

组合数学 (3&7&11)

2019.12.18

第三次作业

2.9 (1) 从整数1, 2, ..., 100中选出两个数, 使得它们的差正好是7, 有多少种不同的选法?

(2) 如果要求选出的两个数之差小于等于7, 又有多少种不同的选法?

(1) 第一个数选择 n , 则第二个数只能选 $n+7$, 共93种选法。

(2) 选出的两个数之差小于等于7 : 93种选法;

选出的两个数之差小于等于6 : 94种选法;

选出的两个数之差小于等于5 : 95种选法;

选出的两个数之差小于等于4 : 96种选法;

选出的两个数之差小于等于3 : 97种选法;

选出的两个数之差小于等于2 : 98种选法;

选出的两个数之差小于等于1 : 99种选法;

共672种选法。

2.13 求(0, 0)到(n, n)不穿过对角线的非降格路径数?

定义向右走为1，向上走为0，则(0, 0)到(n, n)的非降格路径数为一个01序列

满足条件的序列可分为两类：

- (1) 任何时刻，1的数量 \geq 0的数量（一直在对角线的下方走）
- (2) 任何时刻，1的数量 \leq 0的数量（一直在对角线的上方走）

两类序列的数量相等，下面仅求第一类序列的数量：

定义三个集合：

- (1) 集合A：n个0，n个1组成的序列，集合大小为 C_{2n}^n
- (2) 集合B：n个0，n个1组成的序列，

且该序列存在某个时刻，0的数量 $>$ 1数量

$|A| - |B|$ 即为第一类序列的数量

- (3) 集合C：n+1个0，n-1个1组成的序列，集合大小为 C_{2n}^{n-1}

下面证明集合**B**与集合**C**的大小相等：

任取 **B** 中的一个元素， $b = 1010001\dots011$

1010001...011



第一次出现, 0的数量>1的数量

10100|01...011

不变



反转



得到一个新序列 c : 10100 10...100

c 中有 $n-1$ 个1 和 $n+1$ 个0, 所以, $c \in C$

所以, **B**中任何一个元素都可以唯一地映射到**C**中的一个元素

任取 **C** 中的一个元素, $c_0 = 10011\dots011$, 必然存在某一个时刻0的数量比1多
 c_0 中, 第一次出现0比1多的位置之后的01进行反转, 必然得到一个**B**中的元素

所以, **C**中任何一个元素都可以唯一地映射到**B**中的一个元素

所以集合A与集合B的大小相等

$$|B| = |C| = C_{2n}^{n-1}$$

$$\text{第一类路径数量} = |A| - |B| = C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1}$$

$$\text{总的路径数量} = 2 * (|A| - |B|) = 2 * (C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1}) = 2 * C_{2n}^n / (n + 1)$$

物理含义：第一次出现，0的数量>1的数量，表示从对角线下方走的时候第一次接触到 $y=x+1$ 的直线，将后面的序列都反转表示，第一次接触到 $y=x+1$ 后，将后续的线路沿着 $y=x+1$ 对折，则集合 C 表示，从 $(0,0)$ 到 $(n-1,n+1)$ 的非降格路径数。

2. 23 5封不同的信通过通信信道传输，两封信之间至少放入3个空格，一共加入15个空格，求方法数？

Step1. 确定5封信的发送顺序， $5!$

Step2. 15个空格插入到4个间隔中

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15, \quad x_i \geq 3$$

$$\text{等价于 } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \quad x_i \geq 0$$

$$\text{上式的非负整数解的数量 } C_{4+3-1}^3 = C_6^3$$

综上， $5! * C_6^3$

3.3 证明:

(2) 设 n 为正整数, 则

$$1 + \frac{1}{2} \binom{n}{1} + \frac{1}{3} \binom{n}{2} + \frac{1}{4} \binom{n}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1} \binom{n}{n} = \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1).$$

(2) 等式左边

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n+1} \left[(n+1) \binom{n}{0} + \frac{n+1}{2} \binom{n}{1} + \frac{n+1}{3} \binom{n}{2} + \cdots + \frac{n+1}{n+1} \binom{n}{n} \right] \\ &= \frac{1}{n+1} \left[\binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} + \cdots + \binom{n+1}{n+1} \right] \\ &= \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1). \end{aligned}$$

3.4 给出

$$\begin{aligned} & \binom{n}{m} \binom{r}{0} + \binom{n-1}{m-1} \binom{r+1}{1} + \binom{n-2}{m-2} \binom{r+2}{2} + \cdots + \binom{n-m}{0} \binom{r+m}{m} \\ &= \binom{n+r+1}{m} \end{aligned}$$

的组合意义。

4. 等式右边相当于从 $(0,0)$ 到 $(m, n-m+r+1)$ 点的非降路径数，可以将这些路径分为如下 $m+1$ 类：第 i ($i=1, 2, \dots, m$) 类路径是从 $(0,0)$ 点到 $(m-i, n-m)$ 点，然后到 $(m-i, n-m+1)$ 点，最后到 $(m, n-m+r+1)$ 点，路径数为 $\binom{n-i}{m-i} \binom{r+i}{i}$ 。由加法原则，得等式成立。

第七次作业

4. 25 5名旅客 P_1, P_2, \dots, P_5 要去5个地方 C_1, C_1, \dots, C_5 , 其中 P_1 不愿意 C_1, C_3 ; P_2 不愿意 C_4 ; P_3 不愿意 C_2, C_5 ; P_4 不愿意 C_2 ; P_5 不愿意 C_1, C_3 。问 P_1 去 C_5 的概率有多少?

本题棋盘如图 1 所示, 将其变换后如图 2 所示

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
P_1					
P_2					
P_3			B		
P_4					
P_5					

图1

	C_1	C_3	C_2	C_5	C_4
P_1	B_1				
P_5					
P_3			B_2		
P_4					
P_2					B_3

图2

则

$$R(x, B_1) = 1 + 4x + 2x^2, R(x, B_2) = 1 + 3x + 2x^2, R(x, B_3) = 1 + x.$$

$$R(x, B) = R(x, B_1) \cdot R(x, B_2) \cdot R(x, B_3)$$

$$= 1 + 8x + 22x^2 + 25x^3 + 12x^4 + 2x^5.$$

所以 5 名旅客去 5 个地方的所有方法数为

$$N(0) = 5! - 8 \cdot 4! + 22 \cdot 3! - 25 \cdot 2! + 12 \cdot 1! + 2 \cdot 0! = 20.$$

如果 P_1 去 C_5 ，原棋盘变为 B' ，如图 3 所示，将其变换后如图 4 所示。

	C_1	C_2	C_3	C_4
P_2				
P_3			B'	
P_4				
P_5				

图3

	C_1	C_3	C_2	C_4
P_2				B'_3
P_3			B'_2	
P_4				
P_5	B'_1			

图4

则

$$R(x, B'_1) = 1 + 2x, R(x, B'_2) = 1 + 2x, R(x, B'_3) = 1 + x.$$

$$R(x, B') = R(x, B'_1) \cdot R(x, B'_2) \cdot R(x, B'_3)$$

$$= 1 + 5x + 8x^2 + 4x^3.$$

所以已知 P_1 去 C_5 ，5 名旅客去 5 个地方的所有方法数为

$$N'(0) = 4! - 5 \cdot 3! + 8 \cdot 2! - 4 \cdot 1! + 0 \cdot 0! = 6.$$

综上所述， P_1 去 C_5 的概率为 $\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$ 。

4. 29 一部由1楼上升到10楼的电梯内共有 n 个乘客，该电梯从5楼开始每层都停，以便让乘客决定是否离开电梯。
- (1) 求 n 个乘客离开电梯的不同方法的种数。
- (2) 求每层楼都有人离开电梯的不同方法的种数。

(1) 6^n 。

(2) 设 S 为全部方法集合， P_i : 第 i 层没有人下， $i = 5, 6, \dots, 10$

则所求为 $N(0) = |S| - \sum N(P_i) + \sum N(P_i, P_j) - \dots$

$$\text{得 } N(0) = 6^n - C_6^1 5^n + C_6^2 4^n - C_6^3 3^n + C_6^4 2^n - C_6^5 1^n + C_6^6 0^n$$

5.1 求下列序列的生成函数:

(3) $0, 1 \cdot 3, 2 \cdot 4, \dots, n(n+2), \dots;$

$$G\{n(n+2)\} = G\{n(n+1)\} + G\{n\}$$

$$= \frac{2x}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{3x-x^2}{(1-x)^3}$$

5.2 利用生成函数计算下列和式:

$$(2) 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \cdots + n(n+2);$$

$$\text{由上题可知 } G\{n(n+2)\} = \frac{3x-x^2}{(1-x)^3}$$

$$\begin{aligned}\text{故 } G\{\sum_k^n k(k+2)\} &= \frac{3x-x^2}{(1-x)^4} \\ &= (3x-x^2) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+3}{n} x^n\end{aligned}$$

其中 x^n 的系数为所求和:

$$\begin{aligned}3 \cdot \binom{n+2}{n-1} - \binom{n+1}{n-2} &= \frac{n(n+1)(n+2)}{2} - \frac{(n-1)n(n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}\end{aligned}$$

第十一次作业

6. 11 $1 \times n$ 棋盘用红、白、蓝三种颜色着色，不允许相邻两格都着红色，求着色方案数满足的递推关系，并求出着色方案数。

11.若第一格着红色，则第二格只能着白色或蓝色，设余下 $n-2$ 个格的涂色方法数为 $f(n-2)$ 。若第一格不着红色，则或着白色或着蓝色，余下 $n-1$ 个格的涂色方法数为 $f(n-1)$ 。又当 $n=1$ 时， $f(1)=3$ 。定义 $f(0)=1$ 。

$$\therefore f(n) = 2f(n-1) + 2f(n-2) \quad f(0) = 1, f(1) = 3,$$

$$\text{解得 } f(n) = \frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^n + \frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}}(1-\sqrt{3})^n$$

6.13 从1到 n 的自然数中选取 k 个不同且不相邻的数，设此选取的方案数为 $f(n, k)$ 。

(1) 求 $f(n, k)$ 满足的递推关系；

(2) 用归纳法求 $f(n, k)$ ；

(3) 若设1与 n 算是相邻的数，并在此假定下从1到 n 的自然数中选取 k 个不同且不相邻的数的方案数为 $g(n, k)$ ，试利用 $f(n, k)$ 求 $g(n, k)$ 。

(1) 若 n 在这 k 个数中，则其余 $k - 1$ 个数从 $1, 2, \dots, n - 2$ 中选，方案数为 $f(n - 2, k - 1)$ ；

若 n 不在这 k 个数中，则其余 $k - 1$ 个数从 $1, 2, \dots, n - 1$ 中选，方案数为 $f(n - 1, k)$ 。

综上所述， $f(n, k)$ 满足的递推关系为：

$$f(n, k) = f(n - 1, k) + f(n - 2, k - 1)$$

(2)对 $n \geq 1$, $f(n, 1) = n = \binom{n+1-1}{1}$;

对 $n \geq 2$, $f(n, n) = n = \binom{n+1-n}{n}$ 。

假设对于 $i \leq j \leq n$, $f(j, i) = \binom{j+1-i}{i}$ 成立, 则

$$\begin{aligned} f(n+1, k) &= f(n, k) + f(n-1, k-1) \\ &= \binom{n+1-k}{k} + \binom{n-1+1-(k-1)}{k-1} \\ &= \binom{(n+1)+1-k}{k}. \end{aligned}$$

所以

$$f(n, k) = \binom{n+1-k}{k}.$$

(3) 若 n 在这 k 个数中, 则其余 $k - 1$ 个数从 $2, 3, \dots, n - 2$ 中选, 方案数为 $f(n - 3, k - 1)$; 若 n 不在这 k 个数中, 则其余 $k - 1$ 个数从 $1, 2, \dots, n - 1$ 中选, 方案数为 $f(n - 1, k)$ 。则

$$\begin{aligned} g(n) &= f(n - 1, k) + f(n - 3, k - 1) \\ &= \binom{n - k}{k} + \binom{n - k - 1}{k - 1}. \end{aligned}$$

6.14 利用生成函数求解下列递推关系:

$$(1) \begin{cases} f(n) = 4f(n-2), \\ f(0) = 0, f(1) = 1; \end{cases}$$

$$\text{令 } A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n$$

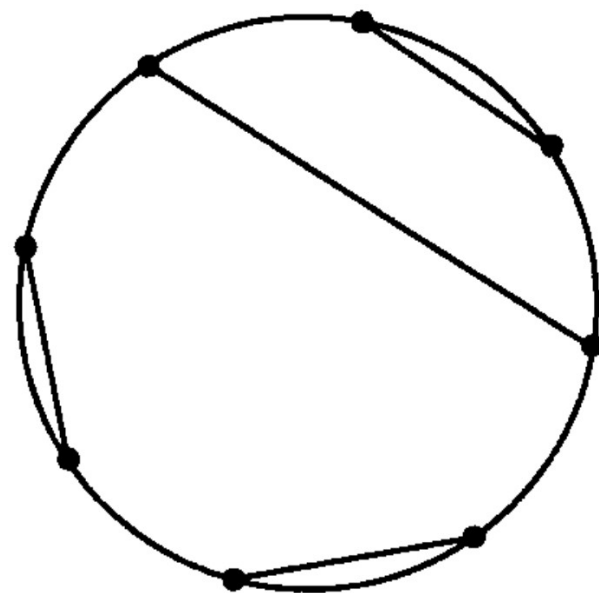
$$\begin{aligned} \text{则 } A(x) - f(0) - f(1)x &= \sum_{n=2}^{\infty} f(n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} f(n+2)x^{n+2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 4f(n)x^{n+2} = 4x^2 \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n \\ &= 4x^2 A(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow A(x) &= \frac{x}{1-4x^2} = \frac{x}{(1-2x)(1+2x)} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(1-2x)} - \frac{1}{(1+2x)} \right] \\ &= \frac{1}{4} (\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4} [2^n - (-2)^n] x^n \end{aligned}$$

$$\rightarrow f(n) = \frac{1}{4} [2^n - (-2)^n]$$

7.4 $2n$ 个点均匀分布在一个圆周上，我们要用 n 条不相交的弦将这 $2n$ 个点配成 n 对，证明不同的配对方法数是第 $n+1$ 个

Catalan $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ 。例如，本题图就给出了8个点的一种配对方案。



习题 4 图

4. 设不同的配对方法数为 $f(n)$, 将这 $2n$ 个点分别用 $1, 2, \dots, 2n$ 标记。取点 1 , 再任取一偶数点 $2k$, 连接点 1 与点 $2k$, 则该弦将圆分成两部分 K_1 和 K_2 。对 K_1 , 有 $k-1$ 对点, 故不同的配对方法数为 $f(k-1)$; 对 K_2 , 有 $n-k$ 对点, 故不同的配对方法数为 $f(n-k)$ 。则

$$\begin{cases} f(n) = \sum_{k=1}^n f(k-1)f(n-k) \quad (n \geq 1), \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

令 $g(n) = f(n-1)$, 则

$$g(n+1) = f(n) = \sum_{k=1}^n g(k)g(n-k+1) = h(n+1) = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

即不同的配对方法数为第 $n+1$ 个 Catalan 数 $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ 。