第6章 无限冲激响应(IIR)数字滤波器设计

主要介绍IIR数字滤波器的设计方法，并解释数字滤波器及它的技术指标概念，主要内容有模拟滤波器的设计，数字滤波器的脉冲响应不变设计法和双线性变换设计法。

§6.1 数字滤波器的基本概念

1、什么是数字滤波器？

首先输入、输出都是数字信号，通过一定的运算关系(通常是指一种算法，或指一种数字式处理设备)改变输入信号所含频率成份的相对比例或滤除某些频率成分的数字器件或程序。

2、数字滤波器的设计原理

数字滤波器一般是一个线性时不变(**LSI**)系统。数字滤波器的设计是已知它的频率特性$H(e^{j\omega})$，求它的系统函数**H(z)**或单位脉冲响应**h(n)**.

理论上可以实现一个理想滤波器，实际的滤波器是逼近理想滤波特性。给出的频率特性通常是频率特性指标。因此， 设计出的**H(z)**或**h(n)**不是唯一的。

优点
1. 精度高
2. 稳定好
3. 体积小
4. 灵活性
5. 重量轻
6. 不要求阻抗匹配

还可以实现模拟滤波器无法实现的特殊滤波功能

3、数字滤波器分类

- 经典滤波器——输入信号中有用的频率成分和希望滤除的频率成分各占有不同的频带，通过一个合适的选频滤波器达到滤波的目的
- 现代滤波器——维纳滤波器、卡尔曼滤波器、自适应滤波器等，按照随机信号内部的一些统计分布规律，从干扰中最佳地提取信号

经典滤波按功能
- 低通
- 高通
- 带通
- 带阻

网络结构
- 无限冲激响应 IIR：$H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}=\dfrac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$ 　N阶
- 有限冲激响应 FIR：$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}$ 　$N-1$阶

4、理想数字滤波器的频率响应

与模拟滤波器相同，数字滤波器从功能上可分为低通、高通、带通和带阻四类。

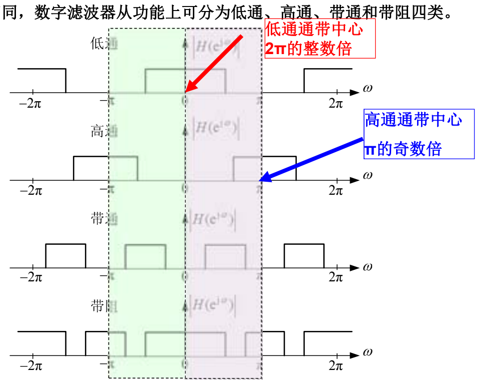


图6.1.1 理想低通、高通、带通、带阻数字滤波器幅度特性

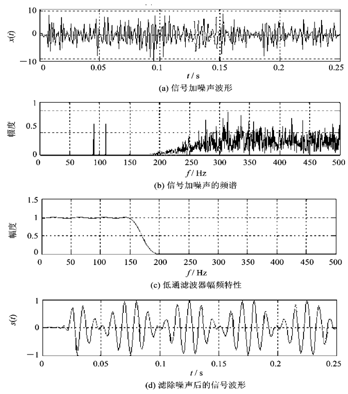


图6.1.2 用经典滤波器从噪声中提取信号

5、数字滤波器的技术指标与要求

（1）频率特性：

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\theta(\omega)}$$

$$x(n) \longrightarrow \boxed{H(e^{j\omega})} \longrightarrow y(n)$$

$|H(e^{j\omega})|$：幅频响应，表示信号通过该滤波器后各频率成分幅度***衰减***

$\theta(\omega)$：相频响应，反映各频率成分通过滤波器后在时间和空间上的***延时***

（2）边界频率和频带范围：

边界频率
- ω_p 为通带截止频率
- ω_c 为3dB通带截止频率
- ω_s 为阻带截止频率

通带频率范围：$0 \le \omega \le \omega_p$ ，
（使信号通过的频带）

阻带频率范围：$\omega_s \le \omega \le \pi$ ，
（抑制噪声通过的频带）

过渡带频率范围：$\omega_p \le \omega \le \omega_s$
(从通带到阻带的过渡)

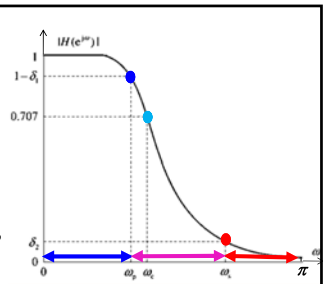
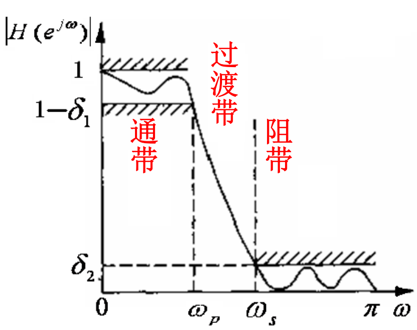
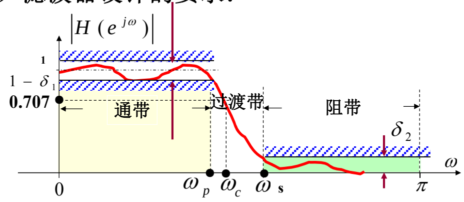


图6.1.3 低通滤波器的技术要求



低通滤波器的幅频特性指标示意图

（3）滤波器设计的要求：



低通滤波器的技术指标示意图 （容限图）

要求：在通带内，系统的幅频响应逼近于1

$$1-\delta_1 \le |H(e^{j\omega})| \le 1$$

在阻带内，系统的幅频响应逼近于0

$$|H(e^{j\omega})| \le \delta_2$$

δ_1与δ_2分别称为通带容限和阻带容限

通带和阻带内的衰减一般用dB表示，则低通滤波器表示的技术指标示意图如图**6.1.4**所示：

其中通带内允许的最大衰减用α_p表示

$$\alpha_p = 20\lg\frac{|H(e^{j0})|}{|H(e^{j\omega_p})|}\quad dB \quad (6.2)$$

阻带内允许的最小衰减用α_s 表示

$$\alpha_s = 20\lg\frac{|H(e^{j0})|}{|H(e^{j\omega_s})|}\quad dB \quad (6.3)$$

将$|H(e^{j0})|$归一化为1，上面两公式则表示成：

$$\alpha_p = -20\lg|H(e^{j\omega_p})|\ dB \quad (6.4)$$

$$\alpha_s = -20\lg|H(e^{j\omega_s})|\ dB \quad (6.5)$$

$\omega_p=\omega_c$时,幅度下降到$\sqrt{2}/2$， $\alpha_p = 3dB$

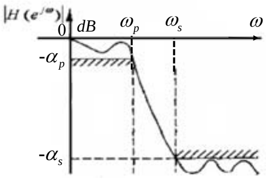


图6.1.4分贝数表示的低通滤波器技术指标示意图

6.数字滤波器设计方法概述

数字滤波器设计的一般步骤:

- 给出所需要的滤波器的技术指标;
- 设计一个H(z)使其达到所需要的技术指标;
- 选择一种结构,实现所设计的数字滤波器.

IIR数字滤波器设计方法有两类：

(1)设计模拟滤波器得到传输函数 $H_a(s)$ $\xrightarrow{\text{转换成}}$ 数字滤波器的系统函数$H(z)$

(2)直接在频域或者时域进行设计

FIR数字滤波器设计方法是：

窗函数法和频率采样法，以及切比雪夫等波纹逼近法。

§6.2 模拟滤波器的设计

模拟滤波器的理论和设计方法已发展得相当成熟，且有若干典型的模拟滤波器供我们选择，如巴特沃斯(**Butterworth**)滤波器、切比雪夫(**Chebyshev**)滤波器、椭圆(**Elliptic**)滤波器、贝塞尔(**Bessel**)滤波器等，这些滤波器都有严格的设计公式、现成的曲线和图表供设计人员使用。

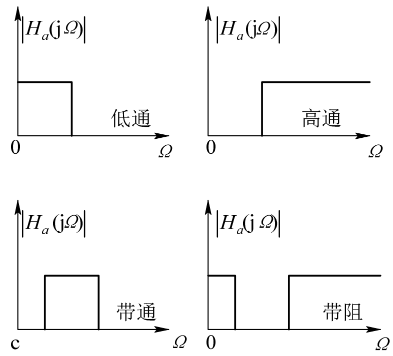


图6.2.1各种典型理想模拟滤波器的幅频特性

6.2.1 模拟低通滤波器的设计指标和设计方法

设计指标：

模拟低通滤波器的设计指标有：α_p、Ω_p、α_s、Ω_s

通带内允许的最大衰减用α_p表示

阻带内允许的最小衰减用α_s表示

（a）以幅频特性描述　（b）以损耗函数描述（dB）

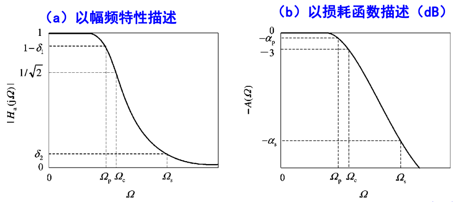


图6.2.2 低通滤波器的设计指标参数示意图

$A(\Omega)$损耗函数

Ω_p为通带截止频率

Ω_s为阻带截止频率

Ω_c为**3dB通带截止频率**

$$A(\Omega) = -20\lg|H_a(j\Omega)| = -10\lg|H_a(j\Omega)|^2 \ \text{dB} \quad (6.2.1)$$

$$\begin{cases}|H_a(j\Omega_c)| = 1/\sqrt{2} \\ -20\lg|H_a(j\Omega_c)| = 3dB\end{cases}$$

按图6.2.2

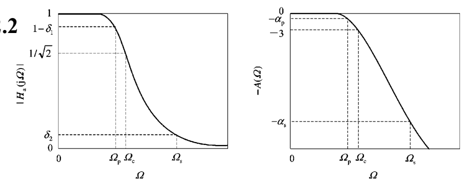


图6.2.2 低通滤波器的设计指标参数示意图

通带内允许的最大衰减 α_p：

$$\alpha_p = 10\lg\frac{|H_a(j0)|^2}{|H_a(j\Omega_p)|^2}\quad dB$$

阻带内允许的最小衰减α_s：

$$\alpha_s = 10\lg\frac{|H_a(j0)|^2}{|H_a(j\Omega_s)|^2}\quad dB$$

如果 $\max|H_a(j\Omega)| = |H(j0)| = 1$

$$\alpha_p = -10\lg|H_a(j\Omega_p)|^2 = -20\lg(1-\delta_1)$$

$$\alpha_s = -10\lg|H_a(j\Omega_s)|^2 = -20\lg(\delta_2)$$

设计方法

♥用 $h_a(t), H_a(s), H_a(j\Omega)$ 表示模拟滤波器的单位冲激响应、传输函数（系统函数）、频率响应函数，则有：

$$H_a(s)=LT\left[h_a(t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}h_a(t)e^{-st}dt$$

$$H_a(j\Omega)=FT\left[h_a(t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}h_a(t)e^{-j\Omega t}dt$$

♥ 模拟滤波器设计方法：

根据设计指标，求出典型的模拟滤波器传输函数 $H_a(s)$，这些模拟滤波器被称为原型滤波器（prototype filter）；

♥ 实际中广泛应用的三种原型滤波器：

Butterworth低通滤波器

Chebyshev低通滤波器(Type I型和Type II)

Elliptic(椭圆)低通滤波器

6.2.2 Butterworth低通滤波器的设计

一、 Butterworth滤波器的特点：

Butterworth滤波器是根据幅频特性在通频带内具有最平坦特性而定义的一种模拟滤波器，而且在正频率范围内是随频率升高而单调下降的.

（1）对于所有N（滤波器的阶数），$\left|H_a(j\Omega)\right|_{\Omega=0}=1$，无衰减；

（2）N越大，通带内衰减越慢，阻带内衰减越快，N无穷大，则为理想滤波器，N的大小主要影响幅度特性下降速度。

（3）3dB不变特性

对于所有N, $\left|H_a(j\Omega)\right|^2_{\Omega=\Omega_c}=1/2$；

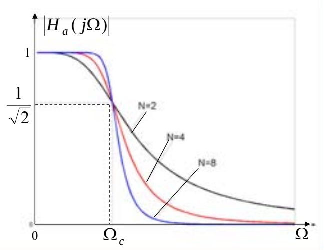


图6.2.3 Butterworth低通滤波器幅度特性

二、 Butterworth滤波器幅度平方函数

$$\left|H_a(j\Omega)\right|^2=\frac{1}{1+(\Omega/\Omega_c)^{2N}}$$，N为滤波器的阶数，Ω_c 是滤波器3dB的截止频率。

$$\because \left|H_a(j\Omega)\right|^2=H_a(j\Omega)\cdot H_a^*(j\Omega),\quad 而\ H_a^*(j\Omega)=H_a(-j\Omega)$$

$$\therefore \left|H_a(j\Omega)\right|^2=H_a(j\Omega)\cdot H_a(-j\Omega)$$

将幅度平方函数 $\left|H_a(j\Omega)\right|^2$ 写成 s 的函数：$s=j\Omega$

$$\therefore \left|H_a(j\Omega)\right|^2=H_a(j\Omega)\cdot H_a(-j\Omega)=H_a(s)\cdot H_a(-s)\Big|_{s=j\Omega}$$

则 $$H_a(s)H_a(-s)=\frac{1}{1+(s/j\Omega_c)^{2N}}$$

$$H_a(s)H_a(-s)=\frac{1}{1+(s/j\Omega_c)^{2N}}$$

幅度平方函数有2N个极点等间隔分布在半径为 Ω_c 的圆上,间隔是π/N(rad)

$$s_k=(-1)^{\frac{1}{2N}}(j\Omega_c)=\Omega_c e^{j\pi(\frac{1}{2}+\frac{2k+1}{2N})},\quad k=0,1,\cdots,(2N-1)$$

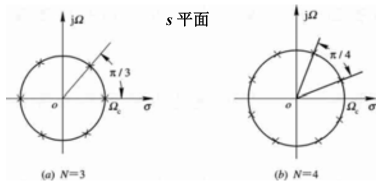


图 6.2.4 N=3和N=4时Butterworth滤波器极点分布

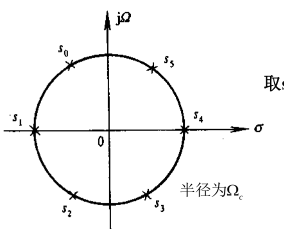
为形成稳定的滤波器，2N个极点中只取s平面左半平面的N个极点构成 $H_a(s)$（模拟滤波器系统函数），而右半平面的N个极点构成 $H_a(-s)$。

$H_a(s)$的表示式为：

$$H_a(s)=\frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=0}^{N-1}(s-s_k)}$$

设N=3，极点有6个，它们分别为：$s_0=\Omega_c e^{j\frac{2}{3}\pi}$ ， $s_1=-\Omega_c$ ， $s_2=\Omega_c e^{-j\frac{2}{3}\pi}$

$s_3=\Omega_c e^{-j\frac{1}{3}\pi}$ ， $s_4=\Omega_c$ ， $s_5=\Omega_c e^{j\frac{1}{3}\pi}$



取s平面左半平面的极点s_0,s_1,s_2组成$H_a(s)$:

$$H_a(s)=\frac{\Omega_c^3}{(s+\Omega_c)(s-\Omega_c e^{j\frac{2}{3}\pi})(s-\Omega_c e^{-j\frac{2}{3}\pi})}$$

图6.2.5 三阶Butterworth滤波器极点分布

三、频率归一化：

由于不同的技术指标对应的边界频率和滤波器幅频特性不同，为使设计公式和图表统一，需要将频率归一化：

Butterworth滤波器采用对3dB截止频率 Ω_c 归一化

$$H_a(s)=\frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=0}^{N-1}(s-s_k)}\Rightarrow G_a(\frac{s}{\Omega_c})=\frac{1}{\prod_{k=0}^{N-1}(\frac{s}{\Omega_c}-\frac{s_k}{\Omega_c})}$$

令 $p=s/\Omega_c$， $\lambda=\Omega/\Omega_c$

λ称为归一化频率， p称为归一化复变量

这样Butterworth滤波器的归一化低通原型系统函数为：

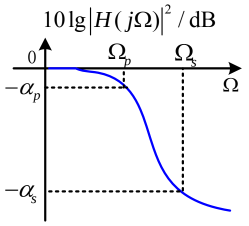
$$G_a(p)=\frac{1}{\prod_{k=0}^{N-1}(p-p_k)}\qquad(6.2.2)$$

归一化极点为 $p_k=e^{j\pi(\frac{1}{2}+\frac{2k+1}{2N})}$， 则$s_k=\Omega_c p_k$ $k=0, 1, 2, \ldots, N-1$

四、 Butterworth模拟低通滤波器设计方法

（1）确定模拟低通滤波器技术指标：α_p、Ω_p、α_s、Ω_s

技术指标要求:



技术指标要求示意图

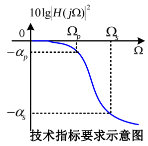
教材P109，$\Omega_1 = \Omega_p$, $\Omega_2 = \Omega_s$
$k_1 = -\alpha_p$, $k_2 = -\alpha_s$

（2） Butterworth模拟滤波器设计原理：

根据技术指标要求:

① 在通带内 $0 \le \Omega \le \Omega_p$ 幅度衰减小于 α_p dB

② 在阻带内 $\Omega \ge \Omega_s$ 幅度衰减应大于等于 α_s dB



技术指标要求示意图

$$10\log|H(j\Omega_p)|^2 = 10\log\left[\frac{1}{1+(\Omega_p/\Omega_c)^{2N}}\right] = -\alpha_p \quad (6.2.3)$$

$$10\log|H(j\Omega_s)|^2 = 10\log\left[\frac{1}{1+(\Omega_s/\Omega_c)^{2N}}\right] = -\alpha_s \quad (6.2.4)$$

$$\left.\begin{aligned} 1+\left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N} &= 10^{\alpha_p/10} \\ 1+\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N} &= 10^{\alpha_s/10} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)^{2N} = \frac{10^{\alpha_s/10}-1}{10^{\alpha_p/10}-1} \quad (6.2.5)$$

(6.2.5)等式两边取对数，根据技术指标要求得滤波器阶数:

$$N \ge \frac{\lg\left[(10^{\alpha_p/10}-1)/(10^{\alpha_s/10}-1)\right]}{2\lg\left[\Omega_p/\Omega_s\right]} \quad (6.2.6)$$

如果要求通带在Ω_p处刚好达到指标 $-\alpha_p$,则可得:

$$\Omega_c = \Omega_p(10^{0.1\alpha_p}-1)^{-\frac{1}{2N}} \quad (6.2.7)$$

如果要求通带在Ω_s处刚好达到指标 $-\alpha_s$,则可得:

$$\Omega_c = \Omega_s(10^{0.1\alpha_s}-1)^{-\frac{1}{2N}} \quad (6.2.8)$$

也可以取（6.2.7）和（6.2.8）结果的中间值，就可以同时满足原定指标。

（3）Butterworth低通滤波器设计步骤

① 根据技术指标 α_p、Ω_p、α_s、Ω_s 求出滤波器的阶数N

$$N \ge \frac{\lg\left[(10^{\alpha_p/10}-1)/(10^{\alpha_s/10}-1)\right]}{2\lg\left[\Omega_p/\Omega_s\right]} \quad (6.2.6)$$

② 求出归一化极点 p_k，得到归一化传输函数 $G_a(p)$

$$p_k = e^{j\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{2k+1}{2N}\right)}, \quad G_a(p) = \frac{1}{\prod_{k=0}^{N-1}(p-p_k)} \quad (6.2.2)$$

k=0, 1, 2, …, N-1

将极点p_k代入$G_a(p)$得:

$$G_a(p) = \frac{1}{b_0+b_1p+b_2p^2+\cdots+b_{N-1}p^{N-1}+p^N}$$

也可以根据阶数N直接查表6.2.1。得到极点p_k和归一化传输函数$G_a(p)$。

③ 将$G_a(p)$ 去归一化。

将 $p=s/\Omega_c$ 代入$G_a(p)$，得到实际的模拟滤波器系统函数

$$H_a(s) = G_a(p)\Big|_{p=\frac{s}{\Omega_c}}$$

如果技术指标中没有给出Ω_c，则由Ω_s和 Ω_p确定

$$\Omega_c = \Omega_p(10^{0.1\alpha_p}-1)^{-\frac{1}{2N}} \quad (6.2.7)$$

$$\Omega_c = \Omega_s(10^{0.1\alpha_s}-1)^{-\frac{1}{2N}} \quad (6.2.8)$$

设计步骤:

求出阶数N $\longrightarrow p_k \longrightarrow G_a(p) \xrightarrow[p=s/\Omega_c]{\text{去归一化}} H_a(s)$

表6.2.1 巴特沃斯归一化低通滤波器参数

极点位置 / 阶数 N	$P_{0,N-1}$	$P_{1,N-2}$	$P_{2,N-3}$	$P_{3,N-4}$	P_4
1	−1.0000				
2	−0.7071±j0.7071				
3	−0.5000±j0.8660	−1.0000			
4	−0.3827±j0.9239	−0.9239±j0.3827			
5	−0.3090±j0.9511	−0.8090±j0.5878	−1.0000		
6	−0.2588±j0.9659	−0.7071±j0.7071	−0.9659±j0.2588		
7	−0.2225±j0.9749	−0.6235±j0.7818	−0.9010±j0.4339	−1.0000	
8	0.1951±j0.9808	0.5556±j0.8315	−0.8315±j0.5556	−0.9808±j0.1951	
9	−0.1736±j0.9848	−0.5000±j0.8660	−0.7660±j0.6428	−0.9397±j0.3420	−1.0000

分母多项式 / 阶数 N	$B(p)=p^N+b_{N+1}p^{N-1}+b_{N-2}p^{N-2}+\cdots+b_1p+b_0$								
	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
1	1.0000								
2	1.0000	1.4142							
3	1.0000	2.0000	2.0000						
4	1.0000	2.6131	3.4142	2.613					
5	1.0000	3.2361	5.2361	5.2361	3.2361				
6	1.0000	3.8637	7.4641	9.1416	7.4641	3.8637			
7	1.0000	4.4940	10.0978	14.5918	14.5918	10.0978	4.4940		
8	1.0000	5.1258	13.1371	21.8462	25.6884	21.8642	13.1371	5.1258	
9	1.0000	5.7588	16.5817	31.1634	41.9864	41.9864	31.1634	16.5817	5.7588
1	(p^2+1)								
2	$(p^2+1.4142p+1)$								
3	$(p^2+p+1)(p+1)$								
4	$(p^2+0.7654p+1)(p^2+1.8478p+1)$								
5	$(p^2+0.6180p+1)(p^2+1.6180p+1)(p+1)$								
6	$(p^2+0.5176p+1)(p^2+1.4142p+1)(p^2+1.9319p+1)$								
7	$(p^2+0.4450p+1)(p^2+1.2470p+1)(p^2+1.8019p+1)(p+1)$								
8	$(p^2+0.3902p+1)(p^2+1.1111p+1)(p^2+1.6629p+1)(p^2+1.9616p+1)$								
9	$(p^2+0.3473p+1)(p^2+p+1)(p^2+1.5321p+1)(p^2+1.8974p+1)(p+1)$								

Back

例6.2.1 已知通带截止频率f_p=5kHz，通带最大衰减α_p=2dB，阻带截止频率f_s=12kHz，阻带最小衰减α_s=30dB，按照以上技术指标设计巴特沃斯低通滤波器(公式中的数据均取小数点后四位)。

解： (1) 确定阶数N：

$$N \ge \frac{\lg\left[(10^{\alpha_p/10}-1)\big/(10^{\alpha_s/10}-1)\right]}{2\lg\left[\Omega_p/\Omega_s\right]}=4.25$$

$$N=5$$

(2)求出归一化极点 p_k，给出$G_a(p)$

归一化低通原型系统函数为:

$$G_a(p)=\frac{1}{\prod_{k=0}^{4}(p-p_k)}$$

直接查表6.2.1，由N=5，直接查表得到：

极点p_k：-0.3090±j0.9511，-0.8090±j0.5878，-1.0000

代入上式

或代入表6.2.1中的系数，得：

$$G_a(p)=\frac{1}{p^5+b_4p^4+b_3p^3+b_2p^2+b_1p+b_0}$$

式 中：b_0=1.0000,b_1=3.2361,b_2=5.2361,b_3=5.2361,b_4=3.2361

(3) 为将$G_a(p)$去归一化，将$p=s/\Omega_c$代入$G_a(p)$

先求3dB截止频率Ω_c。

按照公式(6.2.7)，通带刚好达到指标要求，阻带指标有富余

$$\Omega_c=\Omega_p(10^{0.1\alpha_p}-1)^{-\frac{1}{2N}}=2\pi f_p(10^{0.1\alpha_p}-1)^{-\frac{1}{2N}}=2\pi\times 5.2755krad/s$$

将Ω_c代入(6.2.8)进行阻带指标验证，得：

$$\Omega'_s=\Omega_c(10^{0.1\alpha_s}-1)^{\frac{1}{2N}}=2\pi\times 10.525krad/s$$

$$\Omega_s=2\pi f_s=2\pi\times 12krad/s$$

Ω'_s比题目中给的Ω_s小，过渡带小于指标要求。或者说，在Ω_s时衰减大于30 dB，所以说阻带指标有富余量。

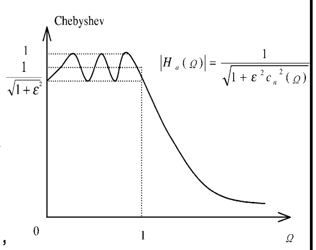
将$p=s/\Omega_c$代入$G_a(p)$中得到:

$$H_a(s)=\frac{\Omega_c^5}{s^5+b_4\Omega_c s^4+b_3\Omega^2{}_c s^3+b_2\Omega^3{}_c s^2+b_1\Omega^4{}_c s+b_0\Omega^5{}_c}$$

6.2.3 Chebyshev滤波器设计

一、Chebyshev滤波器特点

Chebyshev Ⅰ 型滤波器频率特性在通带内是等波纹的，在阻带内是单调下降的；ChebyshevⅡ型在阻带内是等波纹的，通带内是单调下降的。它比同阶的Butterworth滤波器下降快，通带内波动的峰值个数与阶数N有关，N越大，波动越快，可以解决Butterworth滤波器的通、阻带内衰减不均匀的现象，进而降低N。



Chebyshev Ⅰ 型滤波器幅频特性

二、Chebyshev Ⅰ 型幅频函数及其归一化

$$|H_a(j\Omega)|^2=\frac{1}{1+\varepsilon^2 C_N^2(\Omega/\Omega_p)}$$

$\lambda=\Omega/\Omega_p$ 对Ω_p的归一化频率

$0<\varepsilon<1$，表示限定波纹系数

$$T_N(x)=C_N(x)$$

表6.2 前8阶切比雪夫多项式

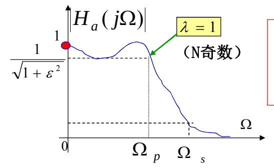
N	$T_N(x)$
0	$T_0(x)=1$
1	$T_1(x)=x$
2	$T_2(x)=2x^2-1$
3	$T_3(x)=4x^3-3x$
4	$T_4(x)=8x^4-8x^2+1$
5	$T_5(x)=16x^5-20x^3+5x$
6	$T_6(x)=32x^6-48x^4+18x^2-1$
7	$T_7(x)=64x^7-112x^5+56x^3-7x$
8	$T_8(x)=128x^8-256x^6+160x^4-32x^2+1$

N阶切比雪夫多项式

$$C_N(x)=\begin{cases}\cos(N\cos^{-1}x) & |x|\le 1\\ \cosh(N\cosh^{-1}x) & |x|>1\end{cases}$$

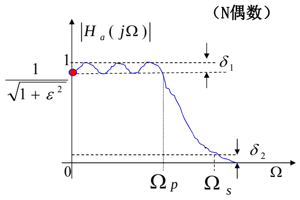
或递推获得：

$$\begin{cases}C_0(x)=1\\ C_1(x)=x\\ C_N(x)=2xC_{N-1}(x)-C_{N-2}(x) & N\ge 2\end{cases}$$



N为奇数时

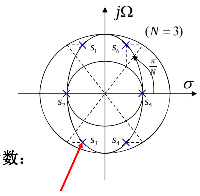
$$|H_a(j0)|^2=1$$



N为偶数时

$$|H_a(j0)|^2=\frac{1}{1+\varepsilon^2}$$

对于*N*阶*Chebyshev*滤波器，其幅度｜$H_a(j\Omega)$｜^{2}平方函数在*s*平面上有2*N*个极点，这2*N*个极点都是成复共轭对出现的，且关于虚轴对称，没有点落在虚轴上。这些极点s_k位于椭圆圆周上



这些极点s_k位于椭圆圆周上

选左半平面诸极点，$p=s/\Omega_p$，得归一化的原型系统函数：

$$G_a(p)=\frac{1}{\varepsilon\cdot 2^{N-1}\prod_{k=1}^{N}(p-p_k)} \quad (6.2.9)$$

去归一化以后的模拟滤波器系统函数为

$$H_a(s)=G_a(p)\Big|_{p=\frac{s}{\Omega_p}}=\frac{\Omega_p^N}{\varepsilon\cdot 2^{N-1}\prod_{k=1}^{N}(s-p_k\Omega_p)} \quad (6.2.10)$$

三、切比雪夫I型滤波器设计步骤

(1) 确定技术指标：$\Omega_p, \alpha_p, \Omega_s, \alpha_s$， 计算参数 ε ：

$$\alpha_p=10\lg\frac{|H(j\Omega)|^2_{\max}}{|H(j\Omega)|^2_{\min}} \qquad |\Omega|\le\Omega_p$$

$$|H(j\Omega)|^2_{\max}=1, \quad |H(j\Omega)|^2_{\min}=\frac{1}{1+\varepsilon^2}$$

因此由 $\alpha_p=10\lg(1+\varepsilon^2)$ (6.2.11)

可求出 $\varepsilon=\sqrt{10^{0.1\alpha_p}-1}$ (6.2.12)

(2) 求滤波器阶数N

$$N=\frac{\mathrm{Arch}(k_1^{-1})}{\mathrm{Arch}(\lambda_S)} \quad 其中 \quad k_1^{-1}=\sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_s}-1}{10^{0.1\alpha_p}-1}} \qquad \lambda_S=\frac{\Omega_s}{\Omega_p}$$

(3)求归一化系统函数 $G_a(p)$

$$G_a(p)=\frac{1}{\varepsilon\cdot 2^{N-1}\prod_{k=1}^{N}(p-p_k)} \qquad p_k={s_k}/{\Omega_p}$$

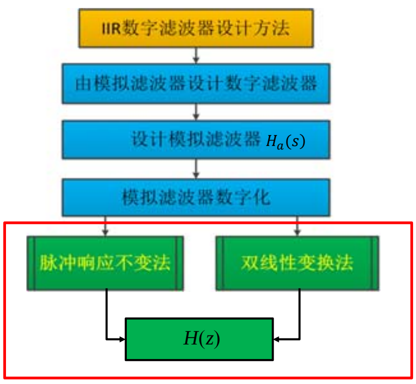
(4) 将 $G_a(p)$ 去归一化，得到实际的 $H_a(s)$

$$H_a(s)=G_a(p)|_{p=s/\Omega_p}$$

第十八次作业：

- 6.1

§6.3 IIR数字滤波器设计



注意以下几点：

1、把DF的技术指标转换为AF的指标参数 → 设计出AF

2、把系统函数 $H_a(s)$从S平面变换到Z 平面$H(z)$：

连续时间域（S平面）⟹ 离散时间域（ Z平面） 映射

模拟滤波器(AF) ⟹ 数字滤波器(DF) Mapping

3、映射必须满足的条件：

（1）为保持模拟滤波器与数字滤波器频率轴的线性映射关系：

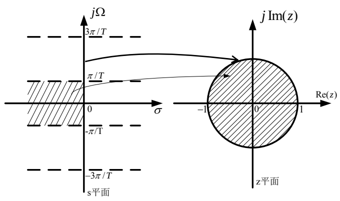
线性关系 $\omega=\Omega T$ ：S平面的虚轴→Z平面的单位圆

（2）为保证模拟与数字滤波器因果稳定的映射关系：

滤波器因果稳定 ： S左半平面→Z平面单位圆内

映射关系：

$z = e^{sT}$



$z = e^{sT}$，s平面与z平面之间的映射关系

图6.3.1 稳定系统s平面与z平面之间映射关系

4、具体的映射方法有：脉冲响应不变法、双线性变换法等

从时域重现模拟滤波器 | 从频域重现模拟滤波器

6.3.1 脉冲响应不变法设计IIR数字低通滤波器

一、脉冲响应不变法原理

脉冲响应不变法是从时域出发：

数字滤波器的h(n) $\xrightarrow{\text{对应于}}$ 模拟滤波器的$h_a(t)$的抽样

即： $h(n) = h_a(nT)$

变换过程为： $H_a(s) \to h_a(t) \to h(n) \to H(z)$

$$h(n) = h_a(t)\big|_{t=nT} = h_a(nT)$$

$$H(z) \overset{?}{\leftrightarrow} H_a(s)$$

已知：$H_a(s)$，而 $h_a(t) = L^{-1}[H_a(s)]$

$$\therefore H(z) = ZT\left\{\left(L^{-1}[H_a(s)]\right)\big|_{t=nT}\right\}$$

例：已知$H_a(s) = \dfrac{A}{s-a}$，用脉冲响应不变法求$H(z)$

解：$h_a(t) = L^{-1}\left[H_a(s)\right] = Ae^{at}u(t)$

$$h(n) = h_a(t)\big|_{t=nT} = Ae^{anT}u(nT) = Ae^{aTn}u(n)$$

$$H(z) = ZT\left[h(n)\right] = ZT\left[Ae^{anT}u(n)\right] = \frac{A}{1-e^{aT}z^{-1}}$$

二、模拟滤波器的数字化

脉冲响应不变法适用于能够展开成部分分式的一般模拟系统传输函数，可以把传输函数用部分分式展开成单极点求和的形式。

即： 模拟滤波器传输函数： $H_a(s) = \sum\limits_{k=1}^{N} \dfrac{A_k}{s - s_k}$

$$h_a(t) = L^{-1}\left[H_a(s)\right] = \sum_{k=1}^{N} L^{-1}\left[\frac{A_k}{s-s_k}\right] = \sum_{k=1}^{N} A_k e^{s_k t}u(t)$$

$$h(n) = h_a(nT) = \sum_{k=1}^{N} A_k e^{s_k nT}u(nT) = \sum_{k=1}^{N} A_k e^{s_k nT}u(n)$$

对上式进行Z变换求得系统函数

$$H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1-e^{s_k T}z^{-1}}$$

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s-s_k} \rightarrow H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1-e^{s_k T}z^{-1}}$$

S平面的极点 ↔ Z平面的极点

$s = s_k$ $\qquad$ $z = e^{s_k T}$

(1) 系数A_k不变；

(2) $(s - s_k) \to (1 - e^{s_k T}z^{-1})$ ；

即s平面的单极点s_k变换到z平面的单极点$e^{s_k T}$。

$$z = e^{sT}$$

注意！ S、Z整个平面，只有极点有这种简单映射关系（零点不满足这种简单的对应关系）。

推导**s**平面和**z**平面之间的映射关系：
以理想采样信号 $\hat{h}_a(t)$ 作为桥梁，

$$\hat{h}_a(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_a(t)\delta(t-nT)$$

$$\hat{H}_a(s)=LT\left[\hat{h}_a(t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}_a(t)e^{-st}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_a(t)\delta(t-nT)\right]e^{-st}dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_a(nT)e^{-snT} \quad (6.3.5)$$

$$h(n)=h_a(t)\big|_{t=nT}=h_a(nT)$$

如果令: $z=e^{sT}$, 则有 $\hat{H}_a(s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)z^{-n}=H(z)\big|_{z=e^{sT}}$

三、s平面 ⇨ z平面的映射关系

$$z=e^{sT} \quad (6.3.6)$$

s平面 → **z**平面的映射关系:

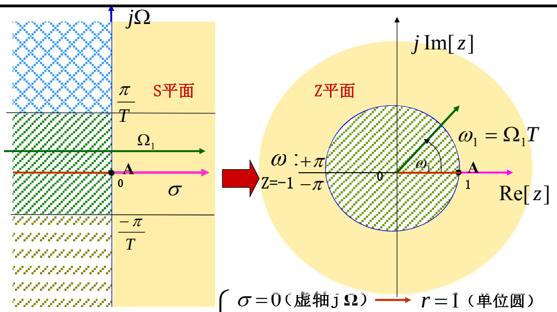
$s=\sigma+j\Omega$ → $z=re^{j\omega}$

$$re^{j\omega}=e^{\sigma T}e^{j\Omega T} \rightarrow \left.\begin{array}{l} r=e^{\sigma T} \\ \omega=\Omega T \end{array}\right\} \quad (6.3.7)$$

注意 $z=e^{sT}$ 是周期函数

$$\therefore z=e^{sT}=e^{\sigma T}\cdot e^{j(\Omega T+2\pi M)}=e^{\sigma T}\cdot e^{j(\Omega+\frac{2\pi M}{T})T}$$

当σ不变时，模拟频率Ω变化2π/T的整数倍时，映射值不变



$$z=e^{sT}\begin{cases} r=e^{\sigma T} \\ \omega=\Omega T \end{cases}$$

- $\sigma=0$（虚轴jΩ）→ $r=1$（单位圆）
- $\sigma<0$（左半平面）→ $r<1$（单位圆内）
- $\sigma>0$（右半平面）→ $r>1$（单位圆外）
- $s=0$（原点A）→ $z=1$（单位圆上A）
- $\Omega=\Omega_1$（平行线）→ $\omega_1=\Omega_1 T$（射线）
- $\Omega=\frac{-\pi}{T}\sim\frac{+\pi}{T}$（条带）→ $\omega=-\pi\sim+\pi$（整个Z平面）

四、数字滤波器的频响与模拟滤波器的频响的关系：

$$\because h(n)=h_a(t)\big|_{t=nT}=h_a(nT)$$

$$\Updownarrow \qquad \Updownarrow \qquad \Updownarrow$$

$$H(e^{j\omega}) \qquad H_a(j\Omega) \qquad \hat{H}(j\Omega)$$

$$\hat{H}(j\Omega)=H(e^{j\omega})=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}H_a(j\Omega-j\frac{2\pi}{T}k)$$

关系：数字滤波器是原模拟滤波器的周期延拓!

四、频率混叠

如果 $H_a(j\Omega)$ 不是严格带限的，$H(e^{j\omega})$ 就会产生频谱混叠

如果模拟滤波器的频率特性是带限信号：

在 $|\Omega|\geq\pi/T$ 时，$H_a(j\Omega)=0$

不产生混叠失真。

$$H(z)=\frac{1}{T}H_a(s)$$

注1：这个要求在高通滤波器和带阻滤波器中显然是无法满足的。

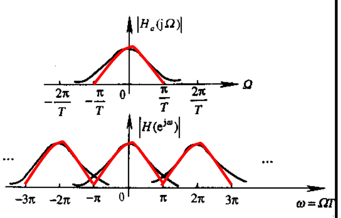


图6.3.2冲激响应不变法的频率混叠现象

$$H(z)=\frac{1}{T}H_a(s)$$

注2：数字滤波器的频率响应的幅度与抽样周期T成反比当抽样频率很高时(T很小)，将产生很高的增益，

为稳定增益故作如下修正： $h(n)=T\cdot h_a(nT)$，则有：

$$H(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{TA_k}{1-e^{s_kT}z^{-1}}$$

脉冲响应不变法所得到的数字滤波器不是简单的重现模拟滤波器的频率响应，而是模拟滤波器频率响应的周期延拓，（对数字频率，则是以2π为周期）

例6.3.1： $H_a(s)=\dfrac{s+\sigma}{(s+\sigma)^2+\Omega^2}$ 极点：$-\sigma\pm j\Omega$

用脉冲响应不变法设计出相应的数字滤波器的系统函数

解：思路

$\boxed{H_a(s)}$ $\xrightarrow{\text{部分分式展开}}$ $\boxed{\text{单极点求和形式 } H_a(s)}$

$\boxed{H_a(s)=\sum_{k=1}^{N}\dfrac{A_k}{s-s_k}}$ $\xleftrightarrow{\text{对应关系}}$ $\boxed{H(z)=\sum_{k=1}^{N}\dfrac{A_k}{1-e^{s_kT}z^{-1}}}$

$s_k \rightarrow z_k=e^{s_kT}$

部分分式展开 $H_a(s)=\dfrac{1/2}{s+(\sigma+j\Omega)}+\dfrac{1/2}{s+(\sigma-j\Omega)}$

$s_k \rightarrow z_k=e^{s_kT}$ $H(z)=\dfrac{1/2}{1-e^{-(\sigma+j\Omega)T}z^{-1}}+\dfrac{1/2}{1-e^{-(\sigma-j\Omega)T}z^{-1}}$

二阶基本节形式 $=\dfrac{1-(e^{-\sigma T}\cos\Omega T)z^{-1}}{1-(2e^{-\sigma T}\cos\Omega T)z^{-1}+e^{-2\sigma T}z^{-2}}$

S平面 Z平面

极点 $s_k=-\sigma\pm j\Omega$ $\longleftrightarrow$ 极点 $z_k=e^{s_kT}=e^{-\sigma T\pm j\Omega T}$

零点 $s=-\sigma$ （不一一对应） 零点 $\begin{cases} z=0 \\ z=e^{-\sigma T}\cos\Omega T \end{cases}$

$H_a(s)=\dfrac{s+\sigma}{(s+\sigma)^2+\Omega^2}$

总结：1）如果模拟滤波器的二阶基本节的形式为

$H_a(s)=\dfrac{s+\sigma}{(s+\sigma)^2+\Omega^2}$，极点为$-\sigma\pm j\Omega$ (6.3.8)

相应的数字滤波器二阶基本节的形式为

$H(z)=\dfrac{1-(e^{-\sigma T}\cos\Omega T)z^{-1}}{1-(2e^{-\sigma T}\cos\Omega T)z^{-1}+e^{-2\sigma T}z^{-2}}$ (6.3.9)

2）如果模拟滤波器的二阶基本节的形式为

$H_a(s)=\dfrac{\Omega}{(s+\sigma)^2+\Omega^2}$， 极点为$-\sigma\pm j\Omega$ (6.3.10)

相应的数字滤波器二阶基本节的形式为

$H(z)=\dfrac{z^{-1}e^{-\sigma T}\sin\Omega T}{1-2z^{-1}e^{-\sigma T}\cos\Omega T+z^{-2}e^{-2\sigma T}}$ (6.3.11)

利用以上这些变换关系，可以简化设计，使实现结构中无复数乘法器。

六、脉冲响应不变法的数字低通滤波器设计步骤：

(1). 利用公式：$\omega=\Omega T$ 将数字滤波器技术指标转换为模拟指标：

$\omega_p,\omega_s\Rightarrow\Omega_p,\Omega_s$ ， α_p和α_s不变

(2). 设计符合(1)中模拟滤波器指标要求的模拟低通滤波器的系统函数$H_a(s)$;

(3). 将$H_a(s)$分解成单极点的部分分式之和，然后按照一阶模拟系统和一阶数字系统的映射完成$H_a(s)\rightarrow H(z)$。

如果不能分解成单极点之和的部分分式，利用脉冲响应不变法的原理

$H(z)=ZT\{(L^{-1}[H_a(s)])|_{t=nT}\}$

(4). 将H(z) 乘以抽样周期T，则完成数字滤波器系统函数的设计。

总结： $H(z)=\sum_{k=1}^{N}\dfrac{TA_k}{1-e^{s_kT}z^{-1}}$

技术指标转换（数→模） → 设计模拟低通滤波器，得$H_a(s)$ → 完成映射 $H_a(s)\rightarrow H(z)$ → 将H(z) 乘以采样周期T

例6.3.2： 设模拟滤波器的系统函数为

$$H_a(s)=\frac{2}{(s+1)(s+3)}=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+3}$$

试用脉冲响应不变法设计IIR数字滤波器。

(T=1s)

$$H_a(s)=\frac{2}{(s+1)(s+3)}=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+3}$$

解：$H_a(s)$的极点为 $s_1=-1$，$s_2=-3$

由$H(z)=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{1-e^{s_iT}z^{-1}}$　　得

$$H(z)=\frac{1}{1-z^{-1}e^{-T}}-\frac{1}{1-z^{-1}e^{-3T}}$$

$$=\frac{z^{-1}(e^{-T}-e^{-3T})}{1-z^{-1}(e^{-T}+e^{-3T})+e^{-4T}z^{-2}}$$

$$H(z)=\frac{T\times 0.318z^{-1}}{1-0.4177z^{-1}+0.01831z^{-2}}$$

七、脉冲响应不变法的特点：

优点：

1、频率坐标变换*保持标准线性关系*，即：$\omega=\Omega T$。如果不考虑频率混叠现象，数字滤波器会很好地重现原模拟滤波器的频率特性

2、数字滤波器的h(n)完全模仿模拟滤波器的单位冲激响应$h_a(t)$，即：*时域逼近特性*很好

缺点：

1、不存在S到Z的直接有理映射关系式，需要对 $H_a(S)$分解；

2、存在频率混叠失真

3、只适合低通和带通滤波器设计，不能设计高通和带阻滤波器。

原则上只适用设计带限滤波器

第十九次作业：

第六章：

6.3；6.4；

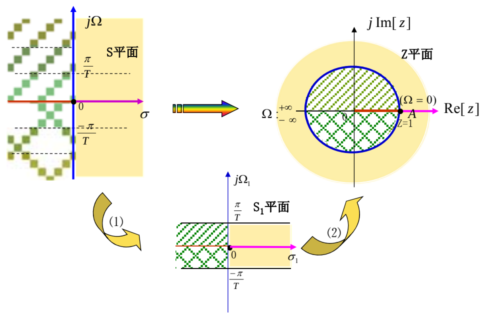
6.3.2 双线性变换法设计IIR数字低通滤波器

一、双线性变换法原理

双线性变换法是使DF在频域上重现AF，采用非线性压缩的方法克服混叠现象。

(1)先把整个S平面压缩变换为→S_1平面的一条水平横带（Ω_1:$-\pi/T$ ～ π/T）；

(2)然后通过 $z=e^{s_1T}$ 变换，将s_1→z平面，将s_1左半平面压缩到单位圆内。

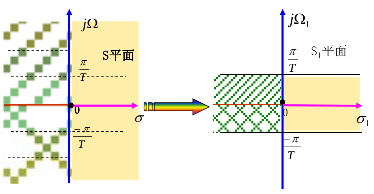


[1]第一次压缩变换：$s\to s_1$

虚轴的压缩：

s: $j\Omega$ ↔ s_1: $j\Omega_1$

$-\infty\to+\infty$ ↔ $-\frac{\pi}{T}\to\frac{\pi}{T}$

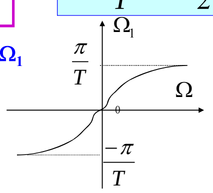


$$j\frac{T}{2}\Omega=j\tan\frac{\Omega_1T}{2}=\frac{1-e^{jT\Omega_1}}{1+e^{jT\Omega_1}}$$

$$\Omega=\frac{2}{T}\tan\frac{\Omega_1T}{2}$$

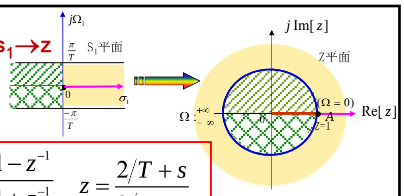
S平面压缩到S_1：S=jΩ，S_1= jΩ_1

$$s=\frac{2}{T}\frac{1-e^{-s_1T}}{1+e^{-s_1T}}$$



[2]第二次压缩变换：$s_1\to z$

$$z=e^{s_1T}$$



$$s=\frac{2}{T}\frac{1-e^{-s_1T}}{1+e^{-s_1T}}$$

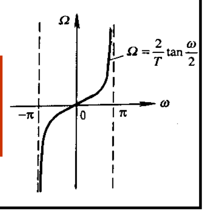
$$s=\frac{2}{T}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\qquad z=\frac{2/T+s}{2/T-s}$$

双线性变换公式　(6.3.12)

模拟频率Ω与数字频率ω的变换

令：$s=j\Omega, z=e^{j\omega}$，则

$$j\Omega=\frac{2}{T}\frac{1-e^{-j\omega}}{1+e^{-j\omega}}\ \rightarrow\ \Omega=\frac{2}{T}\tan(\frac{\omega}{2})$$



$$\boxed{\Omega = \frac{2}{T}\tan(\frac{\omega}{2})} \quad \text{(6.3.13)}$$

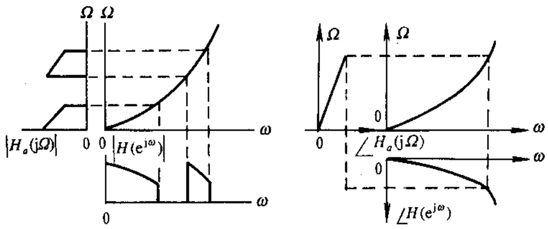


图6.3.3 双线性映射法幅度和相位特性的非线性映射

$$H(z) = H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

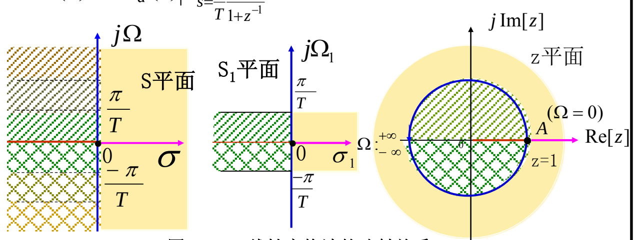


图6.4.1 双线性变换法的映射关系

(S平面坐标原点) (z平面单位圆上A)

$\sigma = \Omega = 0 \longleftrightarrow |z| = |e^{j\omega}| = 1$

$\sigma > 0$ (S右半面) $\longleftrightarrow$ $|z| > 1$ (z单位圆外)

$\sigma < 0$ (S左半面) $\longleftrightarrow$ $|z| < 1$(z单位圆内)

稳定的AF $\longleftrightarrow$ 稳定的DF

例6.3.3试分别用冲激响应不变法和双线性映射法将**图6.3.4**所示的**RC**低通滤波器转换成数字滤波器。

解 首先按照**图6.3.4**写出该滤波器的传输函数$H_a(s)$为

$$H_a(s) = \frac{\alpha}{\alpha + s}, \alpha = \frac{1}{RC}$$

利用脉冲响应不变法转换，数字滤波器的系统函数$H_1(z)$为

$$H_1(z) = \frac{\alpha}{1 - e^{-\alpha T} z^{-1}}$$

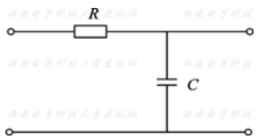


图6.3.4 简单RC低通滤波器

利用双线性变换法转换，数字滤波器的系统函数$H_2(z)$为

$$H_2(z) = H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{\alpha_1(1+z^{-1})}{1+a_2 z^{-1}}$$

$$\alpha_1 = \frac{\alpha T}{\alpha T + 2}, \alpha_2 = \frac{\alpha T - 2}{\alpha T + 2}$$

$H_1(z)$和$H_2(z)$的网络结构分别如图6.4.5(a),(b)所示。

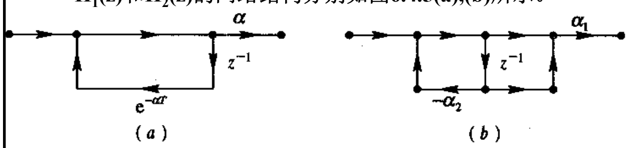


图6.3.5 例6.3.3图——$H_1(z)$和$H_2(z)$的网络结构

(a)$H_1(z)$; (b)$H_2(z)$

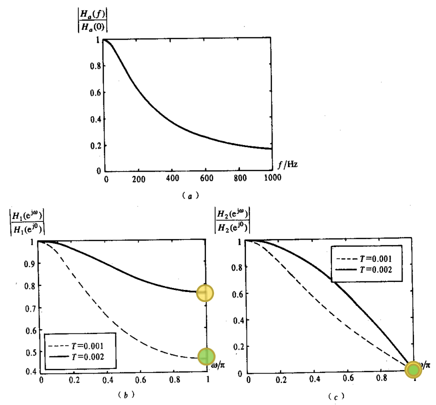


图6.3.6 例6.3.3图——数字滤波器$H_1(z)$和$H_2(z)$的幅频特性

二、双线性映射法特点

1、 简单的变换设计关系；

把S平面整个虚轴映射到Z平面的单位圆，频率Ω与ω一一对应；

$H_a(s)$和$H(z)$之间简单的代数转换关系。频域里DF重现AF；消除了频响混叠效应。

2、不过，这种变换是非线性的；DF的频响与AF原型的频响之间存在非线性畸变。

尤其线性相位的AF经双线性变换后，得到的DF就失去了线性相位的可贵特性。

3.数字滤波器的边界频率需要预畸变校正

如果设计指标中边界频率以数字频率给出,则必须按照公式 $\boxed{\Omega = \frac{2}{T}\tan(\frac{\omega}{2})}$

求出相应的模拟滤波器的边界频率,将这种计算称为"预畸变校正",只有这样才能保证所设计的滤波器满足数字滤波器的技术指标。

［例6.3.5］设计低通数字滤波器（DF），要求幅频特性单调下降3 dB截止频率 $\omega_p=\omega_c=\frac{\pi}{3}\text{rad}$，阻带截止频率 $\omega_s=\frac{4\pi}{5}\text{rad}$，阻带最小衰减 a_s=15 dB，采样频率 f_s=30 kHz，分别用脉冲响应不变法和双线性变换法设计。

解：（1）用脉冲响应不变法设计。

① 确定DF技术指标参数：

$$\omega_p=\omega_c=\frac{\pi}{3}\text{rad},\omega_s=\frac{4\pi}{5}\text{rad},\quad a_p=3\text{ dB},\quad a_s=15\text{ dB}$$

② 将DF指标参数转换成相应的模拟滤波器（AF）指标参数。因为在脉冲响应不变法中，$\omega=\Omega T$，所以：

$$\Omega_p=\frac{\omega_p}{T}=\frac{\pi}{3}\times 30\times 10^3=10000\,\pi\text{ rad/s},\quad a_p=3\text{ dB}$$

$$\Omega_s=\frac{\omega_s}{T}=\frac{4\pi}{5}\times 30\times 10^3=24000\,\pi\text{ rad/s},\quad a_s=15\text{ dB}$$

③ 按照AF技术指标，设计相应的AF系统，求函数 $H_a(s)$。

（a）计算阶数N：根据本题要求，应选择巴特沃斯AF；

$$N\ge\frac{\lg\left[(10^{\alpha_p/10}-1)/(10^{\alpha_s/10}-1)\right]}{2\lg\left[\Omega_p/\Omega_s\right]}$$

$N\ge 1.9569$　　∴ N=2

(b) 得到归一化原型系统函数 $G_a(p)$：查表6.2.1得

$$G_a(p)=\frac{1}{p^2+\sqrt{2}p+1}$$

（c）去归一化，求出相应的AF系统函数 $H_a(s)$:

$$\because\Omega_c=\Omega_p,\therefore p=\frac{s}{\Omega_c}=\frac{s}{\Omega_p}$$

$$H_a(s)=G_a(p)|_{p=\frac{s}{\Omega_p}}=\frac{\Omega_p^2}{s^2+\sqrt{2}\Omega_p s+\Omega_p^2}$$

④ 将 $H_a(s)$ 转换成 $H_1(z)$：

$$\because H_a(s)=\frac{\Omega_p^2}{s^2+\sqrt{2}\Omega_p s+\Omega_p^2}=\frac{\Omega_p^2}{\left(s+\frac{\sqrt{2}}{2}\Omega_p\right)^2+\frac{1}{2}\Omega_p^2}$$

令：$\Omega_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\Omega_p,\sigma=\frac{\sqrt{2}}{2}\Omega_p$　　$\therefore H_a(s)=2\Omega_1\frac{\Omega_1}{(s+\sigma)^2+\Omega_1^2}$

$$H_1(z)=2\Omega_1\frac{z^{-1}e^{-\sigma T}\sin\Omega_1 T}{1-2z^{-1}e^{-\sigma T}\cos\Omega_1 T+z^{-2}e^{-2\sigma T}}$$

$$=\frac{0.4265z^{-1}}{1-0.7040z^{-1}+0.2274z^{-2}}$$

（2）用双线性变换法设计

① 确定DF指标参数：

$$\omega_p=\omega_c=\frac{\pi}{3}\text{rad},\omega_s=\frac{4\pi}{5}\text{rad},\quad a_p=3\text{ dB},\quad a_s=15\text{ dB}$$

② 将DF指标参数转换成相应AF指标参数：

边界频率需要预畸变校正　$\Omega_* =\frac{2}{T}\tan\frac{\omega_*}{2}$

$$\Omega_p=\frac{2}{T}\tan\frac{\omega_p}{2}=6\times 10^4\tan\frac{\pi}{6}=3.4641\times 10^4\text{rad/s},\quad a_p=3\text{ dB}$$

$$\Omega_s=\frac{2}{T}\tan\frac{\omega_s}{2}=6\times 10^4\tan\frac{2\pi}{5}=18.466\times 10^4\text{rad/s},\quad a_s=15\text{ dB}$$

③按照AF技术指标，设计相应的AF系统，求函数 $H_a(s)$。

（a）计算阶数N　$N\ge\frac{\lg\left[(10^{\alpha_p/10}-1)/(10^{\alpha_s/10}-1)\right]}{2\lg\left[\Omega_p/\Omega_s\right]}$

$N=1.0242$　工程上为了简化系统，可取N=1（工程上允许时，可如此处理）

（b）查教材表6.2.1得归一化低通原型 $G_a(p)$ 为

$$G_a(p)=\frac{1}{p+1}$$

（c）去归一化，求出相应的AF系统函数 $H_a(s)$: $\because\Omega_c=\Omega_p,\therefore p=\frac{s}{\Omega_c}=\frac{s}{\Omega_p}$

$$H_a(s)=G_a(p)|_{p=\frac{s}{\Omega_c}}=\frac{\Omega_c}{s+\Omega_c}$$

④ 用双线性变换法将 $H_a(s)$ 转换成 $H_2(z)$

$$H_2(z)=H_a(s)|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}=\frac{3.4641\times 10^4}{6\times 10^4\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+3.4641\times 10^4}=\frac{0.366(1+z^{-1})}{1-0.267\,95z^{-1}}$$

在通带内，二者均能满足要求，但 $|H_1(e^{j\omega})|$ 在 $\omega=\pi$ 附近存在频率混叠失真，从而使 ω_s=0.8π处衰减不到－15 dB，不满足指标要求。

$|H_2(e^{j\omega})|$ 无频率混叠失真，从而使 ω_s=0.8π处衰减大于－15 dB，满足要求。但 $|H_2(e^{j\omega})|$ 存在非线性频率失真，且频率越高，失真越明显。

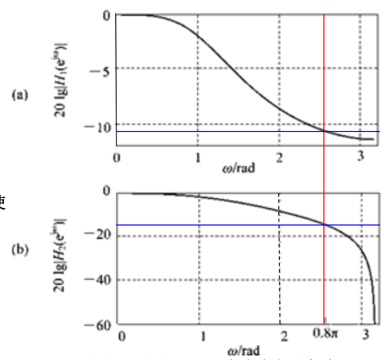
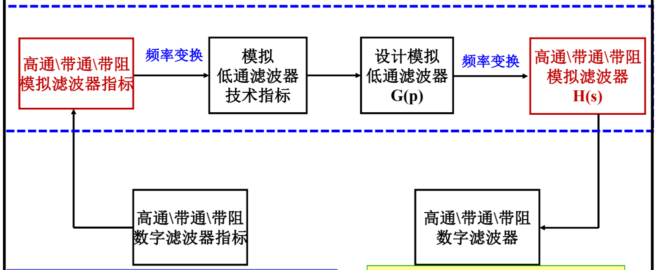


图6.3.8 图（a）用脉冲响应不变法设计的 $H_1(z)$ 和图（b)用双线性映射法设计的 $H_2(z)$ 的损耗函数曲线

6.3.3 数字高通、带通和带阻滤波器设计



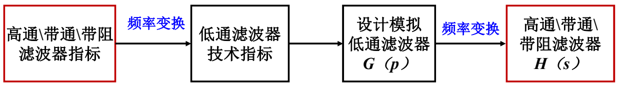
$\Omega = \omega / T$ （冲激响应不变法）

$\Omega = \frac{2}{T}\tan(\frac{1}{2}\omega)$ （双线性变换法）

$H(z) = \sum_{i=1}^{N} \frac{T A_i}{1 - e^{s_i T} z^{-1}}$

$H(z) = H(s)\Big|_{s = \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$

一、模拟高通、带通和带阻滤波器的设计



为了防止符号混淆，先规定一些符号如下：

模拟低通滤波器 ⟶ $G(s), G(j\Omega), G(p),\ p = j\lambda$

其它模拟滤波器 ⟶ $H(s), H(j\Omega), H(q), q = j\eta$

频率变换关系 ⟶ $\lambda = f(\eta)$（模拟滤波器的频率变换）

其中$\lambda = \frac{\Omega}{\Omega_{pl}}, \eta = \frac{\Omega}{\Omega_{ph}}$(高通)$, \eta = \frac{\Omega}{B}$(带通、带阻),

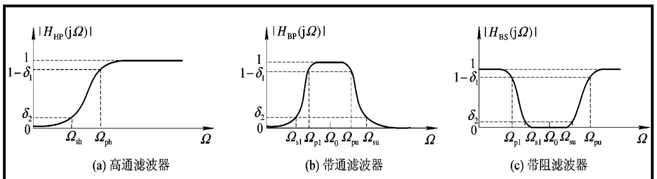
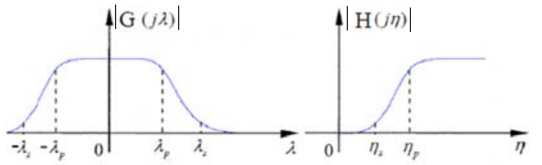


图6.3.9 其他各种模拟滤波器幅频特性曲线及边界频率示意图

- 通带最大衰减和阻带最小衰减仍用α_p和α_s表示
- Ω_{ph}、Ω_{sh}是高通滤波器的边界频率
- Ω_{pl}、Ω_{pu}是带通和带阻滤波器的通带下边界和上边界频率
- Ω_{sl}、Ω_{su}是带通和带阻滤波器的阻带下边界和上边界频率

(1) 模拟高通滤波器设计



比较两个图 G(jλ)与H(jη)幅度相等时λ和η轴上各主要相邻频率点的对应关系

$\lambda: -\infty \to -\lambda_s \to -\lambda_p \to 0$

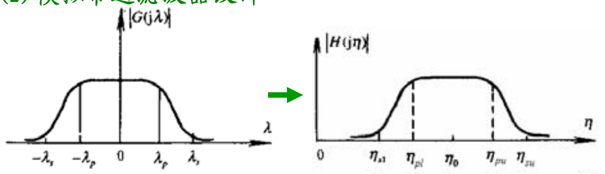
$\eta: 0 \to \eta_s \to \eta_p \to \infty$

频率变换关系式: $\lambda = 1/\eta$

则有：$q = j\eta = j\frac{1}{\lambda} = -\frac{1}{j\lambda} = -\frac{1}{p}$

$$\therefore \quad H_{HP}(s) = H_{HP}(q)\Big|_{q=s/\Omega_{ph}} = G(p)\Big|_{p=\Omega_{ph}/s} \qquad (6.3.14)$$

(2) 模拟带通滤波器设计



通带带宽：$B = \Omega_{pu} - \Omega_{pl}$

通带中心频率：$\Omega^2_0 = \Omega_{pl}\Omega_{pu}$ 通常用B做归一化参考频率 $\eta_* = \Omega_* / B$

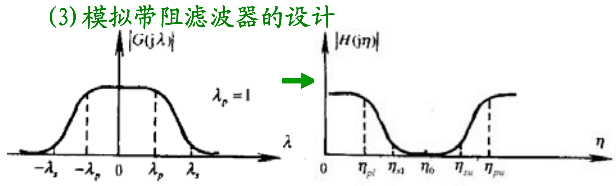
η与λ的对应关系

G(jλ)与H(jη)幅度相等时频率的对应关系

λ	$-\infty$	$-\lambda_s$	$-\lambda_p$	0	λ_p	λ_s	∞
η	0	η_{sl}	η_{pl}	η_0	η_{pu}	η_{su}	∞

$$\lambda = \frac{\eta^2 - \eta^2_0}{\eta} \qquad H_{BP}(s) = G(p)\Big|_{p = \frac{s^2 + \Omega_{pl}\Omega_{pu}}{s(\Omega_{pu} - \Omega_{pl})} = \frac{s^2 + \Omega_0^2}{sB}}$$

(3) 模拟带阻滤波器的设计



η与λ的对应关系

λ	$-\infty$	$-\lambda_s$	$-\lambda_p$	0	0	λ_p	λ_s	∞
η	η_0	η_{su}	η_{pu}	$+\infty$	0	η_{pl}	η_{sl}	η_0

通带带宽：$B = \Omega_{pu} - \Omega_{pl}$

阻带中心频率：$\Omega^2_0 = \Omega_{pl}\Omega_{pu}$ 通常用B做归一化参考频率 $\eta_* = \Omega_* / B$

$$\lambda = \frac{\eta}{\eta^2 - \eta_0^2} \qquad H_{BS}(s) = G(p)\Big|_{p = \frac{s(\Omega_{pu} - \Omega_{pl})}{s^2 + \Omega_{pu}\Omega_{pl}} = \frac{sB}{s^2 + \Omega_0^2}}$$

二、模拟高通滤波器设计步骤：

1）确定高通滤波器的技术指标：

$$\Omega_{ph}, \Omega_{sh}, \alpha_p, \alpha_s$$

2）确定相应的低通滤波器指标：

$$\Omega_{pl} = \frac{1}{\Omega_{ph}}, \Omega_{sl} = \frac{1}{\Omega_{sh}}, \alpha_p, \alpha_s \text{不变}$$

3）按照低通技术指标设计归一化低通滤波器G(p)

4）求模拟高通滤波器的系统函数$H_{HP}(s)$：

$$\boxed{H_{HP}(s) = G(p)\Big|_{p=\frac{\Omega_{ph}}{s}}}$$

$$G(p) \xrightarrow{p=j\lambda,\ \lambda=\frac{1}{\eta},\ q=j\eta} H_{HP}(q) \xrightarrow{\text{去归一化}} H_{HP}(s) = H_{HP}(q)\Big|_{q=s/\Omega_{ph}} = G(p)\Big|_{p=\Omega_{ph}/s}$$

【例6.3.6】设计模拟高通滤波器，f_{ph}=200Hz,f_{sh}=100Hz，幅度特性单调下降，f_{ph}处最大衰减为3dB，阻带最小衰减α_s=15dB。

解：①高通技术指标要求：

f_{ph}=200Hz, α_p=3dB;

f_{sh}=100Hz,α_s=15dB

②低通技术指标要求：

$$\Omega_{p_l} = \frac{1}{2\pi f_{ph}}, \Omega_{sl} = \frac{1}{2\pi f_{sh}}$$

$$\alpha_p = 3dB, \alpha_s = 15dB$$

③ 设计归一化低通的G(p)。

$$N \ge \frac{\lg\left[(10^{\alpha_p/10}-1)/(10^{\alpha_s/10}-1)\right]}{2\lg\left[\Omega_{pl}/\Omega_{sl}\right]} = 2.77,$$

$$N = 3$$

查表得：$G(p) = \dfrac{1}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}$

④ 求模拟高通的$H_{HP}(s)$：

$$\because \Omega_{ch} = \Omega_{ph} = 2\pi f_{ph}$$

$$H_{HP}(s) = H_{HP}(q)\Big|_{q=\frac{s}{\Omega_{ch}}} = G(p)\Big|_{p=\frac{\Omega_{ch}}{s}}$$

$$= \frac{s^3}{s^3 + 2\Omega_{ch}s^2 + 2\Omega_{ch}^2 s + \Omega_{ch}^3}$$

三、数字高通滤波器设计步骤：

1）确定数字高通滤波器的技术指标：$\omega_{ph}, \omega_{sh}, \alpha_p, \alpha_s$

2）将数字高通滤波器的技术指标转化成模拟高通滤波器技术指标：

$$\Omega_{ph} = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega_{ph}}{2}, \Omega_{sh} = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega_{sh}}{2}, \alpha_p, \alpha_s$$

3）确定相应的模拟低通滤波器指标：$\Omega_{pl} = \dfrac{1}{\Omega_{ph}}, \Omega_{sl} = \dfrac{1}{\Omega_{sh}}, \alpha_p, \alpha_s$不变

4）按照模拟低通技术指标设计归一化模拟低通滤波器G(p)

5）求模拟高通滤波器的传输函数H(s)：

$$\boxed{H(s) = G(p)\Big|_{p=\frac{\Omega_{ph}}{s}}}$$

$$\boxed{G(p) \xrightarrow{p=j\lambda,\ \eta=\frac{1}{\lambda},\ q=j\eta} H(q) \xrightarrow{\text{去归一化}} H(s) = H(q)\Big|_{q=s/\Omega_{ph}} = G(p)\Big|_{p=\Omega_{ph}/s}}$$

6）求数字高通滤波器的传输函数H(z)：

$$\boxed{H(z) = H(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}}$$

【例6.3.7】设计一个数字高通滤波器，要求通带截止频率ω_p=0.8π rad，通带衰减不大于3 dB，阻带截止频率ω_s=0.44π rad，阻带衰减不小于15 dB。采用巴特沃斯原型滤波器进行设计。

解（1）确定数字高通滤波器的技术指标：

ω_p=0.8π rad，α_p=3 dB

ω_s=0.44π rad, α_s=15 dB

（2）将数字高通滤波器的技术指标转换成模拟高通滤波器的指标：

令*T* =2 s，预畸变校正得到模拟高通滤波器边界频率：

$$\Omega_{ph} = \frac{2}{T}\tan\frac{1}{2}\omega_p = 3.0775\text{rad/s}, \alpha_p = 3\text{dB}$$

$$\Omega_{sh} = \frac{2}{T}\tan\frac{1}{2}\omega_s = 0.8275\text{rad/s}, \alpha_s = 15\text{dB}$$

（3） 模拟低通滤波器的技术指标计算如下：

求出低通滤波器的通带边界频率:

$\because \Omega_{ph}=\Omega_{ch}$ $\therefore \Omega_{pl}=\Omega_{cl}=1/\Omega_{ph}$，$\alpha_p=3$ dB

求出低通滤波器的阻带截止频率：

$\Omega_{sl}=1/\Omega_{sh}$，$\alpha_s=15\text{dB}$

（4） 设计归一化模拟低通原型滤波器 **G(p)**。

$$N \ge \frac{\lg\left[(10^{\alpha_p/10}-1)/(10^{\alpha_s/10}-1)\right]}{2\lg\left[\Omega_p/\Omega_s\right]}$$

$N=1.3043$, $N=2$

查表，得到归一化模拟低通原型系统函数 **G(p)** 为

$$G(p)=\frac{1}{p^2+\sqrt{2}p+1}$$

（5）将 **G(p)** 转换成模拟高通滤波器 **H(s)**：

$$H(s)=G(p)\big|_{p=\frac{\Omega_{ph}}{s}}=\frac{s^2}{s^2+\sqrt{2}\Omega_{ph}s+\Omega_{ph}^2}=\frac{s^2}{s^2+4.3522s+9.4710}$$

（6）用双线性变换法将模拟高通滤波器 ***H*** **(s)** 转换成数字高通滤波器 ***H*(z)**：

$$H(z)=H(s)\big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}=\frac{0.1326-0.2653z^{-1}+0.1326z^{-2}}{1+0.7394z^{-1}+0.2699z^{-2}}$$

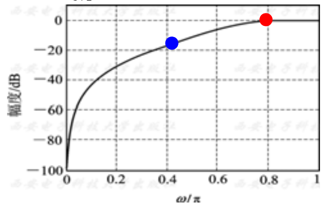


图6.3.10 高通数字滤波器损耗函数

本章小结：

一、掌握用模拟滤波器设计IIR数字低通(高通)滤波器

1、确定DF LP（或HP）的技术指标：

ω_p、ω_s、α_p、α_s

2、将DF的技术指标转换成AF的相应指标：

Ω_p、Ω_s、α_p、α_s

（1）脉冲响应不变法 $\omega=\Omega T$ （低通）

（2）双线性变换法 $\Omega=\frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$ (低通、高通)

3、按照AF的指标设计相应的AF得 $H_a(s)$ （或 H (s) ）（一般选用Butterworth）

4、将AF的 $H_a(s)$ （或H (s) ）转换为DF的H(z)。

（1）脉冲响应不变法：

$$H_a(s)=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{s-s_i}\Rightarrow H(z)=\sum_{i=1}^{N}\frac{TA_i}{1-e^{s_iT}z^{-1}}$$ （低通）

（2）双线性变换法：

$$H(z)=H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\bullet\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$ （低通、高通）

二、掌握脉冲响应不变法和双线性变换法的特点（优缺点）

三、会画滤波器的技术指标要求示意图（容限图）

第二十次作业：

第六章：6.5；6.6；6.7