第4章 离散傅立叶变换DFT

本章主要学习数字信号处理中非常有用的一种变换----离散傅立叶变换（Digital Fourier Transform, DFT）的定义、物理意义、性质及应用举例。

DFT使信号在频域离散化，从而使计算机能在频域进行信号处理，特别是DFT有多种快速算法可使信号处理的速度大大提高。因而离散傅立叶变换在各种数字信号处理的算法中起着核心作用。

§4.1 离散傅立叶级数(DFS)

4.1 离散傅立叶级数(DFS)

4.1.1 周期序列的FT变换不存在：

设 $\tilde{x}(n)$是周期为N的一个周期序列，即：

$$\tilde{x}(n)=\tilde{x}(n+kN)$$

（N: 最小整数， k: 任意整数）

周期序列在整个n=(-∞,+∞) 上 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\tilde{x}(n)|=\infty$

不满足FT存在的条件，但由于 $\tilde{x}(n)$ 是周期性的，可以展开成离散傅立叶级数。

4.1.2 $\tilde{x}(n)$离散傅里叶级数展开：

将$\tilde{x}(n)$展成离散傅立叶级数：

$$\tilde{x}(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}g_k(n)$$

该级数是由成谐波关系的复指数序列之和构成，其中

a_k：傅立叶级数的系数；

$e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=e_k(n)$ ：复指数序列

基频： $\omega_0=2\pi/N$

$\tilde{x}(n)$的第k次谐波： $g_k(n)=a_k e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=a_k e^{-j\omega_0 kn}$

$\tilde{x}(n)$的基波：$k=1$ $g_1(n)=a_1e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$ 频率$\omega_1=\omega_0$

$\tilde{x}(n)$的2次谐波：$k=2,$ $g_2(n)=a_2e^{-j\frac{2\pi}{N}\times 2n}$ 频率$\omega_2=2\omega_0$

$\vdots$ $\vdots$

$\tilde{x}(n)$的k次谐波：$g_k(n)=a_ke^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$ 频率$\omega_k=k\omega_0=k\times\frac{2\pi}{N}$

频点：$\omega_k=k\omega_0=k\times\frac{2\pi}{N}$

7

4.1.3 复指数序列 $e_k(n)$

复指数序列：$e_k(n)=e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$

它在DFS和DFT中起着非常重要的作用

定义： $W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ ➡ $e_k(n)=W_N^{kn}=e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$

称W_N旋转因子

∵ $e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+lN)n}=e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\cdot e^{-j2\pi ln}=e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$

是周期为N的周期序列

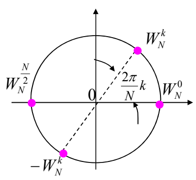
将$\tilde{x}(n)$展成傅立叶级数,对n在一个周期中求和：

$$\tilde{x}(n)=\sum_{k=0}^{N-1}a_ke^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

∴离散傅立叶级数中只有N个独立谐波

9

复指数序列 $e_k(n)$的性质：



1.周期性 $\begin{cases}W_N^{nk}=W_N^{n(N+k)}=W_N^{k(N+n)}\\ W_N^0=W_N^{rN}=1\end{cases}$

2.对称性 $\begin{cases}W_N^{-nk}=W_N^{n(N-k)}=W_N^{k(N-n)}\\ W_N^{\frac{N}{2}}=-W_N^0=-1\\ W_N^{(k+\frac{N}{2})}=-W_N^k\end{cases}$

3.可约性 $\begin{cases}W_N^{nk}=W_{mN}^{mnk}=W_{N/m}^{nk/m}\\ W_N^{N/2}=-1\\ W_N^{(k+N/2)}=-W_N^k\end{cases}$

$$\sum_{n=n_1}^{n_2}a^n=\frac{a^{n_1}-a^{n_2+1}}{1-a},\quad \forall a$$

4.正交性 $\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{kn}=\frac{1-W_N^{nN}}{1-W_N^n}=\frac{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}nN}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}n}}=\begin{cases}\text{N} & 当n=rN, r为整数\\ 0 & 当n为其它\end{cases}$

4.1.4 离散傅里叶级数DFS的推导：

DFS(Discrete Fourier Series)

$$\tilde{x}(n)=\sum_{k=0}^{N-1}a_ke^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

⟶ 求 a_k (傅立叶级数的系数)

⟶ 等式两边同乘以 $e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}$ · $\tilde{x}(n)=\sum_{k=0}^{N-1}a_ke^{j\frac{2\pi}{N}kn}\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}$

⟶ 对n在一个周期N内求和

$$\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}=\sum_{n=0}^{N-1}\left[\sum_{k=0}^{N-1}a_ke^{j\frac{2\pi}{N}kn}\right]e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}$$

11

$$\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}=\sum_{k=0}^{N-1}a_k\boxed{\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)n}}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)n}=\begin{cases}N & k=m\\ 0 & k\ne m\end{cases}$$ 为什么？

当k=m时，

$$\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}=Na_m$$ 为什么？

傅立叶级数的系数

$$a_m=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}\quad 0\le m\le N-1$$

12

变量代换 k=m

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\qquad 0\le k\le N-1$$

$\because e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$、$\tilde{x}(n)$都是以$N$为周期

$\therefore\ a_k$ 是周期序列，满足 $a_k=a_{k+lN}$

令 $\tilde{X}(k)=Na_k$

$$\boxed{\therefore\ \tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\qquad -\infty<k<\infty}\qquad(4.15)$$

DFS

周期序列的傅立叶级数

$\tilde{X}(k)$是以N为周期的周期函数。

为什么？

13

4.1.5 离散傅立叶级数(DFS)定义：

$$\begin{cases}\tilde{X}(k)=DFS[\tilde{x}(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{kn} & k=0,\pm1,\pm2,\cdots\quad(4.16)\\ \tilde{x}(n)=IDFS[\tilde{X}(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)W_N^{-kn} & n=0,\pm1,\pm2,\cdots\quad(4.17)\end{cases}$$

$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

称为$\tilde{x}(n)$的离散傅立叶级数，用**DFS(Discrete Fourier Series)**表示

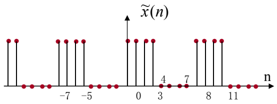
DFS的物理意义:

表示周期序列 $\tilde{x}(n)$的频谱分布规律

14

【例4.1】设$x(n)=R_4(n)$，将$x(n)$以N＝8为周期进行周期延拓，得到如图所示的周期序列，求 $\tilde{x}(n)$ 的DFS。

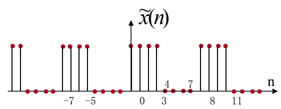
解：

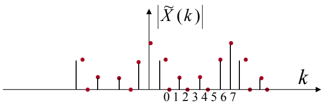


$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{7}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{8}kn}=\sum_{n=0}^{3}e^{-j\frac{\pi}{4}kn}=\frac{1-e^{-j\frac{\pi}{4}k\cdot4}}{1-e^{-j\frac{\pi}{4}k}}$$

$$=\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}k}(e^{j\frac{\pi}{2}k}-e^{-j\frac{\pi}{2}k})}{e^{-j\frac{\pi}{8}k}(e^{j\frac{\pi}{8}k}-e^{-j\frac{\pi}{8}k})}=e^{-j(\frac{3\pi}{8}k)}\cdot\frac{\sin\pi k/2}{\sin\pi k/8}$$

15





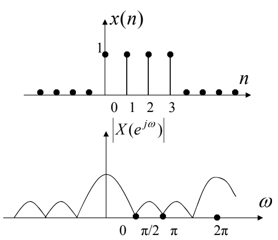
$$\tilde{X}(k)=e^{-j(\frac{3\pi}{8}k)}\cdot\frac{\sin\pi k/2}{\sin\pi k/8}$$

$k=$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
$\tilde{X}(k)=$	4. 00	2. 61	0	1. 08	0	1.08	0	2.16	**4.00**	…

16

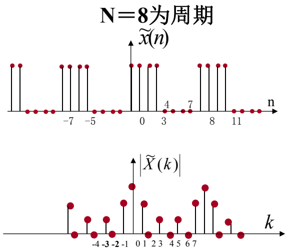
4.1.6 DTFT与DFS的关系

DTFT



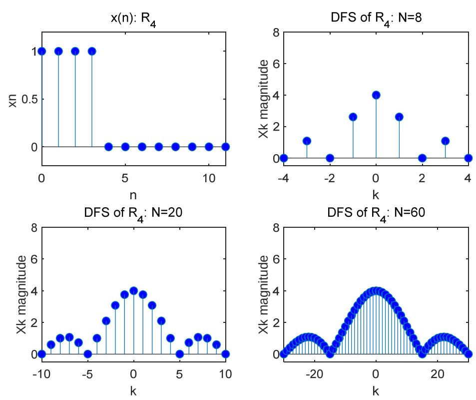
DFS

N＝8为周期



17

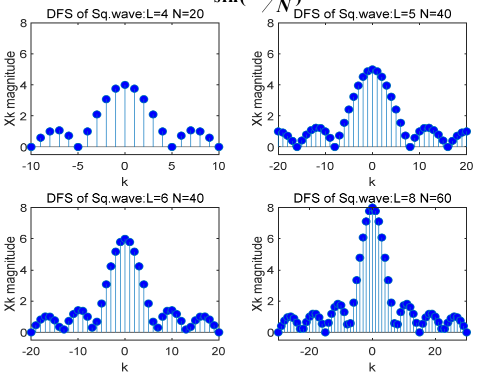
改变周期N后的 $|\tilde{X}(k)|$



18

对于$x(n)=R_L(n)$以N为周期延拓得到的周期序列$\tilde{x}(n)$的傅立叶级数是

$$\tilde{X}(k)=e^{-j(\frac{(L-1)k\pi}{N})}\cdot\frac{\sin(\pi kL/N)}{\sin(\pi k/N)}\qquad L\le N$$



19

4.1.7 DFS的性质

设$\tilde{x}(n)$为周期序列，周期为N，它的DFS为$\tilde{X}(k)$

（1）线性性质

设a、b为常数,则有:

$$a\tilde{x}(n)+b\tilde{y}(n)\Leftrightarrow a\tilde{X}(k)+b\tilde{Y}(k)$$

（2）时域移位性

设m为常数，则有：

$$\tilde{x}(n+m)\Leftrightarrow W_N^{-mk}\tilde{X}(k)$$

（3）频域移位性（调制性）

$$W_N^{nl}\tilde{x}(n)\Leftrightarrow\tilde{X}(k+l)$$

（4）周期卷积

设周期序列$\tilde{x}(n)$、$\tilde{y}(n)$的周期为N，DFS分别为$\tilde{X}(k),\tilde{Y}(k)$

记$\tilde{f}(n)$为

$$\tilde{f}(n)=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}(m)\tilde{y}(n-m)$$

则有：

$$DFS[\tilde{f}(n)]=\tilde{X}(k)\tilde{Y}(k)$$

与之相应的频域周期卷积公式为:

$$DFS[\tilde{x}(n)\tilde{y}(n)]=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\tilde{X}(l)\tilde{Y}(k-l)$$

4.2 离散傅立叶变换(DFT)

一、问题的提出:

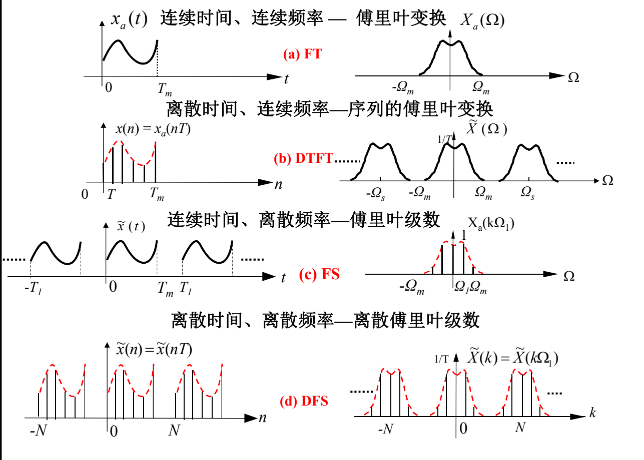
有限长序列的傅立叶变换在频域是关于频率的连续函数，为了适用于计算机的运算，希望将连续的频率函数也能离散化，如何解决这一问题呢?

二、如何解决问题:

引出了 ➡ 离散傅立叶变换(DFT)

回忆傅里叶变换几种形式

22



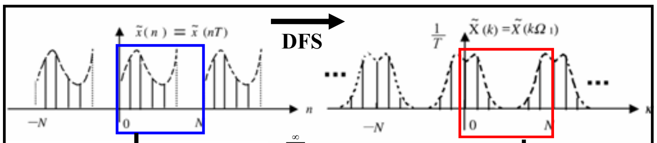
用计算机实现信号的频谱分析及信号处理方面的工作，对信号的要求是:

时域和频域都是离散的，且都是有限长 ➡ DFS在时域和频域都是离散的，都以N为周期

$$\begin{cases}\tilde{X}(k)=DFS[\tilde{x}(n)]=\sum\limits_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} & -\infty<k<\infty\\ \tilde{x}(n)=IDFS[\tilde{X}(k)]=\frac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk} & -\infty<n<\infty\end{cases}$$

$\tilde{x}(n)$ <----> $\tilde{X}(k)$ 是一对傅立叶级数DFS

24

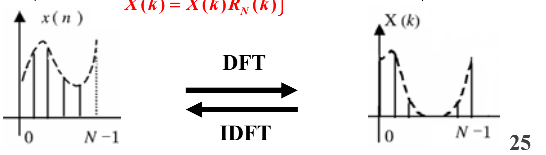


$\tilde{x}(n)=x((n))_N=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x(n+rN)$ 周期延拓

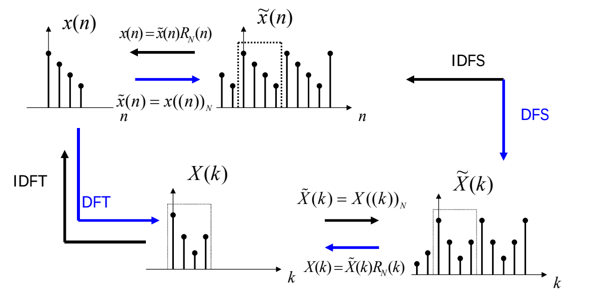
主值区间：周期为N的周期序列的第一个周期n ,k=0 ～ N-1的区间称为主值区间。

主值序列：周期序列主值区间内的序列，即为主值序列。

$\left.\begin{array}{l} x(n)=\tilde{x}(n)R_N(n) \\ X(k)=\tilde{X}(k)R_N(k) \end{array}\right\}$ 取主值



DFT 导出的图形解释 设$x(n)$是长度为M的有限长序列，$N\geq M$



4.2.1 离散傅立叶变换DFT定义

设$x(n)$是长度为M的有限长序列,根据DFT的导出过程

$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad -\infty<k<\infty \xrightarrow{\text{取主值}} X(k)=\tilde{X}(k)R_N(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$\tilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad -\infty<n<\infty \xrightarrow{\text{取主值}} x(n)=\tilde{x}(n)R_N(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

DFT的定义

$$\begin{cases} X(k)=DFT[x(n)]_N=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn} & k=0,1,2,\ldots\ldots,N-1 \\ x(n)=IDFT[X(k)]_N=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn} & n=0,1,2,\ldots.,N-1 \end{cases}$$

其中 $W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ N称为DFT变换区间长度，且N≥M

【例4.2】 $x(n)=R_4(n)$，M=4，求$x(n)$的4点、8点和16点DFT

解：

$N=4$时 $X(k)=\sum_{n=0}^{3}x(n)W_4^{kn}=\sum_{n=0}^{3}e^{-j\frac{2\pi}{4}kn}, k=0,1,2,3$

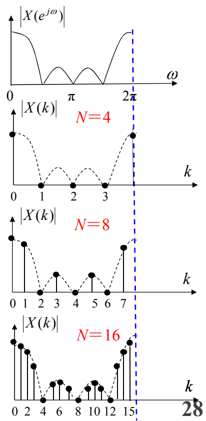
$$=\frac{1-e^{-j2\pi k}}{1-e^{-j\frac{\pi}{2}k}}=\begin{cases}4 & k=0\\ 0 & k=1,2,3\end{cases}$$

$N=8$时 $X(k)=\sum_{n=0}^{7}x(n)W_8^{kn}=\sum_{n=0}^{3}e^{-j\frac{2\pi}{8}kn}$

$$=e^{-j\frac{3}{8}\pi k}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}k)}{\sin(\frac{\pi}{8}k)} \quad k=0,1,\ldots,7$$

$N=16$时 $X(k)=\sum_{n=0}^{15}x(n)W_{16}^{kn}=\sum_{n=0}^{3}e^{-j\frac{2\pi}{16}kn}$

$$=e^{-j\frac{3}{16}\pi k}\frac{\sin(\frac{\pi}{4}k)}{\sin(\frac{\pi}{16}k)} \quad k=0,1,\ldots,15$$



小结：

1) DFT变换区间长度N不同，变换结果$X(k)$ 不同

2) 当N足够大时，$|X(k)|$的包络可逼近$|X(e^{j\omega})|$ 曲线

3) 频点 $\omega_k=(2\pi/N)k$ 表示了 ω与k的关系

$|X(k)|$ 表示 $\omega_k=\frac{2\pi}{N}k$ 频点的谱线幅度。

4.2.2 DFT与DTFT、ZT之间的关系

设序列$x(n)$的长度为M（$N\geq M$），其DTFT、ZT分别为：

$$X(e^{j\omega})=DTFT[x(n)]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{M-1}x(n)e^{-j\omega n}$$

$$X(z)=ZT[x(n)]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{M-1}x(n)z^{-n}$$

$$X(k)=DFT[x(n)]_N=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=\sum_{n=0}^{M-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$X(k)=X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}, \quad k=0,1,2,\cdots,N-1$$

$$X(k)=X(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}, \quad k=0,1,2,\cdots,N-1$$

$\because \omega=\frac{2\pi}{N}k$

$\therefore z=e^{j\omega}=e^{j\frac{2\pi}{N}k}=W_N^{-k}$

$X(k)$的物理意义：

设 $X(k)=DFT[x(n)]_N$

1. $X(k)$ 是$x(n)$的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$在[0，2π]上的 N点等间隔采样：$X(k)=X(e^{j\omega})\big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$， $k=0,1,2,\cdots,N-1$

2. $X(k)$是 $x(n)$ 的Z变换在单位圆上的N点等间隔采样

$$X(k)=X(z)\big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}},\quad k=0,1,2,\cdots,N-1$$

31

第十二次作业：

4.2； 4.3
补充题：

已知 $x(n)=\begin{cases}1, & |n|\le 3\\ 0, & \text{其他}n\end{cases}$

1．求出$X(e^{j\omega})$；
2．画出 $x((n))_8 R_8(n)$ 图形；
3．求出$X(k)=DFT[x(n)]_8$

32

4.2.3 DFT隐含周期性

DFT的隐含周期性可以从不同的角度得出：

（1）对于 $W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$，有 $W_N^{(k+mN)}=W_N^k$ 其中 k,m,N 均为整数

所以对于$X(k)$来说：

$$X(k+mN)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{(k+mN)n}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}=X(k)$$

可见 $X(k)$ 具有隐含周期性，且周期为N。

33

（2）从DFT的导出过程来看

设 $x(n)$的长度为M， N ≥ M

$$\tilde{x}(n)=x((n))_N=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(n+mN)$$

表示x(n)是以N为周期的周期延拓序列

$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}x((n))_N W_N^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}\quad -\infty<k<\infty$$

$$\tilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)W_N^{-kn}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}\quad -\infty<n<\infty$$

与DFT定义式比较

$$\begin{cases}X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}=\tilde{X}(k)R_N(k)\\ x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}=\tilde{x}(n)R_N(n)\end{cases}$$

可知：(DFT的第二种物理意义)

有限长序列 $x(n)$ 的N点DFT$X(k)$ 也可以定义为$x(n)$的周期延拓序列 $x((n))_N$ 的离散傅立叶级数$\tilde{X}(k)$ 取主值： $X(k)=\tilde{X}(k)R_N(k)$

34

4.2.4 DFT的特点

1.DFT具有隐含周期性

2.DFT只适用于有限长序列

DFT处理一定是要对x(n)进行周期化处理，若x(n)无限长，变成周期序列后各周期必然混叠，造成信号失真。因此，要先进行截断处理，使之为有限长，然后进行DFT。

3.DFT正反变换的数学运算相似，易于软硬件实现

4.2.5 DFT的基本性质和定理

注意！！DFT性质与DTFT的性质不同：

DTFT的变换区间(-∞,+∞),是以原点为对称点；

N点DFT的变换区间是$0\le n\le N-1$ 是以N/2为对称点

1 线性

若 $y(n)=ax_1(n)+bx_2(n)$

对应长度： N N_1 N_2

这里 $N\ge\max(N_1,N_2)$

注：若$N>N_1$或 N_2, 取N点DFT，那么补零到N，然后才可以作N点的DFT。

则有： $Y(k)=aX_1(k)+bX_2(k)$

其中 $X_1(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x_1(n)W_N^{nk}\longrightarrow N$点DFT

$X_2(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x_2(n)W_N^{nk}\longrightarrow N$点DFT

36

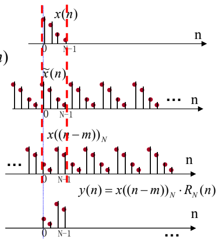
2 循环移位（圆移位、圆周移位）

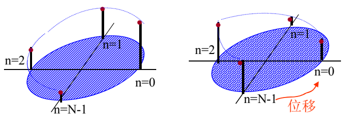
（1）序列的循环移位

对有限长序列 $x(n)$ $\begin{cases}\text{线移位：} & x(n-m) \\ \text{循环移位：} & y(n)=x((n-m))_N \cdot R_N(n)\end{cases}$

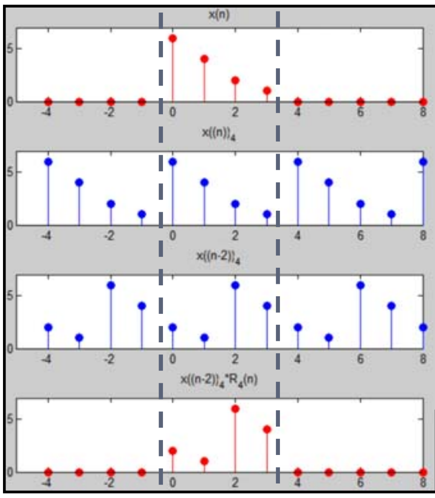
$\tilde{x}(n)=x((n))_N=\sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(n+rN)$　　$x(n)$长度$M \le N$

$x(n) \xrightarrow[N]{\text{周期延拓}} \tilde{x}(n)=x((n))_N \xrightarrow[m\text{ 位}]{\text{右移}} x((n-m))_N \xrightarrow[\text{序列}]{\text{取主值}} y(n)$





37



见Flash演示

有限长序列的周期延拓和圆周移位

38

（2）时域循环移位定理

设$x(n)$是长度为$M(M \le N)$有限长序列

$$y(n)=x((n+m))_N \cdot R_N(n) \xrightarrow{DFT} Y(k)=W_N^{-km}X(k)$$

（3）频域循环移位定理

$$Y(k)=X((k+l))_N \cdot R_N(k) \xrightarrow{IDFT} y(n)=W_N^{nl}x(n)$$

其中 $X(k)=DFT[x(n)]$　　$0 \le k \le N-1$

39

3 共轭对称性

一、共轭序列的DFT

设$x^*(n)$是$x(n)$的复共轭序列，长度为N

若　$DFT[x(n)]=X(k)$　　$k=0,1,\ldots,N-1$

则　$\boxed{DFT[x^*(n)]=X^*(N-k)}$　　$X(k)$的隐含周期性

证明：$DFT[x^*(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x^*(n)W_N^{kn}=[\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{-kn}]^*=X^*(-k)=X^*(N-k)$

$k=0$时，　$X^*(N-k)=X^*(N)=X^*(0)$

总之：　$x(n) \longleftrightarrow X(k)$

$x^*(n) \longleftrightarrow X^*(N-k)$

$x^*(N-n) \longleftrightarrow X^*(k)$

40

二、共轭对称性

（1）时域序列的共轭对称性

DTFT的对称性 ⟶ 关于原点的纵坐标轴

DFT的对称性 ⟶ 关于N/2点

圆周共轭（偶）对称序列　$x_{ep}(n)=x_{ep}^*(N-n)$　　$0 \le n \le N-1$

圆周共轭反（奇）对称序列　$x_{op}(n)=-x_{op}^*(N-n)$　　$0 \le n \le N-1$

实偶对称　$x(n)=x(N-n)$　　实奇对称　$x(n)=-x(N-n)$

$$x(n)=x_{ep}(n)+x_{op}(n) \quad 0 \le n \le N-1$$

其中 $x_{ep}(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(N-n)]$

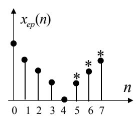
$x_{op}(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x^*(N-n)]$

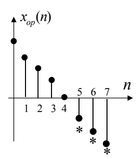
41

当N为偶数时，将n换成$N/2-n$

$x_{ep}(\frac{N}{2}-n)=x_{ep}^*(\frac{N}{2}+n)$　　$0 \le n \le \frac{N}{2}-1$

$x_{op}(\frac{N}{2}-n)=-x_{op}^*(\frac{N}{2}+n)$　　$0 \le n \le \frac{N}{2}-1$





42

（2）频域序列（DFT）的共轭对称性

圆周共轭对称部分 $X_{ep}(k)=X_{ep}^*(N-k) \quad 0\le k\le N-1$

圆周共轭反对称部分 $X_{op}(k)=-X_{op}^*(N-k) \quad 0\le k\le N-1$

$$X(k)=X_{ep}(k)+X_{op}(k)$$

其中 $X_{ep}(k)=\frac{1}{2}[X(k)+X^*(N-k)]$

$X_{op}(k)=\frac{1}{2}[X(k)-X^*(N-k)]$

① $x(n)=\underbrace{x_r(n)}_{\text{实部}}+\underbrace{jx_i(n)}_{\text{虚部}}$

$X(k)=\underbrace{X_{ep}(k)}_{\text{圆周共轭对称}}+\underbrace{X_{op}(k)}_{\text{圆周共轭反对称}}$

② $x(n)=\underbrace{x_{ep}(n)}_{\text{圆周共轭对称}}+\underbrace{x_{op}(n)}_{\text{圆周共轭反对称}}$

$X(k)=\underbrace{\mathrm{Re}[X(k)]}_{\text{实部}}+\underbrace{j\,\mathrm{Im}[X(k)]}_{\text{虚部}}$

43

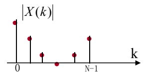
（3）实序列的DFT的对称性

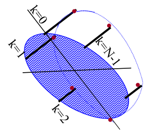
设N点实序列 $x(n)$，$X(k)=DFT[x(n)]_N$，则有以下结论成立：

① $X(k)$圆周共轭对称

$\because\ x(n)=x^*(n)$

故 $X(k)=X^*(N-k)$





幅度： 以 k=0 轴为中心， 左半圆、右半圆序列偶对称

② 如果 $x(n)=x(N-n)$ 则$X(k)$ 实偶对称，即 $X(k)=X(N-k)$

③ 如果 $x(n)=-x(N-n)$ 则$X(k)$纯虚奇对称，即 $X(k)=-X(N-k)$

44

总之： n： 实 ↕ 虚 ↕ 共轭对称 ↕ 共轭反对称 ↕

k： 圆周共轭对称 | 圆周共轭反对称 | 实 | 虚

n：	实	虚	共轭对称	共轭反对称
k：	圆周共轭对称	圆周共轭反对称	实	虚

实际应用过程中，常用对称性来减少DFT的运算量

如何利用DFT的共轭对称性，通过计算一个N点DFT，得到两个实序列 $x_1(n)$和 $x_2(n)$的N点DFT？

45

【例4.3】设$x_1(n)$和$x_2(n)$都是N点的实数序列，试用一个N点DFT运算来计算$x_1(n)$和$x_2(n)$的N点DFT。

$$X_1(k)=DFT[x_1(n)]_N \qquad X_2(k)=DFT[x_2(n)]_N$$

解：构造新序列：利用两实序列构成一个复序列

$$x(n)=x_1(n)+jx_2(n)$$

则 $X(k)=DFT[x(n)]_N=DFT[x_1(n)+jx_2(n)]$

$=DFT[x_1(n)]_N+jDFT[x_2(n)]_N$

$=X_1(k)+jX_2(k)$

46

由$x_1(n)=\mathrm{Re}[x(n)]$得：

$$X_1(k)=DFT[x_1(n)]=DFT\{\mathrm{Re}[x(n)]\}=X_{ep}(k)$$

$$=\frac{1}{2}[X(k)+X^*(N-k)]$$

由$x_2(n)=\mathrm{Im}[x(n)]$得：

$$X_2(k)=DFT[x_2(n)]=DFT\{\mathrm{Im}[x(n)]\}=\frac{1}{j}X_{op}(k)$$

$$=\frac{1}{2j}[X(k)-X^*(N-k)]$$

47

对称性小结：

DFT			F变换			Z变换		
$x(n)$	$\leftrightarrow$	$X(k)$	$x(n)$	$\leftrightarrow$	$X(e^{j\omega})$	$x(n)$	$\leftrightarrow$	$X(z)$
$x^*(n)$	$\leftrightarrow$	$X^*(N-k)$	$x^*(n)$	$\leftrightarrow$	$X^*(e^{-j\omega})$	$x^*(n)$	$\leftrightarrow$	$X^*(z^*)$
$x^*(N-n)$	$\leftrightarrow$	$X^*(k)$	$x^*(-n)$	$\leftrightarrow$	$X^*(e^{j\omega})$	$x^*(-n)$	$\leftrightarrow$	$X^*((z^*)^{-1})$
$x(N-n)$	$\leftrightarrow$	$X(N-k)$	$x(-n)$	$\leftrightarrow$	$X(e^{-j\omega})$	$x(-n)$	$\leftrightarrow$	$X(z^{-1})$

48

4 循环卷积定理（圆周卷积定理）

有限长序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$，长度分别为N_1和N_2,

（1）循环卷积（圆周卷积）

$$y_c(n)=x_1(n)\otimes x_2(n)=\left[\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)x_2((n-m))_N\right]R_N(n)$$

称为 $x_1(n)$ 与 $x_2(n)$ 的循环卷积 用⊗表示循环卷积

记为 $y_c(n)=x_1(n)\otimes x_2(n)=x_2(n)\otimes x_1(n)$

循环卷积步骤:

①补零, 补到$N\geq max(N_1, N_2)$

②其中一个序列以N为周期进行周期延拓

③翻褶，取主值序列

④圆周移位

⑤相乘相加

（2）计算循环卷积过程：

一、作图法

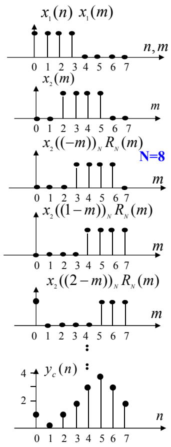
①将$x_2(m)$ 周期化，形成 $x_2((m))_N$，再反褶形成 $x_2((-m))_N$，取主值序列得到 $x_2((-m))_N R_N(m)$ 称之为$x_2(m)$的循环反转

循环反转移位序列

②对 $x_2(m)$ 的循环反转序列移位n，形成 $x_2((n-m))_N R_N(m)$,当 $n=0，1，…，N-1$时，将$x_1(m)$与 $x_2((n-m))_N R_N(m)$ 相乘，并对m在0～（$N-1$）区间求和。

$$y_c(n)=x_1(n)\otimes x_2(n)=\left[\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)x_2((n-m))_N\right]R_N(n)$$

两个长度为N的序列的循环卷积长度仍为N



第十三次作业：

4.4； 4.5； 4.7； 4.8

【例4.4】已知序列 $x_1(n)=(5-n)R_5(n)$，$x_2(n)=R_4(n)$

求两个序列的6点圆周卷积和。

n/m	…-3 -2 -1	0 1 2 3 4 5	6 7…	$y_c(n)$
$x_1(n)\|x_1(m)$		5 4 3 2 1 0		
$x_2(n)\|x_2(m)$		1 1 1 1 0 0		
$x_2((m))_6$	… 1 0 0	1 1 1 1 0 0	1 1…	
$x_2((-m))_6$	… 1 1 1	1 0 0 1 1 1	1 0…	
$x_2((-m))_6R_6(n)$		1 0 0 1 1 1		8
$x_2((1-m))_6R_6(n)$		1 1 0 0 1 1		10
$x_2((2-m))_6R_6(n)$		1 1 1 0 0 1		12
$x_2((3-m))_6R_6(n)$		1 1 1 1 0 0		14
$x_2((4-m))_6R_6(n)$		0 1 1 1 1 0		10
$x_2((5-m))_6R_6(n)$		0 0 1 1 1 1		6

二、矩阵相乘法

计算L点循环卷积 $y_c(n)=x(n)\otimes h(n)$

$$\begin{bmatrix} y(0)_c \\ y(1)_c \\ y(2)_c \\ \vdots \\ y(L-1)_c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x(0) & x(L-1) & x(L-2) & \cdots & x(1) \\ x(1) & x(0) & x(L-1) & \cdots & x(2) \\ x(2) & x(1) & x(0) & \cdots & x(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(L-1) & x(L-2) & x(L-3) & \cdots & x(0) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \\ \vdots \\ h(L-1) \end{bmatrix}$$

1.其中的矩阵称为$x(n)$的L点“循环卷积矩阵”,它由循环反转移位序列$x((n\text{-}m))_LR_L(m)$形成的，其中，n=0,1,…，L-1

特点是：

- 第1行以后的各行是前一行序列向右循环移1位；
- 矩阵主对角线序列值相等

2. 如果$x(n)$或 $h(n)$的长度小于L，则需要在序列末尾补0，使序列长度为L。

3. 循环卷积满足交换律。

【例4.5】计算下面给出的两个长度为4的序列$x(n)$ 与$h(n)$的4点和8点循环卷积。

$$x(n)=\{x(0),x(1),x(2),x(3)\}=\{1,2,3,4\}$$

$$h(n)=\{h(0),h(1),h(2),h(3)\}=\{1,1,1,1\}$$

解：（1）写出$x(n)$ L=4点循环卷积矩阵：

$$\begin{bmatrix} x(0) & x(L-1) & x(L-2) & \cdots & x(1) \\ x(1) & x(0) & x(L-1) & \cdots & x(2) \\ x(2) & x(1) & x(0) & \cdots & x(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(L-1) & x(L-2) & x(L-3) & \cdots & x(0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

（2） 计算$x(n)$与$h(n)$ 的4点循环卷积

$$\begin{bmatrix} y_c(0) \\ y_c(1) \\ y_c(2) \\ y_c(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

55

（3）计算$x(n)$与$h(n)$的8点循环卷积

$$x(n) = \{\underline{1}, 2, 3, 4, 0, 0, 0, 0\}$$

$$h(n) = \{\underline{1}, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0\}$$

$$\begin{bmatrix} y_c(0) \\ y_c(1) \\ y_c(2) \\ y_c(3) \\ y_c(4) \\ y_c(5) \\ y_c(6) \\ y_c(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 10 \\ 9 \\ 7 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

（3）圆周卷积定理

有限长序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$，长度分别为N_1和N_2,

$x_1(n)$ 和 $x_2(n)$的N 点DFT分别为 $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$, N＝max[N_1，N_2]

①时域圆周卷积定理

则 $DFT\left[x_1(n)\otimes x_2(n)\right]_N = X_1(k)X_2(k)$

②频域圆周卷积定理

同理可以证明

$$DFT\left[x_1(n)x_2(n)\right]_N = \frac{1}{N}\left[X_1(k)\otimes X_2(k)\right]$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} X_1(l)X_2((k-l))R_N(k)$$

57

6 循环反转序列的DFT

$$x((-n))_N \cdot R_N(n) \longleftrightarrow X((-k))_N \cdot R_N(k)$$

7 Parseval定理

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

58

4.2.6 有限长序列的线性卷积与圆周卷积

循环卷积定理：$DFT[x_1(n) \otimes x_2(n)]_N = X_1(k)X_2(k)$

能用循环卷积定理计算线性卷积？

设x(n) 和h(n)都是有限长序列， 长度分别是M和N

线性卷积 → $y_l(n) = x(n) * h(n)$ 长度：$L_1 = M + N - 1$

DFT DFT

$X(k) \cdot H(k) = Y_c(k)$

长度：$L_2 = \max(M, N)$

$y_c(n) = x(n) \otimes h(n)$ ← 圆周卷积定理 IDFT

圆周卷积

$$y_c(n) \overset{?}{=} y_l(n)$$

一、线性卷积和循环卷积的关系

假设h(n)和x(n)都是有限长序列， 长度分别是N和M

线性卷积 N+M－1点

$$y_l(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) = \underline{\sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m)}$$

循环卷积

$$y_c(n) = h(n) \otimes x(n) = \left[\sum_{m=0}^{L-1} h(m)x((n-m))_L\right] R_L(n)$$

L点 $\geq \max[M, N]$

$$\because x((n-m))_L = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n-m+rL)$$

60

$$\therefore y_c(n)=\left[\sum_{m=0}^{L-1}h(m)\sum_{r=-\infty}^{\infty}x(n-m+rL)\right]R_L(n)$$

$$=\left[\sum_{m=0}^{N-1}h(m)\sum_{r=-\infty}^{\infty}x(n-m+rL)\right]R_L(n)$$

$$=\left[\sum_{r=-\infty}^{\infty}\underline{\sum_{m=0}^{N-1}h(m)x(n+rL-m)}\right]R_L(n)$$

$h(n+rL)*x(n+rL)$

$$=\underline{\left[\sum_{r=-\infty}^{\infty}y_l(n+rL)\right]}R_L(n)$$

$$=y_l((n))_L R_L(n)$$

61

$$y_c(n)=y_l((n))_L R_L(n)$$

$\boxed{y_c(n)=y_l(n)\text{以}L\text{为周期的周期延拓序列的主值序列}}$

如果：$L\geq N+M-1$　则　$y_c(n)=y_l(n)$

故：　只有当 $L\geq N+M-1$点 时,$y_l(n)$ 以L为周期进行周期延拓才无混叠现象，此时取其主值序列满足

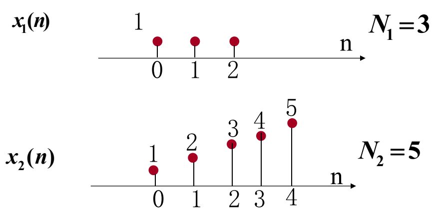
$$y_c(n)=y_l(n)$$

见Flash演示

循环卷积与线性卷积

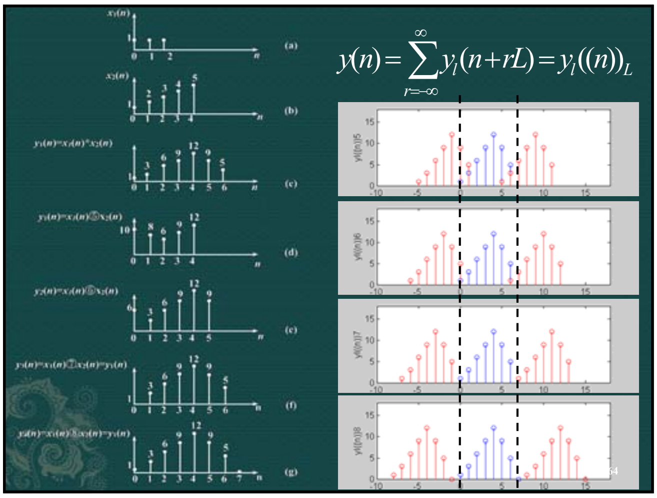
62

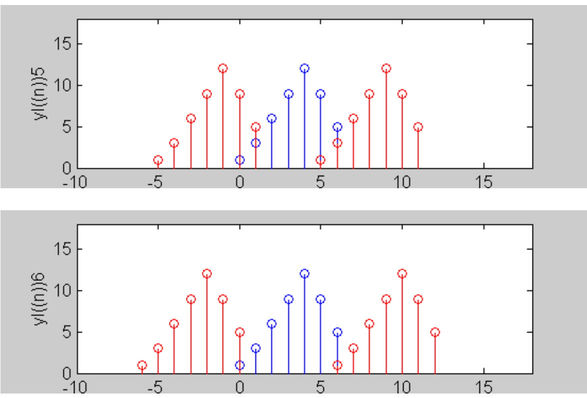
【例4.6】



求两序列的线性卷积和循环卷积。

63





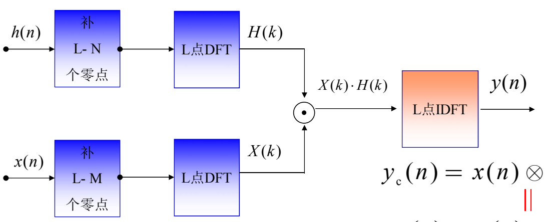
65

二、 利用DFT计算线性卷积（快速卷积）

序列很长时，直接作线性卷积运算速度慢，DFT有快速运算法FFT，可以加快卷积运算速度。

序列$h(n)$长度N、序列$x(n)$长度M，求他们的线性卷积 $y_l(n)$

$L\geq N+M-1$



$$y_c(n)=x(n)\otimes h(n)$$

$$\|$$

$$y_l(n)=x(n)*h(n)$$

三. 长序列的卷积计算

$x(n)$ → $h(n)$ → $y(n)$

N点　　M点　　N□ M

以L=M+N-1为长度计算快速卷积，对短序列要补很多零点，且长序列必须全部输入后才能进行计算，因此要求存贮容量大、运算时间长，并使处理延时很大，难以完成实时处理。

实时处理时，将长序列分段处理，分段方法有重叠相加法和重叠保留法两种。重点了解重叠相加法。

第十四次作业：

4.9；4.10

补充题1

（用矩阵相乘法计算循环卷积）

已知长度为*N*=10的两个有限长序列：

$$x_1(n)=\begin{cases}1 & 0\le n\le 4\\ 0 & 5\le n\le 9\end{cases}\qquad x_2(n)=\begin{cases}1, & 0\le n\le 4\\ -1, & 5\le n\le 9\end{cases}$$

做图表示$x_1(n)$、$x_2(n)$和$y(n)=x_1(n)\otimes x_2(n)$，循环卷积长度*L*=10。

第十四次作业：

补充题：2.

. 已知连续时间矩形脉冲信号为：$x_a(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<T\\ 0, & 其它\end{cases}$ 对其进行等间隔抽样，抽样频率为f_s，得到的离散时间信号为$x(n)=\begin{cases}1, & n=0,1,2,\dots,7\\ 0, & 其它\end{cases}$

（1）求$x_a(t)$的频谱$X(j\Omega)$；

（2）求$x(n)$的频谱$X(e^{j\omega})$；

（3）求$x(n)$的16点DFT，即$X(k)=DFT[x(n)]_{16}$；

（4）说明$X(e^{j\omega})$与$X(j\Omega)$、$X(k)$与$X(e^{j\omega})$的幅度特性有何关系？

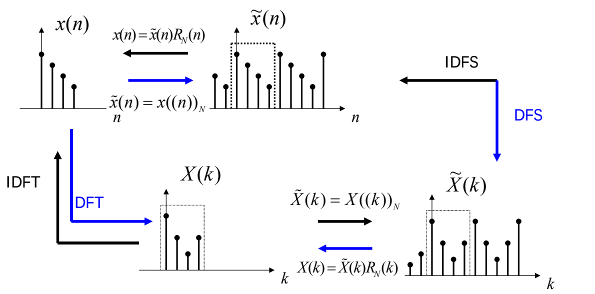
（5）说明由抽样离散信号$x(n)$能否完全恢复信号$x_a(t)$吗？为什么？

§4.3 频率域采样理论

4.3.0 引言

DFT 导出的图形解释

设$x(n)$是长度为*M*的有限长序列，$N\ge M$

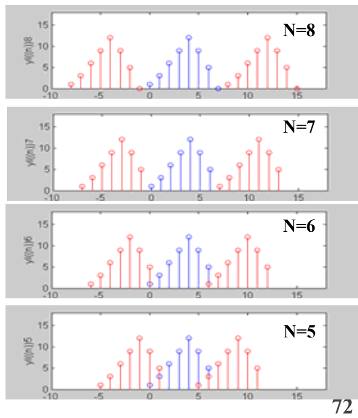


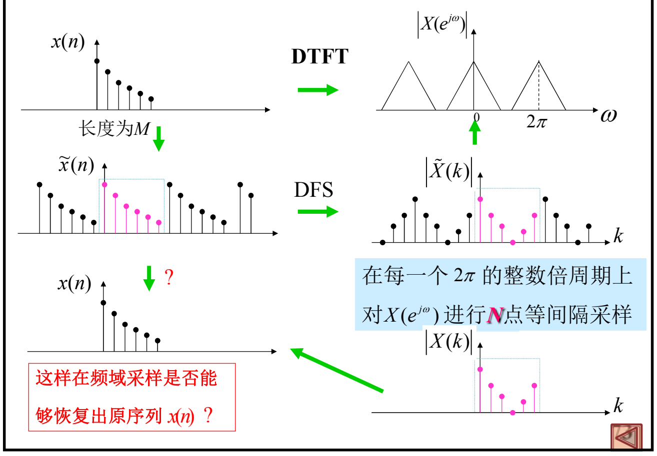
注意！！DFT只适用于有限长序列，$N\ge M$

DFT处理一定是要对$x(n)$进行周期化(周期为N)处理，若$x(n)$的长度M>N，变成周期序列后各周期必然混叠，造成信号失真。举例说明如右图：

$x(n)=yl(n)$，序列长度 M=7

$$\tilde{x}(n)=x((n))_N=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x(n+rN)$$





4. 3. 1 频率域采样定理

设任意序列 $x(n)$ 的长度为M，其DTFT为:

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$$

在每一个2π的整数倍周期上对 $X(e^{j\omega})$ 进行N点等间隔采样得：

$$\tilde{X}(k)=X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)W_N^{kn} \qquad (1)$$

其中 $-\infty<k<\infty$ 取主值序列后：$X(k)=\tilde{X}(k)R_N(k)$

令 $\tilde{x}_N(n)=IDFS[\tilde{X}(k)]$

$$\tilde{x}_N(n)\overset{?}{=}x((n))_N$$

74

$\tilde{x}_N(n)$与$x(n)$的关系是什么？ $\tilde{x}_N(n)\overset{?}{=}x((n))_N$

$$\tilde{x}_N(n)=IDFS[\tilde{X}(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)W_N^{-kn} \quad -\infty<n<\infty$$

将(1)代入 $$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)W_N^{km}\right]W_N^{-kn}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{(m-n)k}$$

正交性

$$\because \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{(m-n)k}=\begin{cases}1 & m=n+rN\\ 0 & m \text{ 其他}\end{cases}$$

$$=\sum_{r=-\infty}^{+\infty}x(n+rN)$$

$$\boxed{\tilde{x}_N(n)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x(n+rN)=x((n))_N}$$

75

$$\tilde{x}_N(n)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x(n+rN)=x((n))_N$$

由上式可知：如果有限长序列 $x(n)$ 的长度M ≤ N，则 $\tilde{x}_N(n)$的每一周期都可以是$x(n)$的原样重现；如果M > N，$x(n)$ 以N为周期进行延拓，将会出现混叠，从 $\tilde{x}_N(n)$ 无法不失真的取主值恢复出$x(n)$

频域采样定理: N≥ M

则只有当 $N\geq M$ 时，才能由X(k)恢复出$x(n)$，否则产生时域混叠现象。

因 $$x(n)=IDFT[X(k)]=\left[\sum_{r=-\infty}^{\infty}x(n+rN)\right]R_N(n)$$

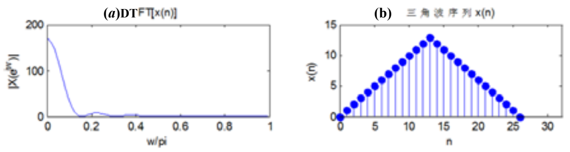
故：DFT的长度N≥信号的长度 M
为频率抽样（不失真）条件

76

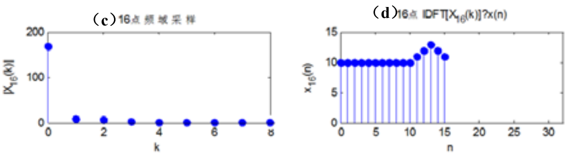
4. 3. 2 验证频域采样定理

【例4.7】 长度M=26的三角形序列$x(n)$如下图 (b)所示。

解：（1）$X(e^{j\omega})$ =DTFT[$x(n)$] 如下图 (a)



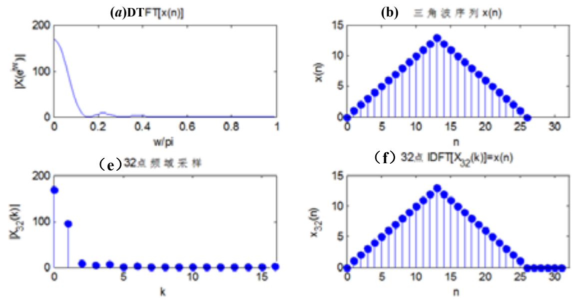
（2）对$X(e^{j\omega})$在频率区间［0，2π］上等间隔16点采样$X_{16}(k)$，$x_{16}(n)$=IDFT[$X_{16}(k)$]$_{16}$



$x(n)$的长度M=26，当频域采样点数N=16<M时，$x_{16}(n)\neq x(n)$；

77

（3）对$X(e^{j\omega})$在频率区间［0，2π］上等间隔32点采样$X_{32}(k)$，$x_{32}(n)$=IDFT[$X_{32}(k)$]$_{32}$



当采样点数N=32>M时，$x_{32}(n)$=IDFT［$X_{32}(k)$］=$x(n)$。

78

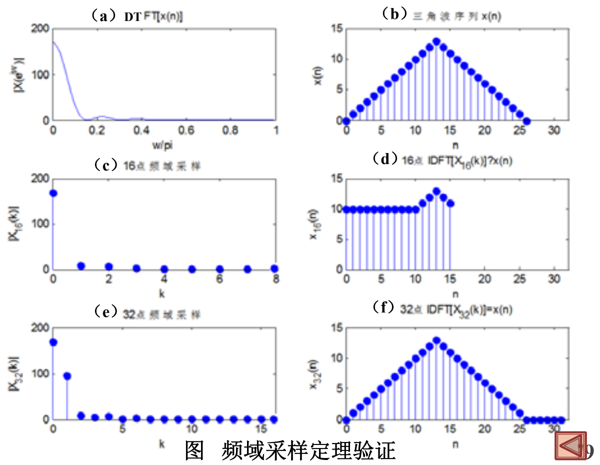


图　频域采样定理验证

79

4.3.3 内插函数

$$\begin{array}{ccc} X(z), X(e^{j\omega}) & \xrightarrow{\text{频域采样}} & X(k) \\ & \xleftarrow{\text{内插函数}} & \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ x(n) & & x(n) \end{array}$$

通过内插函数表示出 $X(z)$ 或 $X(e^{j\omega})$

80

$$X(k) \xrightarrow{\text{内插公式}} X(z)$$

设序列$x(n)$长度为M，它的N(N ≥M)点Z变换 $X(z)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}$

由于 $x(n)=IDFT[X(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left[\sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}\right] z^{-n}$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1} X(k) \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{-kn} z^{-n}$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1} X(k) \boxed{\frac{1}{N} \cdot \frac{1-z^{-N}}{1-W_N^{-k} z^{-1}}} \rightarrow \varphi_k(z)$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1} X(k) \varphi_k(z) \quad \text{内插公式}$$

其中

$$\varphi_k(z)=\frac{1}{N} \cdot \frac{1-z^{-N}}{1-W_N^{-k} z^{-1}}$$

内插函数

81

$$X(k) \xrightarrow{\text{内插公式}} X(e^{j\omega})$$

如果收敛域包含单位圆　把 $z=e^{j\omega}$代入 $\varphi_k(z)=\frac{1}{N} \cdot \frac{1-z^{-N}}{1-W_N^{-k} z^{-1}}$

$$\varphi_k(e^{j\omega})=\frac{1}{N} \frac{\sin \frac{N}{2}(\omega-\frac{2\pi}{N} k)}{\sin \frac{1}{2}(\omega-\frac{2\pi}{N} k)} e^{j\frac{\pi k}{N}(N-1)} e^{-j\frac{(N-1)}{2}\omega}=\varphi(\omega-\frac{2\pi}{N} k)$$

$$\boxed{X(e^{j\omega})=\sum_{k=0}^{N-1} X(k) \varphi(\omega-\frac{2\pi}{N} k)} \quad \text{内插公式}$$

其中 $\varphi(\omega)=\frac{1}{N} \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\frac{(N-1)\omega}{2}}$　内插函数

82

小结：

1. 内插函数是连续函数
2. 相应的系数：$X(k)$ 是离散采样值

83

§4.4 频率分辨率与DFT参数的选择

4.4.1 用DFT对连续信号进行谱分析

对于频谱很宽的信号 $\xrightarrow{\text{预滤波}}$ 使信号带宽小于折叠频率

⬇ 作用

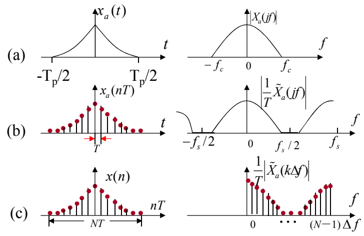
为了减少时域采样造成频谱混叠

对持续时间很长的信号 $\xrightarrow{\text{截取}}$ 把信号截短

⬇ 作用

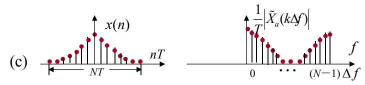
防止采样点数太多计算机无法存储和计算

所以，用DFT对连续信号进行谱分析必然是*近似*的。



用DFT计算连续信号频谱原理

连续信号的频谱特性，可以通过对连续时间信号采样，并进行DFT再乘以T的近似方法得到。



频域采样间隔为Δf

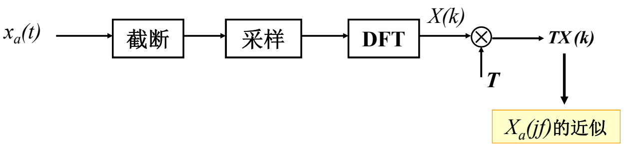
则有 $\Delta f = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{NT} = \frac{1}{T_p}$ $\quad \therefore f = k\Delta f = \frac{k}{NT}$

频谱分辨率

$\tilde{X}_a(k\Delta f) = TX(k) \qquad 0 \le k \le N-1$

$f = k\Delta f$

$$\tilde{X}_a(k\Delta f) = T\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = T \cdot DFT[x(n)] \quad 0 \le k \le N-1$$



用DFT对连续信号进行谱分析的框图

4.4.2 频率分辨率与DFT参数的选择

对连续信号谱分析关心的问题：

1) 谱分析范围

$[0, f_s]$ 或$[-f_s/2, f_s/2]$，受采样频率f_s限制；

2) 频率分辨率Δf，它可以从两个方面来定义。

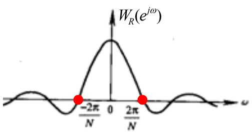
第一种定义是广义的：表征谱分析中能够分辨两个靠的很近的频谱分量的能力，也称作“频率分辨力”。

第二种定义是狭义的：专指采用DFT进行频谱分析的性能，即N点条件下，计算DFT所获得的最小频率间隔。

88

➢ **第一种定义**

对一个有限长序列，Δf由信号的分析长度决定，而实际中遇到的序列$x(n)$可能是无限长的，Δf是由截短序列的矩形窗的宽度决定的。下面举例说明频率分辨率与矩形窗宽度的关系：设余弦序列 $x(n)=\cos(\omega_0 n)$是无限长的序列，其频谱$X(e^{j\omega})$，如果用DFT对$x(n)$进行谱分析必须截短形成有限长序列：$x_N(n)=x(n).R_N(n)$，其频谱$X_N(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})*W_R(e^{j\omega})$



矩形窗谱的主瓣宽度

$$\Delta\omega_R = \frac{4\pi}{N}$$

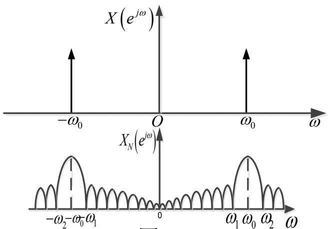


图4.3

89

截断后序列的频谱$X_N(e^{j\omega})$与原序列的频谱 $X(e^{j\omega})$ 产生差别

截断效应：

（1）谱泄漏：使原频谱中的单频谱线展宽，导致谱分辨率降低

（2）谱间干扰：在主谱线两边形成很多旁瓣，引起不同频率分量间的干扰，影响频谱的分辨率。

假定序列$x(n)=\cos(\omega_1 n)+\cos(\omega_2 n)$是由两个单一频率的余弦序列构成，频率分别为$\omega_1, \omega_2$,其中频率差为$\Delta\omega=\omega_2-\omega_1$
对$x(n)$进行N点截取后,其频谱：如下图4.4:

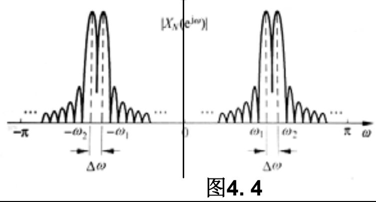


图4. 4

90

从图4.4中可以得到，如果$\Delta\omega=\omega_1-\omega_2$过小，两个主瓣将合二为一，此时 $\Delta\omega=\Delta\omega_R$ 无法分辨两个频率，为了能够分辨两个信号的主瓣，应该保证$\Delta\omega\ge\Delta\omega_R$，即：$|\omega_2-\omega_1|\ge\frac{4\pi}{N}$

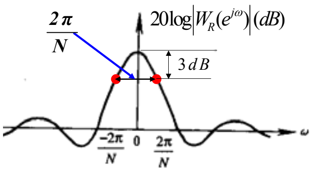
用模拟频率表示：$\boxed{\Delta f=|f_2-f_1|\ge\frac{2f_s}{N}}$

Δf 称为“物理分辨率”,即第一种广义的频率分辨率定义，它由序列的实际有效长度（实际截取的信号长度）所决定。

工程上定义的主瓣宽度：

$|W_R(e^{j\omega})|^2$ 降到0.5(3dB)时的频谱的宽度，此时矩形窗的宽度约为$2\pi/N$，对应的

频率分辨率：$\Delta f=\frac{f_s}{N}$



91

➢ **第二种定义**

用DFT进行频谱分析时，DFT的谱线间隔表示了一种频率分辨率的意义。

DFT的谱线间隔等于 $\frac{2\pi}{N_{DFT}}$

则等效的频率分辨率为：$\Delta f=\frac{f_s}{N_{DFT}}$

称 为“计算分辨率”，它与DFT计算的点数N_{DFT}有关。这是第二种狭义的频率分辨率定义。

当DFT的点数N_{DFT}大于序列点数M时，补零后可以提高计算分辨率，但不能提高物理分辨率！！

92

4.4.3 DFT参数选择的一般原则：

1）采样频率fs

一般根据采样定理选择 $f_s > 2f_c(2.5\sim3f_c)$

2）DFT点数N：

根据物理分辨率 Δf 确定信号的分析点数N:

$N > f_s/\triangle f$ ，由于DFT常采用FFT实现，N取2的整数幂

3）记录时间长度T_P：

上面两个参数确定后，确定模拟信号的记录时间长度T_P：

$T_P \ge 1/\triangle f = NT_s = N/f_s$

补零不能提高频率的物理分辨率，只能提高频率的计算分辨率！！

93

4.4.4 用DFT进行谱分析的误差

1)、混叠现象

采样频率fs必须满足采样定理，否则会发生混叠现象，

所以要对信号进行预滤波以免发生频谱混叠，滤除高于折叠频率的频率成分，这样必然在$f=f_s/2$附近产生较大误差，所以实际应用时通常取$f_s=(3\sim5)f_c$

94

2)、栅栏效应

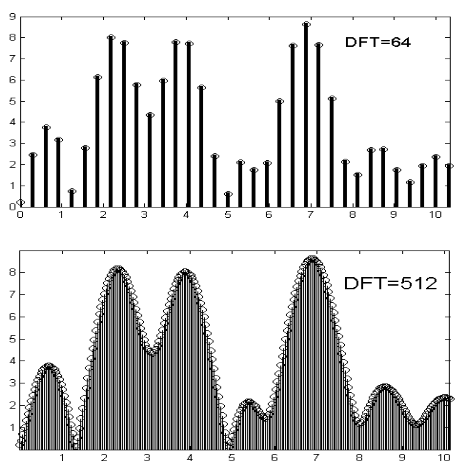
N点DFT是在频率区间[0, 2π]上对信号的频谱进行N点等间隔采样,而采样点之间的频谱函数是不知道的。就好像 从(N+1)个栅栏缝隙中观看信号的频谱情况，只能得到缝隙中的频谱函数值，所以称此现象为“栅栏效应”。

由于栅栏效应，有可能漏掉大的频谱分量。为了减小栅栏效应，可以采取在原序列尾部补零的方法（即增加DFT长度的方法）。

关于DFT补零处理的一个重要结论：

补零不能提高频谱有效分辨能力。

克服栅栏效应可以采用增加DFT的点数N



3)、截断效应

截断后序列的频谱 $Y(e^{j\omega})$与原序列的频谱 $X(e^{j\omega})$ 产生差别

截断效应:

(1)谱泄漏:使原频谱中的单频谱线展宽,导致谱分辨率降低

(2)谱间干扰:在主谱线两边形成很多旁瓣,引起不同频率分量间的干扰,影响频谱的分辨率。

解决途径:

1、加大截取长度Tp(记录长度)可以提高谱分辨率

2、选择合适的窗函数$R_N(n)$可以降低谱间干扰

3、降低频谱混叠失真要提高fs,在抽样前加抗混叠滤波器(预滤波)。

【例4.8】 对实信号进行谱分析,要求谱分辨率△f ≤10 Hz,信号最高频率fc=2.5 kHz,试确定最小记录时间$T_{P\min}$,最大的采样间隔$T_{\max}$,最少的采样点数$N_{\min}$。如果f_c不变,要求谱分辨率增加一倍,最少的采样点数和最小的记录时间是多少?

解:$\because T_P \ge \frac{1}{\Delta f} = \frac{1}{10} = 0.1s$

因此$T_{P\min}$=0.1 s, 因为要求fs≥2fc,

$$\therefore T_{\max} = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{2f_c} = \frac{1}{2\times 2500} = 0.2\times 10^{-3}s$$

$$N_{\min} = \frac{2f_c}{\Delta f} = \frac{2\times 2500}{10} = 500$$

为使频率分辨率提高一倍, △f =5 Hz, 要求

$$N_{\min} = \frac{2\times 2500}{5} = 1000$$

$$T_{p\min} = \frac{1}{5} = 0.2s$$

如果用FFT计算时,选用N=1024点

第4章小结

- DFT定义(导出过程),DFT与ZT、FT的关系,DFT的物理意义
- DFT的隐含周期性
- DFT的主要性质

  循环移位、循环卷积、对称性、循环卷积定理
- 频域采样定理: N≥M N:DFT的长度; M:时域序列的长度
- 用DFT计算线性卷积: 1) $y_c=y_l$条件; 2)如何补零; 3)框图
- DFT的频率分辨率与参数选择:

  1)谱分析范围;2)两种频率分辨率概念; 3)DFT参数确定

  DFT参数的选择及fs、Tp、fc、 △f、N之间的关系 。

第十五次作业:

4.11

补充

设信号x(n)={1,2,3,4},通过系统h(n)={4,3,2,1},n=0,1,2,3;

(1)求系统的输出y(n)=x(n)*h(n);

(2)试用循环卷积计算y(n);

(3)简述通过DFT来计算y(n)的思路。