第四章-容斥原理(P102)

- 2.求从1到500的整数中能被3和5整除，但不能被7整除的数的个数

➢ 解: 设A_1表示能同时被3、5整除的数的个数，则;

$$A_1 = \left\lfloor \frac{500}{15} \right\rfloor = 33$$

A_2表示能被3、5、7整除的数的个数，则:

$$A_2 = \left\lfloor \frac{500}{105} \right\rfloor = 4$$

则，能被3和5整除但不能被7整除的数的个数为:

$$|A_1 - A_2| = 33 - 4 = 29$$

第四章-容斥原理(P102)

- 3.求从1与1000之间既不是平方数又不是立方数的整数个数

➢ 解: 设A表示1到1000集合，A_1、A_2表示1与1000之间平方数和立方数的个数，则；

$$A_1 = \lfloor \sqrt{1000} \rfloor = 31$$

$$A_2 = \lfloor \sqrt[3]{1000} \rfloor = 10$$

根据容斥原理，既不是平方数也不是立方数个数为：

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| = |A| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2|$$
$$= 1000 - 31 - 10 + \lfloor \sqrt[6]{1000} \rfloor$$
$$= 962$$

第四章-容斥原理(P102)

- 4.求多重集合$S=\{\infty\cdot \mathrm{a}，3\cdot b，5\cdot \mathrm{c}，7\cdot \mathrm{d}\}$的10组合数。

➢ 解:令$S_\infty=\{\infty\cdot \mathrm{a}，\infty\cdot b，\infty\cdot \mathrm{c}，\infty\cdot \mathrm{d}\}$，且令A表示$S_\infty$的10组合全体，则

$$|A|=\binom{10+4-1}{10}=286$$

定义性质$P=\{P_1，P_2，P_3\}$，分别表示10组合中b个数大于等于4，c个数大于等于6，d个数大于等于8，则

$$|A_1|=\binom{6+4-1}{6}=84;\ |A_2|=\binom{4+4-1}{4}=35;\ |A_3|=\binom{2+4-1}{2}=10$$

$$|A_1\cap A_2|=1;\ Others=0$$

根据容斥原理，S的10组合数为：

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|=|A|-\sum_{1\le i\le 3}|A_i|+\sum_{1\le i,j\le 3}|A_i\cap A_j|-|A_1\cap A_2\cap A_3|$$

$$=286-84-35-10+1=158$$

第四章-容斥原理(P102)

- 6.在宴会后，7位男士检查他们的帽子，请问有多少种方法，使得

  （1）没有人接到自己的帽子?

  （2）至少一人接到自己的帽子?

  （3）至少2人接到自己的帽子?

➢ 解:（1）设没有人接到自己的帽子为A，其对应于{1，2，…，7}的错排，因此：

$$|A| = D_7 = 7!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!}\right) = 1854$$

（2）至少一人接到自己的帽子即为$\bar{A}$，全排数为A_7，因此

$$|\bar{A}| = A_7 - D_7 = 7! - 1854 = 3186$$

（3）无人收到自己帽子的情况数为D_7，恰有一个人刚好接到自己的帽子数为$7 * D_6$，除去这两种情况即为至少两人接到自己的帽子数；为

$$7! - D_7 - 7 * D_6 = 1331$$

第六章-递推关系(P170)

- 11. 用红、白和蓝色对1*n棋盘方格涂色。设h_n是没有两个涂成红色的方格相邻的着色方法数。求出h_n所满足的递推公式，然后找出h_n的公式。

➢ 解: 若要满足两个红色方格不相邻，有以下两种情况。

（1）第一格涂红色，则第二格只能是白色或者蓝色，余下着色方案数有h_{n-2}；

（2）若第一格涂白色或者蓝色，余下n-1方格着色方案数有h_{n-1}；

$$h_n = 2 * h_{n-1} + 2 * h_{n-2}$$

$$\text{其中} h_1 = 3; h_2 = 8$$

以上特征方程为$x^2 - 2x - 2 = 0$，解得特征根为$x_1 = 1 + \sqrt{3}$， $x_1 = 1 - \sqrt{3}$

代入初值可得 $h_n = \frac{3+2\sqrt{3}}{6}(1+\sqrt{3})^n + \frac{3-2\sqrt{3}}{6}(1-\sqrt{3})^n$

第六章-递推关系(P170)

- 13. 从1到n的自然数中选取k个不相同且不相邻的数，设此选取方案数$f(n,k)$.

  （1）求$f(n,k)$满足的递推关系；

  （2）用归纳法求$f(n,k)$；

  （3）若设1与n算是相邻的数，并设在此假定下从1到n的自然数中选取k个不同且不相邻的数的方案数为g(n,k)，试利用$f(n,k)$求g(n,k).

➢ 解:

（1）考虑数n是否在这k个数当中，若

n在这k个数当中，则其余k-1个数只能在1，…，n-2中选，共$f(n-2,k-1)$

n不在这k个数当中，则这k个数应在1，…，n-1中选，共$f(n-1,k)$

$$综上f(n,k)=f(n-2,k-1)+f(n-1,k)$$

第六章-递推关系(P170)

- 解:

（2）对于$n \geq 1$，$f(n,1)=n=\binom{n+1-1}{1}$；

对于n≥ 2，$f(n,n)=0=\binom{n+1-n}{n}$；

假设对于$i \leq j \leq n$， $f(\mathrm{j},i)=\binom{j+1-i}{i}$成立，则

$$
\begin{aligned}
f(n+1,k) &= f(n,k)+f(n-1,k-1) \\
&= \binom{n-k+1}{k}+\binom{n-k+1}{k-1} \\
&= \binom{n-k+2}{k} \\
&= \binom{n+1-k+1}{k}
\end{aligned}
$$

得证

第六章-递推关系(P170)

- 解:

  （3）考虑n是否在这k个数当中；

  n在这k个数当中，则其余k-1个数只能在2，3，…，n-2中选，共$f(n-3,k-1)$

  n不在这k个数当中，则这k个数应在1，…，n-1中选，共$f(n-1,k)$。所以

$$g(n,k)=f(n-1,k)+f(n-3,k-1)=\binom{n-k}{k}+\binom{n-k-1}{k-1}$$

- 14. 利用生成函数求解下列递推关系

（1）$\begin{cases} f(n) = 4f(n-2), \\ f(0) = 0, f(1) = 1 \end{cases}$

➢ 解: 令

$$g(x) = f(0) + f(1)x \quad + f(2)x^2 \quad + \cdots + f(n)x^n \qquad 1$$

$$-4x^2 g(x) = \quad -4f(0)x^2 + \cdots - 4f(n-2)x^n \qquad 2$$

将等式1与等式2相加，得到

$$g(x) = \frac{x}{1-4x^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1+2x}\right) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}[2^n - (-2)^n]x^n$$

因此

$$f(n) = \frac{1}{4}[2^n - (-2)^n]$$

第七章-特殊计数序列(P194)

- 2.设$f(0), f(1), \dots, f(n)$是Fibonacci数列。

  （1）证明 $f(n)f(n+2) - f^2(n+1) = \mp 1$

  （2）当n是什么值时，等式右边为1？当n什么值时，等式右边为-1？

➢ 解:（1）采用归纳法，当$n = 0$时，

$$f(0)f(2) - f^2(1) = 1 \text{ 成立}$$

假设$n = k$时$f(k)f(k+2) - f^2(k+1) = \mp 1$成立，当$n = k+1$时，

$$f(k+1)f(k+3) - f^2(k+2) = f(k+1)\big(f(k+1) + f(k+2)\big) - f^2(k+2)$$

$$= f^2(k+1) + f(k+1)f(k+2) - f^2(k+2)$$

$$= f^2(k+1) + f(k+2)(f(k+1) - f(k+2))$$

$$= -(f(k+2)f(k) - (f^2(k+1))$$

$$= \mp 1$$

（2）n为偶数时，等式右边为1，n为奇数时，等式右边为-1

第七章-特殊计数序列(P194)

- 4.2n个点均匀分布在一个圆周上，我们用n条不相交的弦将这2n个点分配成n对，试证明不同的配对方案数是第n+1个Catalan数$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

- 解: 令这2n个点分别为$A_1,A_2,\dots,A_{2n}$，考虑某点与A_1相连，由于n条弦需两两不相交，因此只能是下标为偶数的点与A_1相连，不妨假设将点A_1与$A_{2k}(k=1,\dots,n)$相连，形成的弧$\overline{A_1A_{2k}}$将圆上的点分为两部分，分别有2k-2和2n-2k，若设圆上2n个点n弦不相交的方案数为$f(n)$，则剩余两部分的方案数为f(k-1)和$f(n-k)$，则：

$$f(n)=\sum_{k=1}^{n}f(k-1)f(n-k)=\sum_{k=0}^{n-1}f(k)f(n-k-1)$$

令$g(n)=f(n-1)=\sum_{k=0}^{n-2}f(k)f(n-k-2)=\sum_{k=0}^{n-2}g(k+1)g(n-k-1)=\sum_{k=1}^{n-1}g(k)g(n-k)$

即为Catalan数的递推式，因此$f(n)=g(n+1)=h(n+1)=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

第七章-特殊计数序列(P194)

- 5.n个不同的字符按顺序进栈，问有多少种不同的出栈方式

➢ 解:假设n个字符分别为$A_1, A_2, \dots, A_n$, 讨论A_1的出栈情况:
  假设A_1第一个出栈，则必是A_1入栈了马上出栈，剩下有$f(n-1)$种
  假设A_1第二个出栈，则必是A_2入栈了马上出栈，再马上A_1出栈，剩下有$f(1)f(n-1)$
  …
  假设A_1第k个出栈，则必是$\{A_2, \dots, A_k\}$先按顺序入栈出栈，有$f(k-1)$种，然后出栈A_1，剩下字符有$f(n-k)$种
  …

$$\text{于是} f(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k-1)f(n-k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)f(n-k-1)$$

$$\text{令} g(n) = f(n-1) = \sum_{k=0}^{n-2} f(k)f(n-k-2) = \sum_{k=0}^{n-2} g(k+1)g(n-k-1) = \sum_{k=1}^{n-1} g(k)g(n-k)$$

$$f(n) = h(n+1) = \frac{1}{\mathrm{n}+1}\binom{2\mathrm{n}}{n}$$

第八章-Polya计数理论(P234)

- 6.用三色珠子串成四珠项链，要求各种颜色的珠子至少有一个。问有多少种不同的项链？

➢ 解:

对应置换群的轮换指标为：$P_G(z_1,z_2,z_3,z_4)=1/8(z_1^4+2z_4+3z_2^2+2z_1^2z_2)$

全部模式为：$P_G(r+b+w,r^2+b^2+w^2,r^3+b^3+w^3,r^4+b^4+w^4)$

$=1/8[(r+b+w)^4+2(r^4+b^4+w^4)+3(r^2+b^2+w^2)^2+2(r+b+w)^2(r^2+b^2+w^2)]$

展开式中r^2bw的系数为2。由对称性可知，rb^2w和rbw^2项的系数也是2，故不同项链数为：

$$2+2+2=6$$

第八章-Polya计数理论(P234)

- 12.在8.5节例6中，令w(红色)=r，w(蓝色)=b：将正方形的4个顶点分别标记为1,2,3,4，则正方形的旋转群G={$\boldsymbol{\sigma^0}$,$\boldsymbol{\sigma^1}$,$\boldsymbol{\sigma^2}$,$\boldsymbol{\sigma^3}$}，其中$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{(1234)}$。令$w_1=b^4$,$w_2=r^2b^2$，对$w_1$,$w_2$分别求(8.7.1)定义的$\widetilde{\boldsymbol{G}}$

➢ 解:假设D上的可旋转置换群为$G = \{\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3\}$，若

（1）$w_1 = b^4$；等价集合为D $= \{f_{16}\}$；因此

$$\pi_0 = \pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = (f_{16})$$

（2）$w_1 = \mathrm{r}^2 b^2$；等价集合为D $= \{f_6, f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{11}\}$，根据定义可得

$$\pi_0 = (f_6)(f_7)(f_8)(f_9)(f_{10})(f_{11})$$
$$\pi_1 = (f_6 f_7 f_8 f_9)(f_{10} f_{11})$$
$$\pi_2 = (f_6 f_8)(f_7 f_9)(f_{10})(f_{11})$$
$$\pi_3 = (f_6 f_9 f_8 f_7)(f_{10} f_{11})$$

第八章-Polya计数理论(P234)

- 15.用Polya计数定理求多重集合M={$\infty\cdot \boldsymbol{a_1},\infty\cdot \boldsymbol{a_2},\ldots,\infty\cdot \boldsymbol{a_n}$}的r圆排列数。

➢ 解:

D={**1,2,…,r**}为圆的r个位置，**R**={**a_1,…,a_n**}, 则一个圆排列就是一个$\boldsymbol{f}$:**D**→**R**,
令G为旋转的置换群，则r圆排列数可有Polya计数定理计算
令$\boldsymbol{\sigma}$表示绕圆心旋转**360/r**度的置换，则$\boldsymbol{G}=\{\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{0}},\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{1}},\ldots,\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{r}}\}$

分别讨论$\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{i}}$的型:

- i与r互素，$\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{i}}$为$\boldsymbol{r}^{\mathbf{1}}$型；与$\boldsymbol{r}$互素的i的个数有$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{r})$
- i与r有最大公因子d (>1)，则$\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{i}}$为$(\frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{d}})^{\boldsymbol{d}}$型；对于给定的最大公因子d，与$\boldsymbol{r}$互素的i的个数有$\boldsymbol{\varphi}(\frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{d}})$

因此由Polya计数定理可得r圆排列数为

$$\frac{1}{r}\left[\varphi(r)n+\sum_{\substack{d\mid r\\ d>1}}\varphi\left(\frac{r}{d}\right)n^d\right]=\frac{1}{r}\sum_{d\mid r}\varphi\left(\frac{r}{d}\right)n^d$$