第2章 离散时间信号和系统

2.1 信号的基本概念

2.2 离散时间信号

2.3 离散时间系统

2.4 系统的稳定性和因果性

2.5 连续时间信号的采样

本章小结

从研究内容：

	信号与系统	数字信号处理
时域分析：	连续时间信号	离散时间信号
频域分析：	连续信号的傅里叶变换	序列的傅里叶变换（DTFT）
	拉普拉斯变换（复频域）	Z变换（Z域）
		离散傅里叶变换（DFT/FFT是频域信号的离散化）
系统分析：	连续系统分析	离散系统分析与设计 如：滤波器设计

知识要点

本章主要介绍时域离散时间信号和时域离散系统：

掌握时域离散时间信号的表示方法和典型信号；

掌握线性时不变系统的稳定性和因果性；

掌握连续信号的采样定理。

2.1 信号的基本概念

◆ **信号：**

信号在数学上定义为一个函数，这个函数表示一种信息，信号表示的是关于一个或几个自变量的函数，关于一个自变量的信号称为一维信号，关于多个自变量的信号称为多维信号。

◆ **信号的分类**

(1) 按信号载体的物理特征:

电、磁、声、光、热、机械等;

(2) 按信号中的自变量的数目可分为:

一维信号：仅有一个自变量，如一维时间信号;

多维信号：有两个以上的自变量。

本课程重点对一维信号做研究

◆ **一维时间信号**

(1) 连续时间信号（模拟信号）：

在某个时间区间，时间t和幅度均连续，瞬时都有确定值，称之为连续时间信号，也是模拟信号，$x(t)$；

(2) 离散时间信号（采样信号）：

t仅在离散的时间点nT上，信号有定义（采样），时间上不连续，称这样的信号为离散时间信号；

(3) 数字信号：

信号幅度经过量化以后的离散时间信号，时间和幅度均不连续。

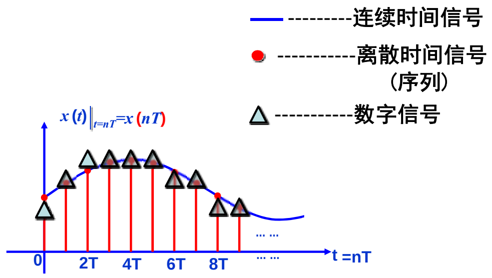
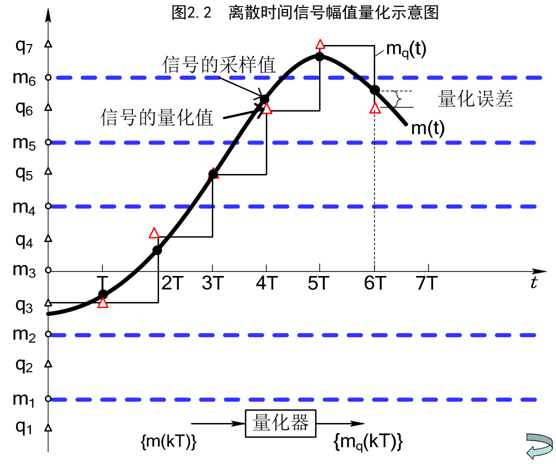


图2. 1 连续信号、离散时间信号和数字信号

图2. 2 离散时间信号幅值量化示意图



2.2 离散时间信号

2. 2. 1 序列的定义

对模拟信号$x(t)$ 进行等间隔采样，采样间隔为T，得到一个有序的数字序列 $x(nT)$，其中 n 取整数，用 $x(nT)$ 表示离散时间信号在nT时刻上的值，该数字序列就是离散时间信号，如图2. 3所示。

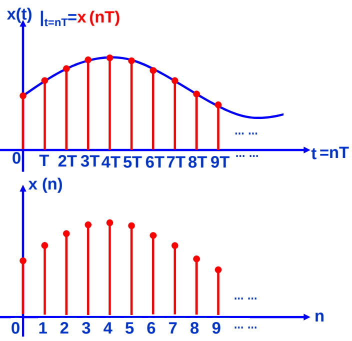


图2.3 连续信号的取样----离散时间信号

用公式表示: $x(t)\big|_{t=nT}=x(nT) \quad n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$

为了简化采样间隔T可以不写，形成信号$x(n)$，也称为序列:

$$x(t)\big|_{t=nT}=x(nT)=x(n) \quad n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$$

$x(n)$ 代表第n个序列值。这里n取整数，非整数时无定义。

在数值上它等于第n采样时刻原模拟信号的大小，也叫采样值。

◆ 离散时间信号（序列）的表示方法

（1）用集合符号表示序列:

如果$x(n)$是通过观测得到的一组离散数据，可以用集合符号 $\{\cdot\}$ 表示:

$$x(n)=\{x_n, n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots\cdots\}$$

例如: $x(n)=\{15,4,-3,0,5,12, n=0,1,2,3,4,5\}$

或表示为:

$x(n)=\{\underline{15},4,-3,0,5,12\}$

集合中有下划线的元素表示n=0时刻的采样值，如上面序列的x(0)=15

（2）用公式表示序列:

如: $x(n)=a^{|n|} \quad 0<a<1, n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$

$x(n)=\sin(\pi n/5) \quad n=-5,-4,\cdots,0,\cdots,4,5$

（3）用图形表示:

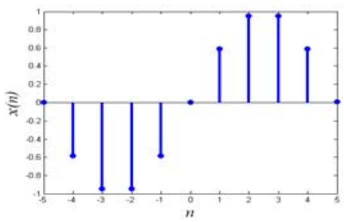


图2.4 $x(n)=\sin(\pi n/5)$的波形图

（4）用单位抽样序列表示(后面讲解)。

2.2.2 常用的典型序列

(1) 单位采样序列

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$

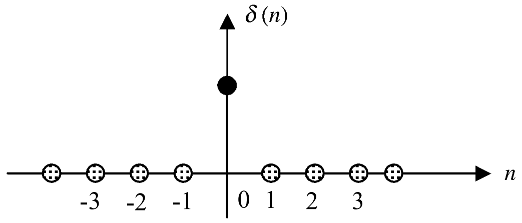


图2.5（a）单位采样序列

❖ δ(n)是一个幅度为1的序列,亦称单位脉冲序列,是离散时间信号。

❖ δ(t)是脉宽为零，幅度为 ∞ 的一种数学极限，单位冲激信号，是连续时间信号。

❖ 用单位采样序列δ(n)可以表示任意序列。

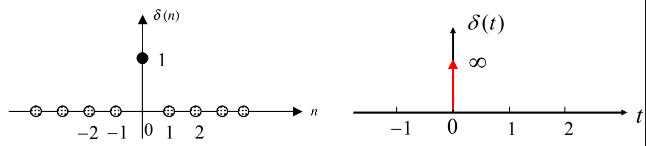
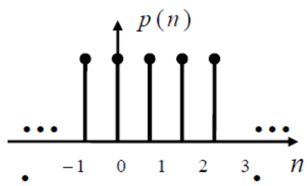


图2.5（b）单位采样序列和单位冲激信号

脉冲串序列



$$p(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(n-k)$$

(2) 单位阶跃序列

$$u(n)=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$

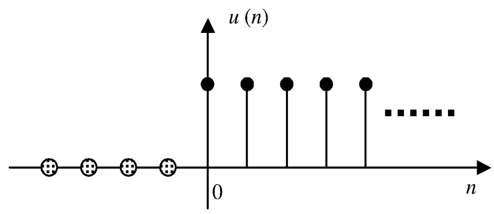
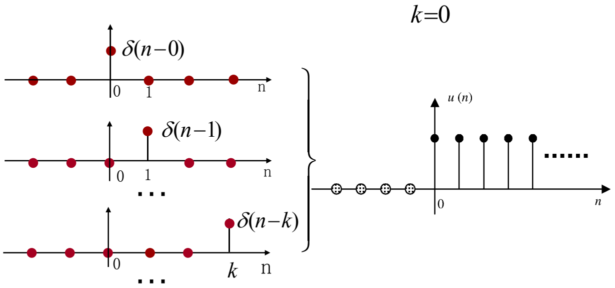
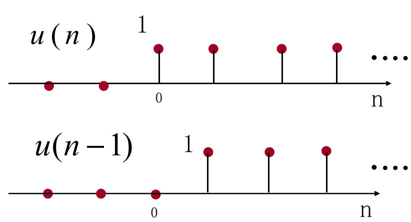


图2.6 单位阶跃序列

- ***u(n)与$\delta(n)$的关系*** $\Rightarrow\quad u(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(n-k)$



$$\Rightarrow\quad \delta(n)=u(n)-u(n-1)$$



(3) 矩形（窗）序列 $R_N(n)=\begin{cases}1 & 0\le n\le N-1\\ 0 & 其它n\end{cases}$

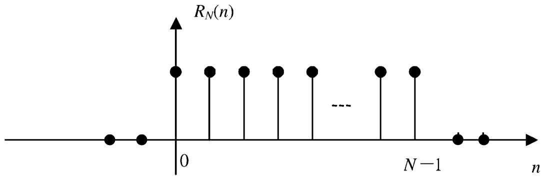
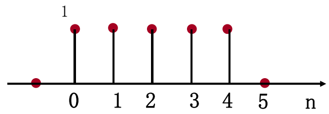


图2.7 矩形序列

$$R_N(n)=u(n)-u(n-N)$$

19

例：当N=5时：$R_5(n)$ 波形如下：



20

(4) 实指数序列

$$x(n)=a^n u(n)$$

其中a为不等于零的任意实数

$|a|<1$ 序列是收敛的，$x(n)$幅度随n的增大而减小

$|a|>1$ 序列是发散的，$x(n)$幅度随n的增大而增大

21

实指数序列的四种情况

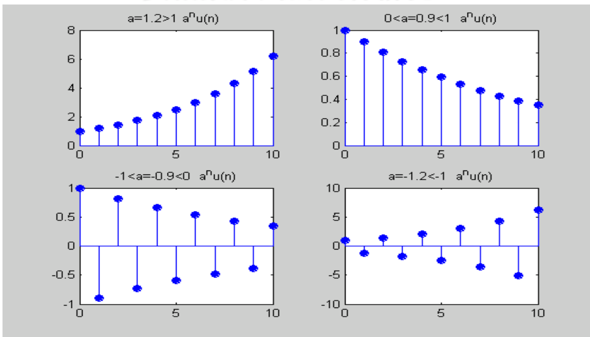


图2.8 实指数序列

22

(5) 正弦序列和余弦序列

$x(n)=A\sin(\omega n)$ ω数字频率

$x(n)=A\cos(\omega n)$ $n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$

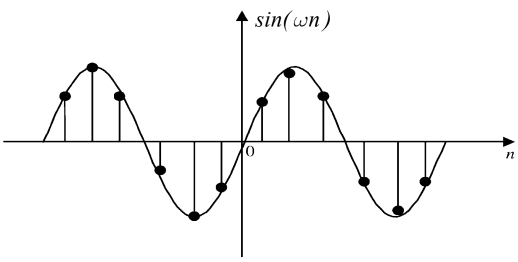


图2.9 正弦序列

23

➢ 正弦序列的形成：

$$\boxed{x(n)=A\sin(\Omega t+\varphi)\big|_{t=nT}=A\sin(\Omega Tn+\varphi)=A\sin(2\pi fTn+\varphi)}$$

$$\boxed{x(n)=A\sin(\omega n+\varphi)}$$

$T=\dfrac{1}{f_s}$

其中 f_s 是采样频率

➢ 三者的关系：

$$\omega=\Omega T=2\pi fT=2\pi f/f_s=\Omega/f_s$$

归一化频率

f：模拟频率，单位 Hz；

Ω：模拟角频率，单位 rad/s；

ω：数字（角）频率，单位 rad。

24

➢ 重要的线性关系

数字角频率 ω
模拟角频率 Ω $\Big\rangle\ \omega = \Omega T = \dfrac{\Omega}{f_s} \quad (rad)$

●数字角频率 ω 与模拟角频率 Ω 成线性关系

●数字角频率 ω 是模拟角频率对采样频率的归一化频率

是一个非常重要的关系式，是用数字信号处理、理解很多物理现象的关键!!

数字角频率的特点

(1) ω是一个连续变量， $\because\ \omega = \Omega T = 2\pi fT$

(2) ω的单位为一种角度的量纲单位：弧度**(rad)**

$\because\ \omega = 2\pi \dfrac{f}{f_s}$ 它是一种相对频率，相对于采样频率 f_s，称之为归一化数字角频率 $\omega = \dfrac{\Omega}{f_s}$

(3)序列对于ω是以 2π 为周期的，ω的独立取值范围为 $[0, 2\pi)$ 或 $[-\pi, \pi)$

$\because\ \cos(\omega n) = \cos[(\omega + 2k\pi)n]$

(6)复指数序列 $x(n) = e^{(\sigma + j\omega)n} = e^{\sigma n} \cdot e^{j\omega n}$

设 $\sigma = 0, x(n) = e^{j\omega n}$

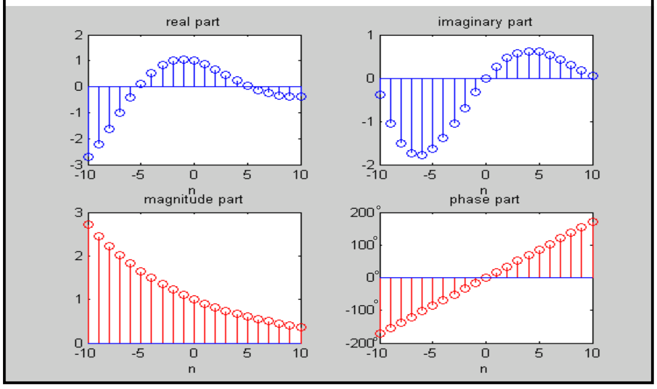
$$= \cos(\omega n) + j\sin(\omega n)$$

❖ 当σ＝0时，**|x(n)|=1，arg|x (n)|=ωn** 。

❖它也是非常重要的一种基本信号。因为它是离散信号做傅里叶变换时的基函数

例: 作出复指数序列的实部, 虚部, 幅度和相位

$$x(n) = e^{(-0.1+j0.3)n} = e^{-0.1n} \cdot e^{j0.3n}, -10 \le n \le 10$$



第二次作业:

第2章：2.3;

(7)周期序列

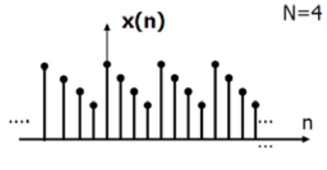
定义: 如果序列对所有***n***满足条件:

$$x(n)=x(n+lN)$$

*N*为最小正整数，*l*为整数，则称序列*x(n)*为周期*N*点的周期序列。

$x(n) = x(n+4l)$

$l = 0, \pm1, \pm2, \ldots$



讨论一般正弦序列的周期性:

设 $x(n)=A\sin(\omega_0 n+\varphi)$

则 $x(n+N)=A\sin(\omega_0(n+N)+\varphi)$
$=A\sin(\omega_0 n+\omega_0 N+\varphi)$

如果使：***x(n)=x(n+N)***

则要求： $\omega_0 N=2\pi k$ $\qquad N=\frac{2\pi}{\omega_0}k$

N如何成为正整数

$\frac{2\pi}{\omega_0}=$?

31

序列的周期等于: $\boxed{N=\frac{2\pi}{\omega_0}\cdot k}$

式中k与N均取整数，且k的取值要使N最小。

$$\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{N}{k}=\begin{cases}\text{整数} \\ \text{有理数} \\ \text{无理数}\end{cases}$$

整数、有理数 → 是周期序列,周期是N

无理数 → 非期序列

32

举例说明：3种情况:

(1) $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 为整数时(k=1)，周期序列周期N为 $\frac{2\pi}{\omega_0}$

例: $\frac{2\pi}{\omega_0}=8 \qquad \omega_0=\frac{\pi}{4} \qquad N=8$

33

(2) $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 为有理数 $\frac{p}{q}$ 时，其中p、q为整数且互质，取$k=q$，则$N=p$,正弦序列周期为 p

例:

$\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{8}{3} \qquad \omega_0=\frac{3}{4}\pi \qquad N=8$

34

(3) $\frac{2\pi}{\omega_0}$为无理数时，正弦序列是非周期序列

例: $\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{14\pi}{3} \qquad \omega_0=\frac{3}{7} \qquad N=?$

不可能取整数

35

对序列 $\cos(\sqrt{3}\pi n)$，它的数字频率为 $\omega=\sqrt{3}\pi$

$$\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}\pi}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

为一个无理数，序列不是周期序列。

但无论序列是否为周期序列，

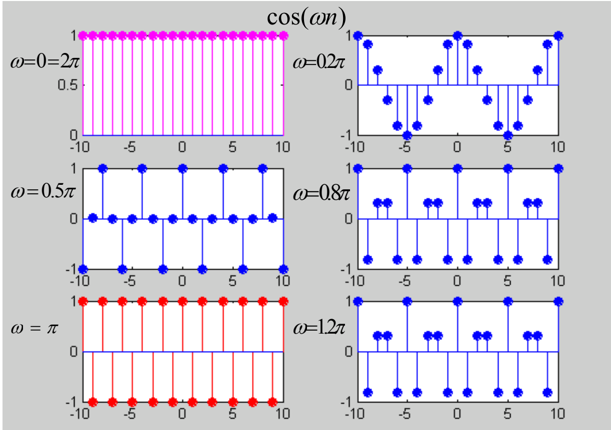
ω 称作序列的数字频率。

36

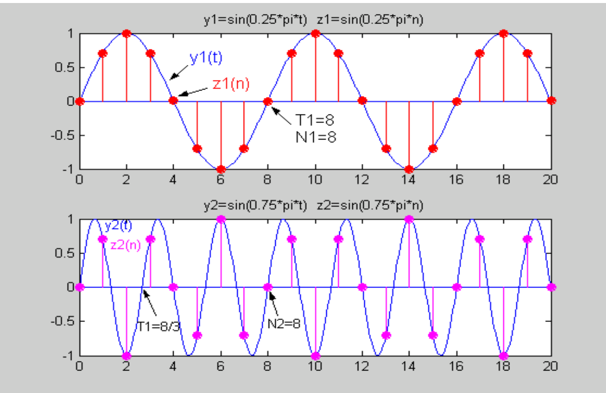
正弦序列 $x(n)=A\sin(n\omega+\varphi)$

对n而言，可能是周期函数，也可能不是。

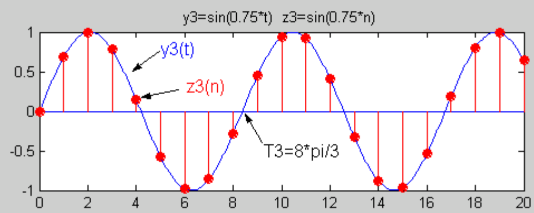
37



38



39



正弦信号$sin(\Omega t)$ 对t

始终是周期的，周期为$T_a=2\pi/\Omega$,

正弦序列$sin(\omega n)$ 对n

则要求$2\pi/\omega$必须为整数或者有理数时才存在周期

40

例：判断

$$x(n)=e^{j(\frac{n}{6}-\pi)}$$

是否是周期序列?

解：$x(n+N)=e^{j(\frac{n+N}{6}-\pi)}=e^{j(\frac{n}{6}-\pi+\frac{N}{6})}$

若$x(n)$为周期序列，则必须满足$x(n)=x(n+N)$，

即满足$\frac{N}{6}=2\pi k$，且N、k为整数

而不论$k\geq 1$取什么整数，$N=12\pi k$都是一个无理数

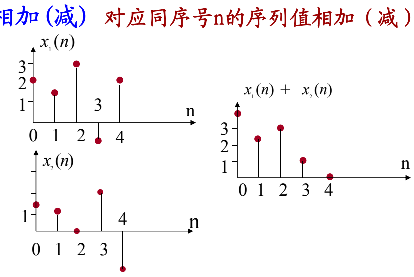
$\therefore x(n)$不是周期序列

41

2.2.3 序列的运算

一、序列基本运算

1、相加（减） 对应同序号n的序列值相加（减）



2、数乘 $x(n)\rightarrow ax(n)$

序列各样本元乘以常数a

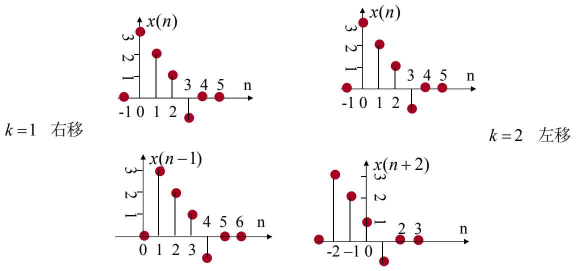
42

3、序列移位　$x(n) \to x(n-k)$

序列$x(n)$，当$k>0$时，“左加右减”

$x(n-k)$：右移k位（延时序列）

$x(n+k)$：左移k位(超前序列)



例：典型DSP算法的运算差分方程实现

差分方程：　$y(n)=x(n)+1.6x(n-1)-0.9y(n-1)$

DSP的操作由下面操作组成：

1）存储和读取：　$x(n-1), y(n-1)$

2）数乘：　$1.6x(n-1), -0.9y(n-1)$

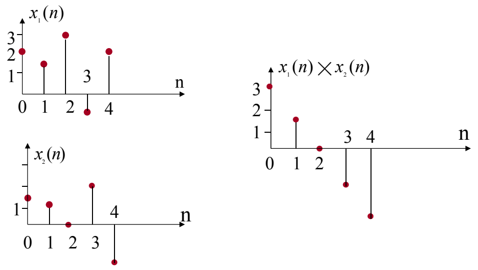
3）加法：　$y(n)=x(n)+1.6x(n-1)-0.9y(n-1)$

上例表示了**DSP**系统中的典型组合运算：“数乘-累加”运算，它反映了数字信号处理的“数值运算”特征。

二、序列的其他运算

1、相乘

对应同序列号n的序列值相相乘



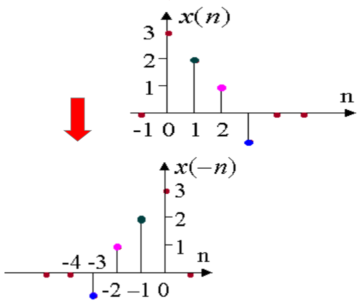
注意：

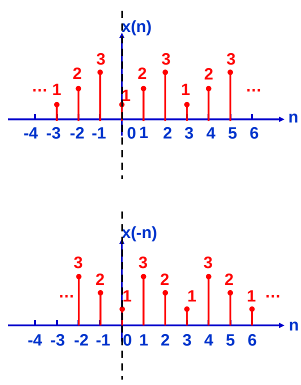
$$x(n)\delta(n)=x(0)\delta(n)$$

$$x(n)\delta(n-n_0)=x(n_0)\delta(n-n_0)$$

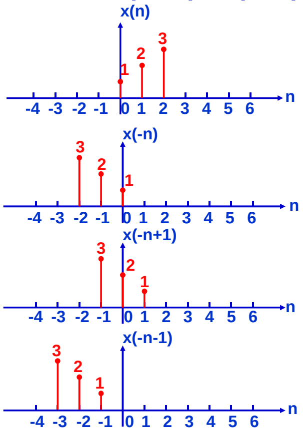
2、反转 $x(n) \to x(-n)$

以n=0为对称轴中心，将原序列翻褶





➢ 注意：x(-n+1)和x(-n-1)与x(-n)的移位关系？



x(0)=1
x(1)=2
x(2)=3

序列$x(-n)$，当$k>0$时，“左减右加”

3、加窗

$$y(n) = x(n) \times R_N(n),\ n = 0,1,\cdots,N-1$$

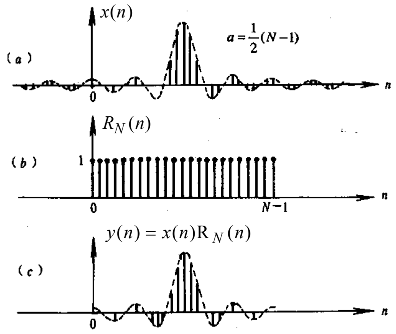
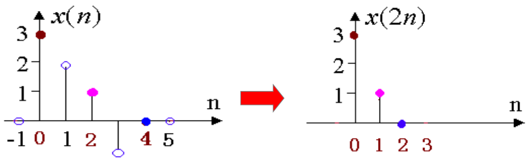


图　加矩形窗运算例图

4、时间尺度变换　$x(n) \to x(mn)$

$x(n) \to x(n/l)$

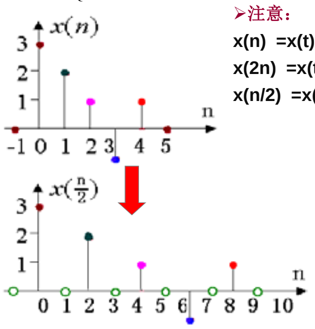
$x(mn)$是序列x(n)每隔m点取一点形成的，当$m=2$时如下图示：



以上过程也称为离散信号的降采样(decimation)：是减少抽样率以去掉多余的数据，将原抽样率降低了m倍。

与此对应的还有离散信号的插值(interpolation)：是将原抽样率提高了l倍以增加数据的过程。

$$y(n)=\begin{cases} x(\frac{n}{2}), & n=0,\pm2,\pm4,\cdots\cdots \\ 0\ , & n=others \end{cases}$$



➢注意：

x(n) $=x(t)|_{t=nT}$ 采样间隔为T

x(2n) $=x(t)|_{t=n2T}$ 采样间隔为2T，抽样

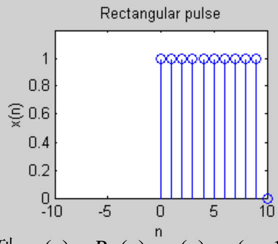
x(n/2) $=x(t)|_{t=nT/2}$ 采样间隔为T/2，插值

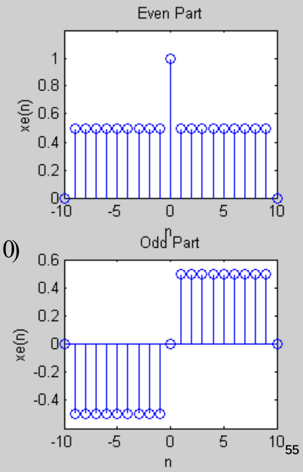
5. 实序列的奇偶分解

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(-n)]$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(-n)]$$





例：$x(n)=R_{10}(n)=u(n)-u(n-10)$ 的奇偶分解

6. 样本值求和

$$\sum_{n=n1}^{n2} x(n)=x(n1)+\cdots+x(n2)$$

7. 样本值乘积

$$\prod_{n=n1}^{n2} x(n)=x(n1)\times\cdots\times x(n2)$$

8. 卷积求和：

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

第三次作业：

第2章：2.1；2.2；2.4；

9. 能量和功率

●有界序列：若存在有界的常数B，使得序列x(n)满足：$|x(n)|\le B<\infty$，则x(n)为有界序列。

●有界序列的能量：

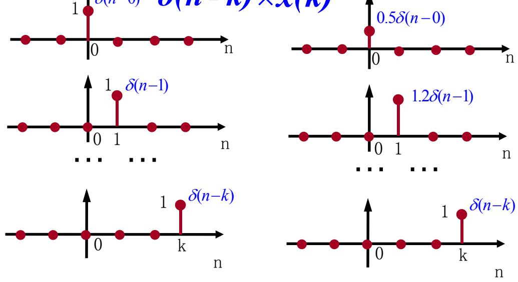
$$E=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x^*(n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$

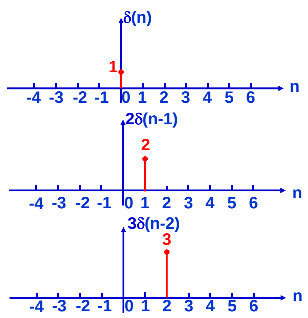
●有界序列的平均功率：$P=\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}|x(n)|^2$

三、任意序列的表示

任意一序列可以采用单位抽样序列的移位加权和来表示：$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k)$

$\delta(n-k)\times x(k)$



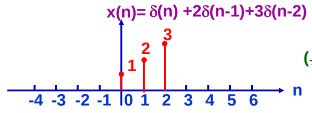


可以将任意序列表示成单位抽样序列的移位加权和

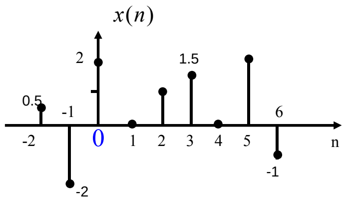
$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

x(n)= δ(n) +2δ(n-1)+3δ(n-2) $=\sum_{k=0}^{2} x(k)\delta(n-k)$

(其中，x(0)=1, x(1)=2, x(2)=3)



例：如果 $x(n)$ 的波形为：



可以表示成：

$$x(n)=0.5\delta(n+2)-2\delta(n+1)+2\delta(n)+\delta(n-2)+1.5\delta(n-3)$$
$$+2\delta(n-5)-\delta(n-6)$$
$$=\sum_{n=-2}^{6}x(k)\delta(n-k)$$

61

四. 级数求和

单边指数级数：$\{a^n, n\geq 0\}$，其中 a 是一任意常数，

当 $|a|<1$ 时，该单边无限项级数和收敛：

$$\sum_{n=0}^{\infty}a^n=\frac{1}{1-a},\quad |a|<1$$

有限项级数求和：

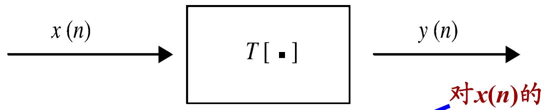
$$\sum_{n=n_1}^{n_2}a^n=\frac{a^{n_1}-a^{n_2+1}}{1-a},\quad \forall a$$

62

2.3 离散时间系统

2.3.1 离散系统定义

数学上将输入序列 $x(n)$ 变换成输出序列 $y(n)$ 的一种运算 $T[\cdot]$。



对 $x(n)$ 的响应

记为： $y(n)=T[x(n)]$

其中输入 $x(n)$ 称为激励， 输出 $y(n)$ 称为响应

63

连续系统描述：

微分方程，卷积，转移函数（Laplace变换），频率响应（Fourier 变换）。

离散系统描述：

差分方程，卷积，系统函数（Z 变换），频率响应（DTFT，DFT）

64

给系统 $T[\bullet]$ 加上各种具体的约束条件后，就可以定义各种具体的离散时间系统：

- ●线性系统（Linear system）：满足叠加原理的系统
- ●时不变系统（Time-invariant system）：系统的性能不随时间变化。
- ●因果系统（Causal system）：系统当前时刻的输出，只与当前时刻，以及当前时刻之前的输入有关，与以后的输入无关。
- ●稳定系统（Stable system）：是指有界输入产生有界输出的系统。

本书将重点讨论线性非时变(LSI：Linear Shift Invariant)系统!

65

2.3.2 线性离散时间系统（线性系统）

满足叠加原理的系统为线性离散时间系统

设一个离散系统对 $x_1(n)$ 的响应是 $y_1(n)$

对 $x_2(n)$ 的响应是 $y_2(n)$

即
$$y_1(n)=T[x_1(n)]$$
$$y_2(n)=T[x_2(n)]$$

66

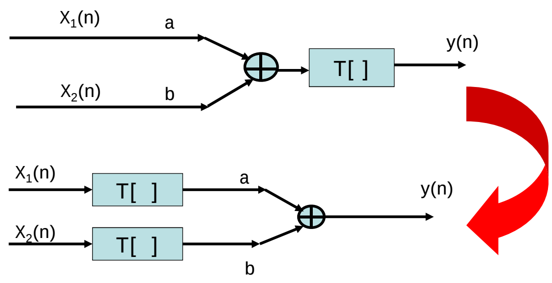
即若对两个激励 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的响应：

$$
\begin{aligned}
y(n) &= T[ax_1(n)+bx_2(n)] \\
&= T[ax_1(n)]+T[bx_2(n)] \quad \text{满足可加性} \\
&= aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)] \quad \text{满足齐次性} \\
&= ay_1(n)+by_2(n)
\end{aligned}
$$

既满足可加性又满足齐次性称为满足叠加原理

上式中 a , b 均是常数

线性系统：满足叠加原理



例：证明 $y(n) = ax(n)+b$（a和b是非零常数）

所代表的系统是非线性系统

证：
$$
\begin{aligned}
&y_1(n)=T[x_1(n)]=ax_1(n)+b \\
&y_2(n)=T[x_2(n)]=ax_2(n)+b \\
&y(n)=T[x_1(n)+x_2(n)]=a[x_1(n)+x_2(n)]+b \\
&y_1(n)+y_2(n)=a[x_1(n)+x_2(n)]+2b \\
&y(n)\neq y_1(n)+y_2(n)
\end{aligned}
$$

所以该系统不是线性系统

显然，b=0时是线性系统

证毕

2.3.3非时变离散时间系统（时不变系统）

如果系统的响应对于输入（激励）信号加于系统的时刻无关，则称该系统是一个时不变或移不变系统。

用数学公式表示为：

$$
\left.\begin{aligned}
y(n) &= T[x(n)] \\
y(n-n_0) &= T[x(n-n_0)]
\end{aligned}\right\}
$$

即不管输入信号作用的时间先后，输出信号响应波形形状均相同，仅是出现的时间不同

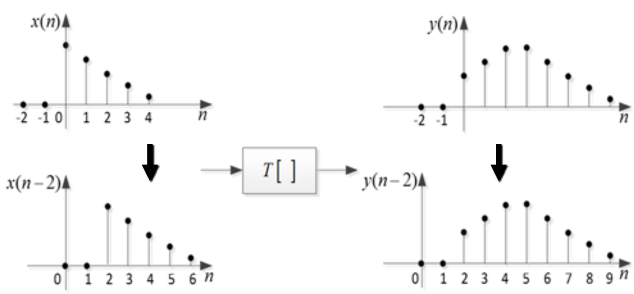


图2.6 系统时不变性说明的示意图

例：证y(n)=2x(n)+3是时不变系统。

证：　y(n)=T[x(n)]=2x(n)+3

　　　T[x(n-m)]=2x(n-m)+3　　（1）

　　　y(n-m)=2x(n-m)+3　　　（2）

　　∵ T[x(n-m)]=y(n-m)　　∴ 该系统是时不变系统

说明：例题中，好像y(n-m)和T[x(n-m)]很容易就得到了一样的结果，而实际上它们是通过不同的途径得到的。

- 将y(n)看做函数，n是函数的自变量，对于函数y(n-m)，n-m是自变量，将用n-m去替换n，也就是 y(n)=2x(n)+3表达式中的所有出现n的地方用n-m去替换；
- T[x(n)]表示的是对输入x的响应，系统只响应x中与采样周期T的变化有关的量n，而不响应与采样周期T不变化的量。

例：检查是否为时不变系统

$$y(n)=nx(n)$$

解：$\because\ y(n)=T\left[x(n)\right]=nx(n)$

$$T\left[x(n-n_0)\right]=nx(n-n_0)$$

$$y(n-n_0)=(n-n_0)x(n-n_0)$$

$$\therefore y(n-n_0)\neq T\left[x(n-n_0)\right]$$

故：系统为时变系统

例：检查是否为时不变系统 (1) $y(n)=x(n)u(n)$
(2) $y(n)=x(2n)$

解：(1) $\because\ y(n)=T\left[x(n)\right]=x(n)u(n)$

$$T\left[x(n-n_0)\right]=x(n-n_0)u(n)$$

而 $y(n-n_0)=x(n-n_0)u(n-n_0)$

$\therefore$ $y(n-n_0)\neq T[x(n-n_0)]$

所以是时变系统

(2) $y(n)=x(2n)$

解(2)：系统对 $x(n-n_0)$ 的响应：

系统只响应x中与采样周期T的变化有关的n，不响应n_0

$$T\left[x(n-n_0)\right]=x(2n-n_0)$$

而 $y(n-n_0)=x(2n-2n_0)$

$\therefore$ $y(n-n_0)\neq T[x(n-n_0)]$

所以是时变系统

结论：

(1) 类似 $y(n)=x(n)\cdot f(n)$ 的系统，如果 $f(n)$不是常数，系统就一定是时变的

(2) 类似 $y(n)=x(an)$只要$a\neq 1$，系统就一定是时变系统

思考：以上两系统是线性系统吗？

2.3.4 线性时不变离散时间系统

一、线性时不变系统

同时具有线性和时变性的离散时间系统称为线性时不变（移不变）离散时间系统，简称**LSI**(**L**inear **S**hift **I**nvariant)系统。

二、LSI系统输入与输出之间的关系

对于LSI系统 $x(n) \rightarrow \boxed{T[\cdot]} \rightarrow y(n)=T[x(n)]$

令$x(n)=\delta(n)$

单位抽样 单位抽样响应

$\delta(n) \rightarrow \boxed{T[\cdot]} \rightarrow y(n)=h(n)=T[\delta(n)]$

$$h(n)=T[\delta(n)]$$

单位抽样响应 **h (n)**

描述了离散系统的特征，是重要的“物理量”。

h (n) → $H(z)$, $H(e^{j\omega})$

FIR (Finite Impulse Response)

h (n)点数有限长（响应时宽有限长）---- FIR系统

IIR (Infinite Impulse Response)

h (n)点数无限长（响应时宽无限长）----IIR系统

对于LSI系统

$x(n) \rightarrow \boxed{T[\cdot]} \rightarrow y(n)=T[x(n)]$

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m) \Rightarrow y(n)=T\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)\right]$$

根据线性系统叠加性质

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)T[\delta(n-m)]$$

$T[\delta(n)]=h(n)$

$T[\delta(n-m)]=h(n-m)$

根据线性系统时不变性

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$$

$$=x(n)*h(n)$$

线性时不变系统的输出等于输入序列和该系统的单位取样响应的线性卷积！

2.3.5 离散线性卷积的计算

两序列 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的线性卷积定义为：

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)=x(n)*h(n)$$

卷积的计算方法:

(1). 图解法 (2). 解析法 (3). 变换法

一、图解法计算线性卷积

线性卷积运算的一般步骤:

根据线性卷积定义:

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)=x(n)*h(n)$$

Step1：反转：$x(n)\rightarrow x(m)\quad h(n)\rightarrow h(m)\rightarrow h(-m)$

Step2：移位：$h(-m)\rightarrow h(n-m)$

Step3：相乘：$x(m)\cdot h(n-m)\quad -\infty<m<\infty$

Step4：相加：$\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$

对移位量n形成循环 $-\infty<n<\infty$

卷积中主要序列运算是：*反转*，*移位*，*相乘和相加*，这种卷积称为序列的线性卷积

例：图解法计算线性卷积

$x(n)=\{1,1,\underline{1},-1,-1,-1\}, n_x=[-2\sim 3]$

$h(n)=\{1,\underline{1},2,2\}, n_h=[-1\sim 2]$

求： $y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)$

步骤:1、反转,改变自变量 $n\Rightarrow k$;

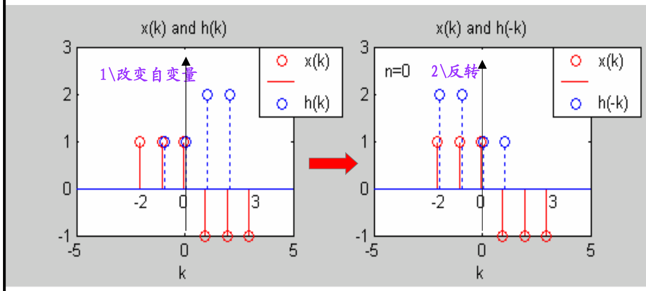
2、移位n, $n=n_y=[n_{x\min}+n_{h\min}\sim n_{x\max}+n_{h\max}]$

n为y(n)的非零值n_y的取值范围

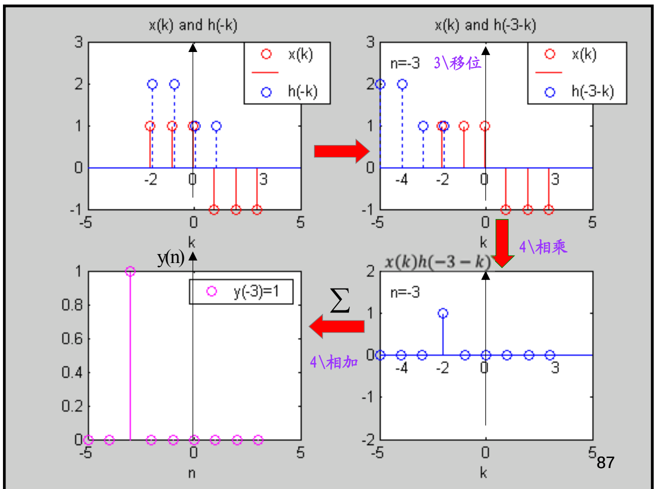
3、相乘再相加,对当前的n ;

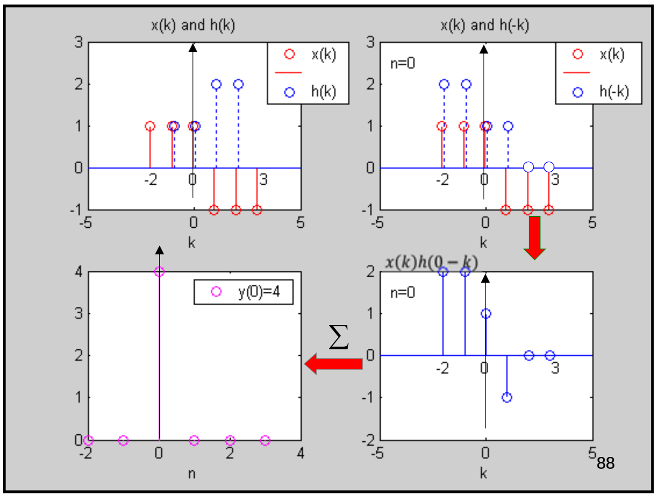
4、改变移位量n，重复以上步骤

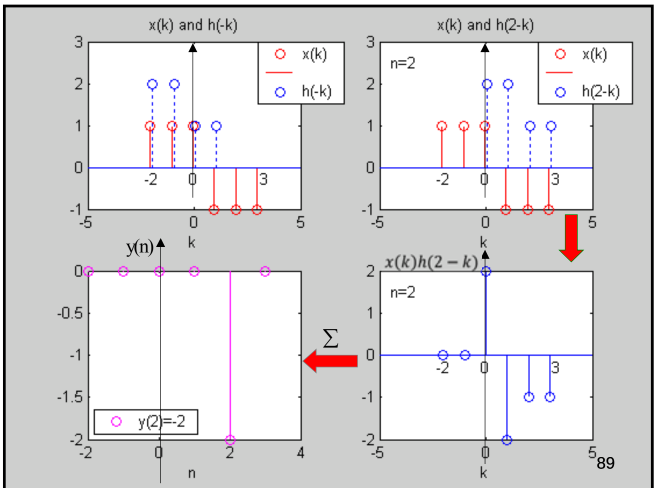
85

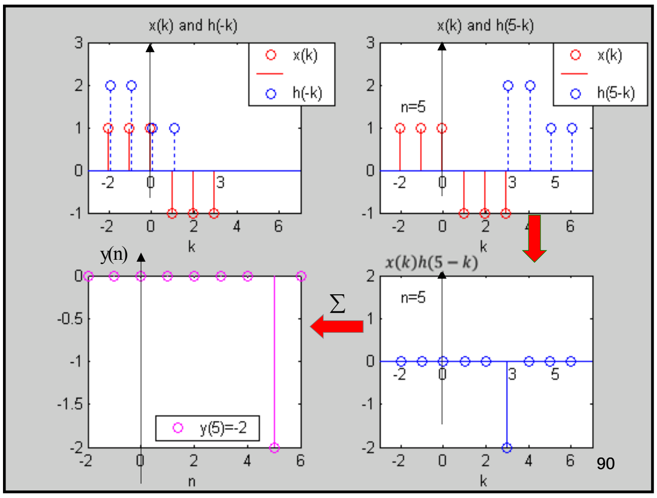


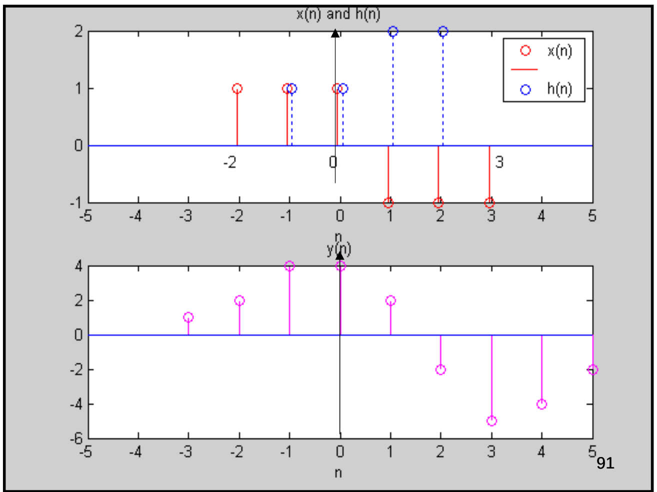
86











k			-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5			
x(k)				1	1	1	-1	-1	-1					
h(k)					1	1	2	2						y(n)
h(-3-k)	2	2	1	1										y(-3)=1
h(-2-k)		2	2	1	1									y(-2)=2
h(-1-k)			2	2	1	1								y(-1)=4
h(-k)				2	2	1	1							y(0)=4
h(1-k)					2	2	1	1						y(1)=2
h(2-k)						2	2	1	1					y(2)=-2
h(3-k)							2	2	1	1				y(3)=-5
h(4-k)								2	2	1	1			y(4)=-4
h(5-k)									2	2	1	1		y(5)=-2

92

结论：

1) 若$x(n)$与$h(n)$的非零值范围分别为$[n_{x1}:n_{x2}]$和$[n_{h1}:n_{h2}]$，则$y(n)$非零值范围为$[(n_{x1}+n_{h1}):(n_{x2}+n_{h2})]$

2) 若$x(n)$与$h(n)$的非零值长度分别为N_x和N_h，则$y(n)$非零值的长度为$N_y=N_x+N_h-1$

线性卷积的长度 $N_y = N_x + N_h - 1$

93

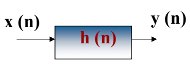
第四次作业：

2.5；2.6；2.9（用画图法）；2.10

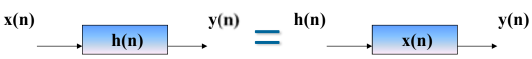
94

二、线性卷积的性质

（1）交换律



$$y(n)=x(n)*h(n)=h(n)*x(n)$$

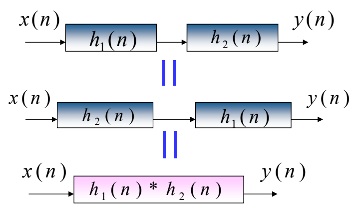


95

（2）结合律

$$[x(n)*h_1(n)]*h_2(n)=[x(n)*h_2(n)]*h_1(n)=x(n)*[h_1(n)*h_2(n)]$$

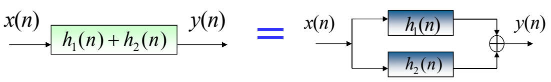
$h_1(n)$和$h_2(n)$分别是两个系统的单位取样响应



96

（3）加法的分配律

$$x(n)*[h_1(n)+h_2(n)]=[x(n)*h_1(n)]+[x(n)*h_2(n)]$$



（4）与单位取样序列$\delta(n)$的卷积

任一序列与单位取样序列的卷积等于序列本身

$$x(n)*\delta(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)=x(n)$$

如果序列与一个移位的单位取样序列 $\delta(n-n_0)$ 进行线性卷积，就相当于将序列本身移位 n_0 （n_0是整常数）

$$\begin{cases}x(n)*\delta(n)=x(n)\\ x(n)*\delta(n-n_0)=x(n-n_0)\end{cases}$$

利用卷积的这一重要性质再回头来对一些短序列做离散卷积，可以简化作图等繁琐的步骤。

举例: $x(n)*R_3(n)=x(n)*[\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)]$
$=x(n)+x(n-1)+x(n-2)$

注：以上这些性质只对LSI系统成立

三、变换法计算线性卷积

利用频域分析方法，这种方法对分析较长序列或者无限长序列的卷积很重要！

2.4 系统的因果性和稳定性

2.4.1 因果性

因果系统: 若一个时域离散系统的输出y(n)，在n=n_0时的值y(n_0)只依赖于 $n\le n_0$的输入序列x(n)，则称此系统为因果系统。

因果序列：当n<0时的序列值恒等于零的序列称之为因果序列。

因果性：即物理可实现性。

对于LSI系统：

- 因果性充分必要条件：

  h(n)=0 ， n<0

- 因果系统的单位抽样响应必然是因果序列。

2.4.2 稳定性

有界：若对一个序列$x(n)$，存在一个数M，对于任意的n都有 $|x(n)|\le M<\infty$ ，则称序列$x(n)$有界。

稳定系统：是指有界输入产生有界输出的系统。

即：若 $|x(n)|\le M<\infty$

则 $|y(n)|\le P<\infty$

有界输入 $x(n)$ $\xrightarrow{产生}$ 有界输出 $y(n)$

对于LSI系统：

- **稳定性充分必要条件：**

系统的单位取样响应h(n)绝对可和，即：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

例：讨论以下系统是否是因果系统：

（1） $y(n)=nx(n)$ 因果 ∵ $y(n_0) \longleftrightarrow n_0x(n_0)$

（2） $y(n)=x(n+1)$ 非因果 ∵ $y(n_0) = x(n_0+1)$

（3） $y(n)=x(n^2)$ 非因果 ∵ n<0 或 n≥ 0，$y(n) = x(n^2)$

（4） $y(n)=x(-n)$ 非因果 ∵ n<0的输出决定于n>0时的输入（将来的输入）

例：设LSI系统的单位取样响应为 $h(n)=a^n u(n)$

分析该系统的因果性和稳定性，a为实常数。

解：①∵ n <0时，有h(n)=0，故该LSI是因果性系统。

② $\sum_n |h(n)| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a^n| = \begin{cases} \dfrac{1}{1-|a|} & |a|<1 \\ \infty & |a|\geq 1 \end{cases}$

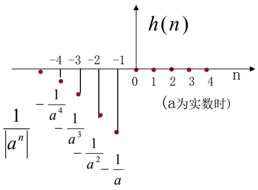
可见，只有|a|<1时，系统才是稳定的

当a=1时，累加器因果不稳定

例：设LSI系统的单位取样响应为 $h(n)=-a^n u(-n-1)$，分析该系统的因果性和稳定性，a为实常数。

①∵ n <0时，有h(n) ≠ 0

故该LSI是非因果性系统。



② $\sum_n |h(n)| = \sum_{n=-\infty}^{-1} |a^n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a^{-n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a^n|}$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{|a|-1} & |a|>1 \\ \infty & |a|\leq 1 \end{cases}$$

可见，只有|a|>1时，系统才是稳定的

2.5 连续时间信号的采样

将模拟信号经过采样和量化编码形成数字信号，再采用数字信号处理技术进行处理；处理完毕，如果需要，再转换成模拟信号，这种方法称为模拟信号数字处理方法。

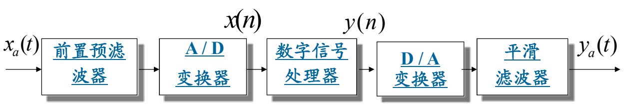


图2.5.1模拟信号数字处理系统框图

预滤波(前置预滤波器)：
防止时域采样后产生频谱混叠

A/DC: 将模拟信号转换成数字信号；

DSP系统: 完成所需要的信号处理；

D/AC: 将经过处理的数字信号转换为模拟信号；

平滑滤波:将数模转换后的信号进行平滑。

DSP系统是整个系统的核心

由图**2.5.1**：

两个问题：

问题1、如何采样以如何保证信息不丢失？信号频谱在采样前后如何变化？ **采样定理**

问题2、如何由采样后的信号恢复原信号？**采样恢复**

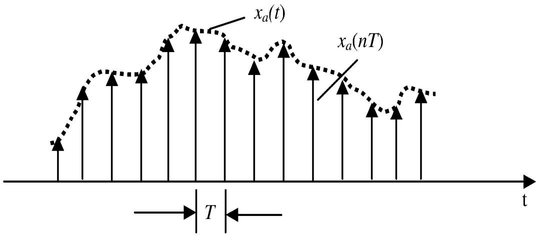
109

2. 5. 1 采样

等间隔采样，即每隔固定时间T取一个信号值，其中T称为采样周期，T的倒数称为采样频率或采样率。记为

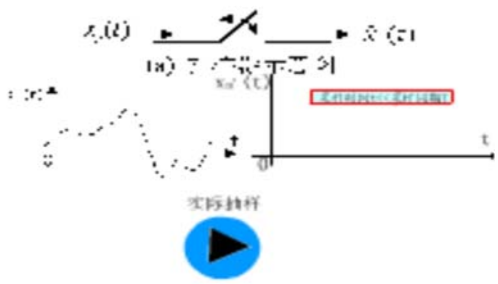
$$f_s=1/T\ (Hz)$$

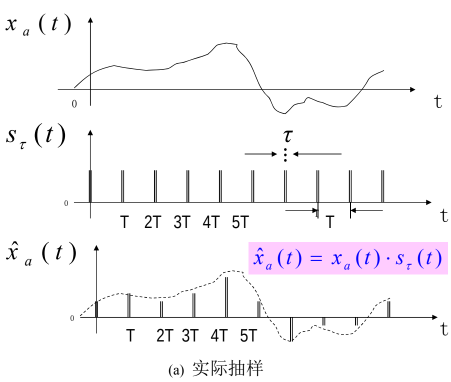
110



111

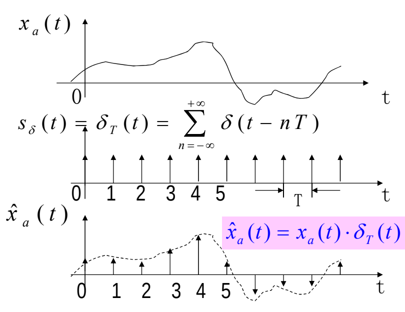
（抽样时间t=τ 抽样周期=T）





(a) 实际抽样

（抽样时间=τ 抽样周期=T）

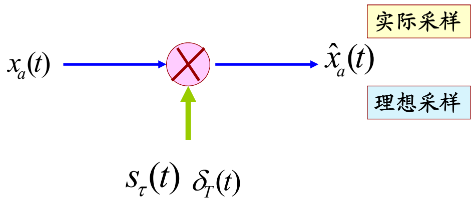


(b) 理想抽样

（抽样时间τ→0 抽样周期=T）

图2.5.2 对模拟信号进行采样

采样：



理想采样后的信号完全与输入信号$x_a(t)$在抽样瞬间的幅度相同。本课程中对采样的讨论都是基于这种理想的均匀采样。

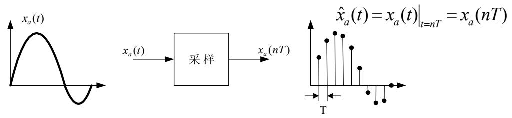
理想采样：

单位冲激串 $\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$ 只有在t=nT时不为零，与模拟信号相乘得采样信号：

$$\hat{x}_a(t)=x_a(t)\cdot\delta_T(t)=x_a(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_a(t)\delta(t-nT)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_a(nT)\delta(t-nT)$$

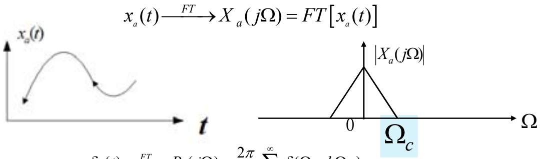
采样的结果是使原来的模拟信号变成为在$t=0,\pm T,\pm 2T,\ldots$这些点上的离散信号，这就是采样原理。

$\hat{x}_a(t)=x_a(t)|_{t=nT}=x_a(nT)$



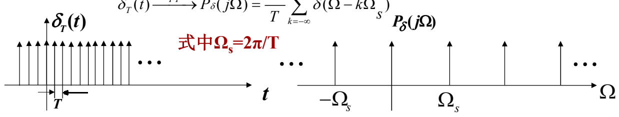
2.5.2. 采样过程中频谱的变化

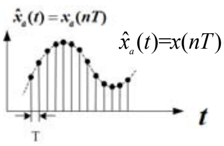
$x_a(t)\xrightarrow{FT}X_a(j\Omega)=FT[x_a(t)]$



$\delta_T(t)\xrightarrow{FT}P_\delta(j\Omega)=\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-k\Omega_s)$

式中$\Omega_s=2\pi/T$





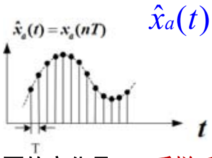
$\hat{x}_a(t)=x(nT)\xrightarrow{FT}\hat{X}_a(j\Omega)=FT[\hat{x}_a(t)]$

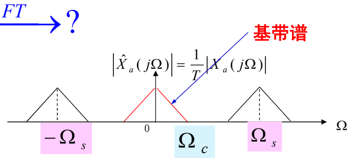
?

$\hat{x}_a(t)=x_a(t)\cdot\delta_T(t)$

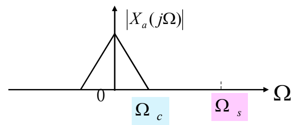
在时域两信号相乘,其傅立叶变换等于两信号的傅立叶变换的卷积

$\hat{x}a(t)\xrightarrow{FT}?$





主要的变化是：1.采样后信号的频谱变成了连续、周期的，是采样前连续信号频谱以采样频率 Ω_s为周期进行无限项周期延拓的结果；2.频谱幅度为变为原来幅度的1/T



因此

$$\hat{X}_a(j\Omega)=FT[\hat{x}_a(t)]$$
$$=FT[x_a(t)\cdot\delta_T(t)]$$
$$=\frac{1}{2\pi}X_a(j\Omega)*P_\delta(j\Omega)$$
$$=\frac{1}{2\pi}X_a(j\Omega)*\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-k\Omega_s)$$
$$=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_a(j\Omega-jk\Omega_s)$$

$P_\delta(j\Omega)=\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-k\Omega_s)$

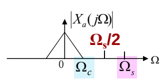
式中$\Omega_s=2\pi/T$

$$|\hat{X}_a(j\Omega)|=\frac{1}{T}|X_a(j\Omega)|$$

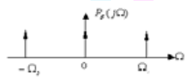
上式表明采样信号 $\hat{x}_a(t)$ 的频谱$\hat{X}_a(j\Omega)$是原模拟信号$x_a(t)$的频谱$X_a(j\Omega)$沿频率轴以Ω_s为周期进行周期延拓而成的

如果我们假设原信号 $x_a(t)$是低通带限信号，且最高频率 $\Omega_c<\Omega_s/2$

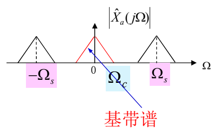
$$X_a(j\Omega)=\begin{cases}X_a(j\Omega) & |\Omega|<\frac{\Omega_s}{2}\\ 0 & |\Omega|\ge\frac{\Omega_s}{2}\end{cases}$$



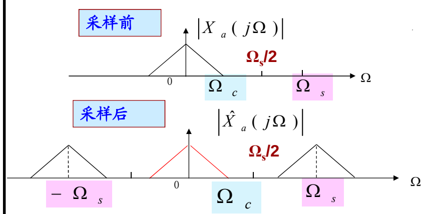
而 $\delta_T(t)$的频谱 $P_\delta(j\Omega)$图为



$x_a(t)$采样后的频谱$\hat{X}_a(j\Omega)$的幅值图为



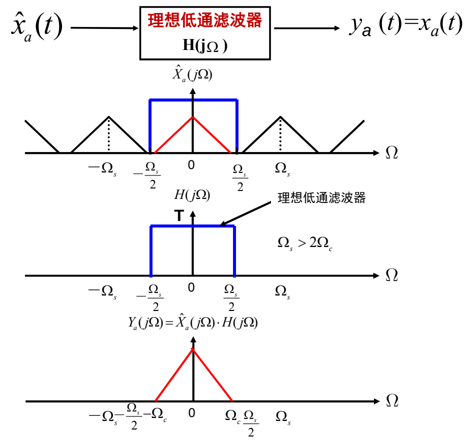
2.5.3 频谱混叠



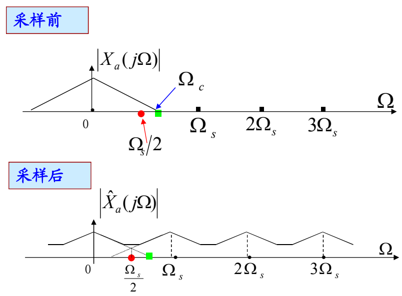
假设原信号$x_a(t)$是低通带限信号，且最高频率 $\Omega_c<\Omega_s/2$

采样信号的频谱在 $\Omega_c \le \frac{\Omega_s}{2}=\frac{\pi}{T}$ 条件下，周期延拓后没有产生频谱混叠，在这种情况下可以无失真地恢复原连续信号

121



122



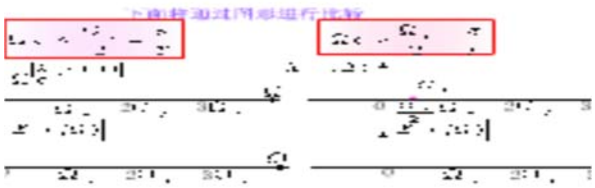
假设原信号$x_a(t)$是低通带限信号，但最高频率 $\Omega_c>\frac{\Omega_s}{2}=\frac{\pi}{T}$

折叠频率：

将采样频率的一半 $\frac{f_s}{2}$（或$\frac{\Omega_s}{2}$）称为折叠频率。当信号最高频率超过它时，就会被折叠回来，造成频谱混叠。

采样信号的频谱在$\Omega_c>\frac{\Omega_s}{2}=\frac{\pi}{T}$条件下，即周期延拓后，产生了频谱混叠，在这种情况下不可能无失真地恢复原连续信号

123



结论：

（1）等间隔理想采样，采样后序列的频谱是采样前信号频谱以采样频率为周期进行“周期延拓”形成的；

（2）若低通带限信号，最高频率是f_c，采样频率f_s采样后信号频谱：

$f_s \geqslant 2f_c$　　无混叠

$f_s < 2f_c$　　混叠

125

2.5.4 低通信号采样定理 —Shannon定理

描述的是采样信号的频谱与原模拟信号频谱之间的关系；由采样信号不失真地恢复原模拟信号的条件

采样频率的选择条件：$f_s \ge 2f_c$

“采样频率 大于等于 信号最高频率的两倍。”

对一低通带限连续信号$x_a(t)$，最高频率为f_c，进行等间隔采样时，采样率$f_s \ge 2f_c$，就可由采样序列$x_a(nT)$唯一准确地恢复$x_a(t)$。

126

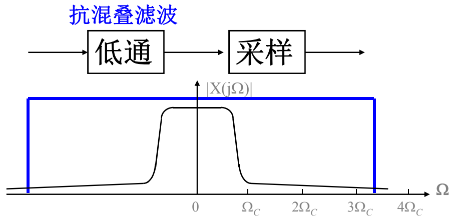
2.5.5 信号的重构与恢复

由前面的分析知，频谱发生混叠的原因有两个：

1.采样频率低

2.连续信号的频谱不是带限的

对于频谱是否带限信号：



$\Omega_S > 2\Omega_C$　　可选Ω_s =(3~4)Ω_C

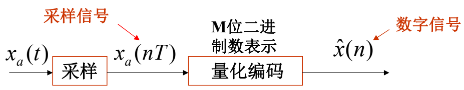
127

实际中，可选择采样频率大于等于3~4倍以上信号最高频率，并前加一个抗混叠滤波器，以避免高于$f_s/2$的频谱（折叠）影响低于$f_s/2$的频谱，称$f_s/2$ “折叠频率”，$-f_s/2$ ~$f_s/2$ 称为 “Nyquist区间”

128

一、A/D变换器（Analog/Digital Converter）

原理



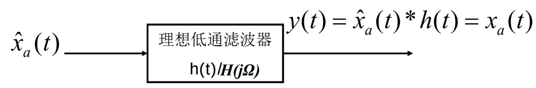
A/DC原理框图

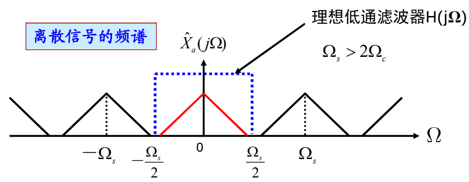
通过对模拟信号 $x_a(t)$ 按等间隔T采样，得到一串采样点上的采样数据 $x_a(nT)$（时域离散序列），再按照M位的二进制数对这些采样数据进行量化编码，形成数字信号 $\hat{x}(n)$。

129

二、将数字信号转换成模拟信号

——内插公式（理想恢复）

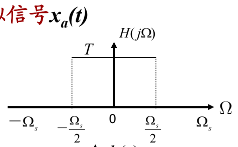




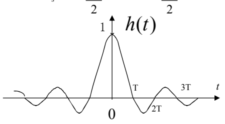
130

用理想低通滤波器 $H(j\Omega)$ 恢复出模拟信号$x_a(t)$

由 $H(j\Omega)=\begin{cases} T & |\Omega|<\frac{\Omega_s}{2} \\ 0 & |\Omega|\geq\frac{\Omega_s}{2} \end{cases}$



$H(j\Omega) \Rightarrow h(t)$



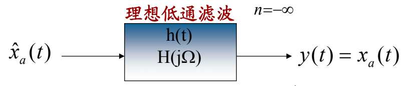
$h(t)=FT^{-1}[H(j\Omega)]$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}H(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega=\frac{T}{2\pi}\int_{-\frac{\Omega_s}{2}}^{\frac{\Omega_s}{2}}e^{j\Omega t}d\Omega=\frac{\sin\frac{\Omega_s}{2}t}{\frac{\Omega_s}{2}t}=\frac{\sin\frac{\pi}{T}t}{\frac{\pi}{T}t}$$

上式中 $\Omega_s=2\pi f_s=2\pi/T$

131

$$\hat{x}_a(t)=x_a(t)\cdot\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)\quad\delta_T(t-nT)$$



则 $y(t)=x_a(t)=\hat{x}_a(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{x}_a(\tau)h(t-\tau)d\tau$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_a(nT)\delta(\tau-nT)]h(t-\tau)d\tau$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_a(nT)\int_{-\infty}^{+\infty}[h(t-\tau)\delta(\tau-nT)]d\tau$$

内插函数

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_a(nT)h(t-nT)=\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_a(nT)\boxed{\frac{\sin[\frac{\pi}{T}(t-nT)]}{\frac{\pi}{T}(t-nT)}}}$$

内插公式

132

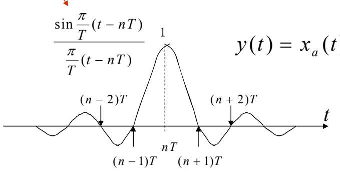
内插函数

$$\varphi_n(t)=h(t-nT)=\frac{\sin\frac{\pi}{T}(t-nT)}{\frac{\pi}{T}(t-nT)}$$

内插函数的特点是：在取样点nT上的函数值为1，其余取样点上的值为零。这一特点可保证各取样点的恢复值为信号原值，而在各取样点之间，则是各采样值乘以内插函数 $h(t-nT)$ 的波形伸展叠加而成。

叠加过程

$h(t-nT)$

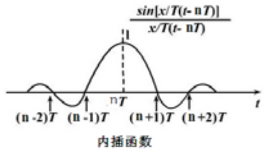


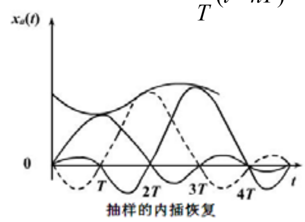
内插公式

$$y(t)=x_a(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_a(nT)\frac{\sin[\frac{\pi}{T}(t-nT)]}{\frac{\pi}{T}(t-nT)}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)\varphi_n(t)$$

$$x_a(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_a(nT)\frac{\sin[\frac{\pi}{T}(t-nT)]}{\frac{\pi}{T}(t-nT)}$$

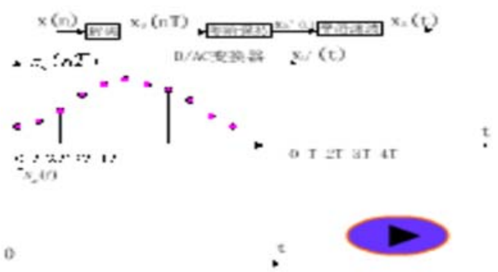




信号的抽样值$x_a(nT)$经内插函数得到连续信号$x_a(t)$

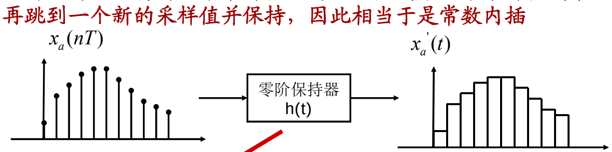
三. D/A变换器（Digital/Analog Converter）

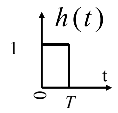
——常数内插（实际恢复）



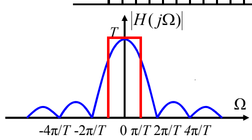
解码：将数字信号转换成时域离散信号$x_a(nT)$

零阶保持器：将前一个采样值保持，一直到下一个采样值到来，再跳到一个新的采样值并保持，因此相当于是常数内插





FT $\Rightarrow$



$$h(t)=\begin{cases}1 & t\le T\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

FT

$$H(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-j\Omega t}dt=\int_0^T e^{j\Omega t}dt$$

$$=T\frac{\sin(\Omega T/2)}{\Omega T/2}e^{-j\Omega T/2}$$

平滑滤波：将台阶的部分滤除掉

本章小结

离散时间信号：

■1. 离散时间信号与离散时间系统是《数字信号处理》运作的基础。模拟信号通过时间离散化，可以最经济地提取其有效信息，并能适用计算机作处理。

■2. 离散时间信号或称序列。应牢记常用基本序列的表达式及相互间的几个关系式，并搞清它的定义域、周期性等。

3. 离散时间信号也可看作是（理想）采样信号，因而引出采样定理和插值、恢复原信号的问题。自然涉及到采样后信号的频谱的变化及频谱不产生混叠的条件等，这是本章应掌握的内容。

离散时间系统：

■4. 离散时间系统是对离散时间信号进行相加、相乘和时移（延时）的运算系统。它有线性/非线性、时变/时不变、因果/非因果、稳定/不稳定之分，掌握其定义。

5. 线性时不变(LSI)系统是我们学习的重点，要掌握卷积的概念及其求法（作图法）。

对LSI，我们常用单位抽样响应h(n)（即单位抽样序列 $\delta(n)$作用下的输出）及其傅里叶变换 $H(e^{j\omega})$ 来表征系统的特性。

第五次作业：

2.7; 2.8; 2.11