

When Interaction Actions?

黃河泉

淡江大學財務金融系

March 12, 2017

1 沒有交互項

2 有交互項

- 兩個連續變數
- 一連續、一離散之交互項
- 兩個離散變數

讓我們先回顧一個沒有交互效果 (interaction effects) 的迴歸如下:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \quad (1)$$

其中, y 為被解釋變數, x_1 與 x_2 為解釋變數。我們以 x_1 為例, 令 y 對 x_1 取變動為:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_1} = \beta_1 \quad (2)$$

所以, 其他情況不變下, x_1 (假設為連續的變數) 每額外增加一單位, y 平均會增加 β_1 單位 (implicitly evaluated at $x_2 = \bar{x}_2$, the mean value of x_2).¹ 該模型中, 下式說明 x_1 對 y 的邊際效果只由其係數 β_1 之正負、大小來衡量, 完全不受另外一個解釋變數 x_2 之影響:

$$\frac{\Delta \left(\frac{\Delta y}{\Delta x_1} \right)}{\Delta x_2} = \frac{\Delta \beta_1}{\Delta x_2} = 0 \quad (3)$$

底下我們利用 Wooldridge 的 'WAGE2.dta' 資料來一步一步說明相關的概念。

- 在該資料中，被解釋變數是 wage，其衡量一個人的每月工資 (單位是美元)。
- 解釋變數有該人之受教育年數 educ (單位是年)、工作經驗 exper (單位是年) 與婚姻狀態 married (虛擬變數，若已婚則其值為 1，否則為 0)。
- 底下其他例子會使用到的 black 與 south 兩個變數，black 為一虛擬變數，若一人為黑人，則其值為 1，否則為 0；south 亦為一虛擬變數，若一人居住於南方，則其值為 1，否則為 0。
- 我們首先分析一人之工資 wage 高低與其之 educ、exper 和 married 之關係，迴歸可設定如下：

$$\text{wage} = \beta_0 + \beta_1 \text{educ} + \beta_2 \text{exper} + \beta_3 \text{married} + u \quad (4)$$

首先, 我們報告基本統計量與相關係數矩陣如下:

```
. use "WAGE2.dta", clear
. // basic statistics/correlation matrix
. sum wage educ exper married black south, sep(10)
```

Variable	Obs	Mean	Std. Dev.	Min	Max
wage	935	957.9455	404.3608	115	3078
educ	935	13.46845	2.196654	9	18
exper	935	11.56364	4.374586	1	23
married	935	.8930481	.3092174	0	1
black	935	.1283422	.3346495	0	1
south	935	.3411765	.4743582	0	1

初步的基本統計量指出, 共有 935 筆觀察值。平均工資、教育與經驗為 958 元、13.5 年與 11.6 年, 而已婚之比例約為 89.3%。另外, 黑人之比例約 12.8% 而居住於南方者佔 34.1%。

所有變數的相關係數矩陣如下：

```
. pwcorr wage educ exper married black south, sig
```

	wage	educ	exper	married	black	south
wage	1.0000					
educ	0.3271 0.0000	1.0000				
exper	0.0022 0.9467	-0.4556 0.0000	1.0000			
married	0.1366 0.0000	-0.0586 0.0735	0.1063 0.0011	1.0000		
black	-0.2109 0.0000	-0.1795 0.0000	0.0558 0.0879	-0.0534 0.1024	1.0000	
south	-0.1594 0.0000	-0.0970 0.0030	0.0213 0.5162	0.0228 0.4870	0.2365 0.0000	1.0000



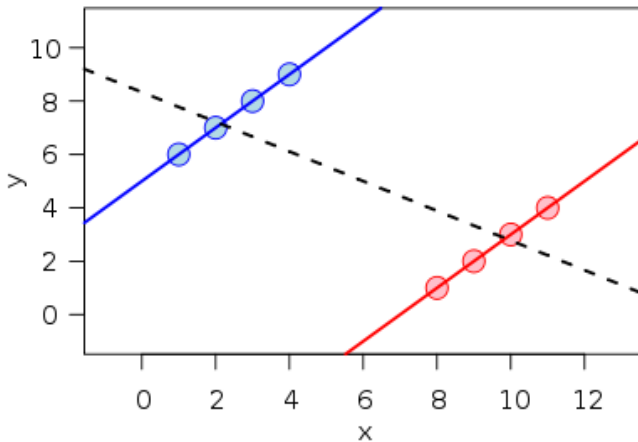
或是:

```
. pwcorr_a wage educ exper married black south
```

	wage	educ	exper	married	black	south
wage	1.000					
educ	0.327***	1.000				
exper	0.002	-0.456***	1.000			
married	0.137***	-0.059*	0.106***	1.000		
black	-0.211***	-0.179***	0.056*	-0.053	1.000	
south	-0.159***	-0.097***	0.021	0.023	0.236***	1.000

初步簡單相關係數顯示, 工資 (wage) 與受教育年數、工作經驗與婚姻狀態都有正相關 (但與工作經驗之關係不顯著), 但與種族與居住區域成顯著反向關係。

也請注意，迴歸結果有時會與簡單相關係數呈現相反符號：



用 OLS 估計的迴歸結果 (並利用 robust 來修正異質性變異數) 如下:

```
. reg wage educ exper married, robust
```

Linear regression

```
Number of obs   =      935
F(3, 931)       =      52.23
Prob > F        =      0.0000
R-squared       =      0.1558
Root MSE       =     372.12
```

wage	Coef.	Robust Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
educ	76.55046	6.610435	11.58	0.000	63.57738	89.52354
exper	16.31668	3.103631	5.26	0.000	10.22575	22.4076
married	185.9073	36.53057	5.09	0.000	114.2155	257.5991
_cons	-427.7748	112.2528	-3.81	0.000	-648.0726	-207.4771

所以, 在其他情況不變下, educ 與 exper 對 wage 之邊際效果分別為:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta \text{wage}}{\Delta \text{educ}} &= \hat{\beta}_1 = 76.5505 \\ \frac{\Delta \text{wage}}{\Delta \text{exper}} &= \hat{\beta}_2 = 16.3167\end{aligned}$$

亦即表示當受教育年數 (工作經驗) 每額外增加一年, 工資會額外增加 76.5505 (16.3167) 美元; 而 married (虛擬變數) 對 wage 之邊際效果為:

$$\frac{\Delta \text{wage}}{\Delta \text{married}} = \hat{\beta}_3 = 185.9073$$

表示其他情況不變下, 平均而言, 已婚者比未婚者之工資多 185.9073 美元。

¹若 x_1 為 (間斷的, discrete) 虛擬變數, 則其對 y 之邊際效果可解釋為當 $x_1 = 1$ 比 $x_1 = 0$ 時多 β_1 個單位。

什麼時候需要交互 (interaction) 項呢？若一個變數 x_1 對被解釋變數 y 之效果可能會受到其他變數 x_2 之影響時，這時我們可以考慮使用含交互項之迴歸。現在，讓我們考慮一個簡單但典型的交互效果模型如下：

$$y = \alpha_0 + \underbrace{\alpha_1 \cdot x_1}_{\text{主要項}} + \underbrace{\alpha_2 \cdot x_1 x_2}_{\text{交互項}} + \underbrace{\alpha_3 \cdot x_2}_{\text{主要項}} + u \quad (5)$$

其中， y 為被解釋變數， x_1 與 x_2 為解釋變數 (主要項, main terms)，而兩個主要項的相乘項 $x_1 x_2$ 即為交互項 (interaction term)。此時， x_1 與 x_2 對 y 之邊際效果分別可寫成：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_1} = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 \quad (6)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_2} = \alpha_3 + \alpha_2 x_1 \quad (7)$$

從 (6) 式可以發現, 此時 x_1 對 y 的邊際效果為 $\alpha_1 + \alpha_2 x_2$, 而下式說明該邊際效果會受到另一個解釋變數 x_2 之影響, 除非 ($\alpha_2 = 0$):

$$\frac{\Delta\left(\frac{\Delta y}{\Delta x_1}\right)}{\Delta x_2} = \frac{\Delta(\alpha_1 + \alpha_2 x_2)}{\Delta x_2} = \alpha_2 \quad (8)$$

例如, 若 $\alpha_2 > 0$, 則 x_1 對 y 的影響效果會隨著 x_2 的値之增加而增加; 反之, 若 $\alpha_2 < 0$, 則 x_1 對 y 的影響效果會隨著 x_2 的値之增加而降低。由於該交互效果模型中, x_1 與 x_2 存在著對稱之情況, 所以所有對 x_1 效果之說明 (解釋、分析與檢定等), 都可適用於第 (7) 式 x_2 之情況。

實際的例子 (太多了!) 有 (只舉兩篇):

- Shen and Lee (2006) 探討為什麼同樣的金融發展可能會帶來不一樣的經濟成長?其考慮之模型為:

$$\text{GROWTH} = \beta_0 + \beta_1 \text{BANK} + \beta_2 \text{STOCK} + u \quad (9)$$

$$\beta_1 = \beta_{11} + \beta_{12} Z \quad (10)$$

$$\beta_2 = \beta_{21} + \beta_{22} Z \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \text{GROWTH} = & \beta_0 + \beta_{11} \text{BANK} + \beta_{12} (\text{BANK} \times Z) \\ & + \beta_{21} \text{STOCK} + \beta_{22} (\text{STOCK} \times Z) + u \end{aligned}$$

其中的 'Z' 包含了 11 個狀態變數。沈公中華 (作者之一的 Shen) 每次都跟我說, (9) 到 (11) 式就是結構式 (structural) 模型, 因此可展開為最後一式, 此時並不需要 (沒有) 直接包括 Z 項在迴歸中。

- Alfaro, Chanda, Kalemli-Ozcan, and Sayek (2004) 探討外人直接投資 (foreign direct investment, FDI) 對本國經濟成長 (economic growth, GROWTH) 之效果, 是否會受到本國之金融發展程度 (local financial development, FINANCE) 之影響:

$$\text{GROWTH} = \alpha_0 + \alpha_1 \text{FDI} + \alpha_2 (\text{FDI} \times \text{FINANCE}) + \alpha_3 \text{FINANCE} + u$$

而

$$\frac{\Delta \text{GROWTH}}{\Delta \text{FDI}} = \alpha_1 + \alpha_2 \text{FINANCE}$$

底下, 我們繼續延伸之前的例子, 額外考慮交叉項之迴歸為:

$$\text{wage} = \alpha_0 + \alpha_1 \text{educ} + \alpha_2 (\text{educ} \times \text{exper}) + \alpha_3 \text{exper} + \alpha_4 \text{married} + u \quad (12)$$

兩個連續變數

```
. reg wage c.educ##c.exper married, robust
```

Linear regression

```
Number of obs   =      935
F(4, 930)       =      42.13
Prob > F        =      0.0000
R-squared       =      0.1626
Root MSE       =     370.81
```

wage	Coef.	Robust Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
educ	34.69507	17.6137	1.97	0.049	.127853	69.26228
exper	-34.90561	19.36479	-1.80	0.072	-72.90936	3.098149
c.educ#c.exper	3.97449	1.529389	2.60	0.010	.9730367	6.975944
married	187.0312	36.39812	5.14	0.000	115.5992	258.4632
_cons	125.6415	237.7932	0.53	0.597	-341.032	592.315

- educ 對 wage 的邊際效果 (ME_e) 如下:

$$ME_e = \frac{\Delta wage}{\Delta educ} = \alpha_1 + \alpha_2 \text{exper}$$

而對應之標準誤為:

$$\begin{aligned} se(ME_e) &= \sqrt{V(\alpha_1 + \alpha_2 \text{exper})} \\ &= \sqrt{V(\alpha_1) + \text{exper}^2 V(\alpha_2) + 2 \text{exper} Cov(\alpha_1, \alpha_2)} \end{aligned}$$

- exper 對 wage 的邊際效果 (ME_{ex}) 如下:

$$ME_{ex} = \frac{\Delta wage}{\Delta exper} = \alpha_3 + \alpha_2 \text{educ}$$

- 可用圖形來展示不同經驗水準下，額外增加一年教育對工資之影響效果：請先到 'Yiqing Xu' 的網站，到 Stata Program 處下載使用手冊 'User's Guide (PDF)' 並也下載程式：

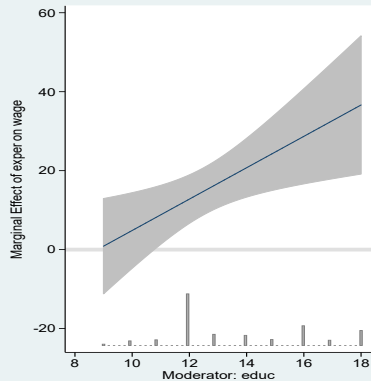
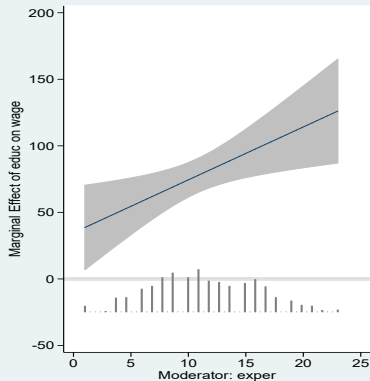
ssc install interflex, replace all

```
. // interflex
. tempfile interflex_exper
. tempfile interflex_educ
.
. interflex wage educ exper married, vce(robust) type(linear) ///
> ylab("wage") dlab("educ") xlab("exper")
. graph save Graph `interflex_exper`, replace
(note: file C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ST_04000001.tmp not found)
(file C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ST_04000001.tmp saved)
.
. interflex wage exper educ married, vce(robust) type(linear) ///
> ylab("wage") dlab("exper") xlab("educ")
. graph save Graph `interflex_educ`, replace
(note: file C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ST_04000002.tmp not found)
```

```
(file C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ST_04000002.tmp saved)
.
. graph combine "`interflex_exper`" "`interflex_educ`"
. graph save Graph "E:\WAGE2-interflex-2.gph", replace
(file E:\WAGE2-interflex-2.gph saved)
. graph export "E:\WAGE2-interflex-2.pdf", as(pdf) replace
(file E:\WAGE2-interflex-2.pdf written in PDF format)
```



兩個連續變數



有關交互項迴歸應該注意之事項 I

- 1 包括應該包括的所有項目: 若迴歸中有交互項, 則所有的主要項 (組成份子) 都應包含在迴歸中 (除非有經濟理論將其排除)。
 - 例如最一般的就是 x_1x_2 ($\text{educ} \times \text{exper}$) 交互項, 這時迴歸應該至少再包括 x_1 (educ) 項與 x_2 (exper) 項。
 - 又例如 (三叉項) $x_1x_2x_3$, 這時迴歸應該包括 x_1, x_2, x_3 與 x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3 等項。
 - 若缺少某一主要項, 交互項可能由於 left-out variable bias 而顯著。
- 2 共線性之問題: Dalal and Zickar (2012) demonstrate that mean-centering reduces nonessential collinearity but not essential collinearity. 常常聽到有人談到同時包括主要項與交互項會產生共線性之問題:

有關交互項迴歸應該注意之事項 II

- 雖然有人 (Althausen, 1971; Smith and Sasaki, 1979) 證明主要項與交互項會有相關, 而可能導致共線性之情形; 但 Balli and Sørensen (2013) 並不認為共線性在一般交互模型中是一個太特殊/嚴重之問題。
- 由於有時候加入交互項後, 迴歸結果不好 (不管從什麼角度來看, 但要確定你的解讀是正確的), 去掉某一主要項後結果又很好。這時你或許可以參考 (但是還是有不少人可能不贊同) Shen and Lee (2006) 之模型設定, 注意 Z 並沒有直接包含於他們的模型中。
- ③ **主要項之解釋 (conditional versus unconditional):** Brambor, Clark, and Golder (2006) 說, 我們不應該將主要項解釋為非條件 (unconditional) 或平均 (average) 效果 — 因為他們本來就不是!

有關交互項迴歸應該注意之事項 III

- 我們一般關心的 α_1 係數，其之解釋與以往有所不同：其乃是當 $x_2 = 0$ 時，若 x_1 每額外增加一單位， y 平均會增加 α_1 單位。所以，在其他情況不變下，educ 對 wage 之邊際效果為：

$$\frac{\Delta \text{wage}}{\Delta \text{educ}} = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 \text{exper} = 34.6951 + 3.9745 \text{exper}$$

亦即在 exper 等於 0 時，若受教育年數每額外增加一年，工資會額外增加 34.6951 美元。以我們的例子來看， exper 的值都是大於等於 1（基本統計量表中是介於 1 與 23 年），因此 α_1 並沒有太大的經濟意義。所以其係數（用 t 檢定）是否顯著，可能也不是我們主要關心的項目，而很不幸地，不少人並不清楚這點。

有關交互項迴歸應該注意之事項 IV

- 可能更重要的是, 檢定 x_1 對 y 的邊際效果 (平均來看) 是否會受到另一個解釋變數 x_2 之影響:

$$H_0: \alpha_2 = 0$$

$$H_1: \alpha_2 \neq 0$$

此時, 可用估計值 $\hat{\alpha}_2$ 之對應 t 值來檢定。(請也參考最底下之圖形說明)

- ④ **中心化**: 如果想要讓交互項迴歸的**主要項之係數有意義** (就像沒交叉項之情況), 可考慮將交叉項中心化 (centering, 變數減去自己的平均數) 如:

$$y = \gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 (x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2) + \gamma_3 x_2 + u \quad (13)$$

有關交互項迴歸應該注意之事項 V

而且我們可以很簡單證明此式與 (5) 式有一對一之關係, 其與 (5) 式有完全一樣的配適度 (R^2), 而且會得到完全一樣的 $\hat{\alpha}_2$ 估計值, 也就是 $\hat{\gamma}_2 = \hat{\alpha}_2$ 。此外,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_1} = \gamma_1 + \gamma_2(x_2 - \bar{x}_2)$$

所以, x_1 係數 γ_1 之解釋為: 其乃是當 $x_2 = \bar{x}_2$ 時, 若 x_1 每額外增加一單位, y 平均會增加 γ_1 單位。這與無交叉項迴歸之 (2) 式中 x_1 係數 β_1 解釋是相近的!

有關交互項迴歸應該注意之事項 VI

至於主要項是否也要中心化, 其實並不重要。因為我們可以輕易證明:

$$y = \gamma'_0 + \gamma_1(x_1 - \bar{x}_1) + \gamma_2(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2) + \gamma_3(x_2 - \bar{x}_2) + u \quad (14)$$

除了常數項之外, 其餘斜率項係數與 (13) 完全一樣。所以, 就如同 Kam and Franzese (2003, p.3) 所說:

centering “alters nothing important statistically and nothing at all substantively.”

- 只對交互項中心化:

$$\begin{aligned} \text{wage} = & \gamma_0 + \gamma_1 \text{educ} + \gamma_2 [(\text{educ} - \overline{\text{educ}}) \times (\text{exper} - \overline{\text{exper}})] \\ & + \gamma_3 \text{exper} + \gamma_4 \text{married} + u \end{aligned}$$

有關交互項迴歸應該注意之事項 VII

```

. // centering interaction only (I)
. // ssc install center
. center educ exper, prefix(c)
. gen ceduc_cexper = ceduc*cexper
. reg wage educ ceduc_cexper exper married, robust

```

```

Linear regression               Number of obs   =           935
                               F(4, 930)         =           42.13
                               Prob > F           =           0.0000
                               R-squared           =           0.1626
                               Root MSE        =           370.81

```

wage	Coef.	Robust Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
educ	80.65463	6.691402	12.05	0.000	67.52263	93.78663
ceduc_cexper	3.97449	1.529389	2.60	0.010	.9730366	6.975944
exper	18.62462	3.378966	5.51	0.000	11.99333	25.2559
married	187.0312	36.39812	5.14	0.000	115.5992	258.4632
_cons	-493.3626	114.9412	-4.29	0.000	-718.9368	-267.7883

有關交互項迴歸應該注意之事項 VIII

- 同時對主要項與交互項中心化:

$$\begin{aligned} \text{wage} = & \gamma'_0 + \gamma_1(\text{educ} - \overline{\text{educ}}) \\ & + \gamma_2 [(\text{educ} - \overline{\text{educ}}) \times (\text{exper} - \overline{\text{exper}})] \\ & + \gamma_3(\text{exper} - \overline{\text{exper}}) + \gamma_4 \text{married} + u \end{aligned}$$

```
. // centering main terms and interaction (II)
. *reg wage ceduc ceduc_cexper cexper married, robust
. reg wage c.ceduc#c.cexper married, robust
```

Linear regression	Number of obs	=	935
	F(4, 930)	=	42.13
	Prob > F	=	0.0000
	R-squared	=	0.1626
	Root MSE	=	370.81

	Coef.	Robust Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]
wage					

有關交互項迴歸應該注意之事項 IX

ceduc	80.65463	6.691402	12.05	0.000	67.52263	93.78663
cexper	18.62462	3.378966	5.51	0.000	11.99333	25.2559
c.ceduc#c.cexper	3.97449	1.529389	2.60	0.010	.9730367	6.975944
married	187.0312	36.39812	5.14	0.000	115.5992	258.4632
_cons	808.2986	34.41927	23.48	0.000	740.7501	875.847

可以發現，兩者結果只差在常數項之估計值。

- ⑤ 内生性之處理：若遇到 x_2 是內生的 (endogenous) 變數， x_1 是外生的 (exogenous) 變數，而 z 為 x_2 之正確工具變數 (valid instrument)，則 ' $x_1 z$ ' 也將是 ' $x_1 x_2$ ' 之正確工具變數。

有關交互項迴歸應該注意之事項 X

- Rajan and Zingales (1998) 為了了解金融發展是否會對經濟成長造成影響，提出一個嶄新的方法並利用來跨國、跨產業資料來驗證。其模型設定為：

$$G_{j,k} = \beta_0 + \Gamma_1 \cdot \text{Industry Dummy}_j + \Gamma_2 \cdot \text{Country Dummy}_k + \beta_1 S_{j,k} + \beta_2 \cdot (ED_j \times FD_k) + \epsilon_{j,k} \quad (15)$$

其中， j 代表產業而 k 代表國家。 $G_{j,k}$ 乃是實質附加價值 (real value added) 年成長率家之平均值 (1980–1990 年)、 Industry Dummy_j (Country Dummy_k) 為產業 (國家) 虛擬變數、 $S_{j,k}$ 代表 j 產業佔總製造業附加價值於期初 (1980 年) 的比例、 ED_j 代表 j 產業對外資金仰賴程度 (external dependence) 而 FD_k 則是表示 k 國之金融發展 (financial development) 程度。其中，最重要的就是 ED_j 與 FD_k (可能有內生性，常用國家法源 legal origins and rule of law 來當作工具變數) 的交叉項；根據 RZ 的猜測，一個產業對外資金仰賴程度越高，而且其所在的國

有關交互項迴歸應該注意之事項 XI

家之金融發展程度越好，其之（產業）經濟成長應該越快。換言之， β_2 應為正數，而其結果也支持該說法。

- 另外，Aghion, Howitt, and Mayer-Foulkes (2005) 的迴歸如下：

$$g_i - g_1 = \beta_0 + \beta_f F_i + \beta_y (y_i - y_1) + \beta_{fy} [F_i \cdot (y_i - y_1)] + u_i \quad (16)$$

其中， g 代表經濟成長、 F 為金融發展程度（可能有內生性，用國家法源來當作工具變數）而 y 為起始期所得（控制收斂效果）。註：有下標 1 的是指美國資料，換言之，結果是相對於美國的。

有關交互項迴歸應該注意之事項 XII

- ⑥ **利用圖形展示完整結果:** 有時我們想知道, 在不同的 x_2 值下, x_1 對 y 的邊際效果為多少 (有些 x_2 值下可能為正、有些則可能為負)? 是否顯著 (有些 x_2 值下可能顯著、有些則可能不顯著)? 所以, 我們必須計算 (6) 式的變異數 (開根號為標準誤) 如下:

$$V(\alpha_1 + \alpha_2 x_2) = V(\alpha_1) + x_2^2 V(\alpha_2) + 2x_2 \text{Cov}(\alpha_1, \alpha_2)$$

可以用外掛程式 'interflex' 來畫圖形展示不同 x_2 值下, x_1 對 y 之邊際效果。

接著，我們考慮兩個主要項的解釋變數，一個是連續的 (continuous)、一個是離散的 (discrete) 的情況。底下的例子中，`black` 為一虛擬變數，若一人為黑人，則其值為 1，否則為 0。

$$\text{wage} = \alpha_0 + \alpha_1 \text{educ} + \alpha_2 (\text{educ} \times \text{black}) + \alpha_3 \text{black} + \alpha_4 \text{married} + u \quad (17)$$

- educ 對 wage 的邊際效果 (ME_e) 如下：

$$\begin{aligned} \text{ME}_e = \frac{\Delta \text{wage}}{\Delta \text{educ}} &= \alpha_1 + \alpha_2 \text{black} \\ &= \begin{cases} \alpha_1 & \text{if black} = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & \text{if black} = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

而對應之標準誤為:

$$\begin{aligned}
 se(\text{ME}_e) &= \sqrt{V(\alpha_1 + \alpha_2 \text{black})} \\
 &= \sqrt{V(\alpha_1) + \text{black}^2 V(\alpha_2) + 2 \text{black} \text{Cov}(\alpha_1, \alpha_2)} \\
 &= \begin{cases} \sqrt{V(\alpha_1)}, & \text{if black} = 0 \\ \sqrt{V(\alpha_1) + V(\alpha_2) + 2 \text{Cov}(\alpha_1, \alpha_2)}, & \text{if black} = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

- black 對 wage 的邊際效果 (ME_b) 如下:

$$\text{ME}_b = \frac{\Delta \text{wage}}{\Delta \text{black}} = \alpha_1 + \alpha_2 \text{educ}$$

而對應之標準誤為:

$$\begin{aligned}
 se(\text{ME}_b) &= \sqrt{V(\alpha_1 + \alpha_2 \text{educ})} \\
 &= \sqrt{V(\alpha_1) + \text{educ}^2 V(\alpha_2) + 2 \text{educ} \text{Cov}(\alpha_1, \alpha_2)}
 \end{aligned}$$

一連續、一離散之交互項

```
. *****
. ** (II) continuous + discrete **
. *****
. // without interaction
. reg wage educ black married, robust
```

```
Linear regression
```

Number of obs	=	935
F(3, 931)	=	55.55
Prob > F	=	0.0000
R-squared	=	0.1523
Root MSE	=	372.89

wage	Coef.	Robust Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
educ	56.92315	6.090257	9.35	0.000	44.97092	68.87537
black	-178.2715	30.34796	-5.87	0.000	-237.8299	-118.7132
married	191.9787	35.36565	5.43	0.000	122.573	261.3843
_cons	42.7125	89.81772	0.48	0.635	-133.5561	218.9812

```
. // with interaction
. reg wage c.educ##i.black married, robust
```

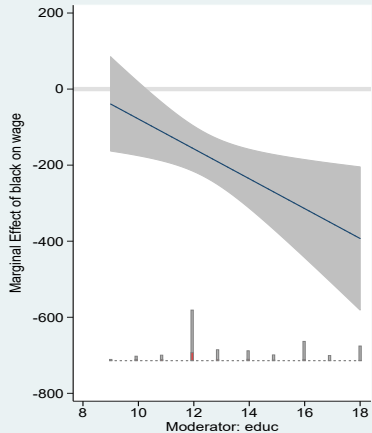
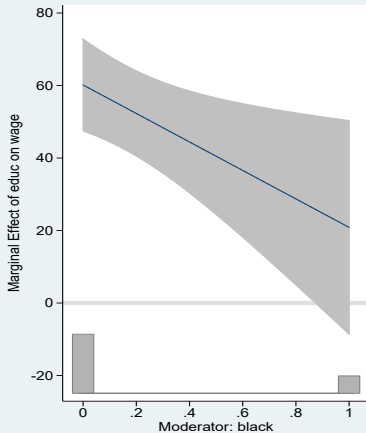
```
Linear regression
```

Number of obs	=	935
F(4, 930)	=	42.36
Prob > F	=	0.0000

R-squared = 0.1556
Root MSE = 372.36

wage	Coef.	Robust Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
educ	60.15103	6.467409	9.30	0.000	47.45862	72.84344
1.black	314.2491	204.8295	1.53	0.125	-87.73252	716.2307
black#c.educ 1	-39.28515	16.33241	-2.41	0.016	-71.33779	-7.232504
married	190.877	35.3198	5.40	0.000	121.5613	260.1928
_cons	-.2592446	94.01292	-0.00	0.998	-184.7613	184.2428

一連續、一離散之交互項



最後我們考慮兩個主要項的解釋變數都是離散的 (discrete) 情況。底下的例子中, `black` 為一虛擬變數, 若一人為黑人, 則其值為 1, 否則為 0; `south` 亦為一虛擬變數, 若一人居住於南方, 則其值為 1, 否則為 0。

$$\text{wage} = \alpha_0 + \alpha_1 \text{black} + \alpha_2 (\text{black} \times \text{south}) + \alpha_3 \text{south} + \alpha_4 \text{educ} + u$$

`black` 對 `wage` 的邊際效果 (ME_b) 如下 (`south` 之分析完全相同):

$$\begin{aligned} \text{ME}_b &= \frac{\Delta \text{wage}}{\Delta \text{black}} = \alpha_1 + \alpha_2 \text{south} \\ &= \begin{cases} \alpha_1 & \text{if south} = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & \text{if south} = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

而對應之標準誤為:

$$\begin{aligned}
 se(\text{ME}_b) &= \sqrt{V(\alpha_1 + \alpha_2 \text{ south})} \\
 &= \sqrt{V(\alpha_1) + \text{south}^2 V(\alpha_2) + 2\text{south} \text{Cov}(\alpha_1, \alpha_2)} \\
 &= \begin{cases} \sqrt{V(\alpha_1)} & \text{if south} = 0 \\ \sqrt{V(\alpha_1) + V(\alpha_2) + 2 \text{Cov}(\alpha_1, \alpha_2)} & \text{if south} = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

一樣地, 我們首先報告沒有交互項之結果:

```
. *****
. ** (III) discrete + discrete **
. *****
. // without interaction
. reg wage black south educ, robust
```

Linear regression

Number of obs	=	935
F(3, 931)	=	50.28
Prob > F	=	0.0000
R-squared	=	0.1402
Root MSE	=	375.56

兩個離散變數

wage	Coef.	Robust Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
black	-162.9069	31.93441	-5.10	0.000	-225.5787	-100.2352
south	-84.43181	27.53549	-3.07	0.002	-138.4706	-30.39299
educ	53.99133	6.125652	8.81	0.000	41.96964	66.01301
_cons	280.48	80.96168	3.46	0.001	121.5915	439.3686

上表之解釋還算標準，所以就暫時省略了！接下來，我們以‘人工’方式計算相關數值，讓大家更有概念。

```
. // with interaction
. gen black_south = black*south
. reg wage black black_south south educ, robust
```

Linear regression	Number of obs	=	935
	F(4, 930)	=	43.08
	Prob > F	=	0.0000
	R-squared	=	0.1437
	Root MSE	=	374.99

兩個離散變數

wage	Coef.	Robust Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
black	-74.58742	50.73888	-1.47	0.142	-174.1634	24.98855
black_south	-149.6337	64.34495	-2.33	0.020	-275.9119	-23.3556
south	-63.26966	30.58202	-2.07	0.039	-123.2874	-3.251897
educ	54.53846	6.108172	8.93	0.000	42.55106	66.52586
_cons	266.7186	80.8305	3.30	0.001	108.0873	425.3499

```

. matrix b = e(b)
. matrix V = e(V)
. scalar b1 = b[1,1]
. scalar b2 = b[1,2]
. scalar b12 = b1+b2
. scalar v1 = V[1,1]
. scalar v2 = V[2,2]
. scalar cov12 = V[1,2]
. scalar se1 = sqrt(v1)
. scalar se2 = sqrt(v1+v2+2*cov12)
. scalar list b1 se1 b12 se2
      b1 = -74.587419
      se1 = 50.738881
      b12 = -224.22115

```



```
se2 = 39.695136
```

當然, 我們也可以藉由 `interflex` 指令來直接畫圖, 可以讓大家對不同狀況下的邊際效果一目瞭然。

```
. reg wage i.black##i.south educ, robust
```

Linear regression	Number of obs	=	935
	F(4, 930)	=	43.08
	Prob > F	=	0.0000
	R-squared	=	0.1437
	Root MSE	=	374.99

wage	Coef.	Robust Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
1.black	-74.58742	50.73888	-1.47	0.142	-174.1634	24.98855
1.south	-63.26966	30.58202	-2.07	0.039	-123.2874	-3.251897
black#south 1 1	-149.6337	64.34495	-2.33	0.020	-275.9119	-23.3556
educ	54.53846	6.108172	8.93	0.000	42.55106	66.52586

_cons	266.7186	80.8305	3.30	0.001	108.0873	425.3499
-------	----------	---------	------	-------	----------	----------

其結果如下：從左圖之左邊可以看出，在非南方地區 ($\text{south} = 0$)，黑人相對於非黑人之工資少 74.5874 美元，但 95% 的信賴區間包括 0，因此我們判定此差距 (74.5874 美元) 在統計上不顯著異於 0。此外，左圖之右邊指出，在南方地區 ($\text{south} = 1$)，黑人相對於非黑人之工資少 $74.5874 + 149.6337 = 224.2211$ 美元，而且 95% 的信賴區間並不包括 0，因此我們判定其在統計上顯著小於 0。所以我們的結論為：在南方，黑人的工資顯著少於非黑人之工資；但在非南方，黑人的工資與非黑人之工資並無統計上之顯著差異！

兩個離散變數

