组合数学

第1，4，9次作业

第1次作业

P22 1.2 任取11个整数，求证其中至少有两个数，它们的差是10的倍数。

解：

对于任意一个数来说，其对10取余的结果只能是0~9之间的一个数，即任意一数n可写成$n = k * 10 + r$，其中r为余数且$0 \leq r < 10$

若任取11个数，由鸽巢原理知，必有2个数的余数相同，设为n_1和n_2，此时这两个数的差值为$n_1 - n_2 = k_1 * 10 + r_1 - k_2 * 10 + r_1 = (k_1 - k_2) * 10$。

综上，上述命题得证。

P22 1.4 在1.1节例4中，证明存在连续的一些天，棋手恰好下来k盘棋（k=1,2…,21）。问是否可能存在连续的一些天，棋手恰好下了22盘棋?

解:

（1）设b_i表示第i天下棋的盘数，a_i表示前i天下棋的总盘数，即$\mathrm{a}_i = \sum_{k=1}^{i} b_k$

依题意，有 $\{1 \le \mathrm{a}_1 < \mathrm{a}_2 < \cdots < \mathrm{a}_{77} \le 12 * 11 = 132\}$

当$1 \le \mathrm{k} \le 21$时，考虑数列$\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \dots, \mathrm{a}_{77}, \mathrm{a}_1 + \mathrm{k}, \mathrm{a}_2 + k, \dots, \mathrm{a}_{77} + k$，它们都在$1 \sim 132 + k$之间，共154项。据鸽巢原理，必有两项相等

由于$\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \dots, \mathrm{a}_{77}$这77项互不相等，且$\mathrm{a}_1 + 22, \mathrm{a}_2 + 22, \dots, \mathrm{a}_{77} + 22$也互不相等，故一定存在$1 \le \mathrm{i} < j \le 77$使得$\mathrm{a}_{\mathrm{j}} = \mathrm{a}_i + k$，即从第i +1天到第$j$天这连续的$j - i$天中棋手刚好下了$k$盘棋。

综上，存在连续的一些天，棋手恰好下了k盘棋

（2）可能存在连续的一些天，棋手恰好下了22盘棋，比如该棋手每天下一盘棋。

P22 1.6 从1,2,...,200中任取100个整数，其中之一小于16，那么必有两个数，一个能被另一个整除。

解：

任意一数都可唯一写成$2^{p_n} * r_n$ $(p_n, r_n \in Z; r_n \equiv 1(mod\ 2))$，即整数可以表示为其因式分解中2的最高次幂和一个奇数的乘积

按照r_n划分1~200这200个数，有

$A_1 = \{2^0 * 1, 2^1 * 1, \dots 2^7 * 1\};$

$A_3 = \{2^0 * 3, 2^1 * 3, \dots 2^6 * 3\};$

...

$A_{2k+1} = \{2^0 * (2k+1), 2^1 * (2k+1), \dots\};$

...

$A_{199} = \{2^0 * 199\};$ 共100个集合

假设题中这100个数中，任意两个数不能整除，根据鸽巢原理，这100个数应分别来自100个集合，设取出的100个数为：

$b_1 = 2^{p_1} * 1; b_3 = 2^{p_3} * 3; \dots; b_{199} = 2^{p_{199}} * 199;$ 其中b_i为A_i中的一个数

同时由题意设$b_i < 16$，则$b_i = 2^{p_i} * i < 16$

则$b_{3i} = 2^{p_{3i}} * 3i$，则$\frac{b_{3i}}{b_i} = 3 * 2^{p_{3i} - p_i}$

据前述假设，这100个数中任意两个不能被整除，即b_i和b_{3i}互不整除，则有$p_{3i} \le p_i - 1$，所以$b_{3i} = 2^{p_{3i}} * 3i \le 2^{p_i - 1} * 3i = \frac{3}{2} b_i$

因为$b_i < 16$，所以$b_{3i} < 24, b_{9i} < 36, \dots, b_{81i} < 81$；又因为$b_{81i} = 2^{p_{81i}} * 81i \ge 81$，与前述结论矛盾。综上，命题得证。

P22 1.9 在坐标平面上任意给定13个整点（即两个坐标均为整数的点），任意三点不共线，则必有一个以它们中的三个点为顶点的三角形，其重心也是整点。

解：

（1）对这13个整点的横坐标对3取模，可得到如下分类：

$X_0 = \{(x,y)|x \bmod 3 = 0\};$

$X_1 = \{(x,y)|x \bmod 3 = 1\};$

$X_2 = \{(x,y)|x \bmod 3 = 2\};$

由鸽巢原理知，必有5个点的横坐标在同一集合中。对于这5个点，任取其3，它们的横坐标和必是3的整数倍

（2）再考虑这5个点的纵坐标对3取模，可得到如下分类：

$Y_0 = \{(x,y)|y \bmod 3 = 0\};$

$Y_1 = \{(x,y)|y \bmod 3 = 1\};$

$Y_2 = \{(x,y)|y \bmod 3 = 2\};$

若Y_0、Y_1、Y_2这3个值均可取到，从这3类的每类中任取1点，则取出的3点纵坐标也为3的整数倍，此时这3点的横纵坐标和均为3的整数倍，满足题意。

若Y_0、Y_1、Y_2三类中只存在两类或一类，根据鸽巢原理，必有三点位于同一类中，此时这3个点也满足题意。

综上，命题得证。

P23 1.15 从1,2,…,2n中任选n+1个整数，则其中必有两个数，它们的最大公因子为1。

解：

将1,2,…,2n按照从小到大的顺序每2个数分为一组，得到{1,2},{3,4},…,{2n-1,2n}共n组，每组中两个数的最大公因子为1

从划分的n组中任选n+1个数，根据鸽巢原理，必有2个数来自同一组，所以从1,2,…,2n中任选n+1个数时必有两个数其最大公因子为1。

P48 2.3 12个人围坐在圆桌旁，其中一个拒绝与另一个相邻，问有多少种安排方法?

解:

（1）12个人围坐在圆桌旁，共有$\frac{1}{12}P(12,12) = 11!$种安排方法

（2）12个人围坐在圆桌旁，并且某人与另一个人一定相邻，共有$\frac{1}{11}P(11,11) * 2 = 2 * 10!$种安排方法

因此，12人围坐在圆桌旁，其中一个拒绝与另一个相邻时，共有$11! - 2 * 10!$种安排方法

P48

4. 有颜色不同的四盏灯.

(1) 把它们按不同的次序全部挂在灯竿上表示信号,共有多少种不同的信号?

(2) 每次使用一盏、二盏、三盏或四盏灯按一定的次序挂在灯竿上表示信号,共有多少种不同的信号?

(3) 在(2)中,如果信号与灯的次序无关,共有多少种不同的信号?

解:

(1) 共有$P(4,4)=24$种

(2) 每次使用一盏灯,可表示4种信号;
每次使用二盏灯,可表示$P(4,2)=12$种信号;
每次使用三盏灯,可表示$P(4,3)=24$种信号;
每次使用四盏灯,可表示$P(4,4)=24$种信号
综上,共有$4+12+24+24=64$种信号

(3) 若信号与灯的次序无关,结果如下:
每次使用一盏灯,可表示$\binom{4}{1}=4$种信号;
每次使用二盏灯,可表示$\binom{4}{2}=6$种信号;
每次使用三盏灯,可表示$\binom{4}{3}=4$种信号;
每次使用四盏灯,可表示$\binom{4}{4}=1$种信号
综上,共有$4+6+4+1=15$种信号

P49 2.7 8个棋子大小相同，其中5个红的，3个蓝的。把它们放在8x8的棋盘上，每行、每列只放一个，问有多少种方法？若放在12x12的棋盘上，结果如何？

解：

（1）8x8棋盘：$\binom{8}{3} * P(8,5) * 3! = 2257920$种

（2） 12x12棋盘： （方法一） $\binom{12}{5} * P(12,5) * \binom{7}{3} * P(7,3)$种

（方法二） $\binom{12}{8} * \binom{12}{8} * 8! * \frac{8!}{5!3!}$种

解：我们先放红色的.

（1）在 8 行中任选 5 行放红色棋子，有$\binom{8}{5}$种选择.

（2）选定行后，再选列. 因为每行都不同，故有 $P(8, 5)$种选择.

现在再放蓝色的棋子. 还剩 3 行、3 列，而每个棋子都是相同的，故可把第 1 个棋子放在剩下的第 1 行，3 列可选；第 2 个棋子放第 2 行，两列可选；第 3 个棋子则只剩下 1 行 1 列可选. 于是，有 3!种方案.

根据乘法原理，共有$\binom{8}{5} \times P(8, 5) \times 3!$种放法.

(2) 从 12 行中选出 8 行，有$\binom{12}{8}$种。从 12 列中选出 8 列，有$\binom{12}{8}$种。在所选出的行和列所形成的方格上放这些车，有 $8!\frac{8!}{5!3!}$种结果，故此时总的放法数是

$$\binom{12}{8}\binom{12}{8}8!\frac{8!}{5!3!}$$

P49 2.13 计数从(0, 0)点到(n, n)点的不穿过直线y=x的非降路径数。

解:

设向右走记为1，向上走记为0，则从（0,0）到（n,n）的非降路径数为一个01序列。则不穿过y=x的非降路径数可以分为两类。

（1）任何时刻，1的数量≥0的数量，即在对角线下方

（2）任何时刻，0的数量≥1的数量，即在对角线上方

定义集合A为n个0和n个1组成的序列，集合大小为C_{2n}^{n}。

定义集合B为n个0和n个1组成的序列，且在某个时刻，0的数量大于1的数量。

所以，|A|-|B|即为第（1）类序列的数量。

下面求解集合B的大小。

第一次出现0的数量大于1的数量，设此时0的个数为m个，1的个数为m-1个，由于最后0和1的个数均为n个。所以该时刻后，0的个数为n-m个，1的个数为(n-m+1)个。

对该时刻后的0和1的序列进行翻转，则翻转后，0的个数为n-m+1个，1的个数为n-m个。所以0的个数共有n+1个，1的个数为n-1个。

所以，$|B|=C_{2n}^{n-1}$，则第（1）类序列的数量为$C_{2n}^{n}-C_{2\mathrm{n}}^{n-1}=\frac{C_{2\mathrm{n}}^{n}}{n+1}$。

所以，满足条件的序列数为$2\times\frac{C_{2\mathrm{n}}^{n}}{n+1}$。

第4次作业

P103 4.17 一书架有m层，分别放置m类不同种类的数，每层n册。现将书架上的图书全部取出清理，清理过程中要求不打乱图书所在的类别，试问：

（1）m类图书全不在各自原来层次上的方案数有多少？

（2）每层的n本书都不在原来位置上的方案数有多少？

解：

（1）m层的错排数为：$D_m = m!\,[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^m \frac{1}{m!}]$

每层的n册书进行全排列，有$n!$种；共m层，所以共有$(n!)^m$种。

综上， m类图书全不在各自原来层次上的方案数有$(n!)^m \cdot D_m$种。

（2）先在m层中任取k层进行错排，对该k层中的书进行全排列。剩下的(m-k)层中对应原层不变，对每层中的n本书要进行错排。

所以，每层的n本书都不在原来位置上的方案数为：

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \cdot (n!)^k \cdot D_k \cdot (D_n)^{m-k}$$

注：第（2）问，很多同学的答案是$\sum_{k=2}^{m} \binom{m}{k} \cdot (n!)^k \cdot D_k \cdot (D_n)^{m-k}$，这里忽略了只有层内错排无层间错排的情况，即缺少 $(D_n)^m$ 这一项。此外，D_0 =1

P103 4.19 试求由$\sum_{d|n} g(d) = 5$所定义的函数$g(n)$。

解:

令$f(n) = \sum_{d|n} g(d) = 5$，根据Möbius反演定理，有:

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right) = 5 \sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 5, n = 1 \\ 0, n > 1 \end{cases}$$

P105 4.29 一部由1楼上升到10楼的电梯内共有n个乘客，该电梯从5楼开始每层都停，以便让乘客决定是否离开电梯。

（1）求n个乘客离开电梯的不同方法的种数。

（2）求每层楼都有人离开电梯的不同方法和种数。

解：

（1）每种乘客有6种选择，共6^n。

（2）设集合$\mathrm{A}_i(i=1,2,3,4,5,6)$表示**没有**乘客从第$(4+i)$层离开电梯的不同方法的集合，则$|\mathrm{A}_i|=5^n$。对于任意$k\in\{1,2,3,4,5,6\}$，有

$\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_\mathrm{k}}\right|=(6-k)^n$，该式表示没有乘客从$(4+1)$~$(4+k)$层离开电梯。

由容斥原理得，

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_6}|=6^n-\binom{6}{1}5^n+\binom{6}{2}4^n-\cdots+\binom{6}{4}2^n-\binom{6}{5}1^n$$

P137 5.2（2） 利用生成函数计算和式：$1\cdot 3+2\cdot 4+\cdots+n(n+2)$。

解：

记数列$\{n(n+2)\}$ 为a_n，其中$a_k=k(k+2)$，则生成函数为：

$$A(x)=G\{k(k+2)\}=G\{k(k+1)\}+G\{k\}$$

$$=\frac{2x}{(1-x)^3}+a_n=\frac{2x+x(1-x)}{(1-x)^3}$$

$$=\frac{3x-x^2}{(1-x)^3}$$

设数列$\{b_n\}$满足$b_n=\sum_{i=0}^{n}a_i$，则由课本5.3节性质3得到$\{b_n\}$的生成函数为：

$$B_x=\frac{A(x)}{1-x}=\frac{3x-x^2}{(1-x)^4}=(3x-x^2)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+3}{k}x^k$$

则x^n的系数为：

$$3\binom{n+2}{n-1}-\binom{n+1}{n-2}=3\times\frac{(n+2)(n+1)n}{6}-\frac{(n+1)n(n-1)}{6}$$

$$=\frac{(n+1)n[(3n+6)-(n-1)]}{6}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$$

P138 5.5 由字母a,b,c,d,e组成的长为n的字中，要求a与b的个数之和为偶数，问这样的字有多少个？

思路：

（1）排列问题，考虑使用指数型生成函数。

（2）个数之和为偶数，意为a、b的个数均为偶数或者均为奇数。

解： 指数型生成函数为：

$$\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^2\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^3$$ （均为奇数）

$$+\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^2\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^3$$ （均为偶数）

$$=\left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]^2 e^{x^3}+\left[\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right]^2 e^{x^3}$$

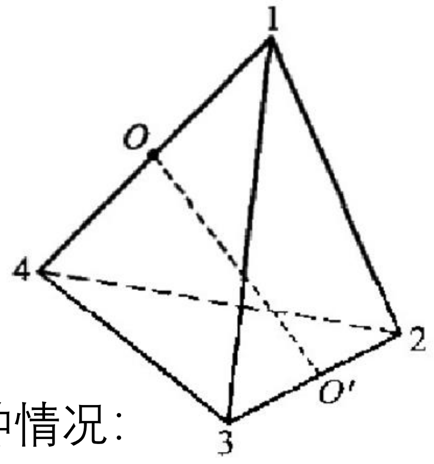
$$=e^{3x}\cdot\left(\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}\right]^2 e^{x^3}=\frac{1}{2}\left(e^{5x}+e^{x}\right)$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(5^i+1\right)\frac{x^i}{i!}$$

则$\frac{x^n}{n!}$的系数为$\frac{1}{2}(5^n+1)$

第9次作业

P234 8.2 求正四面体关于顶点集合{1,2,3,4}的置换群。



解:

如图所示，将正四面体顶点标记。

（1）对正四面体不旋转，则为恒等置换$\sigma_I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

此时为1^4型置换，共1个

（2）以顶点$i(i = 1,2,3,4)$和相对面中点连线为轴旋转，有两种情况:

- 旋转$120°$，假设顶点为1，则对应置换为1(234)
- 旋转$240°$，假设顶点为1，则对应置换为1(243)

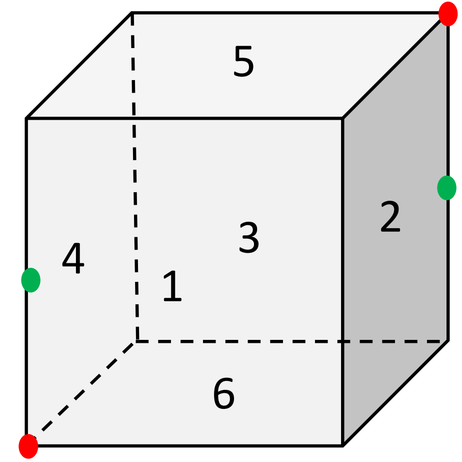
共有4个顶点对应4组，故$1^1 3^1$型置换共有2*4=8个

（3）以对边中点（或者相对棱）连线（例如图中的OO'）为轴旋转$180°$的置换。如相对棱为(14)和(23)，则对应置换为(23)(14)。由于共有3组相对棱，所以2^2置换共有3个。

综上，共12个置换构成置换群。

注：务必指出旋转多少度。

补充题 求P207 例7种的6次24阶置换群（参考P205 例4）



前、右、后、左、上、下的编号分别为1,2,3,4,5,6,

解:

如右图:

（1）不旋转，则为恒等置换$\sigma_I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

（2）以相对面面中心连线为轴旋转90°，180°，270°，假设以上下面中心连线为轴旋转90°，180°，270°，对应置换分别为：(1234)56，(13)(24)56和(1432)56

共有3个面中心连线轴，故$4^1 1^2$型置换共有2*3=6个，$2^2 1^2$型置换有3个。

（3）以相对面顶点连线为轴旋转120°或240°。假设以左前下顶点与右后上定点为轴（图中红色顶点），则对应置换为(523)(164)和(532)(146)

共有4个相对面顶点连线轴，故3^2型置换共有2*4=8个。

（4）以相对面边中点连线为轴旋转180°。假设以左前边中点和右后边中点连线（图中绿色点）为轴旋转180°，则对应置换为(14)(23)(56)

共有6个相对面重点连线轴，故2^3型置换共有6个。

综上，共有1+9+8+6=24个置换构成置换群。

注：很多同学在作业中直接写旋转90°，180°，270°可以得到(1234)，(13)(24)，(1432)，但是没有写以哪个面中心连线得到，作业中未判错，但是考试中这样写会扣分。不指出旋转多少度考试中也会扣分

P234 8.1 计算(123)(234)(5)(14)(23)，并指出它所在的共轭类？

解：

$$
\begin{aligned}
(123)(234)(5)(14)(23) &= \begin{array}{c} \text{②}\downarrow\ \text{②}\downarrow\ \text{②}\downarrow\ \text{②}\downarrow\ \text{②}\downarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \text{①}\downarrow\ \text{①}\downarrow\ \text{①}\downarrow\ \text{①}\downarrow\ \text{①}\downarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \end{array} (5)(14)(23) \\
&= \begin{array}{c} \text{③}\downarrow\ \text{③}\downarrow\ \text{③}\downarrow\ \text{③}\downarrow\ \text{③}\downarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} (14)(23) \\
&= \begin{array}{ccccc} \text{②}\downarrow & & & \text{②}\downarrow & \\ \multicolumn{5}{c}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}} \end{array} \begin{array}{ccccc} \text{①}\downarrow & & & \text{①}\downarrow & \\ \multicolumn{5}{c}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}} \end{array} (23) \\
&= \begin{array}{ccccc} \text{③}\downarrow & & & \text{③}\downarrow & \\ \multicolumn{5}{c}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \\
&= (13)(24)(5)
\end{aligned}
$$

注意：运算从右向左，参考课本P203例2

例 2 设 $D = \{1,2,3,4\}$ 上的置换 σ 和 τ 分别为

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

则有

$$(\sigma \cdot \tau)(1) = \sigma(\tau(1)) = \sigma(2) = 2,$$

同理

$$(\sigma \cdot \tau)(2) = (1), \quad (\sigma \cdot \tau)(3) = 4, \quad (\sigma \cdot \tau)(4) = 3.$$

所以

$$\sigma \cdot \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

类似可得

$$\tau \cdot \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

注意：作业最开始是按照答案(12)(34)(5)来修改，后面又重新改了一次，未被改到的同学请说一下

P234 8.1 计算(123)(234)(5)(14)(23)，并指出它所在的共轭类？

解：

$(123)(234)(5)(14)(23) = (13)(24)(5)$

S_5中型为$1^1 2^2$的置换共有$\frac{5!}{1!2!1^1 2^2} = 15$，分别为：

(12)(34)(5)，(13)(24)(5)，(14)(23)(5)
(12)(35)(4)，(13)(25)(4)，(15)(23)(4)
(12)(45)(3)，(14)(25)(3)，(15)(24)(3)
(13)(45)(2)，(14)(35)(2)，(15)(34)(2)
(23)(45)(1)，(24)(35)(1)，(25)(34)(1)

注意：运算从右向左，参考课本P203例2

例 2 设 $D = \{1,2,3,4\}$ 上的置换 σ 和 τ 分别为

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

则有

$$(\sigma \cdot \tau)(1) = \sigma(\tau(1)) = \sigma(2) = 2,$$

同理

$$(\sigma \cdot \tau)(2) = (1), \quad (\sigma \cdot \tau)(3) = 4, \quad (\sigma \cdot \tau)(4) = 3.$$

所以

$$\sigma \cdot \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

类似可得

$$\tau \cdot \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

注意：作业最开始是按照答案(12)(34)(5)来修改，后面又重新改了一次，未被改到的同学请说一下，从右往左结合更快

P234 8.10 设s=(1234)，t=(1243)。试找出一个置换 $g \in S_4$，使得s= $g^{-1}tg$，从而证明s与t是共轭的。

解:

s与t是S_4共轭的 $\Longleftrightarrow$ 存在$g \in S_4$，使得s=$g^{-1}tg$

在等式两边，左乘g，得$gs = gg^{-1}tg$，即$gs = tg$

设g=$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ a & b & c & d\end{pmatrix}$，可得

$$gs = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ a & b & c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix} = tg = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ a & b & c & d\end{pmatrix}$$

得$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ b & c & d & a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ a & b & c & d\end{pmatrix}$

①令a=1，则d=3，则c=4，则b=2，则g= $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ a & b & c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 4 & 3\end{pmatrix} = (34)$

②令a=2，则d=1，则c=3，则b=4，则g= $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 3 & 1\end{pmatrix} = (124)$

③令a=3，则d=4，则c=2，则b=1，则g= $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 2 & 4\end{pmatrix} = (132)$

④令a=4，则d=2，则c=1，则b=3，则g= $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix} = (1423)$

注：题目中要求找到1个，不必2个都找到。题中要求了证明，务必要有证明。有些同学只写了g=(34)并没有任何过程，考试这种答案最多给1分

P234 8.11 写出S_4的所有i不动置换类。

解:

i的不动置换即保持i不变的置换，S_4的所有i不动置换类如下:

i=1，$\mathrm{Z}_1 = \{\sigma_I, (23), (24), (34), (234), (243)\}$;

i=2，$\mathrm{Z}_2 = \{\sigma_I, (13), (14), (34), (134), (143)\}$;

i=3，$\mathrm{Z}_3 = \{\sigma_I, (12), (14), (24), (124), (142)\}$;

i=4，$\mathrm{Z}_4 = \{\sigma_I, (12), (13), (23), (123), (132)\}$;

Backup

P49 2.13 计数从(0, 0)点到(n, n)点的不穿过直线y=x的非降路径数。

$2\times[\binom{2n-2}{n-1}-\binom{2n-2}{n+1}]$

标准答案：$\frac{2}{n+1}\binom{2n}{n}$

只需证 $[\binom{2n-2}{n-1}-\binom{2n-2}{n+1}] = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

$$\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} - \frac{(2n-2)!}{(n+1)!(n-3)!} = \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!}$$

$$\frac{1}{(n-1)!(n-1)!} - \frac{1}{(n+1)!(n-3)!} = (2n)\times(2n-1)\cdot\frac{1}{n!n!}\times\frac{1}{n+1}$$

两边同乘(n+1)! $\frac{n(n+1)}{(n-1)!} - \frac{1}{(n-3)!} = 2n\times(2n-1)\cdot\frac{1}{n!}$

同乘(n-1)! $n\cdot(n+1)-(n-1)(n-2) = 2\times(2n-1)$

$n^2+n-(n^2-3n+2) = 2\times(2n-1)$

$4n-2 = 2\times(2n-1)$

等号成立.

解：

设向右走记为1，向上走记为0，

01序列。则不穿过y=x的非降路径数可

（1）任何时刻，1的数量≥0的数

再除去重复的情况 共有 $(\frac{12!}{4!})^2/(5!)\times(3!)$

13. 计数从(0,0)点到(n,n)点的不穿过直线y=x的非降路径数.

(n,n)

不考虑不穿过y=x的路径有 $\binom{2n}{n}$

~~下面考虑穿过直线y=x，即与y=x+1有交点~~ 后半部分

~~设着y=x+1可把穿过y=x的路径映~~成(0,0)→(n-1,n+1)的路径

(0,0)

且成一一映射

总方案数为 $\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n+1} = (1-\frac{n}{n+1})$

y=x+1

$= \frac{1}{n+1}$

(n,n)

(n,n-1) 考虑从下面不穿过

(-1,2)

即为 (1,0) → (n,n-1)

不穿过 y=x 的路径.

(1,0)

(0,0)

(1,0) → (n,n-1) 有 $\binom{2n-2}{n-1}$ 种

即不碰到 y=x+1

即 (-1,2) → (n, n-1) 映射

$\binom{2n-2}{n+1}$.　∴ $2\times[\binom{2n-2}{n-1}-\binom{2n-2}{n+1}]$

则翻转后，0的个数为n-m+1个，1

个数为n-1个。

的数量为$C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1} = \frac{C_{2n}^n}{n+1}$。