第 4 章习题

4.1 设 $x(n)=R_4(\mathrm{n})$ ，若下列周期序列为

$$\tilde{x}_1(n)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x(n+6r)$$

$$\tilde{x}_2(n)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x(n+8r)$$

分别画出 $x(n),\ x_1(n), x_2(n)$ 的示意图。

4.2 计算以下有限长序列的 N 点 DFT, 设序列的非零区间为：$0\le n\le N-1$

（1） $x(n)=1$

（2） $x(n)=\delta(n-2)$

（3） $x(n)=R_m(n)\quad 0<m<N-1$

（4） $x(n)=\cos(\frac{2\pi}{N}mn)$，$0<m<N/2$

4.3 已知下列结果是 N 点有限长序列 $x(n)$ 的 N 点 DFT $X(k)$ ，求 $x(n)=IDFT[X(k)]$;

（1） $X(k)=\begin{cases}\frac{N}{2}e^{j\theta},k=m\\ \frac{N}{2}e^{-j\theta},k=N-m\\ 0,其它k\end{cases}$；

（2） $X(k)=\begin{cases}-\frac{N}{2}je^{j\theta},k=m\\ \frac{N}{2}je^{-j\theta},k=N-m\\ 0,其它k\end{cases}$

其中， m 为正整数 $0<m<N/2$

4.4 证明 DFT 的对称定理，即假设 N 点有限长序列 $x(n)$的 N 点 DFT 为 $X(k)$，证明：DFT［$X(n)$］=$Nx(N-k)$。

4.5 已知N点有限长序列 $x(n)$ 的N点DFT为 $X(k)$，若求解 $x(n)$ 的2N点DFT，记为 $X_1(k)$（$0 \le k \le 2N-1$），写出 $X_1(k)$ 和 $X(k)$ 的关系式。

4.6. 证明N点有限长序列 $x(n)$ 和它的N点DFT $X(k)$ 存在下列关系式:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

4.7 已知一个有限长序列 $x(n) = e^{j0.25\pi n}$，**设序列长度 N=8，n=0,1,2,...7，**求序列的8点DFT $X(k)$，并画出 $|X(k)|$ 的示意图。

4.8 已知序列 $f(n) = x(n) + jy(n)$，$x(n)$ 和 $y(n)$ 均为N点有限长实序列，设 $F(k) = DFT[f(n)]$，$0 \le k \le N-1$，分别求下列情况下的序列 $x(n), y(n)$ 以及它们的N点DFT $X(k)$ 和 $Y(k)$：

（1） $F(k) = \dfrac{1-a^N}{1-aW_N^k} + j\dfrac{1-b^N}{1-bW_N^k}$ a,b 均为实数

（2） $F(k) = 1 + jN$

4.9 已知两个有限长序列 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的非零值区间为:

$$x(n): 0 \le n \le 7\text{；}\quad y(n): 0 \le n \le 15$$

分别对两个序列进行16点的DFT，可得 $X(k)$ 和 $Y(k)$，$0 \le k \le 15$

设，$F(k) = X(k)Y(k), f(n) = IDFT[F(k)]$

分析并说明在哪些点上，$f(n)$ 和 $x(n) * y(n)$ 的结果相等？

4.10 已知一个序列 $x(n) = a^n u(n), 0 < a < 1$，它的z变换记为 $X(z)$，现对其在z平面的单位圆上进行N点等间隔采样，结果记为 $X(k)$，即

$$X(k) = X(z)\big|_{z=W_N^{-k}} \quad 0 \le k \le N-1$$

求有限长序列 $x_1(n) = IDFT[X(k)]$ 的表达式。

4.11 采用DFT对模拟信号进行频域分析，已知信号的最高频率等于1kHz，要求

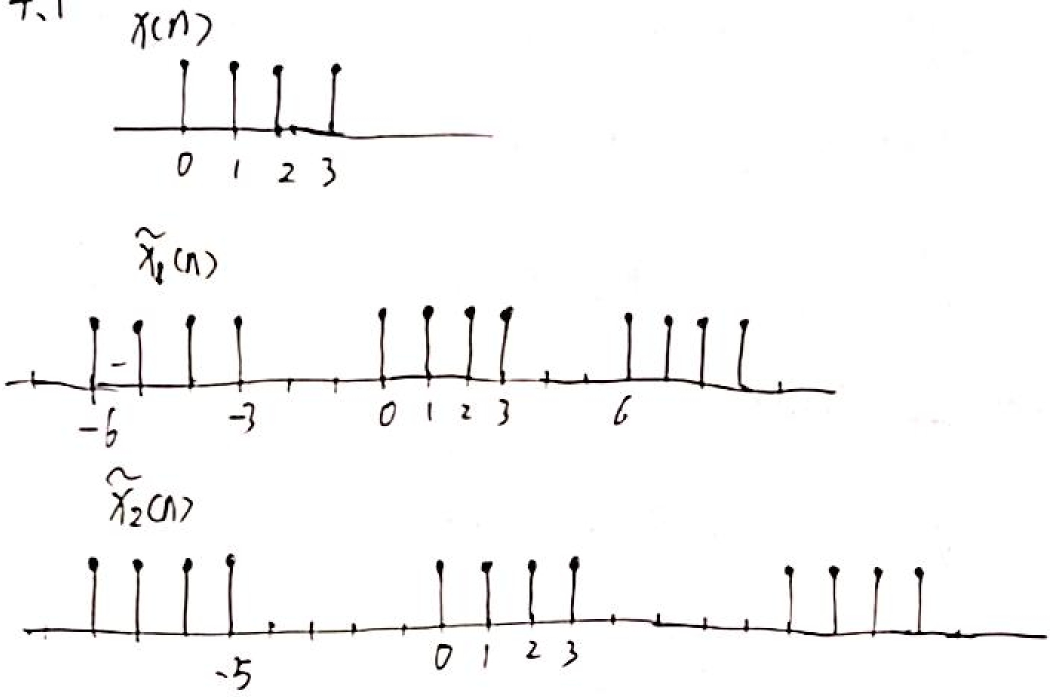
频谱分辨率 F 不超过 50Hz，确定下列参数：

（1）最大的采样间隔 $T_{\max}$

（2）最少的采样点数 $N_{\min}$

（3）最短的记录时间 $T_{p\min}$

4.1



4.2 (1) $x(n)=1$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=\frac{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}kN}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}=\begin{cases}N & k=0\\ 0 & k=1,2,\cdots N-1\end{cases}$$

(2) $x(n)=\delta(n-2)$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\delta(n-2)W_N^{kn}=W_N^{2k}\quad k=0,1,\cdots N-1$$

(3) $x(n)=R_m(n)\quad 0<m<N$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}R_m(n)\cdot W_N^{kn}=\sum_{n=0}^{m-1}W_N^{kn}=\frac{1-W_N^{km}}{1-W_N^{k}}=\frac{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}km}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}=\cancel{e^{-j\frac{\pi}{N}km}(e^{j\frac{\pi}{N}k}}$$

$$=\frac{e^{-j\frac{\pi}{N}km}\left(e^{j\frac{\pi}{N}km}-e^{-j\frac{\pi}{N}km}\right)}{e^{-j\frac{\pi}{N}k}\left(e^{j\frac{\pi}{N}k}-e^{-j\frac{\pi}{N}k}\right)}=e^{-j\frac{\pi}{N}(m-1)k}\cdot\frac{\sin(\frac{\pi}{N}km)}{\sin(\frac{\pi}{N}k)}\cdot R_N(k)$$

(4) $x(n)=\cos(\frac{2\pi}{N}mn)\quad 0<m<\frac{N}{2}$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\cos(\frac{2\pi}{N}mn)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{2}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}mn}+e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}\right)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{N}(m-k)n}+\sum_{n=0}^{N-1}e^{-j\frac{2\pi}{N}(m+k)n}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1-e^{j\frac{2\pi}{N}(m-k)N}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}(m-k)}}+\frac{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}(m+k)N}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}(m+k)}}\right]=\begin{cases}0 & k\neq m,\ k\neq N-m\\ \frac{N}{2} & k=m,\ k=N-m\end{cases}\quad 0\leq k\leq N-1$$

4.3 (1) $x(n)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}=\frac{1}{N}[\frac{N}{2}e^{j\theta}e^{j\frac{2\pi}{N}mn}+\frac{N}{2}e^{-j\theta}\cdot e^{j\frac{2\pi}{N}(N-m)n}]$

$=\frac{1}{2}[e^{j(\theta+\frac{2\pi}{N}mn)}+e^{-j(\theta+\frac{2\pi}{N}mn)}]=\cos(\theta+\frac{2\pi}{N}mn)$

(2) $x(n)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}=\frac{1}{N}[-\frac{N}{2}\cdot je^{j\theta}\cdot e^{j\frac{2\pi}{N}mn}+\frac{N}{2}je^{-j\theta}\cdot e^{j\frac{2\pi}{N}(N-m)n}]$

$=\frac{1}{2j}[e^{j(\theta+\frac{2\pi}{N}mn)}-e^{-j(\theta+\frac{2\pi}{N}mn)}]=\sin(\theta+\frac{2\pi}{N}mn)$

4.4 证明: $X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}$ $\quad X(n)=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)W_N^{mn}$

$DFT[X(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}X(n)W_N^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}[\sum_{m=0}^{N-1}x(m)W_N^{mn}]W_N^{kn}$

$=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{(m+k)n}$

$$\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{(m+k)n}=\begin{cases}N & m=N-k\\ 0 & m\neq N-k,\ 0\leqslant m\leqslant N-1\end{cases}$$

$DFT[X(n)]=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)\cdot N\Big|_{m=N-k}=Nx(N-k)$

4.5 $$x_1(n)=\begin{cases}x(n) & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0 & N\leqslant n\leqslant 2N-1\end{cases}$$

$X_1(k)=\sum_{n=0}^{2N-1}x_1(n)W_{2N}^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_{2N}^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{\frac{k}{2}n}=X(\frac{k}{2})$

4.6 证明 $\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|X(k)|^2=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\cdot X^*(k)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)[\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}]^*$

$=\sum_{n=0}^{N-1}x^*(n)\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\cdot W_N^{-kn}=\sum_{n=0}^{N-1}x^*(n)\cdot x(n)=\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2$

4.7 $X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cdot W_N^{kn}=\sum_{n=0}^{7}e^{j\frac{\pi}{4}n}\cdot e^{-j\frac{\pi}{4}kn}=\sum_{n=0}^{7}e^{j\frac{\pi}{4}(1-k)n}=\frac{1-e^{j2\pi(1-k)}}{1-e^{j\frac{\pi}{4}(1-k)}}$

$k=1$时 $X(k)=8$

$k\neq 1$时 $X(k)=0$

4.8 由DFT的共轭对称性可知

实部 $x(n) \longleftrightarrow F_{ep}(k)$ 共轭对称

虚部 $jy(n) \longleftrightarrow F_{op}(k)$ 共轭反对称

(1) $F_{ep}(k) = \frac{1}{2}[F(k) + F^*(N-k)] = \frac{1-a^N}{1-aW_N^k} = X(k)$

$-jF_{op}(k) = \frac{1}{2j}[F(k) - F^*(N-k)] = \frac{1-b^N}{1-bW_N^k} = Y(k)$

$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1-a^N}{1-aW_N^k} \cdot W_N^{-kn} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(\sum_{m=0}^{N-1} a^m W_N^{km}) W_N^{-kn}$

$= \sum_{m=0}^{N-1} a^m \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{k(m-n)} \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1$

$\frac{1}{N} W_N^{k(m-n)} = \begin{cases} 1 & m=n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \quad 0 \leqslant m, n \leqslant N-1$

因此 $x(n) = a^n \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1$

同理 $y(n) = b^n \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1$

(2) $X(k) = F_{ep}(k) = 1 \qquad x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} = \delta(n)$

$Y(k) = -jF_{op}(k) = N \qquad y(n) = N\delta(n)$

4.9 $x(n) * y(n)$ 长度为 $8+16-1=23$

混叠点数 $23-16=7$ 个 即 $0, 1, \cdots 6$

$f(n)$ 长度为 16

只有在周期延拓序列无混叠点上，二者相等，

$7 \leqslant n \leqslant 15$

4.10 由 $x_N(n) = \mathrm{IDFT}[X(k)]_N = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n+lN) R_N(n)$

得本题 $x_1(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a^{n+lN} u(n+lN) \cdot R_N(n)$

$u(n+lN) = \begin{cases} 1 & n+lN \geqslant 0, \text{即 } l \geqslant 0 \\ 0 & l < 0 \end{cases}$

$x_1(n) = \sum_{l=0}^{\infty} a^n \cdot a^{lN} \cdot R_N(n) = \frac{a^n}{1-a^N} R_N(n)$

4.11 (1) $f_c = 1kHz$ $\quad f_{s_{min}} = 2f_c = 2kHz$

$$T_{max} = \frac{1}{f_{smin}} = \frac{1}{2\times10^3} = 0.5ms$$

(3) $T_{pmin} = \frac{1}{F} = \frac{1}{50} = 0.02s$

(2) $N_{min} = \frac{T_{pmin}}{T_{max}} = \frac{0.02}{0.5\times10^{-3}} = 40.$