

半平面交的算法及其应用

基本概念

半平面：平面上的直线及其一侧的部分，在直角坐标系中可由不等式 $ax+by+c \geq 0$ 确定。

在一个有界区域里（在实际计算时不妨设一个足够大的边界），半平面或半平面的交是一个凸多边形区域。

n 个半平面的交 $H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_n$ 是一个至多 n 条边的凸多边形。

算法

半平面交的联机算法

procedure intersection of half-planes

输入： n 个半平面 H_1, H_2, \dots, H_n 对应的不等式组 $ax+by+c_i \geq 0, i=1, 2, 3 \dots n$

输出： $H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_n$

 初始化区域 A 为整个平面

 依次用直线 $ax+by+c_i=0, i=1, 2, \dots, n$ 切割 A ，保留使不等式 $ax+by+c_i \geq 0$ 成立的部分

 输出 A

本算法的时间复杂度为 $O(n^2)$ ，并具有联机的优点。

半平面交的分治算法

假设可以在 $O(m+n)$ 的时间内将 m 个半平面的交和 n 个半平面的交合并, 则可以有一种 $O(n \log(n))$ 的分治算法求半平面的交。

Procedure intersection of half-plane (D&C)

输入: n 个半平面 H_1, H_2, \dots, H_n 对应的不等式组 $a_i x + b_i y + c_i \geq 0, i=1, 2, 3 \dots n$

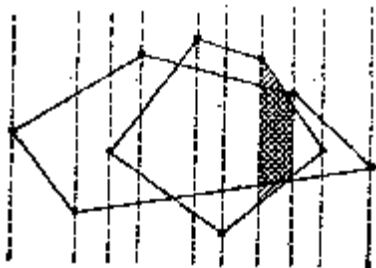
输出: $H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_n$

将 $H_1 \dots H_n$ 分成两个大小近似相等的集合

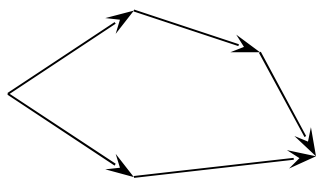
在每个子问题中递归地计算半平面的交

合并两个凸多边形区域形成 $H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_n$

所以问题的关键就是怎样在 $O(m+n)$ 的时间里求两个凸多边形的交。



如左图所示, 在 $O(m+n)$ 的时间内将两个凸多边形沿平行于 y 轴方向切割成至多 $O(m+n)$ 个梯形区域, 每两个梯形区域的交可以在 $O(1)$ 时间内解决。



为了便于操作, 确定凸多边形采用了一种特殊的方法。可以看出凸多边形上方和下方的顶点分别构成了一个 x 坐标递增序列。将这两个序列中的顶点分别作为一个链表存储, 得到确定凸多边形区域的上界和下界。

算法:

procedure intersection of convex polygon

输入: 两个凸多边形区域 A 、 B

输出: $C = A \cap B$

1. 将两个凸多边形的顶点 x 坐标分类, 得到序列 $x_i, i=1 \dots p$

2. 初始化区域 C 为空。

3. 处理 $\{x_i\}$

4. 依次处理区域 $(x_i, x_{i+1}], i=1 \dots p-1$ 。

3 4.1 计算两个多边形在此区域里截得的梯形 (可能退化), 设为 $ABCD$ 和 $A'B'C'D'$ 。

4 4.2 求交点 $AB \cap A'B'$ 、 $AB \cap C'D'$ 、 $CD \cap A'B'$ ，将存在的点按 x 坐标排序，删除重复，添加到 C 的上界中。用类似的方法求 C 的下界

4.3 计算此区域的右侧边界： $EF = BC \cap B'C'$ 。将 E 、 F 分别加入 C 的上界和下界。

5. 输出 C

步 1：由于 A 、 B 的上下界 x 坐标分别有序，可采用归并排序。复杂度 $O(m+n)$

步 4：由于是按照 x 递增的顺序扫描这些区域，每条边界上的指针在整个过程中始终向右移动。两个多边形的每个顶点至多扫描一次。复杂度为 $O(m+n)$ 。

因此整个算法的时间复杂度为 $O(m+n)$ 。

应用

问题 1: Hotter and Colder (Waterloo local contest)

题目简述：

A 和 B 在 $10*10$ 的棋盘上进行一个游戏。 A 确定一个点 P ， B 每回合移动一次。每次 A 都会告诉 B ，他当前所处的位置是离 P 更近了 (*Hot*) 还是更远了 (*Cold*)。（原题还要考虑距离不变的情况。）

请在 A 每次回答后，确定 P 点可能存在的区域的面积。

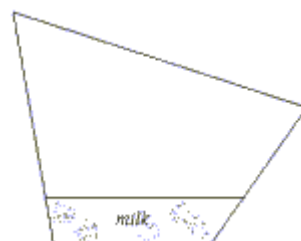
分析：

假设 B 从 $C(x_1, y_1)$ 移动到了 $D(x_2, y_2)$ ， A 回答 *Hot*。则对应这一回合，点 $P(x, y)$ 所处的位置满足 $|CP| > |DP|$ ，即：

$$(2*x_2 - 2*x_1)*x + (2*y_2 - 2*y_1)*y + x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 > 0。$$

类似地，回答 *Cold* 对应于另一个不等式。

初始时可能的区域是 $[0, 10] * [0, 10]$ 。每回合后都用相应的不等式对应的半平面与当前区域求交。并输出交的面积。



问题 2: Milk (OOPC1)

题目简述:

SRbGa 有一块凸 n 边形面包, 和一盆面积足够大但深度仅为 h 的牛奶。他想仅蘸 k 次 (每次都保证面包垂直于盆底), 使得面包蘸上牛奶的部分面积最大。

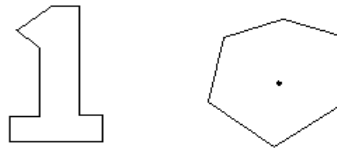
分析:

由于本题规模不大, 考虑使用深度优先搜索。

蘸每条边都对应剩下的一个半平面, 某种蘸 k 条边 $E_1 \dots E_k$ 的方法, 剩下的部分就对应于这 k 个半平面和原多边形的交。考察 $C(n, k)$ 种蘸法, 选其中剩下的面积最小的那种。

问题 1 是用几个半平面顺次求交, 并且每次都要输出面积。显然采用联机算法合适。

问题 2 如果用联机算法, 复杂度为 $O(C(n, k) * n)$, 且便于在搜索的过程中剪枝。如果用脱机的分治算法, 复杂度为 $O(C(n, k) * (n + k * \log(k)))$ 。

问题 3: Video (CTSC98)

题目简述:

已知一个多边形 P (不一定是凸的)

问在 P 中是否存在点 Q , 在 Q 点能观察到整个多边形区域。

分析:

假设多边形的边界点按逆时针方向给出 $V_0 V_1 V_2 \dots V_n$, $V_0 = V_n$ 。则能够观察到边 $V_i V_{i+1}$

的点 Q_i 一定满足

$$\overrightarrow{Q_i V_i} * \overrightarrow{Q_i V_{i+1}} \geq 0, i = 0 \dots n-1$$

而且能观察到所有边的点一定能够观察到整个多边形区域。

如果用坐标进行叉积运算, 则每个约束条件都对应一个二元一次不等式 (也对应于一个半平面)。本题就转化为求这 n 个半平面的交是否不为空。

问题 4: Triathlon (NEERC2000)

题目简述:

n 名选手参加铁人三项赛, 比赛按照选手在三个赛段中所用的总时间排定名次。已知每名选手在三个项目中的速度 U_i 、 V_i 、 W_i 。

问对于选手 i , 能否通过适当的安排三个赛段的长度 (但每个赛段的长度都不能为 0), 来保证他获胜。

分析:

假设三个赛段的长度分别为 x 、 y 、 z , 则选手 i 获胜的充要条件就是:

$$\frac{x}{u_i} + \frac{y}{v_i} + \frac{z}{w_i} < \frac{x}{u_j} + \frac{y}{v_j} + \frac{z}{w_j}, i \neq j$$

这是一个三元齐次不等式组, 由于 $z > 0$, 所以不妨将每个不等式两侧都除以 z , 并令

$$\left(\frac{1}{u_j} - \frac{1}{u_i}\right) * X + \left(\frac{1}{v_j} - \frac{1}{v_i}\right) * Y + \left(\frac{1}{w_j} - \frac{1}{w_i}\right) > 0$$

$X=x/z$, $Y=y/z$, 就得到:

本题就转化为求这 $n-1$ 个不等式对应的半平面的交, 并判断其面积是否大于 0 (即排除空集、点、线段的情况)。

问题 3 和问题 4, 最终都转化为二元不等式组解的存在性问题。可以用分治算法较有效地解决。

问题 5: Run away (CERC99)

题目简述:

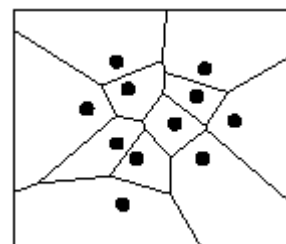
在一个矩形 R 中有 n 个点 $P_1 \dots P_n$, 请找出一个点 $Q \in R$ 使得 $\min(|QP_i|)$ 最大。

分析:

将 R 分成 n 个区域, $Q_1 \dots Q_n$, Q_i 是离 P_i 点的距离比离其它点都小的点的集合:

$$Q_i = \{Q \mid |QP_j| \geq |QP_i|, j \neq i\} \cap R$$

Q_i 可通过在 $P_i P_j$ 的中垂线 P_i 一侧的半平面的交求得。 Q_i

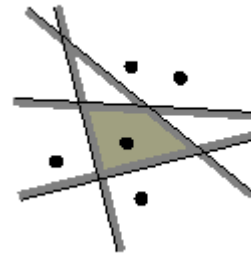


为一个凸多边形。

在 Q_i 里, 离 P_i 最远的点只能出现在 Q_i 的顶点上。求其中最远的点即可。

求半平面的交采用分治算法, 复杂度为 $O(n \log(n))$, 对应于 P_i 的多边形最多有 $O(n)$ 个顶点, 因此求 Q_i 中的最远点复杂度为 $O(n)$ 。

总的复杂度为 $O(n^2 \log(n))$ 。



实际上, 由以上方法定义的 n 个多边形区域 $Q_1 \dots Q_n$ 就组成了一个 **Voronoi 图**。Voronoi 图是计算几何中仅次于凸包的几何对象, 有着非常广泛的应用。利用半平面的交求 Voronoi 图的方法并不是最优的, 分治法、平面扫描法等许多算法都能达到 $O(n \log(n))$ 的复杂度, 并且是最优的。但这些算法都过于复杂, 不属于本文讨论的范围。

参考书目

《计算几何导论》作者: [美]F·P·普霍帕拉塔 M·I·沙莫斯 1990 年 11 月第 1 版

《计算几何——算法分析与设计》作者: 周培德 2000 年 3 月第 1 版