

第七次作业

- **第五章 生成函数**
 - 5.7 (4)(5) 5.9 5.11(3)

- 设多重集合 $S = \{\infty \cdot e_1, \infty \cdot e_2, \infty \cdot e_3, \infty \cdot e_4\}$, a_n 表示集合 S 满足下列条件的 n 排列数, 求数列 $\{a_n\}$ 的生成函数
 - (4) e_1 出现 1, 3 或 11 次, e_2 出现 2, 4 或 5 次;
 - (5) 每个 $e_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 至少出现 10 次.
- 思路: 写出每个 e_i 对应的形式幂级数, 相乘即可。

5.7(4)

- e_1 形式幂级数为 $x^1 + x^3 + x^{11}$, e_2 为 $x^2 + x^4 + x^5$, 其余为 $1 + x + x^2 + \dots$ 。因此生成函数为

$$\begin{aligned} & (x^1 + x^3 + x^{11})(x^2 + x^4 + x^5)(1 + x + x^2 + \dots)^2 \\ &= \frac{x^3(1 + x^2 + x^{10})(1 + x^2 + x^3)}{(1 - x)^2} \end{aligned}$$

5.7(5)

- 每个 e_i 的形式幂级数为 $x^{10} + x^{11} + \dots$, 因此生成函数为
$$\frac{(x^{10} + x^{11} + \dots)^4}{x^{40}} = \frac{1}{(1-x)^4}$$

5.9

- 在 10^2 和 10^6 之间有多少个整数,其各位数字之和等于5?
- 思路: 等价于求 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 5$ 的非负整数解问题, 其中 x_1, x_2, x_3, x_4 不全为零。
- 可以先求没有限制条件的情况, 再去掉全为零的情况。

5.9

- 任意位置都允许有零时，个数为 $\binom{5+6-1}{6-1} = 252$,
- 前4位全是零时，个数为 $\binom{5+2-1}{2-1} = 6$
- 总个数为 $252 - 6 = 246$ 。

5.11

- 设多重集合 $S = \{\infty \cdot e_1, \infty \cdot e_2, \infty \cdot e_3, \infty \cdot e_4\}$, a_n 表示集合 S 满足下列条件的 n 排列数, 求数列 $\{a_n\}$ 的指数型生成函数
 - (3) e_i 至少 出现 i 次 ($i = 1, 2, \dots, k$)
- 思路: 写出每个 e_i 对应的形式幂级数, 相乘即可。

5.11(3)

解：每个 e_i 的形式幂级数为

$$\frac{x^i}{i!} + \frac{x^{i+1}}{(i+1)!} + \cdots = e^x - \sum_{j=0}^{i-1} \frac{x^j}{j!}$$

因此生成函数为

$$\prod_{i=1}^k \left(e^x - \sum_{j=0}^{i-1} \frac{x^j}{j!} \right)$$

第十二次作业（部分）

- **第8章**
 - 3, 4

第3题

□ 设 D 是 n 元集合， G 是 D 上的置换群。对于 D 的子集 A 和 B ，如果存在 $o \in G$ ，使得 $B = \{ o(a) \mid a \in A \}$ ，则称 A 与 B 是 G 等价的，求 G 等价类的个数。

□解： 令 $R=\{0,1\}$ ，对于 D 的子集 A ，定义映射 $f_A: D \rightarrow R$ ，其中

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \quad \text{同理，对} B \text{有} f_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \notin B \end{cases}$$

□则 A 与 B 是 G 等价的等同于 $f_A(x)$ 和 $f_B(x)$ 是 G 等价的，则问题转化为求在 $F = \{f \mid f: D \rightarrow R\}$ 上的等价类个数。

□由Polya计数定理得等价类的个数为

$$\frac{1}{|G|} \sum_{o \in G} 2^{b_1+b_2+\dots+b_n}$$

o 是 $1^{b_1} 2^{b_2} \dots n^{b_n}$ 型的

- 对本题中的顶点进行 m 着色，问多少种着色方案。
- 将**旋转**和**翻转**能重合的方案视为相同方案。
- 旋转和翻转构成的置换群中的元素共8个，分别是：
 - 恒等置换： 1^9 型，共1个
 - 绕中心旋转 90° 和 270° 的置换： $1^1 4^2$ 型，共2个
 - 绕中心旋转 180° 的置换： $1^1 2^4$ 型，共1个
 - 绕对边中点连线翻转的置换： $1^3 2^3$ 型，共2个
 - 绕对角顶点连线翻转的置换： $1^3 2^3$ 型，共2个

8.4

- 轮换指标为:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_9) = \frac{1}{8} (x_1^9 + 2x_1x_4^2 + x_1x_2^4 + 2x_1^3x_2^3 + 2x_1^3x_2^3)$$

- 等价类的个数为:

$$P(m, m, \dots, m) = \frac{m^3}{8} (m^6 + 2 + m^2 + 4m^3)$$