



中国科学技术大学

University of Science and Technology of China

# 2020 秋算法习题课

2020-12-28

# 目 录



中国科学技术大学  
University of Science and Technology of China

## ➤ 习题中出现的问题

- 第一次作业
- 第二次作业
- 第三次作业
- 第四次作业

## ➤ 习题解答

## ➤ 期末考试

# 第一次作业的问题



中国科学技术大学  
University of Science and Technology of China

➤ EX 1. 的**答案**是：

☐ **×**

☐ **×**

☐ 2.8 **×**

☐ 估计出来的  $\pi$  值为

☐ 最好写成

➤ EX 3. 中大部分同学的积分区间都设置为了**正数**，最好考虑一个更加**普遍**的情形。

➤ EX 4. 集合计数有同学算出的结果波动特别大，最好运行多次求**平均值**。

# 第二次作业的问题



中国科学技术大学  
University of Science and Technology of China

## ➤ EX 1. 八皇后问题-证明

$$\square \frac{1}{i} \times \prod_i^{i \rightarrow N} \frac{i}{i+1} = \frac{1}{N} \quad \times$$

## ➤ EX 2. 寻找最优的 StepVegas

□ 有的同学写的过于简单，应该给出**实验结果**，然后分析最优的 **StepVegas** 是多少（最好给出**理由**为什么是最优的，比如说总的时间或者搜索节点数最小）

# 第三次作业的问题



中国科学技术大学  
University of Science and Technology of China

## ➤ EX 1. 素性检验

□ 很多同学都是简单地给出了实验结果，最好对实验结果进行总结得出**结论**，然后**说明**为什么会出现这样的结果。

## ➤ EX 4. 完善证明

### ➤ $A(I) = OPT(I)$

假设机器  $M_i$  上运行的两个任务为  $J_{i1}$  和  $J_{i2}$ ，不妨设  $i1 \leq m, i2 > m$ 。按照轻负载的分配原则， $J_{m+1}, \dots, J_{2m}$  将会依次被分配到执行  $J_m, \dots, J_1$  的机器上。最终的分配结果满足：对于任意两台机器  $M_i$  和  $M_j$ ，若  $P_{i1} \geq P_{j1}$ ，则有  $P_{i2} \leq P_{j2}$ 。假设存在一种调度策略  $A'$ ，它不同于 LPT，使得  $OPT(I) = A'(I)$ 。则该策略中，至少存在一对机器  $M_i$  和  $M_j$ ，若  $P_{i1} \geq P_{j1}$ ，则有  $P_{i2} \geq P_{j2}$ 。因为：

$$\max\{P_{i1} + P_{i2}, P_{j1} + P_{j2}\} \geq \max\{P_{i1} + P_{j2}, P_{j1} + P_{i2}\}$$

该不等式右侧即为 LPT 算法的调度策略。则此时的调度算法所用的时间  $OPT(I) = A'(I) \geq A(I)$ 。由  $OPT$  的定义可知， $OPT(I) \leq A(I)$ ，所以  $A(I) = OPT(I)$ 。

➤ 找出一个具体的实例来说明近似比是**紧致**的。

# 第四次作业的问题



中国科学技术大学  
University of Science and Technology of China

## ➤ EX 1. convergecast 时间复杂度分析

- 时间复杂度要带符号“ $O()$ ”;
- 题目的答案  $O(d)$ ,  $d$ 表示树的深度;
- 很多同学写成了 $O(n)$ ,  $n$  是节点的个数。

## ➤ EX 2. 可达 $\leftrightarrow$ 其parent变量赋值

- 这里要证的是当且仅当, 需要从充分性和必要性两个方面来证明, 很多同学只证明了充分性。

# 第四次作业的问题



中国科学技术大学  
University of Science and Technology of China

## ➤ EX 3. 证明 Alg2.3 $\rightarrow$ 以 pr 为根的DFS树

- 有些同学直接证深度优先性;
- 应该先证明构造了一棵树 (从连通性和无环性说明);
- 然后再证明该生成树是 DFS 树。

## ➤ EX 4. 证明 Alg 2.3的时间复杂度为 $O(m)$

- 注意这里的证明需要分模型 (同步和异步) 讨论, 有些同学只考虑了同步模型下的证明。

## ➤ EX 5. 修改算法 Alg 2.3

- 有些同学只是简单地描述方法的思路, 且描述得不够清楚, 最好结合算法的伪代码进行说明。
- 最好分析一下设计的算法的时间复杂度为什么是 $O(n)$



# 习题解答



中国科学技术大学  
University of Science and Technology of China

**Ex 证明：**当放置  $(k+1)$ th 皇后时，若有多个位置是开放的，则算法 *QueensLV* 选中其中任一位置的概率相等。

证明：

对于任意  $m \in Z$  满足  $1 \leq m \leq n_b$ ，第  $m$  个位置被选中的概率等于

$$\frac{1}{m} \times \frac{m}{m+1} \times \frac{m+1}{m+2} \times \cdots \times \frac{n_b-1}{n_b} = \frac{1}{n_b}$$

故对于  $(k+1)$ th 皇后，若有个开放位置，则每个位置被选中的概率都是  $\frac{1}{n_b}$ 。



# 习题解答



**EX** 完善证明 Th1.9 LPT 算法的近似性能比  $R_{LPT} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3m}$ .

解: PPT 给出了近似比的上界, 为了完善证明, 我们需要证明这个上界在某些实例下成立。

考虑输入实例  $I^*$ , 满足如下条件:

$$P_i = 2m - \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil, i = 1, 2, \dots, 2m$$

$$P_{2m+1} = m$$

$P_1$	$P_{2m}$	$P_{2m+1}$
$P_2$	$P_{2m-1}$	
...		
$P_{m-1}$	$P_{m+2}$	
$P_m$	$P_{m+1}$	

LPT 运行结果

$P_1$	$P_{2m-2}$	
$P_2$	$P_{2m-3}$	
...		
$P_{m-1}$	$P_m$	
$P_{2m-1}$	$P_{2m}$	$P_{2m+1}$

OPT 运行结果

可见  $A(I^*)=4m-1$ , 且  $OPT(I^*)=3m$ , 近似比为  $R_{LPT} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3m}$ 。

**Ex2.4 证明 Alg2.3 的时间复杂性为  $O(m)$ 。**

解：

**同步模型：**每一轮中，根据算法，有且只有一个消息(M or Parent or Reject)在传输，从算法的第 6、14、16、20、25 行发送消息的语句中可以发现：消息只发往一个处理器结点，除根结点外，所有的处理器都是收到消息后才被激活，所以，不存在多个处理器在同一轮发送消息的情况，所以时间复杂度与消息复杂度一致。

**异步模型：**在一个时刻内至多有一个消息在传输，因此，时间复杂度也与消息复杂度一致。消息复杂度：对任一边，可能传输的消息最多有 4 个，即 2 个 M，2 个相应 M 的消息 (Parent or Reject)，所以消息复杂度为  $O(m)$

综上所述，该算法的时间复杂度为  $O(m)$ 。

# 关于考试



中国科学技术大学  
University of Science and Technology of China

## ➤ 考试形式

□ 闭卷

## ➤ 范围

□ 概率算法+近似算法+分布式算法

## ➤ 题型

□ 选择题+论述、证明题+算法设计题（往年情况）

# 关于考试



中国科学技术大学  
University of Science and Technology of China

## ► 考试时间

□ 考试周之前

□ 考试周

十二	十二	29		30		1	2	3		4		5	
	十三	6		7		8	9	10		11		12	
	十四	13		14		15	16	17		18		19	
	十五	20		21		22	23	24		25		26	
	十六	27		28		29	30	31		1	元旦	2	
一	十七	3		4		5	6	7		8		9	
	十八	10		11		12	13	14		15		16	
	十九	17		18		19	20	21		22		23	
	二十	24		25		26	27	28		29	秋季学期结束	30	学生寒假开始



中国科学技术大学  
University of Science and Technology of China

祝大家考试顺利！