组合数学(1&5&9)

2019.12.18

第一次作业

4. 11周，每天至少下一盘棋，一周不超过12盘，是否可能存在一些连续的天下了22盘棋？

b_i: 第i天下棋的盘数，$a_i = \sum_{k=1}^{i} b_k$

考虑数列， $a_1, a_2, .., a_{77}, a_1 + 22, a_2 + 22, \ldots, a_{77} + 22$ (154项)

假设这154项中任意两项不相等，则

$\{a_1, a_2, .., a_{77}, a_1 + 22, a_2 + 22, \ldots, a_{77} + 22\}$ 是 1,2,3,…,154 的一个全排列

又因为：$1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{77}$

所以， 1, 2, 3, …, 22, 23, 24, …, 44, 45, 46, …, 154

$a_i = i, 1 \leq i \leq 22$

$a_1, a_2, .., a_{22}, a_{23}, a_{77}, a_1 + 22, a_2 + 22, \ldots, a_{22} + 22, \ldots, a_{77} + 22$

所以 $a_{23} = 45$

$b_{23} = a_{23} - a_{22} = 45 - 22 = 23$，与一周不超过12盘 矛盾!

综上，这154项中必定有两项相等，则一定存在。证明略。

6. 从 1,2,⋯,200 中任取 100 个整数,其中之一小于 16,那么必有两个数,一个能被另一个整除.

6. 任意一个整数可以表示为$2^{p_n} \cdot r_n$，p_n为非负整数,r_n为奇数,按照r_n将 1 到 200 这 200 个数划分成 100 个集合：

$$A_1 = \{2^0 \cdot 1, 2^1 \cdot 1, \dots, 2^7 \cdot 1\};$$
$$A_3 = \{2^0 \cdot 3, 2^1 \cdot 3, \dots, 2^6 \cdot 3\};$$
$$\cdots$$
$$A_{2k+1} = \{2^0 \cdot k, 2^1 \cdot k, \dots\};$$
$$\cdots$$
$$A_{199} = \{2^0 \cdot 199\}.$$

每个集合内的任意两个元素，一个都可以被另一个整除，因此取 100 个数时要分别从这 100 个集合里各取一个，设取的 100 个数为：

$$b_1 = 2^{p_1} \cdot 1$$
$$b_3 = 2^{p_3} \cdot 3$$
$$\cdots$$
$$b_{199} = 2^{p_{199}} \cdot 199$$

因为存在$b_i <\ 16$，则 $b_i = 2^{p_i} \cdot i <\ 16$。因为$b_{3\mathrm{i}} = 2^{p_{3i}} \cdot 3$，则$\frac{b_{3i}}{b_i} = 3 \cdot 2^{p_{3i}-p_i}$。

因为存在b_i与b_{3i}互不整除，所以$p_{3\mathrm{i}} < p_\mathrm{i}$，所以$p_{3i} \leq p_i - 1$。

所以，$b_{3i} = 2^{p_{3i}} \cdot 3i \leq 2^{p_{i-1}} \cdot 3i = 3/2b_i$，因为$b_i < 16$，所以$b_{3i} < 24, b_{9i} < 36, \cdots, b_{81i} < 81$，又因为$b_{81i} = 2^{p_{81i}} \cdot 81i \geq 81$，矛盾！所以，原命题得证！

第五次作业

5. 求不定方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 14$ 的数值不超过 8 的正整数解的个数.

5. 设集合A是该方程的所有正整数解全体，则$|A| = \binom{11+3-1}{11} = 78$。定义性质集合$P_i(i = 1,2,3)$：$x_i$的值大于或等于 9，将满足性质$P_i$的全体记为$A_i$，则

$$|A_1| = |A_2| = |A_2| = \binom{14-11+1}{14-11} = 10,$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 0,$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0.$$

由容斥原理知所求为

$$\begin{aligned}|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| &= |A| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) + \\ &\quad (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= 78 - (10 + 10 + 10) + (0 + 0 + 0) - 0 \\ &= 48.\end{aligned}$$

6. 在宴会后，7 位男士检查他们的帽子，问有多少种方法，使得

(1) 没有人接到自己的帽子？

(2) 至少有一人接到自己的帽子？

(3) 至少有两人接到自己的帽子？

(1) 全错排问题：$D_7 = 7!\,[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots - \frac{1}{7!}]$

(2) 至少对一个：$7! - D_7$

(3) 至少对两个：$7! - D_7 - \binom{7}{1} D_6$

7. 求集合$\{1,2,\cdots,n\}$的排列数，使得在排列中正好有k个整数在它们的自然位置上(所谓自然位置，就是整数i排在第i位上).

7. 先选k个整数排在它们的自然位置上，有$\binom{n}{k}$种选法。再将剩下的$n-k$个整数错排，有D_{n-k}种排法，所以所求排列数为$\binom{n}{k}D_{n-k}$。

第九次作业

7. 设多重集合 $S=\{\infty\cdot e_1,\infty\cdot e_2,\infty\cdot e_3,\infty\cdot e_4\}$，$a_n$ 表示集合 S 满足下列条件的 n 组合数，分别求数列 $\{a_n\}$ 的生成函数：

（4）e_1 出现 1,3 或 11 次，e_2 出现 2,4 或 5 次；

(4)生成函数为

$$
\begin{aligned}
&(x+x^3+x^{11})(x^2+x^4+x^5)(1+x+x^2+\cdots)^2\\
=&\frac{x^3(1+x^2+x^{10})(1+x^2+x^3)}{(1-x)^2}.
\end{aligned}
$$

11. 设多重集合 $S=\{\infty\cdot e_1,\infty\cdot e_2,\cdots,\infty\cdot e_k\}$，$a_n$ 表示S 满足下列条件的 n 排列数，分别求数列$\{a_n\}$的指数型生成函数：

(3) e_i 至少出现i 次($i=1,2,\cdots,k$)；

生成函数为：

$$(e(x)-1)(e(x)-1-x)\left(e(x)-1-x-\frac{x^2}{2!}\right)\dots\left(e(x)-1-x-\cdots-\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\right).$$

12. 设有砝码重为 1 g 的 3 个，重为 2 g 的 4 个，重为 4 g 的 2 个，问能称出多少种重量?各有几种方案?

12. 根据题意，有$M_1 = \{0,1,2,3\}, M_2 = \{0,1,2,3,4\}, M_4 = \{0,1,2\}$。生成函数为

$$(1 + x + x^2 + x^3)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8)(1 + x^4 + x^8)$$
$$= 1 + x + 2x^2 + 2x^2 + 3x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 4x^7 + 5x^8 + 5x^9 + 5x^{10} + 5x^{11} + 4x^{12} + 4x^{13} + 3x^{14} + 3x^{15} + 2x^{16} + 2x^{17} + x^{18} + x^{19}.$$

故能称出 20 种重量，指数为重量类型，系数为方案数。

14. 设将 N 无序分拆成正整数之和且使得这些正整数都小于或等于 m 的方法数为 $B'(N,m)$. 证明

$$B'(N,m)=B'(N,m-1)+B'(N-m,m).$$

14. $B'(N,m)$分为两类，一类是拆分的数中不包括 m，为$B'(N,m-1)$；另一类是拆分的数中至少有一个 m，为$B'(N-m,m)$。原等式得证。

20. 在一个程序设计课程里，每个学生的每个任务最多可以运行十次．教员发现某个任务共运行了38次．设有15名学生，每个学生对这一任务至少做一次．求观察到的总次数的组合数．

20. 生成函数为

$$(x+x^2+\cdots+x^{10})^{15}=x^{15}\left(\frac{1-x^{10}}{1-x}\right)^{15}$$

$$=x^{15}\sum_{i=0}^{15}(-1)^i\binom{15}{i}x^{10i}\sum_{i=0}^{\infty}\binom{14+i}{i}x^i.$$

其中x^{38}的系数为$\binom{14+23}{23}-\binom{15}{1}\binom{14+13}{13}+\binom{15}{2}\binom{14+3}{3}$。