

# 第三次作业

提交 DDL: 2021 年 12 月 6 日 0 时

作业完成形式有三种:

- (1) 你可以手写自己的解答并拍照, 再将照片整理成一份 word/pdf 文件并提交。
- (2) 你可以使用 word 文档进行编辑, 最后提交 word/pdf 文件。
- (3) 你可以使用 latex 进行编辑, 最后提交 pdf 文件。

如果你没有在 DDL 之前提交作业, 请及时在微信群里联系助教进行补交。如果对作业有任何问题, 你可以在从微信里询问助教谢瑜璋, 或者发邮件到 [constantjxyz@sjtu.edu.cn](mailto:constantjxyz@sjtu.edu.cn)。

## 1 本次作业可能用到的知识点

本次作业可能会用到以下知识点:

- (1) 命题逻辑 (propositional logic)、谓词逻辑 (first-order logic) 的定义、语义
- (2) 逻辑证明的假言推理规则 (Modus Ponens)、归结证明 (resolution)。
- (3) 逻辑推理的前向链接算法 (forward chaining)、后向链接算法 (backward chaining)。
- (3) 贝叶斯网络节点联合概率表示, 马尔科夫毯 (Markov Blanket) 的定义, 贝叶斯网络中的条件独立 (conditional independence) 关系
- (4) 贝叶斯网络中的精确推理、消元法
- (5) 贝叶斯网络近似推理的采样方法
- (6) HMM 模型的建模方式、概率推导

## 2 第一题

2-CNF 表达式类似于 3-CNF, 其中每个子句 (clause) 里含有两个文字 (literals), 例如:

$$(a \vee b) \wedge (\neg a \vee c) \wedge (\neg b \vee d) \wedge (\neg c \vee g) \wedge (\neg d \vee g)$$

(1) 运用反证法, 证明上面的表达可以推导出  $g$  (the above sentence entails  $g$ ), 可以参考课件的归结证明 resolution 部分。

(2) 对于 2-CNF 问题, 假设现在我们有  $n$  个不同的符号。如果我们规定每个子句要求用不同的符号组成, 那么我们可以用这  $n$  个符号组成多少种语义不同 (semantic distinct) 的子句 (clause)? 如果我们规定每个子句可以用相同的符号组成, 那么我们可以用这  $n$  个符号组成多少种语义不同的子句?

## 3 第二题

我们建立了一个新的数学空间, 在这个空间里有以下公理:

- 1.  $0 \leq 3$
- 2.  $7 \leq 9$
- 3.  $\forall x \quad x \leq x$

- 4.  $\forall x \quad x \leq x + 0$
- 5.  $\forall x \quad x + 0 \leq x$
- 6.  $\forall x, y \quad x + y \leq y + x$
- 7.  $\forall w, x, y, z \quad x \leq y \wedge w \leq z \Rightarrow w + x \leq y + z$
- 8.  $\forall x, y, z \quad x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

我们希望用以上原子语句进行推理，得到  $7 \leq 3 + 9$ 。注意在推理的过程中，我们只能使用以上 8 条公理，不能使用现实数学中的各种运算。

(1) 假如我们使用反向链接算法（见课件上 backward chaining 部分）。我们可以得到以下推理过程，请完善推理过程。

Goal G0:  $7 \leq 3 + 9$ , resolve with axiom 8 and  $\{x0/7, z0/(3 + 9), y0/(7 + 0)\}$   
*/\*Use axiom 8, and substitute the  $(x, y, z)$  in axiom with  $(7, (7+0), (3+9))$ \*/*  
*/\*To achieve Goal G0, we need to find a intermediate  $(7+0)$  and achieve Goal G1 and G2.\*/*  
 Goal G1:  $7 \leq 7 + 0$ , resolve with (a) \_\_\_\_\_. Goal G1 Succeeds.  
 Goal G2:  $7 + 0 \leq 3 + 9$ , resolve with (b) \_\_\_\_\_.  
*/\*To achieve Goal G2, we need to find a intermediate and achieve Goal G3 and G4.\*/*  
 Goal G3:  $7 + 0 \leq n$ , resolve with (c) \_\_\_\_\_. Goal G3 Succeeds.  
 Goal G4:  $n \leq 3 + 9$ , resolve with (d) \_\_\_\_\_.  
*/\*To achieve Goal G4, we need to find a intermediate and achieve Goal G5 and G6.\*/*  
 Goal G5:  $0 \leq 3$ , resolve with axiom 1. Goal G5 Succeeds.  
 Goal G6:  $7 \leq 9$ , resolve with axiom 2. Goal G6 Succeeds.  
 Goal G4 succeeds.  
 Goal G2 succeeds.  
 Goal G0 succeeds.

(2) 假如我们使用前向链接算法（见课件上 forward chaining 部分），我们可以怎样推理得到结论？请写出推理过程。

## 4 第三题

给定下图1所示的贝叶斯网络。网络中有  $(B, A, E, J, M)$  五个变量。

(1) 根据给定的贝叶斯网络对联合概率  $P(B, E, A, J, M)$  进行因子分解。

(2) 对于变量  $B$  而言，我们给定哪一个或者两个变量的值，能够使得该变量条件独立于贝叶斯网络中的其他变量？

(3) 如果我们给定变量  $A$  的值，其他的变量  $(B, E, J, M)$  之间有哪些是条件独立的？如果我们不给定变量  $A$  的值呢？注意，贝叶斯网络间两个节点条件独立可以写为  $X_i \perp X_j$ 。

(4) 我们希望求解贝叶斯网络中  $J = j, M = m, B = b$  的概率，即  $P(B = b_0, J = j_0, M = m_0)$ 。请根据联合概率的表达式列出计算  $P(B = b_0, J = j_0, M = m_0)$  的表达式。除此以外，请列出使用消元法求解  $P(B = b_0, J = j_0, M = m_0)$  的过程。为了方便，我们要求消元的顺序是  $M \rightarrow J \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow B$ 。

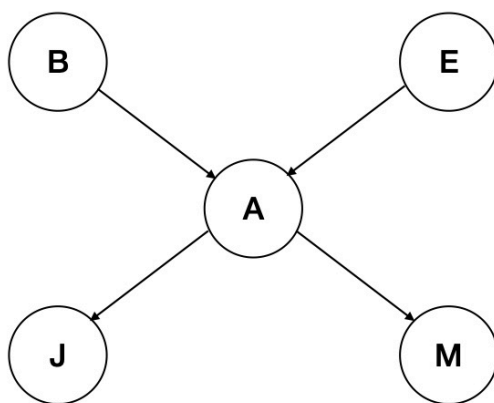


图 1: 第三题的贝叶斯网络

## 5 第四题

给定如下图2所示的贝叶斯网络模型。我们希望从给定的模型中通过取样的方式进行一些概率的估算，且我们规定采样时该模型各节点的拓扑顺序为  $(A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D)$

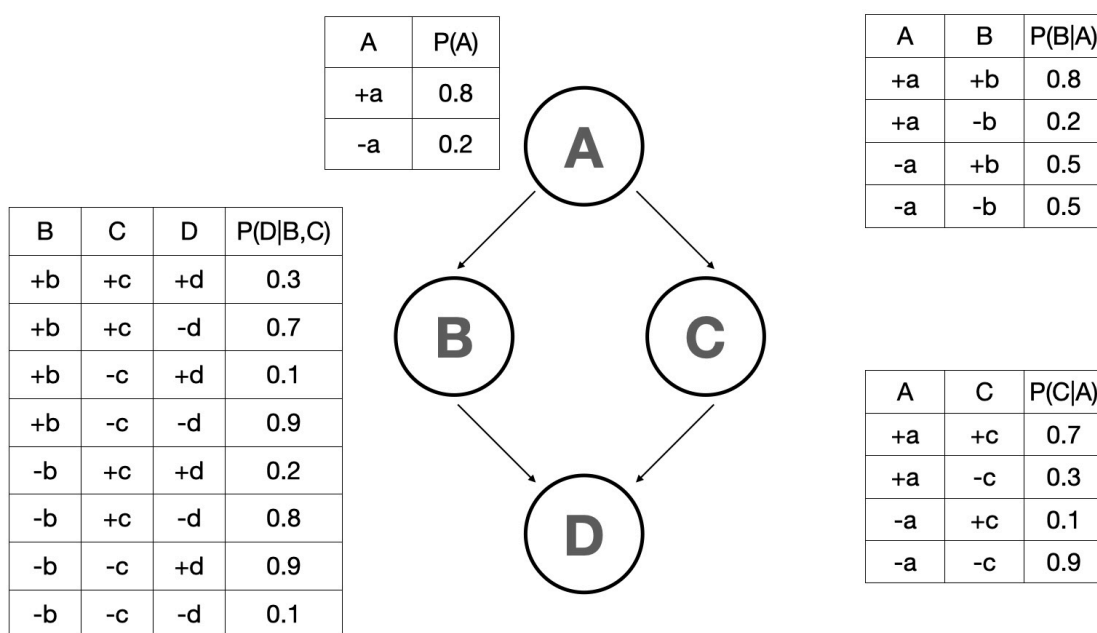


图 2: 第四题的贝叶斯网络

示例：采用先验采样（prior sample）的方法生成样本。给定采样过程中的随机数为  $(0.31 \rightarrow 0.58 \rightarrow 0.04 \rightarrow 0.94 \rightarrow 0.67 \rightarrow 0.49 \rightarrow 0.37 \rightarrow 0.42)$ 。

- 首先我们取随机数  $r = 0.31$ ，而  $r = 0.31 < P(+a) = 0.8$ ，因此对于节点  $A$  我们取  $+a$

- 接着随机数  $r = 0.58 < P(+b|+a) = 0.8$ , 因此对于节点  $B$  我们取  $+b$
- 随机数  $r = 0.04 < P(+c|+a) = 0.7$ , 因此对于节点  $B$  我们取  $+c$
- 随机数  $r = 0.94 > P(+d|+b, +c) = 0.3$ , 因此对于节点  $D$  我们取  $-d$ 。这样我们通过一次采样得到了一个样本  $(+a, +b, +c, -d)$
- 随机数  $r = 0.67 < P(+a) = 0.8$ , 因此对于节点  $A$  我们取  $+a$
- 随机数  $r = 0.49 < P(+b|+a) = 0.8$ , 因此对于节点  $B$  我们取  $+b$
- 随机数  $r = 0.37 < P(+c|+a) = 0.7$ , 因此对于节点  $C$  我们取  $+c$
- 随机数  $r = 0.42 > P(+d|+b, +c) = 0.3$ , 因此对于节点  $D$  我们取  $-d$ 。这样我们通过一次取样获得了一个新的样本  $(+a, +b, +c, -d)$
- 采用了八个随机数, 进行了两次采样, 得到了两个样本, 均为  $(+a, +b, +c, -d)$

(1) 采用拒绝采样的方法 (rejection sampling) 计算  $P(-d|-b)$ , 请参照模型上方的示例写出采样过程 (包括最后进行了几次采样, 得到了怎样的样本)。采样时的随机数为  $(0.31 \rightarrow 0.58 \rightarrow 0.04 \rightarrow 0.94 \rightarrow 0.67 \rightarrow 0.49 \rightarrow 0.37 \rightarrow 0.42)$ , 且规定当随机数  $r < P(+a)$  时采样  $+a$ , 当  $r \geq P(+a)$  时采样  $-a$ , 随机数用完以后即废弃、当所有随机数用完整个算法停止。

(2) 采用似然采样的方法 (likelihood weighting sampling) 计算  $P(-d|-b)$ , 请参照模型上方的示例写出采样过程 (包括最后进行了几次采样, 得到了怎样的样本)。采样时的随机数为  $(0.31 \rightarrow 0.58 \rightarrow 0.04 \rightarrow 0.94 \rightarrow 0.67 \rightarrow 0.49)$ , 且规定当随机数  $r < P(+a)$  时采样  $+a$ , 当  $r \geq P(+a)$  时采样  $-a$ , 随机数用完以后即废弃、当所有随机数用完整个算法停止。

(3) 采用吉布斯采样的方法 (Gibbs sampling) 计算  $P(-d|-b)$ , 请参照模型上方的示例写出采样过程 (包括最后进行了几次采样, 得到了怎样的样本)。采样时的随机数为  $(0.31 \rightarrow 0.58 \rightarrow 0.04 \rightarrow 0.94 \rightarrow 0.67 \rightarrow 0.49)$ , 采样初时刻的节点取值初始化为  $(+a, -b, +c, +d)$ , 且规定当随机数  $r < P(+a)$  时采样  $+a$ , 当  $r \geq P(+a)$  时采样  $-a$ , 随机数用完以后即废弃、当所有随机数用完整个算法停止。

## 6 第五题

给定一个隐马尔可夫模型 (HMM)。

(1) 运用 HMM 的建模方式, 用条件概率的计算方式推导并化简  $P(x_1, \dots, x_t, y_{t-1} = s_v, y_t = s_j)$ 。

提示: 一般来说, 我们会对 HMM 模型有以下的建模方式 (与课件上一致)—— $x_t$  表示  $t$  时刻的观察状态,  $y_t$  表示  $t$  时刻的隐藏状态, 隐藏状态可能取值为  $\{1, 2, 3, \dots, M\}$ 。初始状态的概率 (start probabilities) 表示为  $\{\pi_1, \dots, \pi_M\}$ , 隐藏状态之间从状态  $i$  转化为状态  $j$  的转移概率 (transition probabilities) 为  $a_{i,j}$ , 隐藏状态  $y_j$  与观察状态  $x_i$  之间的发散概率 (emission probabilities) 为  $b_j(x_i)$ 。在使用前向算法推导序列概率的时候, 设定的前向因子  $\alpha_t^i = P(x_1, \dots, x_t, y_t = s_i)$ 。

(2) 我们给定的 HMM 模型如下图3所示。假定图中的圆圈表示  $A, B, C$  三种可能的隐藏状态, 而圆圈中的数字表示特定隐藏状态下的观察状态以及其发射概率 (emission probabilities)。圆圈之间的箭头表示隐藏状态的转移以及相应的转移概率 (transition probabilities)。我们用  $p_{y=A}^t$  表示在  $t$  时刻, 隐状态为  $A$  的概率, 用  $p_{x=1}^t$  表示在  $t$  时刻, 观察状态为 1 的概率。为了简便, 我们规定初始的隐状态为  $A$ , 即  $p_A^1 = 1$ 。在每个时刻, 隐状态会通过转移概率确定下个时刻的状态。

(a) 请用图中给定的数值与符号计算  $p_{y=C}^3$ 。

(b) 假设在  $t$  时刻,  $(p_{y=B}^t, p_{y=C}^t)$  分别为  $(b_0, c_0)$ , 请用图中给定的数值与符号计算  $p_{x=2}^t$ 。

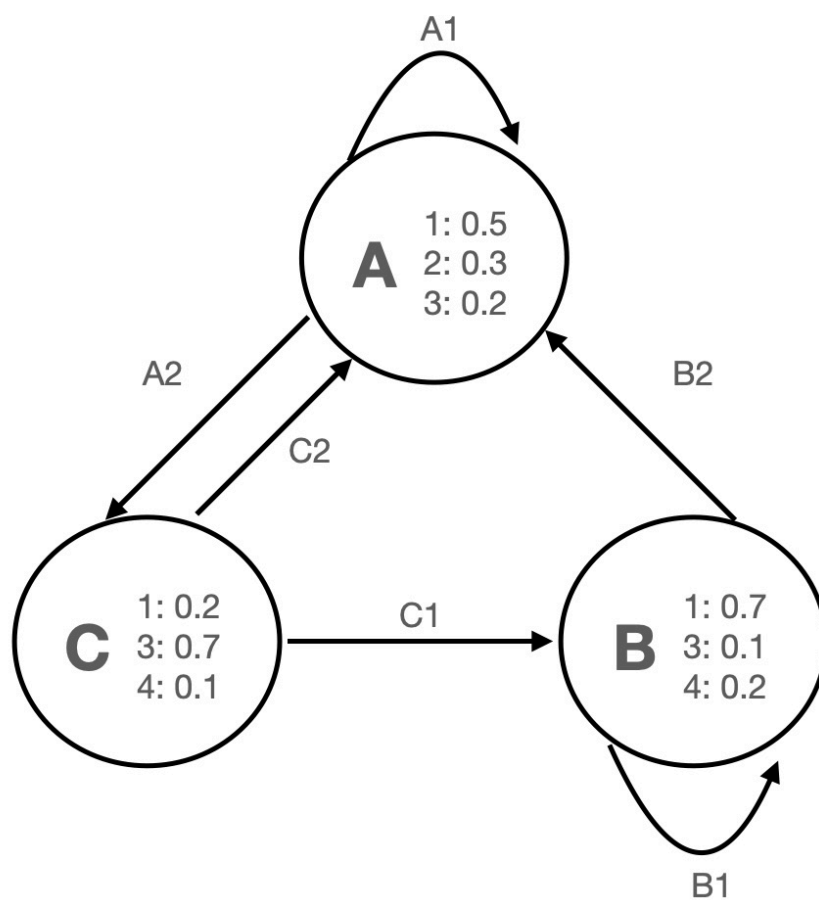


图 3: 第四题第二小问的 HMM 模型

## 7 作业反馈

点击访问链接<https://www.wjx.cn/vj/tMDNNZ5.aspx>或者扫描下方二维码就可以反馈意见。



图 4: 作业调查问卷