顿法的步长是恒定的，有可能会出现函数值上升的情况，即，而且，步长过大，或者初始点的选取距离其极小点太远，也可能会导致迭代序列发散，产生无解的情况。改进的方法是使用阻尼牛顿法。阻尼牛顿法相比于牛顿法改进的地方在于它可以改变迭代步长，即牛顿法只确定了迭代的方向，但步长固定，而阻尼牛顿法却可以沿着牛顿法的方向进行一维搜索，计算使得函数值最小步长，使得即使初始点远离极小值点，迭代序列也能够收敛。

阻尼牛顿法的步骤为

1. 设置误差，取初始点，并令
2. 计算，若时，迭代停止，其极小值点近似为，否则转向3
3. 计算，求与的比，
4. 沿进行一维线搜索，获得最优步长
5. 令，，转2

阻尼牛顿法使用了Armijo搜索来确定最优步长，所以应满足Armijo准则。记，令步长，迭代时，应满足：

**牛顿法的EIT应用**

将场域划分为M个有限元，记为第i个有限元的电导率，为电导率向量，，有

记为当电导率为时的电极电压，即真实值，为测量电压。那么EIT泛函可表示为

对其求导有

（1.10）

式中，即为雅可比矩阵。

使用NR法进行求解时，对应的迭代公式为

与高阶牛顿迭代公式对应，可以看出为海塞尔矩阵，有公式

由于相对于小很多，所以在实际计算中，会将海塞尔矩阵的第二项忽略掉，其公式为

（1.11）

对在处进行二阶泰勒展开，有

（1.12）

综合式（1.10）、（1.11）和（1.12）可求得NR法的步长为

在求取NR法的步长时，的条件数较大，具有较强的病态性，可以加入正则化技术，使得解稳定。其迭代步长变为

（1.13）

**一步牛顿法**

一步牛顿误差重构法（Newton’s One-Step Error Reconstructor，NOSER）是一种快速成像的EIT图像重建算法，从名字可以看出来它依然属于牛顿类算法，但是相比于牛顿法需要迭代，NOSER只需要一步就可以获得稳定解。

NOSER的基本假设是在初始情况下，人为设定的电导率分布与真实的电导率分布误差很小，那么使用牛顿法将会快速收敛，换句话说就是几乎不需要迭代就可以获得稳定解。牛顿法的收敛速度类似于反比例函数，在迭代的初期会很快，但随着迭代次数增加，收敛速度会越来越慢，直至获得稳定解。NOSER的主要思想是只执行收敛速度快的那部分算法，而放弃执行收敛速度慢的部分，即减少迭代次数。虽然获得的解没有迭代法稳定，但是在NOSER的基本假设的前提下，该解与迭代法的解应该是非常接近。虽然牺牲了精度，但是我们获得的收益是算法不需要迭代，从而极大地加快图像重建的速度。总的来说，NOSER就是一种用精度换取运算时间的算法。

在实际的EIT问题中，由于我们使用的是动态成像，所以并不需要获得场域内精确的电导率分布，而是要获得两帧图像之间的差异。另外，EIT系统是一个实时系统，如果从电极电位到场域内的电导率的转换带有迟滞性，那么会对医生的诊断造成影响。对此，成像速度就显得比较重要。

设场域中每一个有限元的电导率均为，那么初始条件就可设为

式中，。对于每一次测量，假设以下条件

1. 激励电流的频率，幅值一致
2. 刺激、测量模式一致
3. 有限元模型一致
4. 电导率分布均匀

基于以上假设，以下公式成立

那么，目标泛函则可以表示为

对c求导有

令上式为0，可使目标泛函求得最小值。由于一般不为0，所以有

使用广义逆理论，可求得r的表达式为

（1.14）

要知道电导率分布的初始值，就要求得参数的值。而r的值可由式（1.14）求得。式（1.14）唯一的未知量是，即场域内所有有限元的电导率为1时电极上的电压值。在NOSER中，式（1.13）中的为。与Thikonov 正则化相比，NOSER的正则化矩阵为对角阵，即取主对角线元素作为惩罚项。