

## 第3章 离散时间信号的傅立叶变换和Z变换

- 3.1 线性非时变系统对正弦信号激励的响应
- 3.2 离散时间信号傅立叶变换(DTFT)
- 3.3 线性非时变系统的频域表示方法
- 3.4 离散时间信号的Z变换
- 3.5 系统函数
- 3.6 常数系数线性差分方程与信号流程图表示
- 全章小结

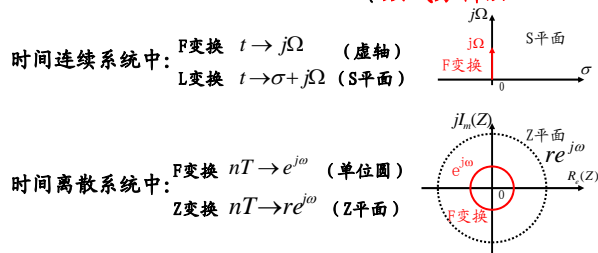
## 知识要点

本章主要介绍时域离散信号和系统的频域分析。  
基本内容包括：

- (1) LSI 系统对正弦信号的响应、DTFT、Z变换及其周期性特点和性质；
- (2) LSI 系统的频率响应函数、系统函数及其系统因果性和稳定性的判定；
- (3) 根据差分方程确定FIR系统和IIR系统的分类及信号流程图。

信号和系统的分析方法有两种

时域分析法  
频域分析法



3

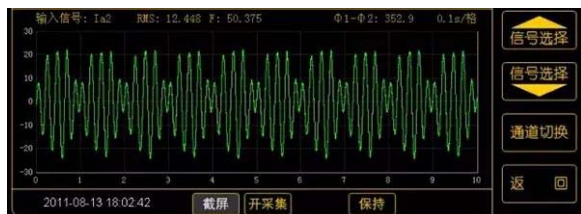
### 频域分析的重要性

在信号处理中，信号的频域分析一直都起着重要的作用，是两大分析手段之一，因为，信号的一些特性在时域中不太容易体现出来，而在频域能很好的凸显出它的特性，所以频域分析是分析处理信号的常用手段。

- In physics, 信号的频域的表达方式在体现信号某些特性方面具有优势，便于信号处理；
- In mathematics, 通过FT和ZT可以使信号处理方法更简化，便于提取信号特征；

4

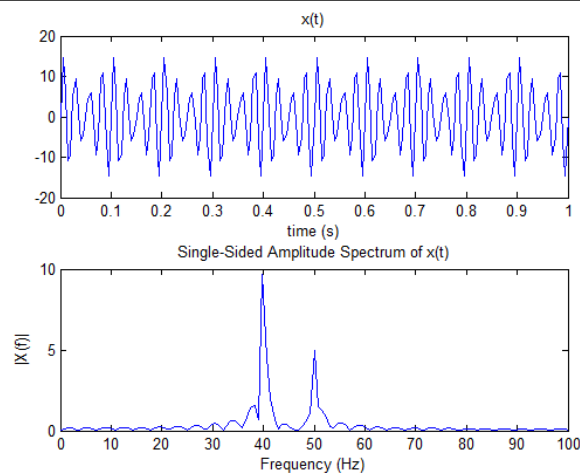
为什么要进行傅里叶变换呢？

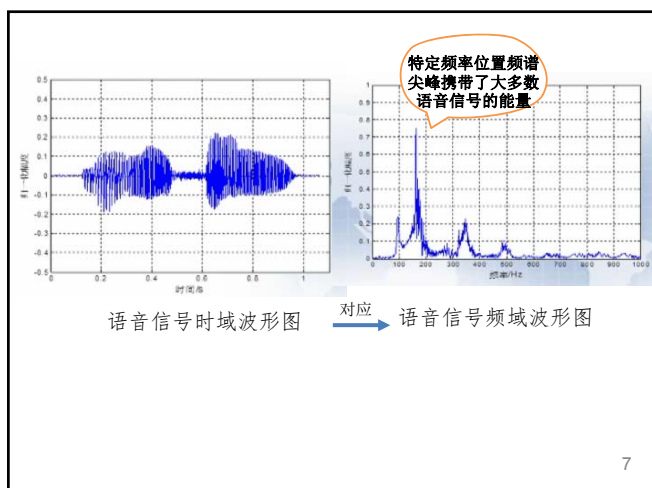


通过示波器观测实时波形，从时域去分析，看到的仅仅是一个类似正弦波的波形，其幅值在按照一定的规律变化。

上述波形采用傅里叶变换后，就是一个50Hz的正弦波上叠加一个40Hz的正弦波，两者幅度不同，

5





7

- In physics, 语音信号处理时可以基于语音信号的基本频率和形成语音发声的共振峰的特点, 进行:

- (1) 语音分析;
- (2) 语音识别;
- (3) 语音压缩;

- In mathematics, 利用ZT, 将时域差分方程变换转换成z域的代数方程:

如:  $x(n-k) \Leftrightarrow z^{-k}X(z)$      $y(n-k) \Leftrightarrow z^{-k}Y(z)$

$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

$$\Downarrow$$

$$Y(z) = \sum_{k=1}^N a_k Y(z) z^{-k} + \sum_{r=0}^M b_r X(z) z^{-r}$$

8

傅里叶变换是法国数学家、物理学家傅里叶提出的一种信号分析的方法。傅里叶在1807证明了任意连续周期信号可以分解为正弦波的组合。使得信号分析问题变得更简单, 因为: 正弦波输入至任何线性系统, 出来的还是正弦波, 改变的仅仅是幅值和相位, 即: 正弦波输入至线性系统, 不会产生新的频率成分。



### 3.1 LSI系统对正弦信号激励的响应

$$x(n) = Ae^{j\omega n} \xrightarrow{\text{LSI}} h(n) \rightarrow y(n)$$

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot Ae^{j\omega(n-k)}$$

$$= Ae^{j\omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot e^{-j\omega k} \rightarrow H(e^{j\omega})$$

$$\therefore y(n) = Ae^{j\omega n} H(e^{j\omega}) = x(n)H(e^{j\omega})$$

$$y(n) = x(n)H(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})Ae^{j\omega n}$$

LSI系统对复指数(正弦型)序列 $x(n)$ 的响应是一个与输入序列具有相同频率的复指数序列, 只是输出序列的幅度和相位发生了变化:

$$y(n) = |H(e^{j\omega})| Ae^{j(\omega n + \arg[H(e^{j\omega})])} \quad (3.2)$$

$$x(n) = Ae^{j\omega n} \xrightarrow{\text{LSI}} h(n) \rightarrow y(n)$$

幅度                      相位

当一个复指数序列作用到LSI系统时, 输出特征取决于

$H(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[h(n)]$ , 将  $H(e^{j\omega})$  称为系统的频率响应

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} \quad (3.3)$$

$H(e^{j\omega})$  是一个关于 $\omega$ 的复函数, 它是由 $h(n)$ 的傅里叶变换得到的。



## 3.2 离散时间信号傅立叶变换 (DTFT: Discrete Time Fourier Transform)

### 3.2.1 DTFT的定义

### 3.2.2 序列傅立叶变换的性质



### 3.2.1 DTFT的定义

对于一般的序列  $x(n)$ ，DTFT定义为：

离散时间、连续频率

$X(e^{j\omega})$  连续的，表示了  $x(n)$  中不同频率的正弦信号幅度和相位的分布

$$\left\{ \begin{array}{l} X(e^{j\omega}) = FT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n} \\ x(n) = IFT[X(e^{j\omega})] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega \end{array} \right. \quad (3.4)$$

$x(n)$  离散的，表示  $x(n)$  序列是由不同频率的正弦信号线性叠加构成

DTFT成立的充要条件是序列  $x(n)$  绝对可和：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| < \infty \quad (3.5)$$

14

DTFT的物理意义

DTFT的物理意义是：DTFT表示了序列所包含的不同频率正弦分量的幅度和相位分布。

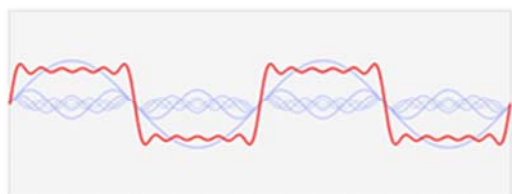
DTFT的计算结果可以称为序列的“频谱”，同连续时间信号的傅里叶变换一样，仍然具有原连续时间信号的傅里叶变换特征和属性，是原连续时间信号傅里叶变换以  $2\pi$  为周期的周期延拓。

15

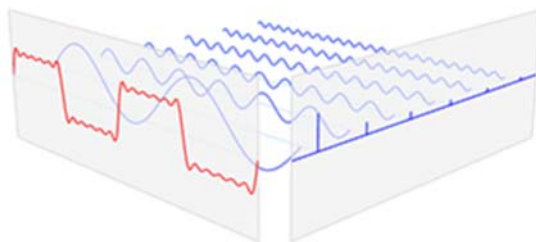


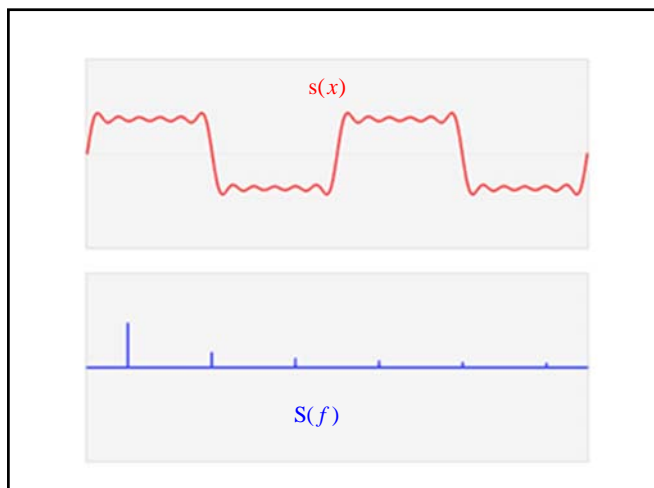
16

$s_6(x)$



$$a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$





## 【例3-1】

$x(n) = R_N(n)$ ，求  $x(n)$  的DTFT。

解：按定义式求解

$$\begin{aligned}
 X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_N(n) e^{-j\omega n} \\
 \left. \begin{aligned} &\text{有限级数求和公式} \\ &\sum_{n=n_1}^{n_2} a^n = \frac{a^{n_1} - a^{n_2+1}}{1-a} \end{aligned} \right\} \Rightarrow &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}} \\
 &= \frac{e^{-j\omega N/2} (e^{j\omega N/2} - e^{-j\omega N/2})}{e^{-j\omega/2} (e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})} \\
 &= e^{-j\omega(N-1)/2} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}
 \end{aligned}$$

20

当  $N=4$  时

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^3 e^{-j\omega n} = e^{-j\frac{3}{2}\omega} \cdot \frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)}$$

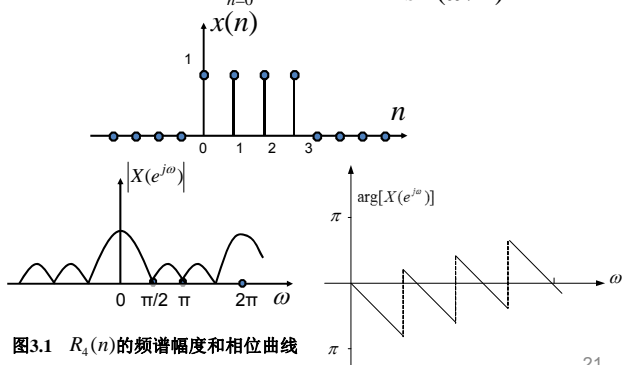


图3.1  $R_4(n)$  的频谱幅度和相位曲线

21

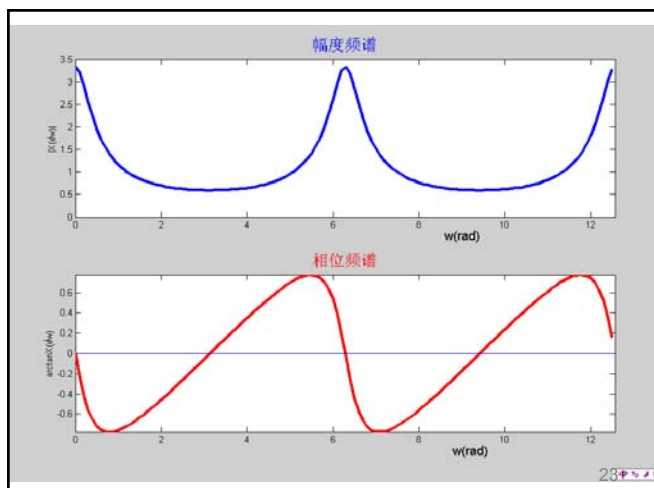
## 【例3-2】

$x(n) = a^n u(n)$ ， $|a| < 1$ ，求  $X(e^{j\omega})$

解：由定义得

$$\begin{aligned}
 X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n \\
 \text{因为 } |a| < 1, \text{ 所以 } |ae^{-j\omega}| < 1, \text{ 则 } &X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \\
 |X(e^{j\omega})| &= (1 + a^2 - 2a \cos \omega)^{-1/2} \\
 \arg[X(e^{j\omega})] &= -\arctan\left(\frac{a \sin \omega}{1 - a \cos \omega}\right)
 \end{aligned}$$

22



23

表3.1 典型序列的离散时间傅里叶变换。

序列	离散时间傅里叶变换
$\delta(n)$	1
1	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega + 2\pi k)$
$u(n)$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega + 2\pi k)$
$e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$
$a^n u(n)$ , $ a  < 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$

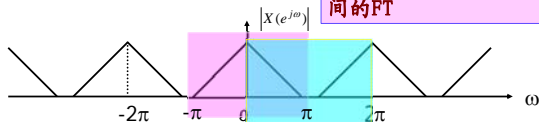
### 3.2.2 序列傅立叶变换的性质

#### 1. 周期性

$$\begin{aligned} X(e^{j(\omega+2\pi M)}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(\omega+2\pi M)n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \\ &= X(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

可见, 当M为整数时, 序列  $x(n)$  的傅立叶变换  $X(e^{j\omega})$  是  $\omega$  的周期函数, 周期是  $2\pi$

由于FT的周期性, 一般只分析  $\pm\pi$  之间或  $0 \sim 2\pi$  之间的FT



25

#### 2. 线性

$$\begin{aligned} x_1(n) &\xrightarrow{\text{FT}} X_1(e^{j\omega}) \\ x_2(n) &\xrightarrow{\text{FT}} X_2(e^{j\omega}) \\ ax_1(n) + bx_2(n) &\xrightarrow{\text{FT}} aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

#### 3. 时移与频移

$$\begin{aligned} x(n) &\xrightarrow{\text{FT}} X(e^{j\omega}) \\ x(n - n_0) &\xrightarrow{\text{FT}} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega}) \\ e^{\pm j\omega_0 n} x(n) &\xrightarrow{\text{FT}} X(e^{j(\omega \mp \omega_0)}) \end{aligned}$$

26

### 4. 对称性★

#### 时域序列的共轭对称性

若  $x(n)$  是复序列

- 若序列  $x(n)$  满足  $x(n) = x^*(-n)$ , 则称  $x(n)$  为共轭对称序列, 记为  $x_e(n)$   
若  $x_e(n)$  为实序列, 则称  $x_e(n)$  为偶序列
- 若序列  $x(n)$  满足  $x(n) = -x^*(-n)$ , 则称  $x(n)$  为共轭反对称序列, 记为  $x_o(n)$   
若  $x_o(n)$  为实序列, 则称  $x_o(n)$  为奇序列
- 任意一个序列  $x(n)$  总可以表示成一个共轭对称序列和一个共轭反对称序列之和, 即:  $x(n) = x_e(n) + x_o(n)$

$$\text{其中} \begin{cases} x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)] & \leftarrow \text{共轭对称序列} \\ x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)] & \leftarrow \text{共轭反对称序列} \end{cases}$$

27

#### 频域信号的共轭对称性

对于  $x(n)$  的频域信号  $X(e^{j\omega})$ : 有相似的概念和结论

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega})$$

共轭对称部分

共轭反对称部分

$$X_e(e^{j\omega}) = X_e^*(e^{-j\omega}) \quad X_o(e^{j\omega}) = -X_o^*(e^{-j\omega})$$

$$\text{其中} \begin{cases} X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})] \\ X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})] \end{cases}$$

28

#### 序列 $x(n)$ 与其傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 的共轭对称性关系

(1) 将序列分为实部和虚部, 分别对两部分作傅立叶变换, 可以证明实部对应的DTFT具有共轭对称性, 虚部和  $j$  一起对应的DTFT变换具有共轭反对称性。

$$x_r(n) = \text{Re}[x(n)], x_i(n) = \text{Im}[x(n)]$$

$$x(n) = x_r(n) + jx_i(n)$$

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$

$$\text{FT}[x_r(n)] = X_R(e^{j\omega})$$

$$\text{FT}[jx_i(n)] = X_I(e^{j\omega})$$

29

(2) 将序列分为共轭对称部分和共轭反对称部分, 分别对两部分作傅立叶变换, 序列共轭对称部分的DTFT是实部, 序列的共轭反对称部分的DTFT是虚部

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n), \quad \text{其中} \begin{cases} x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)] \\ x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)] \end{cases}$$

$$\text{FT}[x_e(n)] = X_R(e^{j\omega}) \quad \text{FT}[x_o(n)] = jX_I(e^{j\omega})$$

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$

30

## 【例3-3】

分析序列  $x(n) = e^{j\omega n}$  的对称性。解：将  $x(n)$  中  $n$  用  $-n$  代替，再取共轭得

$$\begin{aligned} x^*(-n) &= [\cos(-\omega n) + j \sin(-\omega n)]^* \\ &= \cos(\omega n) + j \sin(\omega n) \\ &= e^{j\omega n} \\ &= x(n) \end{aligned}$$

可见  $x(n)$  是共轭对称序列

$$x(n) = \cos(\omega n) + j \sin(\omega n)$$

↑ 偶函数      ↑ 奇函数

31

实序列  $h(n)$  的对称性

$$\because h(n) \text{ 是实序列} \Leftrightarrow H(e^{j\omega}) = H^*(e^{-j\omega})$$

$$\downarrow$$

$$H(e^{j\omega}) = H^*(e^{-j\omega})$$

$$\downarrow$$

$$H_R(e^{j\omega}) = H_R(e^{-j\omega})$$

实序列的DTFT的实部是共轭对称的，虚部是共轭反对称

$$H_I(e^{j\omega}) = -H_I(e^{-j\omega})$$

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H_R^2(e^{j\omega}) + H_I^2(e^{j\omega}) \quad \text{偶函数}$$

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \arctan[H_I(e^{j\omega})/H_R(e^{j\omega})] \quad \text{奇函数}$$

32

## 5. 频域微分

频域微分特性可表示为

$$nx(n) \leftrightarrow j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

## 6. 卷积定理

(1) 时域卷积定理

$$x(n) * h(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega})$$

(2) 频域卷积定理

$$x(n)h(n) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * H(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) * H(e^{j\omega}) = \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) H(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

33

## 7. 帕斯维尔 (Parseval) 定理

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

信号时域的总能量等于频域的总能量。

其中  $|X(e^{j\omega})|^2 = S_x(\omega)$  称为序列  $x(n)$  的能量谱密度频域总能量是指  $|X(e^{j\omega})|^2$  在一个周期中的积分再乘以  $1/(2\pi)$ 

以上序列傅立叶变换的性质归纳在表3.2中

34

表3.2 序列傅里叶变换的性质和定理

序列 $\leftrightarrow$	傅里叶变换 $\leftrightarrow$
$x(n) \leftrightarrow$	$X(e^{j\omega}) \leftrightarrow$
$y(n) \leftrightarrow$	$Y(e^{j\omega}) \leftrightarrow$
$ax(n) + by(n) \leftrightarrow$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega}) \leftrightarrow$
$x(n \pm n_0) \leftrightarrow$	$e^{\pm j\omega n_0} X(e^{j\omega}) \leftrightarrow$
$x^*(n) \leftrightarrow$	$X^*(e^{-j\omega}) \leftrightarrow$
$x(-n) \leftrightarrow$	$X(e^{-j\omega}) \leftrightarrow$
$x(n) * y(n) \leftrightarrow$	$X(e^{j\omega}) Y(e^{j\omega}) \leftrightarrow$
$x(n)y(n) \leftrightarrow$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) Y(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \leftrightarrow$
$nx(n) \leftrightarrow$	$j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \leftrightarrow$
$\text{Re}[x(n)] \leftrightarrow$	$\frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})] \leftrightarrow$
$\text{Im}[x(n)] \leftrightarrow$	$\frac{1}{2j} [X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})] \leftrightarrow$
$x_r(n) \leftrightarrow$	$\text{Re}[X(e^{j\omega})] \leftrightarrow$
$x_i(n) \leftrightarrow$	$\text{Im}[X(e^{j\omega})] \leftrightarrow$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty}  x(n) ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi}  X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$	



## 第六次作业：

## 第三章

3.1 (1), (2), (3),

3.2 (2), (4)

3.3

3.4

36

### 3.3 LSI系统的频域表示方法

#### 3.3.1 系统的频率响应

#### 3.3.2 LSI输入输出关系的频域表示

#### 3.3.3 傅里叶变换几种形式



#### 3.3.1 离散系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$

$$\triangleright H(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[h(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}$$

$\triangleright H(e^{j\omega})$  表示了系统的频率特性，反应了系统对输入信号的不同频率成分进行的加权处理。

$\triangleright H(e^{j\omega})$  由幅频响应和相频响应组成：

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\arg[H(e^{j\omega})]} = |H(e^{j\omega})| e^{j\phi(\omega)}$$

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega})$$

$$\text{幅频响应: } |H(e^{j\omega})| = \sqrt{H_R^2(e^{j\omega}) + H_I^2(e^{j\omega})}$$

$$\text{相频响应: } \phi(\omega) = \arg[H(e^{j\omega})] = \arctan\left[\frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})}\right]$$

38

【例3-4】求单位取样响应  $h(n) = R_N(n)$  的频率响应。

解 直接应用【例3-1】的结果，有：

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_N(n)e^{-j\omega n} \\ &= \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega(N-1)/2} \end{aligned}$$

$$\text{幅频响应: } H(\omega) = |H(e^{j\omega})| = \left| \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} \right|$$

$$\text{相频响应: } \phi(\omega) = \arg[H(e^{j\omega})] = -\frac{N-1}{2}\omega$$

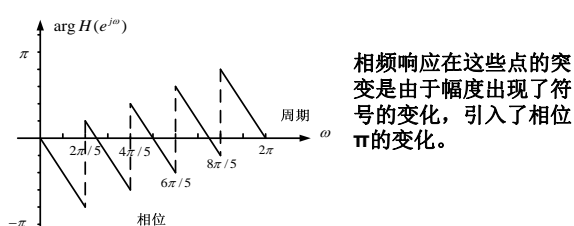
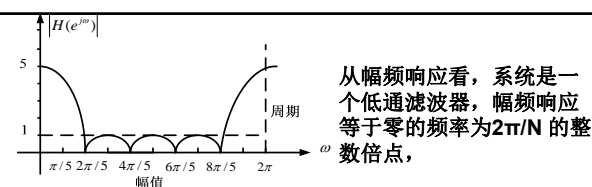


图3.4  $N=5$ 时单位取样响应为矩形窗序列的频率响应

归一化频率  $\omega = \Omega T = \frac{\Omega}{f_s}$

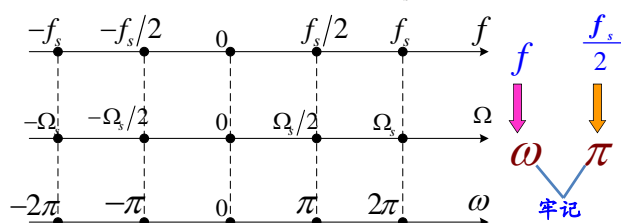


图 模拟频率  $f$ 、 $\Omega$  与数字频率  $\omega$  之间的对应关系

#### 3.3.2 LSI系统输入输出关系的频域表示

对于LSI系统，系统输出  $y(n)$  等于输入  $x(n)$  与单位取样响应  $h(n)$  的卷积：

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

根据DTFT的时域卷积定理则有：

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

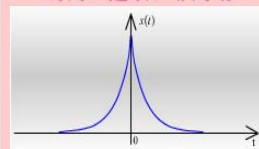
### 3.3.3 傅里叶变换几种形式

傅立叶变换就是建立以时间为自变量的“信号”与以频率为自变量的“频谱函数”之间的某种关系。所以当自变量时间或频率取连续值或离散值时，就形成各种不同形式的傅立叶变换对。

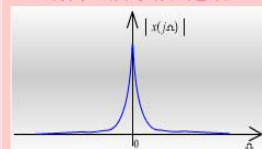
#### 一、连续时间、连续频率

$$x(t) \xrightarrow{\text{FT}} X(j\Omega)$$

时间：连续和非周期



频率：非周期和连续



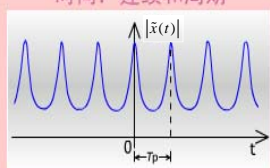
说明：

时域连续导致频域非周期。  
频域连续导致时域非周期。

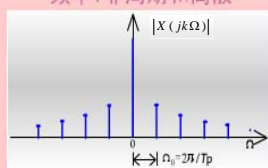
#### 二、连续时间、离散频率

$$\tilde{x}(t) \xrightarrow{\text{FT}} X(jk\Omega)$$

时间：连续和周期



频率：非周期和离散



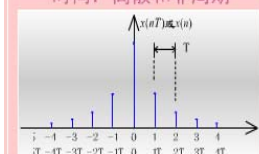
说明：

时域连续导致频域非周期。  
频域离散导致时域周期。

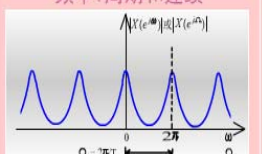
#### 三、离散时间、连续频率

$$x(n) \xrightarrow{\text{FT}} X(e^{j\omega})$$

时间：离散和非周期



频率：周期和连续



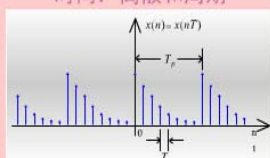
说明：

时域离散导致频域周期。  
频域连续导致时域非周期。

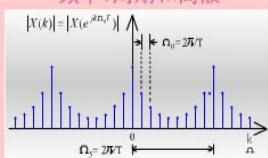
#### 四、离散时间、离散频率

$$\tilde{x}(n) \xrightarrow{\text{FT}} \tilde{X}(k)$$

时间：离散和周期



频率：周期和离散



说明：

时域离散导致频域周期。  
频域离散导致时域周期。

[flash动画演示](#)

### 3.4 离散时间信号的Z变换

#### 3.4.1 Z变换的定义

#### 3.4.2 Z变换的性质和定理





### 3.4.1 Z变换的定义

一、序列 $x(n]$ 的Z变换定义:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} \quad \text{双边Z变换}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n} \quad \text{单边Z变换}$$

式中 $z$ 为复变量, 即  $z = re^{j\omega}$

(1) Z变换 $X(z)$ 是一个级数求和,  $x(n)$ 是系数

(2) Z变换的收敛域: 使 $X(z)$ 能够收敛的 $z$ 值的集合, 用符号 ROC (Range of Convergence) 表示。

(3) Z变换存在的条件:  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)z^{-n}| < \infty$

收敛域:  $R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$  (环状)

49

将  $z = re^{j\omega}$ , 代入收敛域  $R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$

得到:  $R_{x^-} < r < R_{x^+}$

通常Z变换是一个有理函数

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

$P(z_k) = 0$ ;  $z_k \Rightarrow$  零点

$Q(z_k) = 0$ ;  $z_k \Rightarrow$  极点

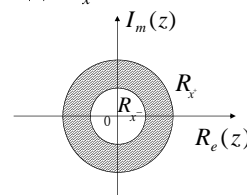


图3.5 Z变换收敛域示意图

在极点处Z变换不存在, 因此收敛域内没有极点, 极点是收敛域的边界。

50

二、FT和ZT之间的关系:

$$X(e^{j\omega}) = X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

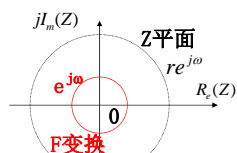
条件?: 收敛域中包含单位圆

收敛条件:

对F变换:  $X(e^{j\omega}) \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| \cdot |e^{-j\omega n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$

对Z变换:  $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)z^{-n}| < \infty \Rightarrow X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| \cdot |r^{-n}| < \infty$

显然F变换的收敛条件相对较严格!!



51

【例3-5】

$X(z)$ 为常数1, 说明收敛域是整个 $z$ 的闭合平面:  $|z| \in [0, \infty]$

1): 若  $x(n) = \delta(n)$  则  $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n)z^{-n} = 1 \cdot z^0 = 1 \quad (0 \leq |z| \leq \infty)$

2): 若  $x(n) = u(n)$  则  $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(n)z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-z^{-1}} & |z| > 1 \\ \text{发散} & |z| \leq 1 \end{cases} \quad (\text{收敛域})$$

注1:  $X(z)$ 收敛域不包含单位圆, 故傅立叶变换不存在, 引进奇异函数 $\delta(\omega)$

则其傅立叶变换可以表示出来  $(1 - e^{-j\omega})^{-1} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega - 2\pi k)$

注2: 一个序列的傅立叶变换不存在, 但在一定收敛域内Z变换是存在的

52

三、Z变换的收敛域与序列特点的关系

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

只有当上式收敛时,  $z$ 变换才有意义。

收敛的充要条件: 对任何 $x(n)$ ,  $X(z)$ 都绝对可和。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)z^{-n}| = M < \infty$$

要满足收敛条件,  $|z|$ 的值必须在一定范围内, 这个范围就是收敛域。

不同形式的序列的收敛域形式不同, 现讨论如下:

序列	收敛域
1、有限长序列 $x(n) = \begin{cases} x(n) & n_1 \leq n \leq n_2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$	几乎整个Z平面
$n_1 \geq 0$ 因果	$0 <  z  \leq \infty$ 包括 $\infty$
$n_1 < 0, n_2 > 0$ 非因果	$0 <  z  < \infty$ 不包括 $\infty$
$n_2 \leq 0$ 非因果	$0 \leq  z  < \infty$ 不包括 $\infty$

53

54

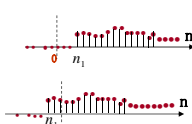
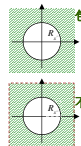
【例3-6】求  $x(n] = R_N(n)$  的Z变换和收敛域。

解:  $X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$

$x(n)$ 是一个因果有限长序列

收敛域为:  $0 < |z| \leq \infty$

55

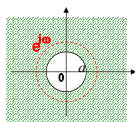
序列	收敛域
<b>2、右序列（无限长）</b>  <div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: center;"> <div><math>n_1 \geq 0</math> 因果</div> <div><math>n_1 &lt; 0</math> 非因果</div> </div>	<b>圆外部</b>  <div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: center;"> <div>包括<math>\infty</math> <math>R_x &lt;  z  \leq \infty</math></div> <div>不包括<math>\infty</math> <math>R_x &lt;  z  &lt; \infty</math></div> </div>

56

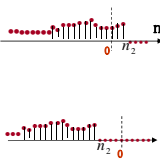
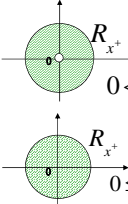
【例3-7】:  $x(n] = a^n u(n)$   $0 < a < 1$

解:  $X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1-az^{-1}}$

收敛域  $|az^{-1}| < 1$ , 即  $|z| > a$



57

序列	收敛域
<b>3、左序列（无限长）</b>  <div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: center;"> <div><math>n_2 &gt; 0</math> 非因果</div> <div><math>n_2 \leq 0</math> 非因果</div> </div>	<b>圆内部</b>  <div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: center;"> <div><math>0 &lt;  z  &lt; R_{x^+}</math></div> <div><math>0 \leq  z  &lt; R_{x^+}</math></div> </div>

58

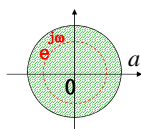
【例3-8】求  $x(n] = -a^n u(-n-1)$  的Z变换及收敛域  $a > 1$ 。

解:  $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -a^n u(-n-1) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -a^n z^{-n}$   
 $= \sum_{n=1}^{\infty} -(a^{-1}z)^n$

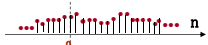
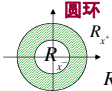
$X(z)$ 存在要求  $|a^{-1}z| < 1$  收敛域为  $|z| < |a|$

$X(z) = \frac{-a^{-1}z}{1-a^{-1}z} = \frac{1}{1-az^{-1}}$   $|z| < a$

不同的序列具有同一Z变换形式,但收敛域不一样



59

序列	收敛域
<b>4、双边序列（无限长）</b>  <div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: center;"> <div>非因果</div> </div>	<b>圆环</b>  <div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: center;"> <div><math>R_x &lt;  z  &lt; R_{x^+}</math></div> </div>

60

双边序列可以表示成一个左序列和一个右序列之和

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = X_1(z) + X_2(z) \quad \text{假设 } n_1 > 0$$

$$X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{n_1} x(n)z^{-n} \quad 0 < |z| < R_{x^+} \quad \text{左序列}$$

$$X_2(z) = \sum_{n=n_1+1}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad R_{x^-} < |z| \leq \infty \quad \text{右序列}$$

$X(z)$  的收敛域是  $X_1(z)$  和  $X_2(z)$  收敛域的公共区域。

如果  $R_{x^-} > R_{x^+}$ , 则收敛域为  $R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$

如果  $R_{x^-} < R_{x^+}$ , 两个收敛域没有公共区域,  $X(z)$  不存在。

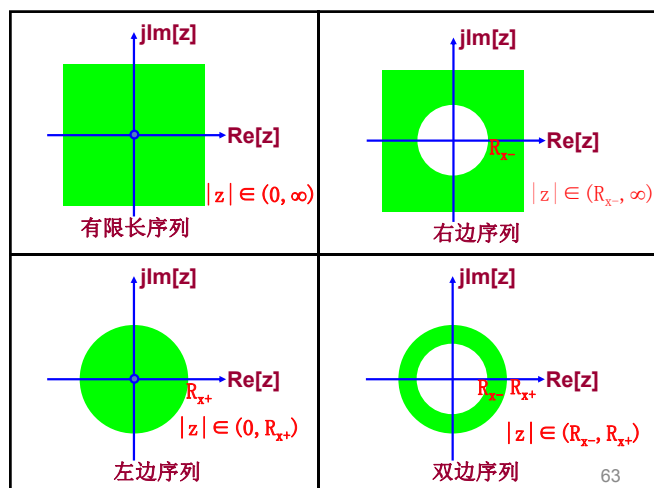
61

## 第七次作业:

### 第3章

3.7、3.8 (1) (2) (3)

62



63

【例3-9】:  $x(n) = a^{|n|}$ ,  $a$  为实数, 求  $x(n)$  的Z变换及收敛域。

解

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{|n|} z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} \end{aligned}$$

64

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n z^n \text{ 的收敛域为 } |az| < 1, \text{ 即 } |z| < |a|^{-1}$$

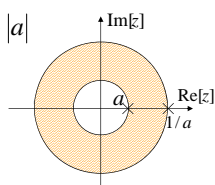
$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} \text{ 的收敛域为 } |az^{-1}| < 1, \text{ 即 } |z| > |a|$$

如果  $|a| < 1$  公共区域为  $|a| < |z| < |a|^{-1}$

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{az}{1-az} + \frac{1}{1-az^{-1}} \\ &= \frac{1-a^2}{(1-az)(1-az^{-1})} \end{aligned}$$

当  $|a| \geq 1$ ,  $X(z)$  不存在。

$x(n)$  的FT存在吗?



65

比较这几个例题:

1、具有相同的Z变换函数, 收敛域不同, 对应的序列不同

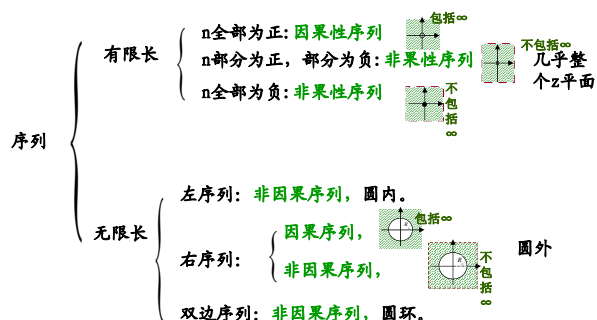
2、可以根据收敛域中是否有极点来确定收敛域

如: 【例3-7】中的极点为  $z = a$ ,  $x(n)$  是因果性右序列, 其收敛域必为:  $|z| > a$

又如: 【例3-8】中的极点为  $z = a$ ,  $x(n)$  是左序列, 其收敛域必为:  $|z| < a$

66

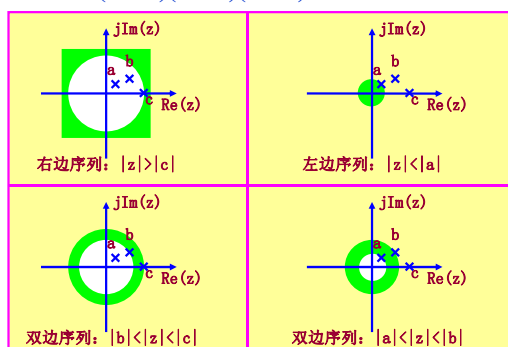
### 序列特点对收敛域的影响



67

例: 请说出 $X(z)$ 可能的收敛域及其所对应的序列的特性:

$$X(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)}, \quad \text{其中 } |a| < |b| < |c|$$



68

### 3.4.2 Z变换的性质和定理

#### 1, 线性

$$ax(n) + by(n) \leftrightarrow aX(z) + bY(z)$$

$$ZT[x(n)] = X(z) \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$ZT[y(n)] = Y(z) \quad R_{y-} < |z| < R_{y+}$$

$$ZT[ax(n) + by(n)] = aX(z) + bY(z) \quad R_- < |z| < R_+$$

$$R_- = \max(R_{x-}, R_{y-}), \quad R_+ = \min(R_{x+}, R_{y+})$$

69

#### 2, 序列位移

$$x(n - n_0) \leftrightarrow z^{-n_0} X(z) \quad \text{收敛域不变}$$

#### 3, 序列反转 (z 倒置)

$$x(-n) \leftrightarrow X\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$Z[x(n)] = X(z) \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$Z[x(-n)] = X\left(\frac{1}{z}\right) \quad \frac{1}{R_{x+}} < |z| < \frac{1}{R_{x-}}$$

#### 4, 共轭序列

$$x^*(n) \leftrightarrow X^*(z^*) \quad \text{收敛域不变}$$

70

#### 5, $X(z)$ 尺度 (与指数序列相乘)

$$a^n x(n) \leftrightarrow X(a^{-1}z) \quad (\text{收敛域缩放尺度 } |a|)$$

#### 6, $X(z)$ 微分 (序列乘以 $n$ )

$$n \cdot x(n) \leftrightarrow -z \frac{dX(z)}{dz} \quad \text{收敛域不变}$$

71

#### 7, 序列复卷积 (Z域乘积)

$$x(n) * h(n) \leftrightarrow X(z) \cdot H(z) \quad (\text{收敛域为两者的“相与”})$$

【例3-10】已知LSI系统的单位取样响应 $h(n) = a^n u(n)$ ,  $|a| < 1$ , 输入序列为 $x(n) = u(n)$ , 求输出序列 $y(n)$ 。

解:  $y(n) = x(n) * h(n) \quad Y(z) = H(z) \cdot X(z)$

$$H(z) = ZT[a^n u(n)] = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |z| > |a|$$

$$X(z) = ZT[u(n)] = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad |z| > 1$$

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})(1 - az^{-1})} \quad |z| > 1$$

$$y(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{z^{n+1}}{(z-1)(z-a)} dz \quad \text{所以}$$

72

由收敛域判定

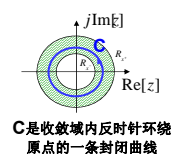
$$n < 0 \quad y(n) = 0$$

$$\begin{aligned} n \geq 0 \quad y(n) &= \operatorname{Res}[Y(z)z^{n-1}, 1] + \operatorname{Res}[Y(z)z^{n-1}, a] \\ &= \frac{z^{n+1}}{(z-1)(z-a)} \Big|_{z=1} + \frac{z^{n+1}}{(z-1)(z-a)} \Big|_{z=a} \\ &= \frac{1}{1-a} + \frac{a^{n+1}}{a-1} \\ &= \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \end{aligned}$$

综合  $n < 0$  和  $n \geq 0$ , 得  $y(n) = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} u(n)$

73

## 复习：Z反变换



### 一、定义

$$\text{若 } X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} \quad R_- < |z| < R_+$$

$$\text{则 } x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz \quad C \in (R_-, R_+)$$

z反变换实际上是求X(z)的幂级数展开式。

## 二、求反Z变换的方法

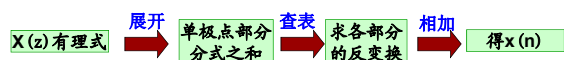
求Z反变换，实际是求Z反变换式所表示的围线积分。

因直接计算围线积分很麻烦，常利用以下三种方法求解：

- (1) 留数法；
- (2) 幂级数法（长除法）；
- (3) 部分分式展开法（利用Z变换性质）。

## 部分分式展开法

（适用于单阶极点的序列）



设  $X(z)$  只有N个一阶极点，可展开成：
$$X(z) = A_0 + \sum_{m=1}^N \frac{A_m z}{z - z_m}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A_0}{z} + \sum_{m=1}^N \frac{A_m}{z - z_m}$$

$X(z)/z$  在  $z=0$  的极点的留数是系数  $A_0$ ，在  $z=z_m$  的极点的留数是系数  $A_m$

$$A_0 = \operatorname{Res}\left[\frac{X(z)}{z}, 0\right] \quad A_m = \operatorname{Res}\left[\frac{X(z)}{z}, z_m\right]$$

【例3-11】已知  $X(z) = \frac{5z^{-1}}{1+z^{-1}+6z^{-2}}, 2 < |z| < 3$ ，求反Z变换。

$$\text{解: } \frac{X(z)}{z} = \frac{5z^{-2}}{1+z^{-1}+6z^{-2}} = \frac{5}{z^2+z+6} = \frac{5}{(z-2)(z+3)} = \frac{A_1}{z-2} + \frac{A_2}{z+3}$$

$$A_1 = \operatorname{Res}\left[\frac{X(z)}{z}, 2\right] = \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=2} = 1$$

$$A_2 = \operatorname{Res}\left[\frac{X(z)}{z}, -3\right] = \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=-3} = -1$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z+3} \quad X(z) = \frac{z}{z-2} - \frac{z}{z+3}$$

$$X(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} - \frac{1}{1+3z^{-1}}$$

$$X(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} - \frac{1}{1+3z^{-1}}$$

因为收敛域为  $2 < |z| < 3$

$X(z)$  第一部分极点是  $z=2$ ，因此收敛域为  $|z| > 2$

$X(z)$  第二部分极点  $z = -3$ ，收敛域应取  $|z| < 3$ 。

查表3.4得到  $x(n) = 2^n u(n) + (-3)^n u(-n-1)$

一些常见的序列的Z变换可参考表3.4。

除了以上几种方法之外，还可以利用Z变换的一些定理和性质来求解更复杂的反变换

## 8, 序列乘积 (Z域复卷积)

$$W(z) = ZT[x(n) \cdot y(n)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v)Y\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv$$

$W(z)$  的收敛域:  $R_{x-}R_{y-} < |z| < R_{x+}R_{y+}$

被积函数的收敛域:  $\max[R_{x-}, \frac{|z|}{R_{y+}}] < |v| < \min[R_{x+}, \frac{|z|}{R_{y-}}]$

79

## 9, 初值定理

若  $x(n)$  是因果序列, 则  $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = x(0)$

## 10, 终值定理

若  $x(n)$  是因果序列, 且  $X(z)$  除在  $z=1$  处可以有一个一阶极点外, 其余极点全在单位圆内,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)X(z)]$$

80

## 11, Parseval定理——关于时域↔频域的能量公式

设  $X(z) = ZT[x(n)]$ ,  $R_{x-} < |z| < R_{x+}$

$Y(z) = ZT[y(n)]$ ,  $R_{y-} < |z| < R_{y+}$

若  $R_{x-}R_{y-} < 1$ ,  $R_{x+}R_{y+} > 1$

$$\text{那么 } \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v)Y^*\left(\frac{1}{v}\right)v^{-1}dv$$

$v$  平面上,  $C$  取  $X(v)$  和  $Y^*(\frac{1}{v})$  收敛域的公共部分, 即

$$\max(R_{x-}, \frac{1}{R_{y+}}) < |v| < \min(R_{x+}, \frac{1}{R_{y-}})$$

关于Z变换的性质和定理归纳在表3.3中, 常见序列的Z变换可参考表3.4。

81

## 3.5 系统函数

## 3.5.1 系统函数定义

## 3.5.2 用系统函数分析系统特性

## 3.5.3 差分方程与系统函数

## 3.5.4 用系统函数估算频率响应



## 3.5.1 系统函数定义

系统函数: 单位抽样响应  $h(n)$  的Z变换  $H(z)$ 。

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$$

LSI系统利用Z变换的卷积性质有:

$$y(n) = x(n) * h(n) \quad Y(z) = X(z) \cdot H(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$H(e^{j\omega})$  与  $H(z)$  的关系

如果  $H(z)$  的收敛域ROC包含单位圆  $z = e^{j\omega}$ , 则

$$H(e^{j\omega}) \text{ 与 } H(z) \text{ 的关系为 } H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

83

## 3.5.2 用系统函数分析系统的特性

## (1) 系统稳定性分析

对于LSI系统, 稳定的充要条件是:

$h(n)$  绝对可和  $\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$

从FT角度:  $\Rightarrow H(e^{j\omega})$  存在

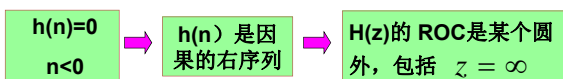
从ZT角度:  $\Rightarrow H(z)$  的收敛域 ROC 包含单位圆

当且仅当单位圆在系统函数  $H(z)$  的收敛域 (ROC) 之内时, 一个LSI系统是稳定的

84

## (2) 系统因果性分析

对于LSI系统，是因果系统的充要条件是：



一个LSI系统，当  $H(z)$  的 ROC 是某个圆的外部  $r < |z| \leq \infty$ ，且包括  $z = \infty$ ，则这个LSI系统是因果系统

$H(z)$  的所有极点位于某个圆内

85

## (3) 系统可实现性（既因果又稳定）分析

若一个LSI系统是稳定的因果系统，则  $H(z)$  的 ROC：

$$r < |z| \leq \infty \quad 0 < r < 1$$

或当且仅当系统函数  $H(z)$  的全部极点位于单位圆内时，因果的LSI系统是稳定的。

86

例：已知  $H(z) = \frac{1-a^2}{(1-az^{-1})(1-az)}$   $0 < |a| < 1$

分析其因果性和稳定性

解： $H(z)$  的极点  $z=a$   $z=1/a$

ROC:  $\frac{1}{a} < |z| \leq \infty \Rightarrow$  系统是因果的  $\Rightarrow$  不包括单位圆  $\Rightarrow$  不稳定

ROC:  $0 \leq |z| < a \Rightarrow$  系统是非因果的  $\Rightarrow$  不包括单位圆  $\Rightarrow$  不稳定

ROC:  $a \leq |z| < \frac{1}{a} \Rightarrow$  系统是非因果的  $\Rightarrow$  包括单位圆  $\Rightarrow$  稳定

可实现性：严格讲该系统无法具体实现



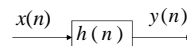
87

## 3.5.3 差分方程与系统函数

一、描述LSI系统的方法：

1. 单位取样响应： $h(n)$

2. 卷积关系： $y(n) = x(n) * h(n)$



3. 系统函数： $H(z)$

4. 频率响应函数： $H(e^{j\omega})$

5. 差分方程： $\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$

88

• In mathematics, 利用ZT, 将时域差分方程转换成z域的代数方程：

如： $x(n-k) \Leftrightarrow z^{-k}X(z)$   $y(n-k) \Leftrightarrow z^{-k}Y(z)$

• LSI时域离散系统的输入输出可以用线性常系数差分方程表示：

$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

式中  $a_k, b_r, N, M$  均为常数

对上式进行Z变换： $Y(z) = \sum_{k=1}^N a_k Y(z) z^{-k} + \sum_{r=0}^M b_r X(z) z^{-r}$

系统函数： $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$

89

二、根据系统函数可将系统分成FIR和IIR系统。

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

• MA (Moving Average) 系统

当  $a_k = 0, k=1, 2, \dots, N$  时则有  $H(z) = \sum_{r=0}^M b_r z^{-r} = \sum_{r=0}^M h(r) z^{-r}$

称该系统为MA系统，MA系统只有零点，除原点之外没有极点，因此也称为全零点模型。如果从系统冲激响应来看，这类系统的冲激响应  $h(n)$  为有限长序列，因此称之为有限冲激响应系统 (Finite Impulse Response)，并简称为FIR系统

90

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

• AR (Auto-Regressive) 系统

当除了  $b_0=1$  之外, 其余  $b_r=0$  时则有

$$H(z) = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

称该系统为AR系统, AR 系统只有极点, 除了原点之外没有零点, 因此也称为**全极点模型**。如果从系统冲激响应来看, 这类系统的冲激响应  $h(n)$  为无限长序列, 因此称之为**无限冲激响应系统 (Infinite Impulse Response)**, 并简称为**IIR系统**

91

• ARMA (Auto-Regressive Moving Average) 系统

当  $a_k, b_r$  都不为零时, 则有

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

称该系统为ARMA系统, ARMA 系统既有极点也有零点, 因此也称为**零极点模型**。因为这类系统的冲激响应  $h(n)$  也为无限长序列, 因此也属于**IIR系统**

92

## 第八次作业:

3.9; 3.10;

93

### 3.5.4 用系统函数估算频率响应

#### 一、系统频率响应 (频响) 的几何分析法

把系统函数因式分解, 得:

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = A \frac{\prod_{r=1}^M (1 - c_r z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})} = A z^{N-M} \frac{\prod_{r=1}^M (z - c_r)}{\prod_{k=1}^N (z - d_k)}$$

其中  $A = \frac{b_0}{a_0}$ ,  $c_r$  称为**系统零点**,  $d_k$  称为**系统极点**

94

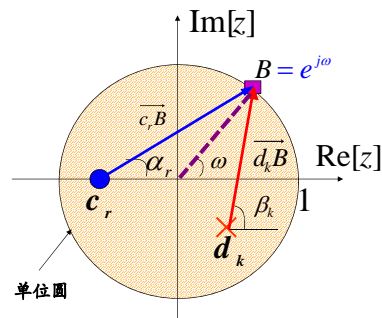
当系统稳定时, 将  $z = e^{j\omega}$  代入  $H(z)$  得:

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = A e^{j\omega(N-M)} \frac{\prod_{r=1}^M (e^{j\omega} - c_r)}{\prod_{k=1}^N (e^{j\omega} - d_k)} = A e^{j\omega(N-M)} \frac{\prod_{r=1}^M \overline{c_r B}}{\prod_{k=1}^N \overline{d_k B}}$$

上式中  $\overline{c_r B} = e^{j\omega} - c_r$ , 表示系统零点指向单位圆上任一点  $B$  的矢量  
 $\overline{d_k B} = e^{j\omega} - d_k$ , 表示系统极点指向单位圆上任一点  $B$  的矢量

$\overline{c_r B}$  零点向量  $\overline{d_k B}$  极点向量  $B = e^{j\omega}$

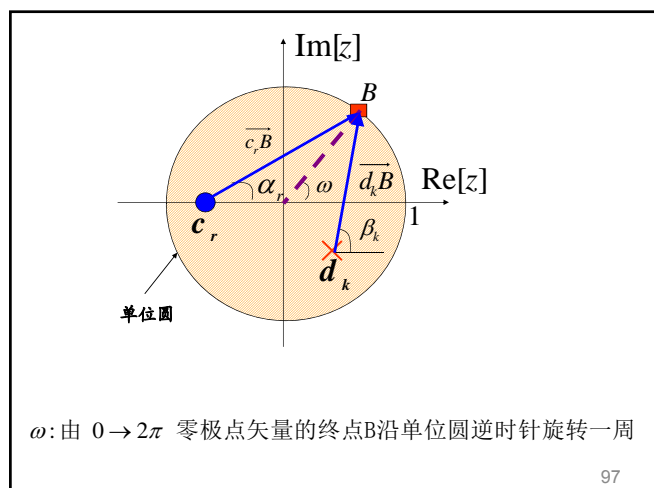
95



$\overline{c_r B}$  表示零点向量、 $\overline{d_k B}$  表示极点向量,  $\alpha_r, \beta_k$  为矢量角度

96





97

用极坐标表示系统的频率响应:

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)}$$

$$|H(e^{j\omega})| = |A e^{j\omega(N-M)}| \cdot \frac{\prod_{r=1}^M |c_r B|}{\prod_{k=1}^N |d_k B|} = |A| \frac{\prod_{r=1}^M c_r B}{\prod_{k=1}^N d_k B} \quad (1)$$

$$\varphi(\omega) = \omega(N-M) + \sum_{r=1}^M \alpha_r - \sum_{k=1}^N \beta_k \quad (2)$$

其中  $c_r B$ 、 $d_k B$  表示矢量长度,  $\alpha_r$ 、 $\beta_k$  为矢量角度

上式中的因子  $A$  不影响幅频响应的实质, 估计时可暂不考虑它的影响。

98

分析系统函数  $H(z)$  的零、极点位置是如何决定系统的幅频响应和相频响应。

最简单的情况, 只有一个零点和极点,  $A=1$ ,

$$H(z) = A \frac{\prod_{r=1}^M (1 - c_r z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})} = \frac{(1 - c_r z^{-1})}{(1 - d_k z^{-1})}$$

设系统稳定,  $z = e^{j\omega}$ , 得系统频响:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{(1 - c_r e^{-j\omega})}{(1 - d_k e^{-j\omega})} = \frac{(e^{j\omega} - c_r)}{(e^{j\omega} - d_k)}$$

99

### 1. 零、极点位置对幅频特性的影响

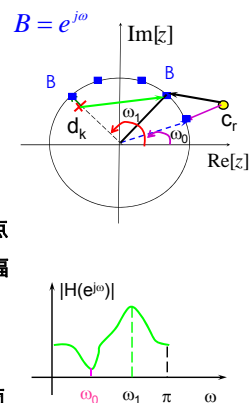
$$H(e^{j\omega}) = (e^{j\omega} - c_r) / (e^{j\omega} - d_k)$$

分子是点B对零点的距离,

分母是点B对极点的距离。

当单位圆上的点  $B: z = e^{j\omega}$ , 在极点  $d_k$  附近时,  $B \sim d_k$  间的距离最小, 幅频特性出现**峰值频点**  $\omega_1$ 。

当单位圆上的点  $B: z = e^{j\omega}$ , 在零点  $c_r$  附近时,  $B \sim c_r$  间的距离最小, 幅频特性出现**谷值频点**  $\omega_0$ 。



100

### 2. 零极点位置对相频特性影响

几种特殊系统 (了解)

#### 1) 因果稳定系统:

最小相位系统: 全部零极点在单位圆内;

最大相位系统: 全部极点在单位圆内, 全部零点在单位圆外;

2) 混合相位系统: 全部极点在单位圆内; 零点在单位圆内;

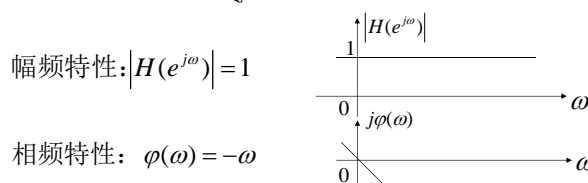
3) 全通系统: 幅度特性对所有频率都等于常数  $a$ :

$|H(e^{j\omega})| = a$ , 纯相位滤波系统, 常用于相位均衡。

101

【例3-12】: 已知  $H(z) = z^{-1}$ , 分析该系统频率特性

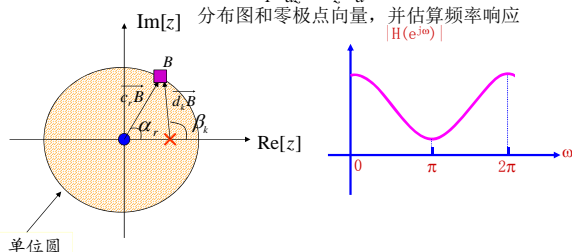
解: 因为:  $H(z) = \frac{1}{z}$ , 则极点为:  $z = 0$



单位圆上, 当  $\omega = 0$  转到  $\omega = 2\pi$  时, 极点向量的长度始终为1, 由于极点在原点, 故极点不影响幅频响应特性。

102

【例3-13】已知因果稳定系统  $H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$   $|a| < 1$ , 画出系统的零极点分布图和零极点向量, 并估算频率响应  $|H(e^{j\omega})|$

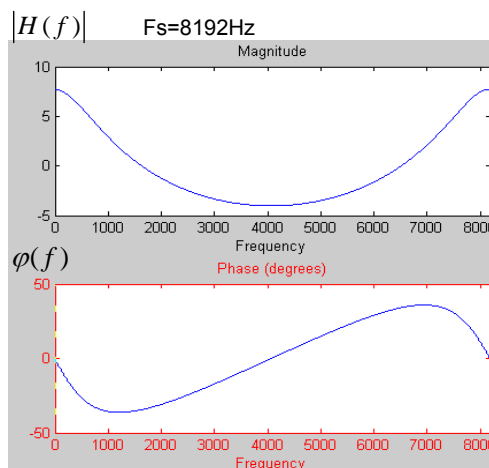


从  $H(z)$  看出, 系统有一个极点  $z=a$ , 一个零点  $z=0$ 。

当单位圆上的点  $B$  由  $\omega=0$  到  $\omega=2\pi$  旋转时, 有:

- ① 在  $\omega=0$  时, 极点矢量最短(分母最小), 形成波峰。
- ② 在  $\omega=\pi$  时, 极点矢量最长(分母最大), 形成波谷。
- ③ 由于零点在原点处, 所以不影响幅频响应特性。

103



104

### 结论:

- 1、当极点靠近单位圆时, 幅频响应在极点所在频率处会出现峰值, 极点靠单位圆越近, 峰值越尖锐; 当零点靠近单位圆时, 零点处的幅频响应会出现谷底, 越靠近单位圆, 谷底越深, 当零点处在单位圆上时, 幅频响应为零, 相频响应的分析相对复杂一些。
- 2、处于原点的零点和极点不影响系统的幅频响应特性, 只影响相频特性。

105

【例3-14】已知  $H(z)=1-z^{-N}$ , 试定性画出系统的幅频响应, 其中  $N>0$ 。

注意: 在用几何法分析前, 总是先将  $H(z)$  的零、极点画出

解:  $H(z) = 1 - z^{-N} = \frac{z^N - 1}{z^N}$

- ①  $H(z)$  的极点为  $z=0$  ( $N$ 阶), 因为  $z=0$ , 所以不影响  $|H(e^{j\omega})|$ 。
- ②  $H(z)$  的零点也有  $N$  个:

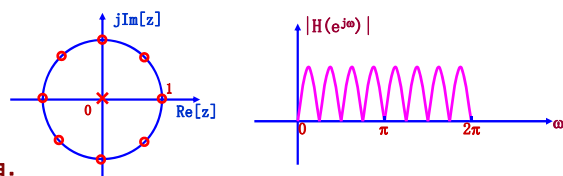
$$\begin{aligned} z^N - 1 &= 0 \\ \Rightarrow z^N &= 1 \\ \Rightarrow z^N &= e^{j2\pi k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ \Rightarrow z &= e^{j\frac{2\pi}{N}k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned}$$

应将  $z$  看作是复变量

106

$$z = e^{j\frac{2\pi}{N}k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

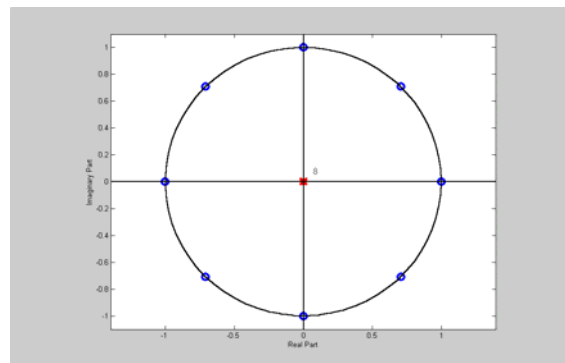
上式说明这  $N$  个零点等间隔地分布在单位圆上, 设  $N=8$ , 有下图:



说明:

- 由于极点在  $z=0$  处, 不影响幅频特性, 故只需考虑零点即可。
- 遇到一个零点,  $|H(e^{j\omega})|$  幅度降为 0, 在两个零点之间, 幅度最大, 形成峰值。
- 由于幅度响应像一把梳子, 所以该系统又称梳状滤波器。

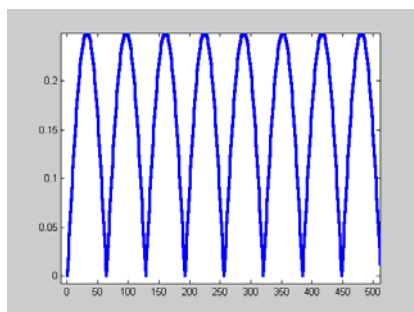
107



梳状滤波器的零极点图

108

梳状滤波器幅频特性



109

【例3-15】利用几何法分析矩形序列的幅频响应特性。

$$\text{解: } R_N(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_N(n) \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} = \frac{z^N - 1}{z^{N-1}(z-1)}$$

$$\text{N阶零点: } z^N - 1 = 0$$

$$z = e^{j\frac{2\pi k}{N}} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

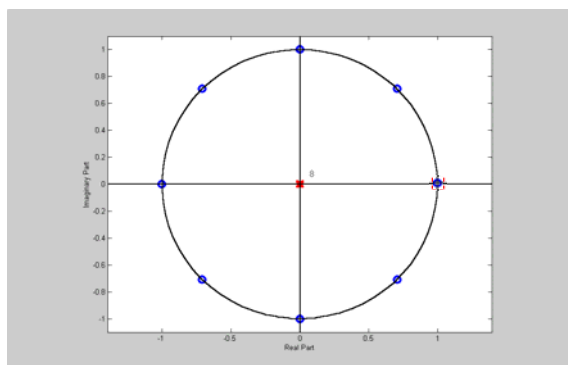
极点:

$$z = 0 (N-1 \text{ 阶}), \quad z = 1$$

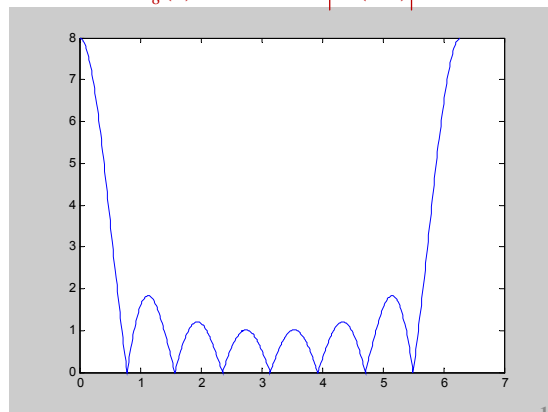
其中, 在 $z=1$ 处, 零、极点抵消。零、极点图和幅频响应 $|H(e^{j\omega})|$ 图见:

110

零、极点图:



111

 $R_N(z)$ 的幅频响应 $|H(e^{j\omega})|$ 

112

### 3.6 常系数线性差分方程与信号流图表示

#### 引言

#### 3.6.1 信号流图的基本组成和表示

#### 3.6.2 无限冲击响应(IIR)系统的网络结构图

#### 3.6.3 有限冲击响应(FIR)系统的网络结构图



### 引言

当实现一个离散时间系统时, 需要知道有关系统的运算结构、存储资源和运算量等信息, 采用信号流图可以清楚地说明这些信息。一个线性时不变 (LSI) 系统可以用常系数线性差分方程表示:

$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

系统函数为:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

当系统给定时, 采用信号流图可以简洁表示系统参数和信号之间的运算方式, 即系统的实现结构。

若给定一个差分方程，不同的算法有很多种，例如：

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - 0.8z^{-1} + 0.15z^{-2}}$$

$$H_2(z) = \frac{-1.5}{1 - 0.3z^{-1}} + \frac{2.5}{1 - 0.5z^{-1}}$$

$$H_3(z) = \frac{1}{1 - 0.3z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}$$

证明

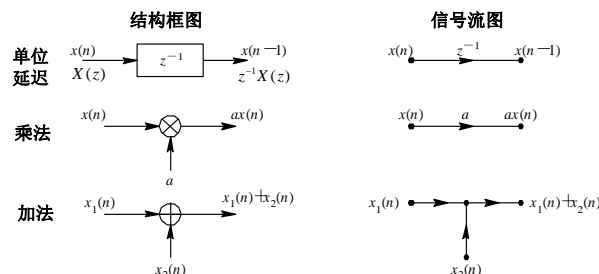
$$H_1(z) = H_2(z) = H_3(z)$$

用网络结构表示具体的算法，网络结构实际表示的是一种运算结构

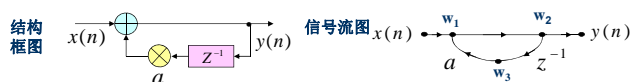
### 3.6.1 信号流图的基本组成和表示

#### 一、数字信号处理中的基本单元及流图表示：

离散时间系统一般包含三种基本单元：**加法器**、**乘法器**和**延时单元**，任何一个复杂的DSP系统都可以分解成这三种基本单元，



举例 简单的一阶系统：  $y[n] = ay[n-1] + x[n]$



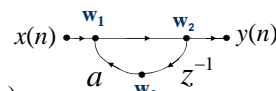
流图运算规则：

- 1) 流图元素 (圆点称为节点，每个节点处信号称为节点变量 (进行编号：k, k=1, 2, ...))  
(定向支路 (箭头指示方向，并乘以常数—称为传输系数))
- 2) 节点变量等于所有输入支路的信号之和；
- 3) 输入支路的信号值等于这一支路起点处的信号变量乘以这一支路上的传输系数

节点变量：  $w_k$  任一  $w_k$  = 进入该节点的“各支路的信号”之和

对该例的说明

信号流图



$$\begin{cases} w_1[n] = x[n] + aw_3[n] \\ w_2[n] = w_1[n] \\ w_3[n] = w_2[n-1] \\ y[n] = w_2[n] \end{cases} \quad \text{故} \quad y[n] = w_2[n] = x[n] + aw_3[n] = x[n] + ay[n-1]$$

## 第九次作业：

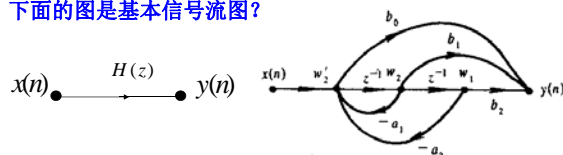
### 3. 11

### 二、基本信号流图

从基本运算考虑，满足以下条件，称为**基本信号流图**：

- (1) 信号流图中所有支路都是基本的，即支路增益是常数或者是  $z^{-1}$
- (2) 流图环路中必须存在延迟支路；
- (3) 节点和支路的数目是有限的。

下面的图是基本信号流图？



### 三、网络结构的分类

一般将网络结构分成两类： $\begin{cases} \text{有限长脉冲响应网络 (FIR)} \\ \text{无限长脉冲响应网络 (IIR)} \end{cases}$

1) **FIR网络**中一般不存在输出对于输入的反馈支路，其差分方程用下式描述：

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \longrightarrow h(n) = \begin{cases} b_n, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{其它}n \end{cases}$$

2) **IIR网络**结构中存在输出对输入的**反馈**支路，即信号流图中存在

环路，其脉冲响应是无限长的

如  $y(n) = ay(n-1) + x(n) \longrightarrow h(n) = a^n u(n)$

### 四、转置定理

将信号流图中的所有支路反向，输入和输出互换，则系统函数不变。

【例3-7】图3.12是一个系统的信号流图

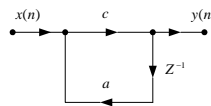


图3.12 转置前一阶系统的信号流图

从流图写出它的差分方程和系统函数分别为  $y(n) = cx(n) + cay(n-1)$

$$H(z) = \frac{c}{1 - acz^{-1}}$$

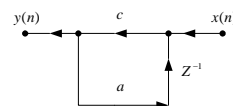


图3.13 转置后一阶系统的信号流图

可写出相同的差分方程和系统函数为  $y(n) = cx(n) + ay(n-1)c$

$$H(z) = \frac{c}{1 - acz^{-1}}$$



### 3.6.2 IIR系统的网络结构流图

IIR基本网络结构有三种：直接型、级联型和并联型

一、直接型——由差分方程或者H(z)的**标准形式**直接画出

(1) 差分方程 (N阶)：  $y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$

(2) 系统函数H(z)的标准形式

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

(3) 结构流图

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

直接 I 型 令  $w_1(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$

有  $y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + w_1(n)$

实现**零点系统**，即实现x(n)延时加权：

$$\sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

实现**极点系统**，即实现y(n)延时加权：

$$\sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

$$\sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

$$\sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

$$H_1(z) = \sum_{r=0}^M b_r z^{-r}$$

$$H_2(z) = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

图3.14 IIR网络直接I型结构

$$H(z) = H_1(z)H_2(z)$$

网络共需 (M+N) 个存储延时单元。

极点系统 124

若先实现系统 $H_2(z)$ ，然后实现系统 $H_1(z)$ ： $H(z) = H_2(z)H_1(z)$

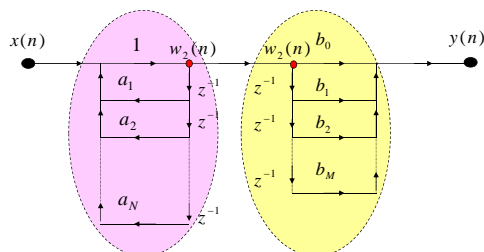


图3.15 IIR直接I型交换系统实现顺序，得到直接II型结构

上图中两条延迟支路源于同一点 $w_2$ ，相同延迟点可以合二为一，得到直接II型；便可节省许多延时单元（硬件：寄存器，软件：存储单元）

直接II型（直接型）结构

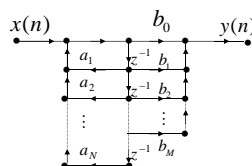


图3.16 直接II型

Flash演示

直接型结构的优缺点：

**优点：**可直接由H(z)的标准形式或差分方程画出网络结构流图，简单直观

**缺点：**对于高阶系统

(1) 调整零、极点困难。

(2) 对系数( $a_k$ 或 $b_k$ )量化效应敏感度高

(3) 乘法运算量化误差在系统输出端的噪声功率最大

### 直接II型结构讲解：(1)直接I型结构

由图1，直接I型结构的系统函数 $H(z)$ 也可以看成是两个独立的系统函数的乘积。输入信号 $x(n]$ 先通过系统 $H_1(z)$ ，得到中间输出变量 $y_1(n)$ ，然后再把 $y_1(n)$ 通过系统 $H_2(z)$ 得到输出信号 $y(n)$ 。即：

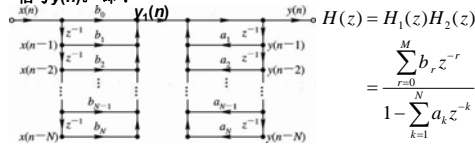


图1 直接I型结构

$$\text{式中: } H_1(z) = \sum_{r=0}^M b_r z^{-r} \text{ 对应的差分方程为: } y_1(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

$$H_2(z) = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \text{ 对应的差分方程为 } y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + y_1(n)$$

### (2)直接II型结构

假设所讨论的IIR数字滤波器是线性时不变系统，显然交换 $H_1(z)$ 和 $H_2(z)$ 的级联次序不会影响系统的传输效果，即

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) = H_2(z)H_1(z)$$

若系统函数 $H(z)$ 的分子阶数和分母阶数相等，即 $M=N$ 时，其结构如图2所示。

输入信号 $x(n]$ 先经过反馈网络 $H_2(z)$ ，得到中间输出变量

$$y_2(n) = \sum_{k=1}^N a_k y_2(n-k) + x(n)$$

然后，将 $y_2(n)$ 通过系统 $H_1(z)$ ，得到系统的输出 $y(n)$

$$y(n) = \sum_{r=0}^M b_r y_2(n-r)$$

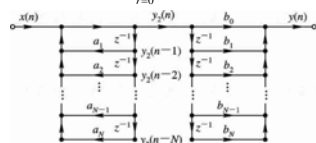


图2 直接I型的交换执行顺序的变形结构

结构图2中有两条完全相同的对中间变量 $y_2(n)$ 进行延迟的延时链，我们可以合并这两条延时链，得到如图3所示的直接II型结构（图中取 $M=N$ ）。

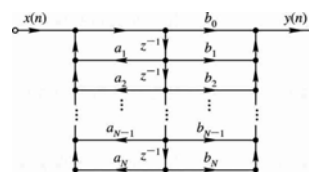


图3 直接II型结构

129

【例3-16】设IIR数字滤波器的系统函数 $H(z)$ 为

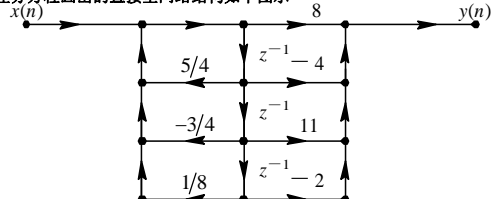
$$H(z) = \frac{8 - 4z^{-1} + 11z^{-2} - 2z^{-3}}{1 - \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{3}{4}z^{-2} - \frac{1}{8}z^{-3}}$$

画出该滤波器的直接型结构

解：由系统函数写出差分方程如下

$$y(n) = \frac{5}{4}y(n-1) - \frac{3}{4}y(n-2) + \frac{1}{8}y(n-3) + 8x(n) - 4x(n-1) + 11x(n-2) - 2x(n-3)$$

按照差分方程画出的直接型网络结构如下图所示



### 二、级联型

将系统函数的分子和分母多项式进行分解， $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$  用它的零极点来表示：

零点： $M = M_1 + 2M_2$  极点： $N = N_1 + 2N_2$

$$H(z) = A \frac{\prod_{r=1}^{M_1} (1 - p_r z^{-1}) \prod_{r=1}^{M_2} (1 - q_r z^{-1})(1 - q_r^* z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N_1} (1 - c_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_2} (1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})}$$

当 $a_k, b_r$ 都是实数时，零极点只有两种情况：

(1) 实数 $p_r, c_k$ ，(2) 共轭复数 $q_r, d_k, q_r^*, d_k^*$

将共轭成对的零点（极点）放在一起，形成一个二阶多项式，其系数仍为实数形成一个二阶网络。

$$H(z) = A \frac{\prod_{r=1}^{M_1} (1 - p_r z^{-1}) \prod_{r=1}^{M_2} (1 + \beta_{1r} z^{-1} + \beta_{2r} z^{-2})}{\prod_{k=1}^{N_1} (1 - c_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_2} (1 - \alpha_{1k} z^{-1} - \alpha_{2k} z^{-2})}$$

$$= A \prod_{j=1}^K \frac{\beta_{0j} + \beta_{1j} z^{-1} + \beta_{2j} z^{-2}}{1 - \alpha_{1j} z^{-1} - \alpha_{2j} z^{-2}}$$

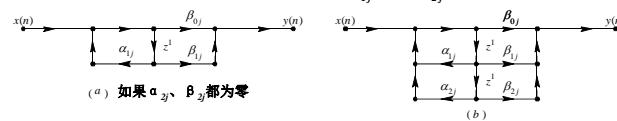
二阶网络:  $H_j(z) = \frac{\beta_{0j} + \beta_{1j} z^{-1} + \beta_{2j} z^{-2}}{1 - \alpha_{1j} z^{-1} - \alpha_{2j} z^{-2}}$

$$H(z) = \prod_{j=1}^K H_j = H_1(z) H_2(z) \cdots H_K(z)$$

当K为奇数, 多出一个一阶网络系统  $H_j(z) = \frac{\beta_{0j} + \beta_{1j} z^{-1}}{1 - \alpha_{1j} z^{-1}}$

式中  $H_j(z)$  表示一个一阶或二阶的数字网络的系统函数, 采用直接II型网络结构

二阶网络:  $H_j(z) = \frac{\beta_{0j} + \beta_{1j} z^{-1} + \beta_{2j} z^{-2}}{1 - \alpha_{1j} z^{-1} - \alpha_{2j} z^{-2}}$



级联结构的一阶和二阶基本节结构

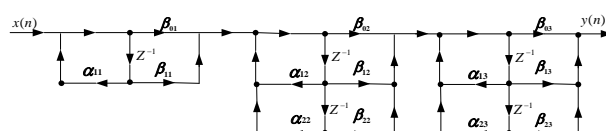


图3.17 IIR系统的级联型信号流图

级联型结构的优缺点:

级联有许多搭配关系 (分子分母上下零极点任意选配组合)

- 优点:**
- (1) 系统结构组成灵活
  - (2) 调整零、极点容易
  - (3) 运算误差的积累小于直接型结构

- 缺点:**
- (1) 存在计算误差积累, 最优化问题
  - (2) 乘法运算误差在输出端的噪声功率大于并联型结构。

【例3-17】已知系统函数  $H(z) = \frac{8 - 4z^{-1} + 11z^{-2} - 2z^{-3}}{1 - 1.25z^{-1} + 0.75z^{-2} - 0.125z^{-3}}$

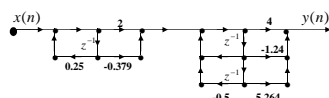
试画出其级联型网络结构

解: 将  $H(z)$  的分子、分母进行因式分解, 得

$$H(z) = \frac{(2 - 0.379z^{-1})(4 - 1.24z^{-1} + 5.264z^{-2})}{(1 - 0.25z^{-1})(1 - z^{-1} + 0.5z^{-2})}$$

$$= \frac{(2 - 0.379z^{-1})(4 - 1.24z^{-1} + 5.264z^{-2})}{(1 - 0.25z^{-1})(1 - z^{-1} + 0.5z^{-2})}$$

$$= H_1(z) H_2(z)$$



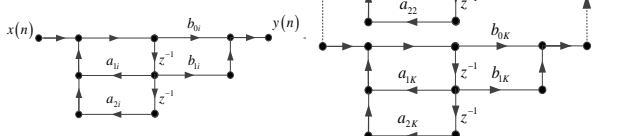
### 三、并联型

将系统函数展开成部分分式, 就可构成并联型结构 (实根、复根都配成对)

$$H(z) = \sum_{i=1}^K H_i = H_1(z) + H_2(z) + \cdots + H_K(z)$$

$$H_i(z) = \frac{b_{0i} + b_{1i}z^{-1}}{1 - a_{1i}z^{-1} - a_{2i}z^{-2}}$$

并联结构的基本节结构



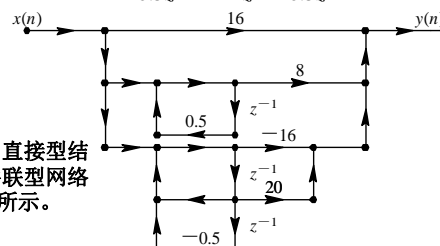
137

【例3-18】画出例题3-17中的  $H(z)$  的并联型结构。

解:  $H(z) = \frac{8 - 4z^{-1} + 11z^{-2} - 2z^{-3}}{1 - 1.25z^{-1} + 0.75z^{-2} - 0.125z^{-3}}$

将  $H(z)$  展成部分分式形式:

$$H(z) = 16 + \frac{8}{1 - 0.5z^{-1}} + \frac{-16 + 20z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$



将每一部分用直接型结构实现, 其并联型网络结构如图3.18所示。

图3.18 例3-18图

138

并联型网络结构的优缺点：

**优点：**运算速度快（运算速度三种网络结构中是最高的），调整极点方便，乘法运算量化误差在输出端的噪声功率最小。

**缺点：**调整零点不方便，当  $H(z)$  有多阶极点时，部分分式展开较麻烦



### 3.6.3 FIR系统的网络结构图

FIR网络结构的特点：没有反馈支路， $h(n)$ 有限长序列实现的网络结构上主要是非递归结构，没有输出到输入的反馈。

$$\text{系统函数} \quad H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

$$\begin{aligned} \text{差分方程} \quad y(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k) \\ &= h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + \dots + h(N-1)x(n-N+1) \end{aligned}$$

140

#### 一、直接型（卷积型，横截型）

$$\text{由 } H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

$$\therefore y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k)$$

$$= h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + \dots$$

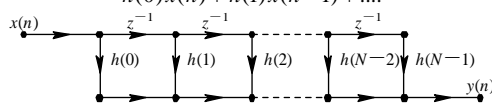


图3.19 FIR直接型网络结构

这种结构称为直接型网络结构或者称为卷积型结构。

141

【例3.19】设FIR网络系统函数 $H(z)$ 如下式：

$$H(z) = 0.96 + 2.0z^{-1} + 2.8z^{-2} + 1.5z^{-3}$$

画出 $H(z)$ 的直接型结构。

解：直接型结构如图3.20

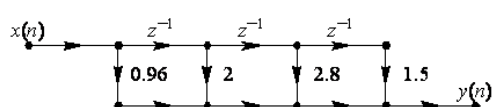


图3.20 (b)

142

#### 二、级联型

将 $H(z)$ 进行因式分解，形成一个系数为实数的二阶形式，将共轭成对的零点放在一起，这样级联型网络结构就是由一阶或二阶因子构成的级联结构

$$\begin{aligned} H(z) &= \prod_{k=1}^{N_1} H_{1k}(z) \cdot \prod_{k=1}^{N_2} H_{2k}(z) \\ &= \prod_{k=1}^{N_1} (\beta_{01}^{(1)} + \beta_{11}^{(1)}z^{-1}) \cdot \prod_{k=1}^{N_2} (\beta_{01}^{(2)} + \beta_{11}^{(2)}z^{-1} + \beta_{21}^{(2)}z^{-2}) \end{aligned}$$

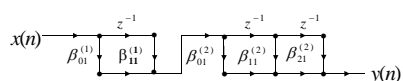


图3.21 FIR级联一阶和二阶基本节结构

143

$$H(z) = \prod_{k=1}^{N_1} H_{1k}(z) \cdot \prod_{k=1}^{N_2} H_{2k}(z) = \prod_{k=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} (\beta_{01} + \beta_{11}z^{-1} + \beta_{21}z^{-2})$$

（全化成二阶因子）

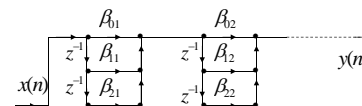


图3.22 FIR系统的二阶级联型信号流程图

**优点：**调整零点位置方便

**缺点：**需要的乘法器多于直接型  
另外 $H(z)$ 阶次较高时不易分解

144



【例3.20】设FIR网络系统函数 $H(z)$ 如下式：

$$H(z)=0.96+2.0z^{-1}+2.8z^{-2}+1.5z^{-3}$$

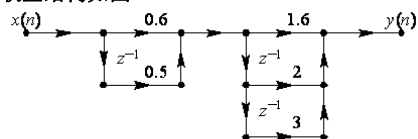
画出 $H(z)$ 的级联型结构。

解：

级联型结构：将 $H(z)$ 进行因式分解，

得到： $H(z)=(0.6+0.5z^{-1})(1.6+2z^{-1}+3z^{-2})$

级联型结构如图



(a)

145

## • 第十次作业：

3.12; 3.13 (a)

补充：

1. 一个系统具有如下的单位取样响应  $h(n) = -\frac{1}{4}\delta(n+1) + \frac{1}{2}\delta(n) - \frac{1}{4}\delta(n-1)$

(1) 试判断系统的稳定性

(2) 试判断系统的因果性

(3) 求系统的频率响应  $H(e^{j\omega})$

(4) 定性画出  $|H(e^{j\omega})|$

(5) 该系统是属于什么类型的系统 (FIR、IIR) ?

146

## 第3章小结

1、时域离散信号的傅立叶变换及性质

有限长序列DTFT的定义、存在条件、性质

2、时域离散信号Z变换之间的关系及性质

ZT的定义、收敛域、存在条件、性质

### 3、系统函数

1) 线性时不变系统对复指数、正弦(余弦)序列的响应

2) ZT与DTFT之间的转换条件

3) 系统函数与频率响应的关系

4) 用系统函数来分析系统的稳定性和因果性

147

5)  $H(z)$ 、 $H(e^{j\omega})$ 与输入、输出的关系

6) 用系统函数定性分析系统频域特性及系统分类

系统函数零点极点概念、系统性质与系统函数收敛域的关系

### 4、系统网络结构

一般将网络结构分成两类： $\begin{cases} \text{有限长脉冲响应网络 (FIR)} \\ \text{无限长脉冲响应网络 (IIR)} \end{cases}$

1) FIR网络中一般不存在输出对于输入的反馈支路；

2) IIR网络结构中存在输出对输入的反馈支路，即信号流图中存在环路；

3) 会根据差分方程和系统函数画直接型和并联型、级联型

网络结构图：IIR网络、FIR网络

4) 会根据差分方程判断系统类型

