

## 第7章 有限冲激响应 (FIR) 数字滤波器的设计

主要介绍FIR数字滤波器的线性相位特性和设计方法

### § 7.0 引言

#### § 7.1 FIR数字滤波器的线性相位特性

#### § 7.2 窗函数设计法

#### § 7.5 IIR数字滤波器与FIR数字滤波器比较

#### 本章小结

### § 7.0 引言

#### ▲ IIR数字滤波器:

- 1、优点在于可以利用AF设计的现成成果,较简单、方便
- 2、但它一般不具有线性相位
- 3、 $H(z)$ 为有理分式

#### ▲ FIR数字滤波器:

- 1、容易获得严格的**线性相位**, (同时可以有任意的幅度特性)
- 2、单位脉冲响应 $h(n)$ 有限长, 滤波器一定是**稳定的** (全零点型)
- 3、总是可实现的 (任何非因果有限长序列, 经延时可成**因果性**)
- 4、进行滤波时, 可用FFT高效运算
- 5、幅度特性较差, 滤波器的 $H(z)$ 阶次较高。

#### ▲ FIR数字滤波器的设计方法有:

- 1、**直接近似法——窗函数法**
- 2、频率抽样法;
- 3、等波纹逼近法

若FIR滤波器的单位冲激响应为N点有限长序列

$$h(n) \quad n=0,1,\dots,N-1$$

它的系统函数可以表示为:

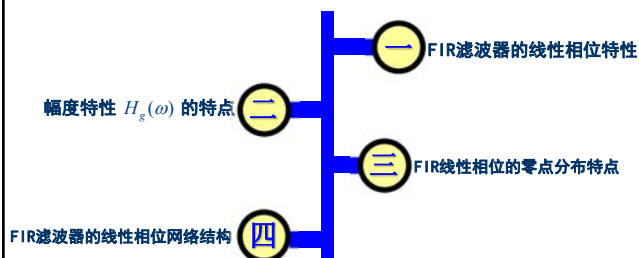
$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

#### ▲ FIR数字滤波器的设计任务:

- (1)要选择有限长度的 $h(n)$ ,使得频率响应 $H(e^{j\omega})$ 满足滤波器技术指标要求;
- (2)保证系统函数 $H(z)$ 具有线性相位。



### § 7.1 FIR数字滤波器的线性相位特性



#### 一、FIR滤波器的线性相位特性

##### 1、线性相位

对于长度为N的实序列 $h(n)$ 所表示的FIR数字滤波器, 频率响应:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = H_g(\omega)e^{j\theta(\omega)} = \pm |H(e^{j\omega})| e^{j\theta(\omega)}$$

$$H_g(\omega) \text{ ————— 幅度特性 } H_g(\omega) = \pm |H(e^{j\omega})|$$

$$\theta(\omega) \text{ ————— 相位特性}$$

$$\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} \text{ ————— 群延时}$$

如果  $\theta(\omega)$  是  $\omega$  线性函数, 有两种线性相位:

$$\theta(\omega) = -\tau\omega$$

第一类线性相位

$$\theta(\omega) = \theta_0 - \tau\omega$$

第二类线性相位

$$\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} = -\tau$$

群 延 时

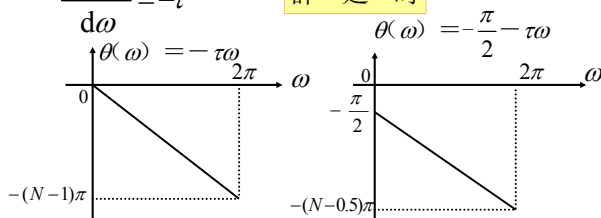


图7.1 线性相位特性

由于滤波器  $|H(e^{j\omega})|$  和  $\theta(\omega)$  都是  $\omega$  的函数,

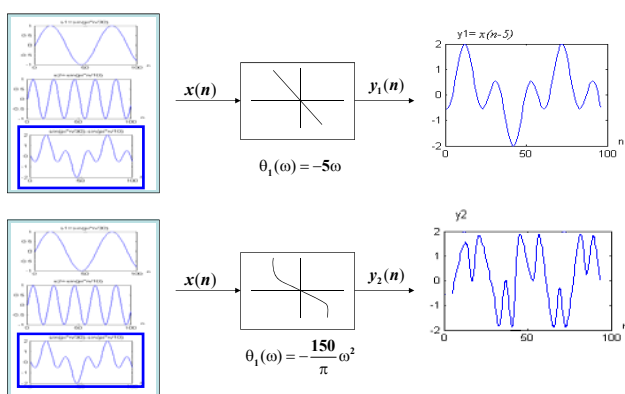
当输入信号的不同频率分量通过滤波器时, 所产生的相位延迟也不同, 从而有可能产生**相位失真**。

确保输出信号不产生相位失真的唯一方法是, 使不同输入频率分量的信号通过滤波器时都有**相同的时间延迟**, 即

$$\tau = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} = \text{常数}$$

这样, 要求滤波器具有**线性相位**。

例、两个正弦信号的合成信号经过两个不同相位频率特性的滤波器



## 2、具有线性相位的充分必要条件

第一类线性相位

$$h(n) = h(N-n-1) \Rightarrow \theta(\omega) = -\tau\omega$$

第二类线性相位

$$h(n) = -h(N-n-1) \Rightarrow \theta(\omega) = \theta_0 - \tau\omega$$

群 延 时  $\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} = -\tau$  群延时都为常数

证明: 按照第一类线性相位的条件

$$\text{将 } h(n) = h(N-n-1) \text{ 代入 } H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

$$\text{得: } H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(N-n-1)z^{-n} \quad \text{令 } m = N-n-1$$

$$H(z) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)z^{-(N-m-1)} = z^{-(N-1)} \sum_{m=0}^{N-1} h(m)z^m = z^{-(N-1)} H(z^{-1})$$

$$\text{如果 } H(z) = \frac{1}{2}[H(z) + H(z)] = \frac{1}{2}[H(z) + z^{-(N-1)} H(z^{-1})]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) [z^{-n} + z^{-(N-1)} z^n]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \left[ z^{-\frac{(N-1)}{2}} \cdot z^{\frac{(N-1)}{2}} \cdot z^{-n} + z^{-\frac{(N-1)}{2}} \cdot z^{\frac{(N-1)}{2}} \cdot z^n \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cdot z^{-\frac{(N-1)}{2}} \left[ z^{\frac{(N-1)}{2}} z^{-n} + z^{\frac{(N-1)}{2}} z^n \right]$$

$$= z^{-\frac{(N-1)}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cdot \frac{1}{2} \left[ z^{\left(\frac{(N-1)}{2}-n\right)} + z^{-\left(\frac{(N-1)}{2}-n\right)} \right]$$

$$\text{得: } H(z) = z^{-\frac{(N-1)}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \left[ \frac{1}{2} \left( z^{\left(\frac{(N-1)}{2}-n\right)} + z^{-\left(\frac{(N-1)}{2}-n\right)} \right) \right]$$

将 $z=e^{j\omega}$ 代入上式, 得到其频率响应为:

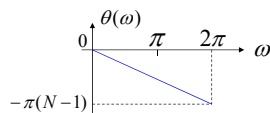
$$H(e^{j\omega}) = e^{-j(\frac{N-1}{2})\omega} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos\left[\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\omega\right] = H_g(\omega) e^{j\theta(\omega)}$$

**幅度特性:**

$$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos\left[\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\omega\right]$$

**相位特性:**

$$\theta(\omega) = -\frac{1}{2}(N-1)\omega = -\pi\omega$$



**群延时:**  $\tau = \frac{1}{2}(N-1)$

滤波器有  $\tau = \frac{1}{2}(N-1)$  个采样间隔的延时

按照第二类线性相位的条件同样可以证明:

**同理:**

$$H(z) = z^{-\frac{(N-1)}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \left[ \frac{1}{2} \left( z^{-n+\frac{N-1}{2}} - z^{n-\frac{N-1}{2}} \right) \right]$$

将 $z=e^{j\omega}$ 代入上式, 得到其频率响应为:

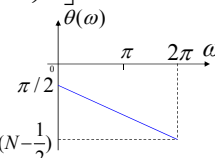
$$H(e^{j\omega}) = e^{-j(\frac{N-1}{2})\omega} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin\left[\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\omega\right] = H_g(\omega) e^{j\theta(\omega)}$$

**幅度特性:**

$$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin\left[\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\omega\right]$$

**相位特性:**

$$\theta(\omega) = -\frac{1}{2}(N-1)\omega - \frac{\pi}{2}$$



**群延时:**  $\tau = (N-1)/2$ , 称为90°移相器证毕。

## 二、幅度特性 $H_g(\omega)$ 的特点 (根据N分以下几种情况)

(1)、 $h(n)$  偶对称  $h(n)=h(N-n-1)$

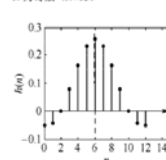
**N为奇数**

**幅度特性:**  $H_g(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos\left[\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\omega\right]$

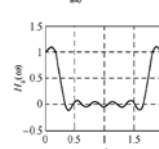
由于 $h(n)$ 对 $(N-1)/2$ 偶对称, 余弦项也对 $(N-1)/2$ 偶对称, 以 $(N-1)/2$ 为中心, 把两两相等的项进行合并, 由于 $N$ 是奇数, 故余下中间项 $n=(N-1)/2$ 。这样幅度函数表示为

$$H_g(\omega) = h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \cos[\omega(n - \frac{N-1}{2})]$$

$N$ 为奇数 ( $N=13$ )



$$H_g(\omega) = h(\tau) + \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \cos[\omega(n - \tau)]$$



$$H_g(\omega) = h(\tau) + \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \cos[\omega(n - \tau)]$$

$$M = \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor \text{ 是不大于 } \frac{N-1}{2} \text{ 的整数}$$

$\because N$ 为奇数;  $\therefore \cos[\omega(n - \tau)]$ 关于 $0, \pi, 2\pi$ 三点偶对称

$\therefore H_g(\omega)$ 对 $\omega = 0, \pi, 2\pi$ 也是偶对称的, 可以实现设计任何关于 $\omega = 0, \pi, 2\pi$ 偶对称频率特性的滤波器。

(低通、高通、带通、带阻) 的滤波器。

**N为偶数**

$$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^{N/2-1} 2h(n) \cos\left[\omega\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right]$$

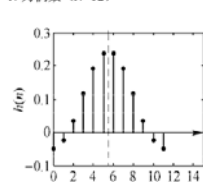
$H_g(\omega)$ 对 $\omega = \pi$ 是奇对称的

且由于 $\omega = \pi$ 时,

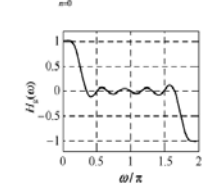
$$\begin{aligned} \cos\left[\omega\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right] &= \cos\left(\pi\left(n - \frac{N}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\sin\left(\pi\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right) = 0 \end{aligned}$$

因此 $H_g(\pi) = 0$ , 这种情况不能用于设计 $\omega = \pi$ 时,  $H_g(\omega) \neq 0$ 的滤波器, 如高通、带阻滤波器。

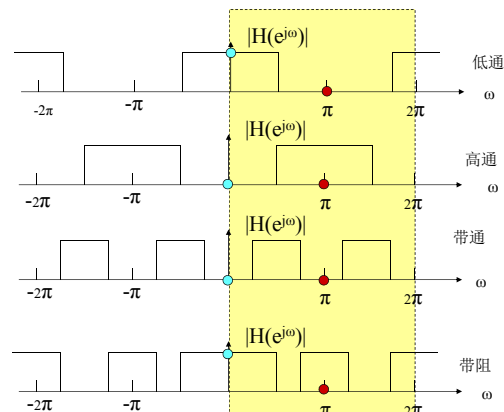
$N$ 为偶数 ( $N=12$ )



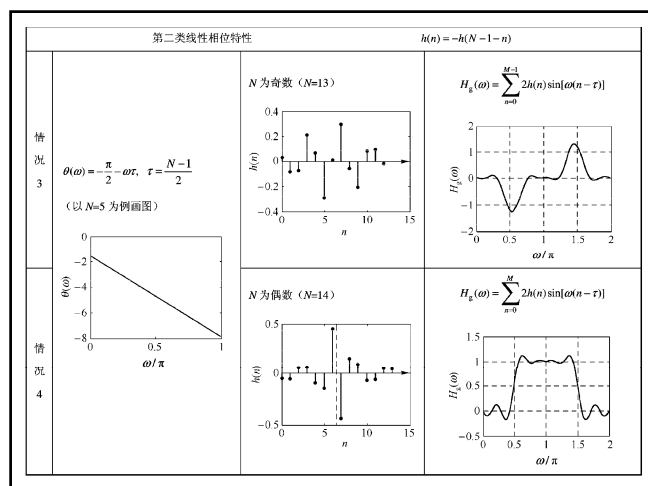
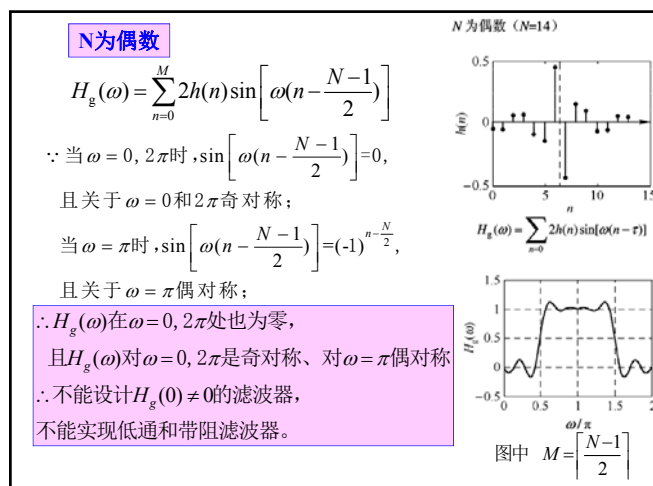
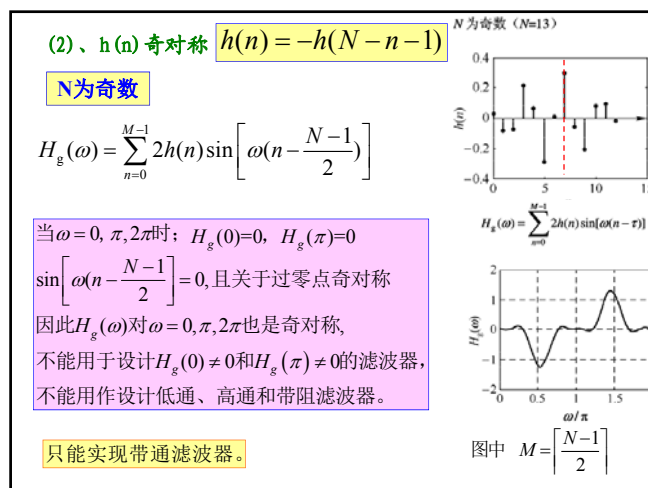
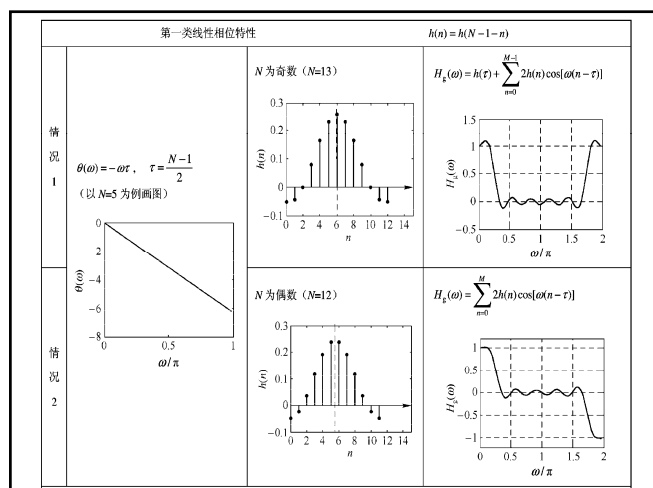
$$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \cos[\omega(n - \tau)]$$



图中  $M = \frac{N-1}{2}$



理想低通、高通、带通、带阻滤波器幅度特性



### 三、FIR线性相位的零点分布特点

1. 一般情况: 四个零点为一组

对线性相位FIR滤波器, 有:

$$h(n) = \pm h(N-1-n)$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$H(z) = \pm z^{-(N-1)} H\left(\frac{1}{z}\right)$$

若  $H(z_1) = 0$  则  $H\left(\frac{1}{z_1}\right) = 0$

所以, 若  $z_1$  是  $H(z)$  的零点, 则  $1/z_1$  也是  $H(z)$  的零点。

●  $\therefore h(n)$  实序列 有:

$$h(n) = h^*(n)$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$H(z) = H^*(z^*)$$

若  $H(z_1) = 0$  则  $H^*(z_1^*) = 0 = H(z_1^*)$

所以, 若  $z_1$  是  $H(z)$  的零点, 则  $z_1^*$  也是  $H(z)$  的零点。

● 对线性相位FIR滤波器, 有:

$$H(z) = H^*(z^*) = \left[ \pm z^{-(N-1)} H\left(\frac{1}{z}\right) \right]^* \quad \text{若 } H(z_1) = 0 \text{ 则 } H^*\left(\frac{1}{z_1}\right) = 0$$

所以, 若  $z_1$  是  $H(z)$  的零点, 则  $1/z_1^*$  也是  $H(z)$  的零点。

一般情况下，对于线性相位的FIR滤波器零点分布的特点是：**互为倒数的共轭对**，确定其中一个，另外三个零点也就确定。

4个零点（**镜像、共轭**）： $z_1, \frac{1}{z_1^*}, z_1^*, \frac{1}{z_1}$

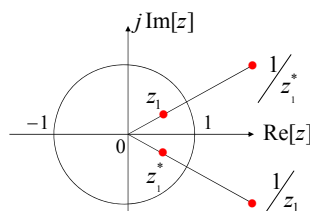


图7.2 线性相位FIR数字滤波器零点分布图

**选择题：**

若 $1+i$ 是具有线性相位FIR滤波器的一个零点，则下列选项中（D）不为其零点。

- A.  $1-i$     C.  $\frac{1}{2}(1+i)$   
B.  $\frac{1}{2}(1-i)$     D.  $1-\frac{1}{2}i$

#### 四、FIR滤波器的线性相位网络结构

$h(n) = \pm h(N-n-1)$  则该系统具有线性相位  
设N为偶数，则有

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N/2-1} h(n)z^{-n} + \sum_{n=N/2}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

令 $m=N-n-1$ ，则有：

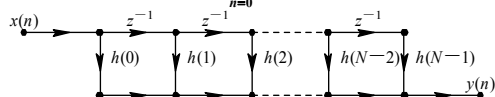
$$H(z) = \sum_{n=0}^{N/2-1} h(n)z^{-n} + \sum_{m=0}^{N/2-1} h(N-m-1)z^{-(N-m-1)}$$

$$\therefore H(z) = \sum_{n=0}^{N/2-1} h(n) [z^{-n} \pm z^{-(N-n-1)}]$$

N为奇数时，则将中间项  $h(\frac{N-1}{2})$  单独列出，

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n) [z^{-n} \pm z^{-(N-n-1)}] + h(\frac{N-1}{2}) z^{-\frac{N-1}{2}}$$

对于FIR直接型结构， $H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$  图中需要N个乘法器！



对于线性相位的FIR滤波器

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) [z^{-n} \pm z^{-(N-n-1)}] \quad N \text{ 为偶数}$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) [z^{-n} \pm z^{-(N-n-1)}] + h(\frac{N-1}{2}) z^{-\frac{N-1}{2}} \quad N \text{ 为奇数}$$

N为偶数时，仅需要N/2次乘法，N为奇数时需要(N+1)/2个乘法器，节约近一半。

$$N \text{ 为偶数: } H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) [z^{-n} \pm z^{-(N-n-1)}]$$

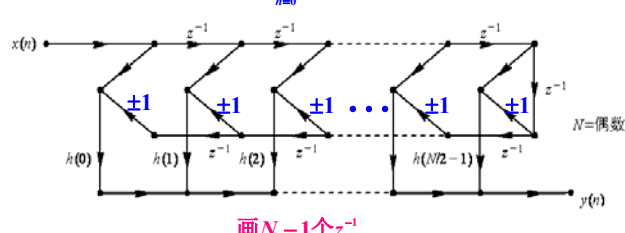
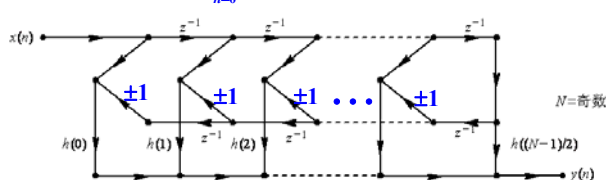


图7.3 N为偶数时线性相位网络结构图

（取“+”第一类线性相位，取“-”第二类线性相位）

$$N \text{ 为奇数: } H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n) [z^{-n} \pm z^{-(N-n-1)}] + h(\frac{N-1}{2}) z^{-\frac{N-1}{2}}$$



画N-1个 $z^{-1}$

图7.2 N为奇数时线性相位网络结构图

（取“+”第一类线性相位，取“-”第二类线性相位）

例. 已知FIR滤波器的系统函数为

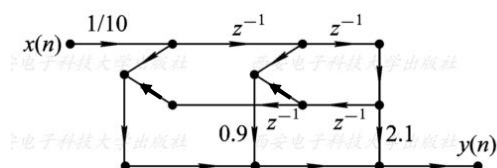
$$H(z) = \frac{1}{10} (1 + 0.9z^{-1} + 2.1z^{-2} + 0.9z^{-3} + z^{-4})$$

试画出该滤波器的线性相位结构图。

$$\text{解: } H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = 0.1 + 0.09z^{-1} + 0.21z^{-2} + 0.09z^{-3} + 0.1z^{-4}$$

$$\therefore N = 5, h(n) = h(N-n-1)$$

$\therefore$  第一类线性相位



## 第二十一一次作业

第七章:

7.1 (试画出他们的线性相位型网络结构图);  
7.2

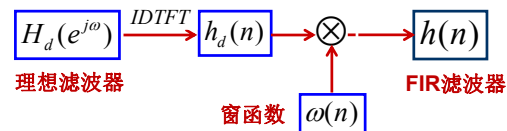
补充题:

填空题:

已知FIR滤波器  $H(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + az^{-3} + z^{-4}$   
具有线性相位, 则  $a = \underline{\quad}$ , 其相位特性为  $\theta(\omega) = \underline{\quad}$ 。

## § 7.2 窗函数设计法

窗函数设计法, 它的优点是设计思路简单, 性能只要能满足常用选频滤波器的要求即可。窗函数设计法的基本思路是:



其中的窗函数在很大程度上决定了FIR滤波器的性能指标, 因此称作“窗函数设计法”。

### 一、窗函数设计法原理

设理想滤波器的频率响应:  $H_d(e^{j\omega})$

寻找一个频率响应函数:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} \xrightarrow{\text{去逼近}} H_d(e^{j\omega})$$

逼近方法有三种:

窗函数设计法 (时域逼近)

频率采样法 (频域逼近)

最优化设计 (等波纹逼近)

理想滤波器:

设希望逼近理想滤波器频率响应函数为  $H_d(e^{j\omega})$

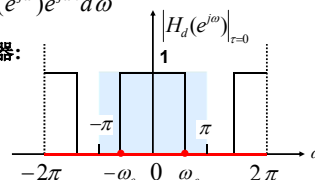
$h_d(n)$  是与其对应的单位脉冲响应:

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n)e^{-j\omega n}$$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

如, 线性相位理想低通滤波器:

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau} & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$



设计思想:

如果由已知的  $H_d(e^{j\omega})$  求出  $h_d(n)$ , 经过z变换可得到理想滤波器的系统函数  $H_d(z)$ 。

设  $\tau=0$

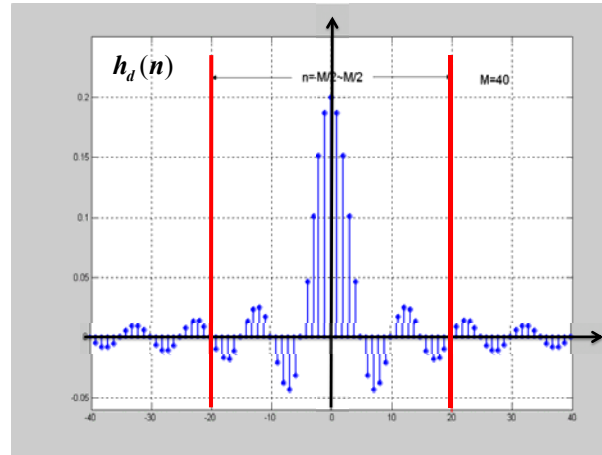
$$\begin{aligned} h_d(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} \quad n \in (-\infty, +\infty) \end{aligned}$$

若  $\tau \neq 0$ ,

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega(n-\tau)} d\omega = \frac{\sin[\omega_c(n-\tau)]}{\pi(n-\tau)} \quad n \in (-\infty, +\infty)$$

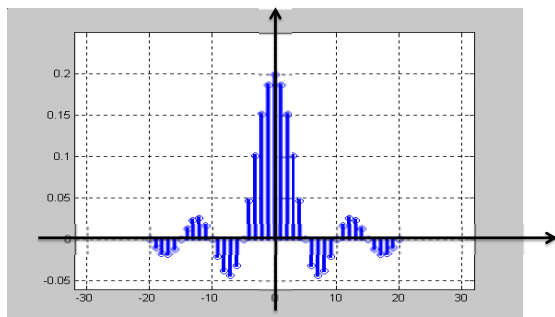
这里  $h_d(n)$  是无限长序列, 它不满足FIR滤波器的要求:

有限长, 实序列, 因果, 线性相位。



① 对称截短  $h_d(n)$  使其成为对称有限长序列:

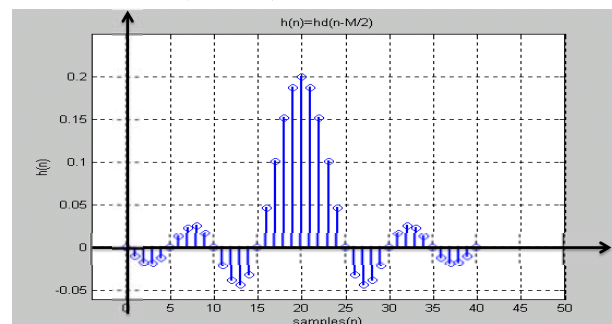
$$h_d(-\frac{M}{2}), h_d(-\frac{M}{2}+1), \dots, h_d(0), \dots, h_d(\frac{M}{2}-1), h_d(\frac{M}{2})$$



② 移位使其变成因果序列

$$h(n) = h_d(n - \frac{M}{2})$$

$$= \frac{\sin[\omega_c(n - M/2)]}{\pi(n - M/2)} \quad n = 0, 1, \dots, M$$



③ 截短移位后的序列具有线性相位

$h(n)$  是以  $M/2$  为对称的有限长序列, 令  $N=M+1$ , 则  $h(n)$  以  $(N-1)/2$  为对称的有限长序列,  $h(n)=h(N-1-n)$ , 由 FIR 滤波器的线性相位特性可知

$h(n)$  的线性相位函数:  $\theta(\omega) = -\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega = -\frac{M}{2}\omega$

设计过程:

$$\text{若设 } \tau = \frac{M}{2} \quad H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau} & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega n} e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{\sin[\omega_c(n-\tau)]}{\pi(n-\tau)} = \frac{\sin[\omega_c(n-M/2)]}{\pi(n-M/2)}$$

$$h(n) = h_d(n) R_N(n)$$

$$N = M + 1$$

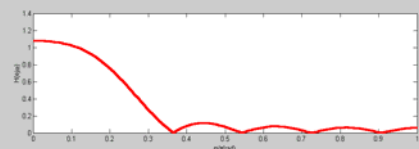
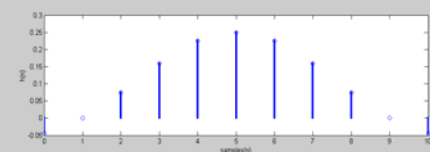
即可设计出因果的具有线性相位的低通滤波器

$$\text{例 } H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\frac{M}{2}\omega} & |\omega| \leq 0.25\pi \\ 0 & 0.25\pi < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad h_d(n) = \frac{\sin[0.25\pi(n-M/2)]}{\pi(n-M/2)}$$

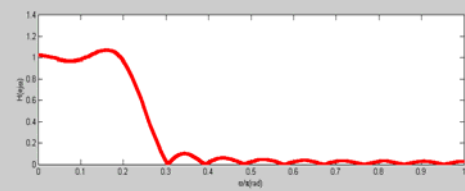
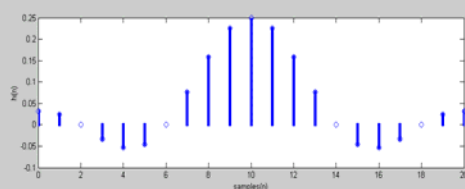
$$h(n) = h_d(n) R_N(n)$$

$$N = M + 1$$

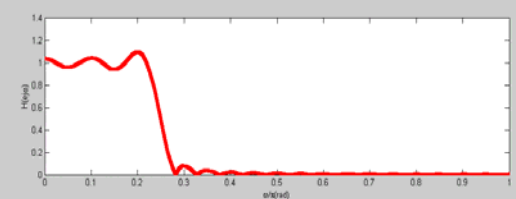
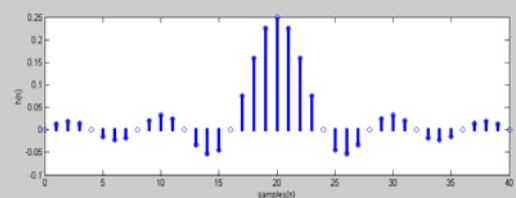
$$M=10$$

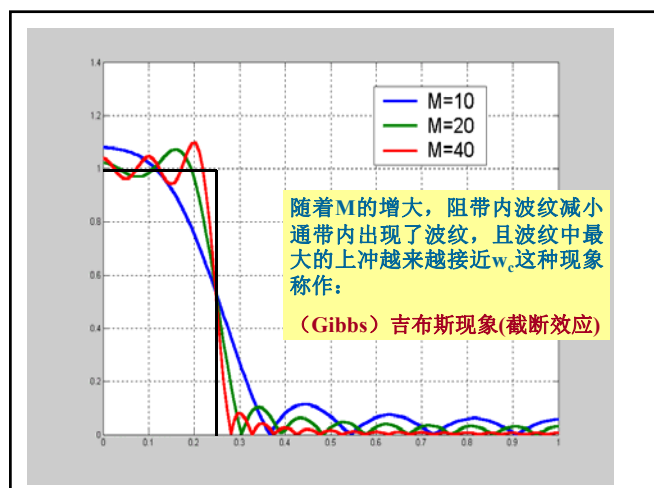


$$M=20$$



$$M=40$$





## 二、截断效应的影响

前面窗函数法设计滤波器的过程可以描述为:

$$h(n) = h_d(n) R_N(n)$$

$$H(e^{j\omega}) = H_d(e^{j\omega}) * W_R(e^{j\omega})$$

$$W_R(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} R_N(n) e^{-j\omega n} = W_{Rg}(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

其中

$$W_{Rg}(\omega) = \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}}, \quad \varphi(\omega) = -\tau\omega = -\frac{N-1}{2}\omega$$

$$H_d(e^{j\omega}) = H_{dg}(\omega) e^{-j\omega\tau}$$

理想低通滤波器的幅度特性和相位特性为

$$H_{dg}(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}, \quad \varphi(\omega) = -\tau\omega$$

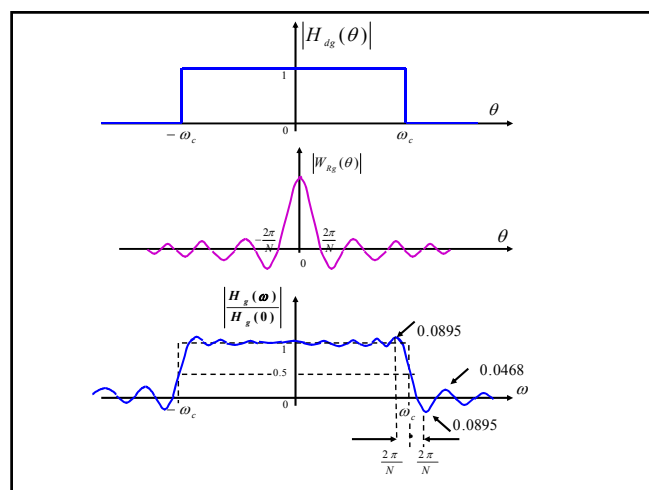
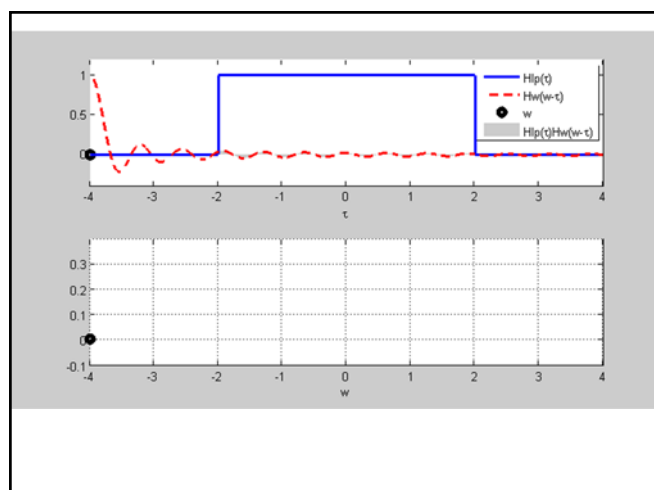
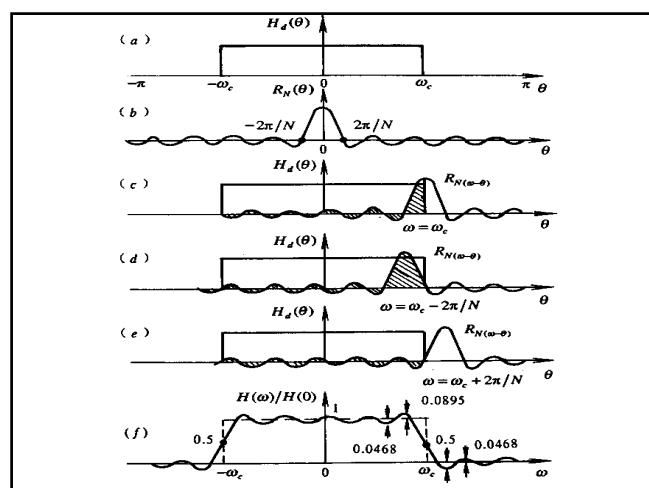
$$\therefore H(e^{j\omega}) = H_d(e^{j\omega}) * W_R(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta}) W_R(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{dg}(\theta) e^{-j\theta\tau} W_{Rg}(\omega-\theta) e^{-j(\omega-\theta)\tau} d\theta$$

$$= e^{-j\omega\tau} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{dg}(\theta) W_{Rg}(\omega-\theta) d\theta$$

$$= H_g(\omega) e^{-j\omega\tau}$$

$$H_g(\omega) = H_{dg}(\omega) * W_{Rg}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{dg}(\theta) W_{Rg}(\omega-\theta) d\theta$$





由于加了矩形窗函数(截断),将对理想特性产生以下3点影响:

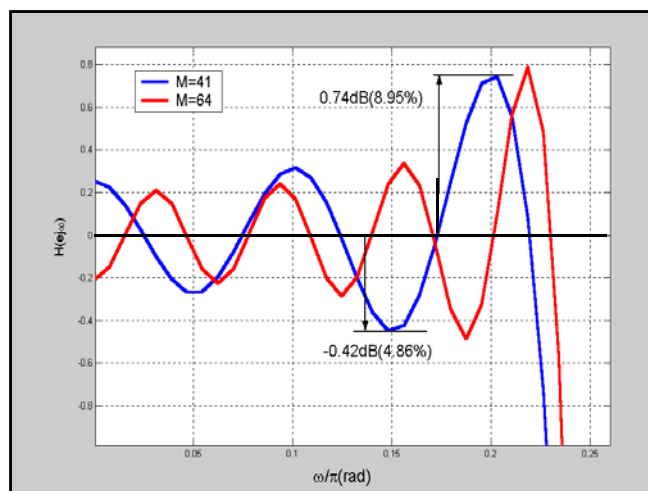
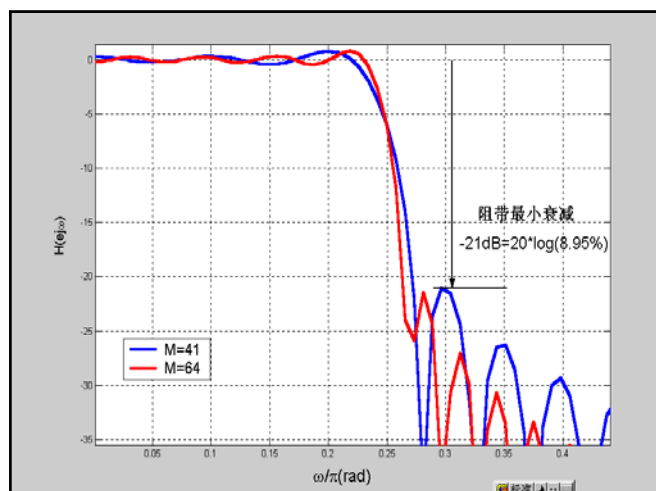
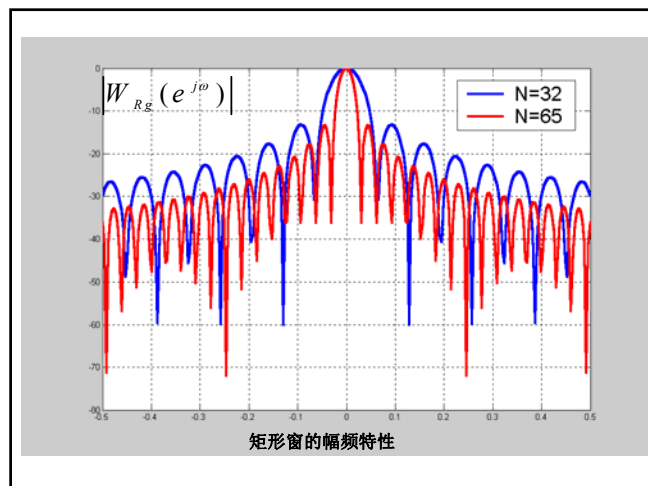
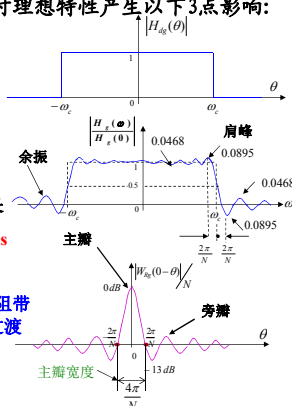
- ① 频带边界形成过渡区,宽度近似为  $\frac{4\pi}{N}$  (取决于窗的主瓣宽度)
- ② 过渡区两边产生肩峰和余振 (取决于窗的主瓣和旁瓣)
- ③ 通带起伏,最大约8.95%,最小约4.86%,阻带最小衰减约-21dB;

这样,用有限长序列  $h(n)$  代替无限长的  $h_d(n)$ ,表现在频域就是通常所说的Gibbs

效应(截断效应)。

**Gibbs效应:** 由于加窗截断引起了通带和阻带内的波动,使阻带的衰减性变差,引入过渡带。

可见,加窗后偏离了理想幅频特性  $H_d(\omega)$



**增加N:** 可缩小主瓣宽度,使过渡区变窄;却不能改变旁瓣振幅,矩形窗最大肩峰总是8.95%,所以**并不能有效减少Gibbs效应**。

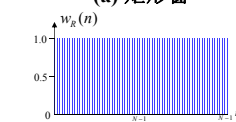
所以,为减少带内波动以及加大阻带的衰减只能从窗函数上找解决的办法

为此,寻找窗函数来减少Gibbs效应:

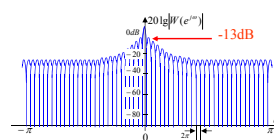
- ① 尽量窄的主瓣宽度(将能量尽可能地集中在主瓣内)
- ② 力求尽量低矮的旁瓣高度(在  $\omega$  趋近于  $\pi$  时,能量迅速趋于零)

### 三、各种窗函数

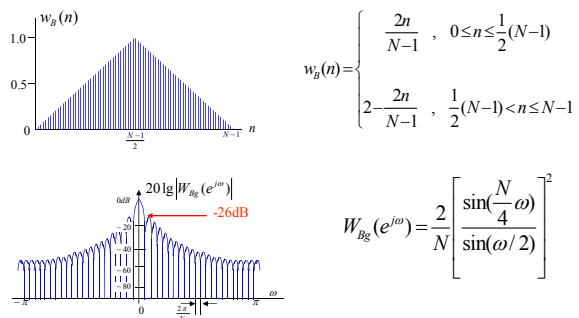
#### (a) 矩形窗



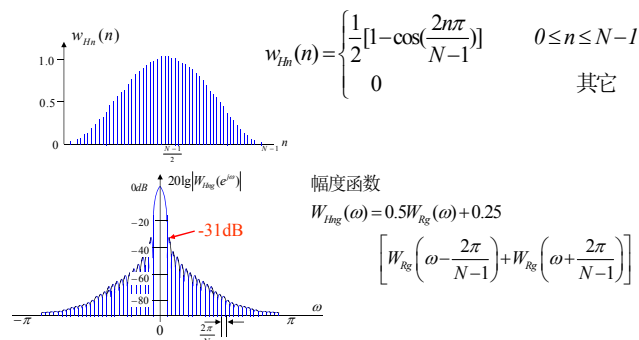
$$w_R(n) = R_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$



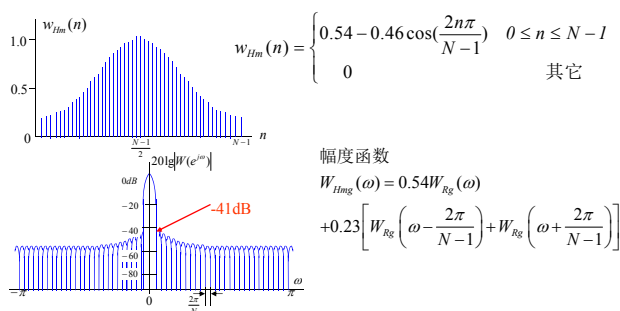
$$W_{Rg}(e^{j\omega}) = \frac{\sin(\omega \frac{N}{2})}{\sin(\omega)}$$

(b) 三角形窗(Bartlett)  
巴特列特窗

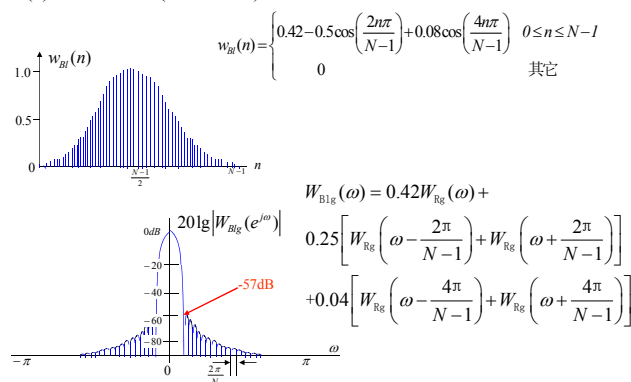
(c) 汉宁窗(Hanning)---升余弦窗



(d) 哈明窗(Hamming)-----改进的升余弦窗



(e) 布莱克曼窗(Blackman)



(f) 凯塞-贝塞尔窗(Kaiser-Bessel)

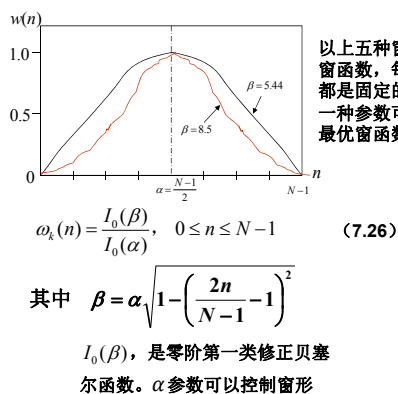


表7.2 窗函数的性能表

窗函数	旁瓣峰值 (dB)	过渡带宽 (主瓣宽)	阻带最小衰减 (dB)
(a) 矩形窗	-13	$4\pi/N$	-21
(b) 三角形窗	-25	$8\pi/N$	-25
(c) 汉宁窗	-31	$8\pi/N$	-44
(d) 海明窗	-41	$8\pi/N$	-53
(e) 布莱克曼窗	-57	$12\pi/N$	-74
(f) 凯塞窗 ( $\beta = 7.865$ )	-57	$10\pi/N$	-80

对加窗后的Filter而言

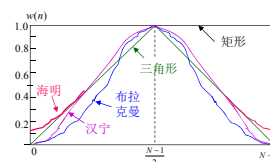
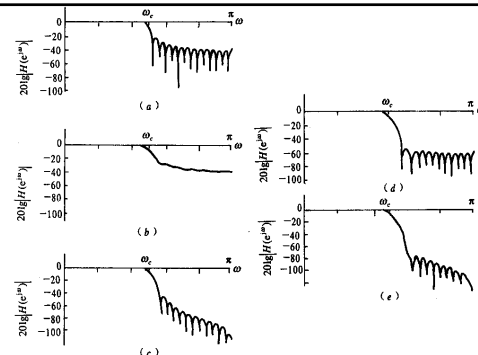


表 7.2 窗函数性能表

窗函数	主瓣过渡区宽度 $\omega$	旁瓣峰值幅度 $\alpha_s$ (分贝)	旁瓣下降速率 $\alpha$ (dB/倍频程)	最小阻带衰减 $\alpha_s$ (分贝)
矩形窗	$4\pi/N = 1 \times 4\pi/N$	-13	-6	-21
三角窗	$8\pi/N = 2 \times 4\pi/N$	-25	-12	-25
汉宁窗	$8\pi/N = 2 \times 4\pi/N$	-31	-18	-44
海明窗	$8\pi/N = 2 \times 4\pi/N$	-41	-6	-53
布莱克曼窗	$12\pi/N = 3 \times 4\pi/N$	-57	-18	-74

图 7.9 理想低通加窗后的幅度特性( $N=51, \omega_c=0.5\pi$ )

(a)矩形窗; (b)三角形窗; (c)汉宁窗; (d)哈明窗; (e)布莱克曼窗

#### 四、窗函数法设计步骤

1. 根据对过渡带及阻带衰减的指标要求, 选择窗函数的类型, 并估计窗口长度 $N$ 。
2. 构造希望逼近的频率响应函数 $H_d(e^{j\omega})$
3. 计算 $h_d(n)$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

4. 加窗得到设计结果:  $h(n) = h_d(n)w(n)$ 。

$$H_{dLP}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau} & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

$$H_{dHP}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau} & \omega_c \leq |\omega| \leq \pi \\ 0 & 0 \leq |\omega| < \omega_c \end{cases}$$

$$H_{dBp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau} & \omega_{cl} \leq |\omega| \leq \omega_{ch} \\ 0 & 0 \leq |\omega| < \omega_{cl}, \omega_{ch} < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

$$H_{dBs}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau} & 0 \leq |\omega| \leq \omega_{cl}, \omega_{ch} \leq |\omega| \leq \pi \\ 0 & \omega_{cl} < |\omega| < \omega_{ch} \end{cases}$$

1. 确定滤波器长度 $N$ , 选择窗函数的类型。

- 根据过渡带带宽计算, 并选择窗函数类型。

$$\text{过渡带带宽 } \Delta\omega = \left| \omega_s - \omega_p \right|$$

$$\left. \text{待设计滤波器的过渡带带宽 } B_t \approx \text{窗函数主瓣宽度} \left( \frac{A}{N} \right) \right\} B_t \leq \Delta\omega$$

$$\therefore h_d(n) \text{ 加窗的宽度: } B_t = \frac{A}{N} \leq \Delta\omega, \quad N \geq \frac{A}{\Delta\omega}$$

其中的 $A$ 与窗的类型有关, 例如, 矩形窗的 $A=4\pi$ ,

汉明窗的 $A=8\pi$ 等, 参数 $B_t$ 的近似和精确取值参考表7.2

- 根据 $H_d(e^{j\omega})$ 的相位特性来决定:

$$\text{线性相位的斜率 } \tau \text{ 决定, } \tau = \frac{N-1}{2}$$

表 7.21 6种窗函数的基本参数

窗函数类型	旁瓣峰值 $\alpha_s$ /dB	过渡带宽度 $B_t$		阻带最小衰减 $\alpha_s$ /dB
		近似值	精确值	
矩形窗	-13	$4\pi/N$	$1.8\pi/N$	-21
三角窗	-25	$8\pi/N$	$6.1\pi/N$	-25
汉宁窗	-31	$8\pi/N$	$6.2\pi/N$	-44
哈明窗	-41	$8\pi/N$	$6.6\pi/N$	-53
布莱克曼窗	-57	$12\pi/N$	$11\pi/N$	-74
凯塞窗( $\beta=7.865$ )	-57		$10\pi/N$	-80

2. 确定  $H_d(e^{j\omega})$ 

以低通为例:  $H_{dLP}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau} & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$

3. 计算  $h_d(n)$ 

$$H_d(e^{j\omega}) = H_{dg}(\omega)e^{-j\omega\tau} = H_{dg}(\omega)e^{-j\omega(N-1)/2}$$

$$H_{dg}(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

$$\omega_c = \frac{\omega_p + \omega_s}{2} \quad (\text{如果 } \omega_c \text{ 未知})$$

$$h_d(n) = \text{IDTFT}[H_d(e^{j\omega})] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$\begin{aligned} h_d(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega\tau} e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{\sin[\omega_c(n-\tau)]}{\pi(n-\tau)} \end{aligned}$$

4. 求所设计滤波器的单位取样响应  $h(n)$ 

$$h(n) = h_d(n) \cdot \omega(n)$$

如果要求线性相位, 则要求  $h(n)$  关于  $\frac{N-1}{2}$  奇对称或偶对称

5. 考察  $H(e^{j\omega})$  的指标

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n}$$

6. 审核技术指标是否已经满足要求。如不满足, 则重新选取较大的  $N$  进行3、4计算; 如果满足有余, 则选取较小的  $N$  进行3、4项计算。

【例7-1】用窗函数法设计一线性相位FIR数字低通滤波器, 并满足如下模拟滤波器技术指标:

$$\Omega_p = 30\pi \text{ rad/s}, \text{ 衰减不大于 } -3\text{dB},$$

$$\Omega_s = 46\pi \text{ rad/s}, \text{ 衰减不小于 } -40\text{dB}$$

对模拟信号进行采样的周期  $T=0.01\text{s}$ , 计算滤波器的群延迟时间

解: (1) 确定数字滤波器技术指标

$$\omega_p = \Omega_p T = 30\pi \times 0.01 = 0.3\pi (\text{rad}) \quad \alpha_p = -3\text{dB}$$

$$\omega_s = \Omega_s T = 46\pi \times 0.01 = 0.46\pi (\text{rad}) \quad \alpha_s = -40\text{dB}$$

(2) 理想数字滤波器频率响应为

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau} & |\omega| \leq 0.3\pi \\ 0 & 0.3\pi < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

## (2) 求积分

$$\begin{aligned} h_d(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-0.3\pi}^{0.3\pi} e^{-j\omega\tau} e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{\sin[0.3\pi(n-\tau)]}{\pi(n-\tau)} \end{aligned}$$

(3) 根据阻带指标选择窗函数, 查表可知, 汉宁窗, 海明窗和布莱克曼窗都满足阻带40dB的衰减, 选择汉宁窗, 表达式为  $w_{Hn}(n)$ , 则设计的滤波器为:

$$\begin{aligned} h(n) &= h_d(n) w_{Hn}(n) \\ n &= 0, 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned}$$

(4) 确定滤波器长度  $N$ , 一般由线性相位的斜率  $\tau$  决定。若  $\tau$  未知,  $N$  可由过渡带确定,  $N$  确定后  $\tau$  也就确定了。若  $\tau$  已知,  $N$  可由  $\tau = (N-1)/2$  计算。

此题滤波器过渡区宽度要求:  $\Delta\omega = 0.46\pi - 0.3\pi = 0.16\pi$

$$\text{待设计滤波器过渡带宽度 } B_t = \frac{A}{N} = \frac{8\pi}{N}$$

$$B_t \leq \Delta\omega, \quad \frac{8\pi}{N} \leq 0.16\pi \quad N \geq \frac{8}{0.16} = 50$$

$$\text{选 } N = 51 \quad \tau = \frac{N-1}{2} = 25, \quad \tau = 25T = 25 \times 0.01 = 0.25\text{s}$$

(5) 确定最终的滤波器设计结果

$$\begin{aligned} h(n) &= h_d(n) w(n) \\ &= \frac{\sin[0.3\pi(n-25)]}{\pi(n-25)} \left[ 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{50}\right) \right] \quad 0 \leq n \leq 50 \end{aligned}$$

**【例7-2】**：用矩形窗、汉宁窗和布莱克曼窗设计FIR低通滤波器，设 $N=11, \omega_c=0.2\pi\text{rad}$

解：（1）用理想低通滤波器作为逼近滤波器，有：

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau} & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

（2）求  $H_d(e^{j\omega})$  的傅立叶反变换

$$\begin{aligned} h_d(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega\tau} e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{\sin(\omega_c(n-\tau))}{\pi(n-\tau)}, \\ \tau &= \frac{1}{2}(N-1) = 5 \end{aligned}$$

$$h_d(n) = \frac{\sin(0.2\pi(n-5))}{\pi(n-5)} \quad (n \in [-\infty, \infty])$$

用矩形窗设计：

$$h(n) = h_d(n)R_N(n), 0 \leq n \leq N-1$$

用汉宁窗设计：

$$h(n) = h_d(n)\omega_{Hn}(n), 0 \leq n \leq N-1$$

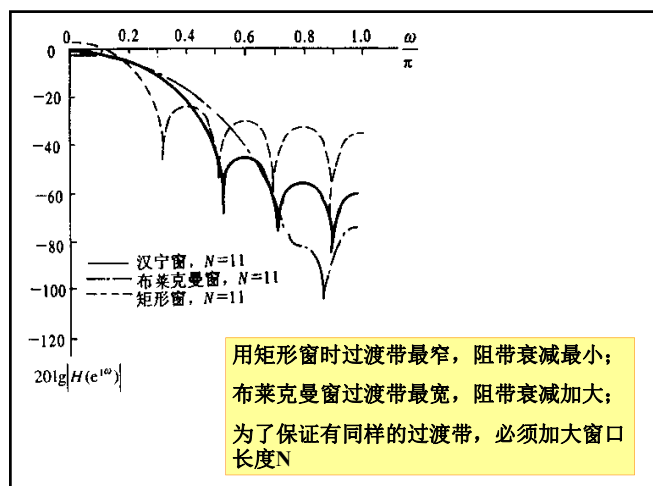
$$\omega_{Hn}(n) = 0.5(1 - \cos \frac{2\pi n}{10})R_{11}(n)$$

用布莱克曼窗设计：

$$h(n) = h_d(n)\omega_{Bl}(n)$$

$$\omega_{Bl}(n) = (0.42 - 0.5 \cos \frac{2\pi n}{10} + 0.08 \cos \frac{4\pi n}{10})R_{11}(n)$$

再求  $h(n)$  的频率响应  $H(e^{j\omega})$ ，其幅度特性如图所示：



**【例7.3】** 利用窗函数法设计线性相位的FIR高通数字滤波器，

要求通带截止频率  $\omega_p = \pi/2\text{rad}$ ，阻带截止频率  $\omega_s = \pi/4\text{rad}$ ，通带最大衰减  $\alpha_p = 1\text{dB}$ ，阻带最小衰减  $\alpha_s = 40\text{dB}$ 。

解：

（1）构造高通理想逼近滤波器  $H_d(e^{j\omega})$

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau} & \omega_c \leq |\omega| \leq \pi \\ 0 & 0 \leq |\omega| < \omega_c \end{cases}$$

$$\text{式中 } \tau = \frac{N-1}{2}, \quad \omega_c = \frac{\omega_p + \omega_s}{2} = \frac{3\pi}{8}$$

（2）求出  $h_d(n)$

$$\begin{aligned} h_d(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_{-\pi}^{-\omega_c} e^{-j\omega\tau} e^{j\omega n} d\omega + \int_{\omega_c}^{\pi} e^{-j\omega\tau} e^{j\omega n} d\omega \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\pi}^{-\omega_c} e^{j\omega(n-\tau)} d\omega + \int_{\omega_c}^{\pi} e^{j\omega(n-\tau)} d\omega \right] \\ &= \frac{1}{2\pi(n-\tau)} \left[ e^{j\omega(n-\tau)} \Big|_{-\pi}^{-\omega_c} + e^{j\omega(n-\tau)} \Big|_{\omega_c}^{\pi} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi(n-\tau)} \left[ e^{-j\omega_c(n-\tau)} - e^{-j\pi(n-\tau)} + e^{j\pi(n-\tau)} - e^{j\omega_c(n-\tau)} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{\sin(\pi(n-\tau))}{\pi(n-\tau)} - \frac{\sin(\omega_c(n-\tau))}{\pi(n-\tau)}$$

$$\text{当 } n = \tau \text{ 时, } \frac{\sin[\pi(n-\tau)]}{\pi(n-\tau)} = 1, \text{ 其余 } n \text{ 值, } \frac{\sin[\pi(n-\tau)]}{\pi(n-\tau)} = 0$$

$$\therefore h_d(n) = \delta(n-\tau) - \frac{\sin[\omega_c(n-\tau)]}{\pi(n-\tau)}$$

## (3) 选择窗函数

已知阻带最小衰减  $\alpha_s = 40\text{dB}$  由表7.2可知汉宁窗和海宁窗都可满足要求, 本例选择汉宁窗。

## (4) 计算窗的长度。

由过渡带宽度:  $B_t \leq \Delta\omega = \omega_p - \omega_s = \frac{\pi}{4}$

汉宁窗的过渡带宽为:

$$B_t = 8\pi/N \text{ (表7.2)}$$

$$\therefore B_t = 8\pi/N \leq \frac{\pi}{4}, \quad N \geq 32, \quad \text{对高通滤波器} N \text{ 必须取奇数}, \quad N=33$$

由汉宁窗公式有:  $\omega_{Hn}(n) = \frac{1}{2} [1 - \cos(\frac{n\pi}{12})] R_{33}$

## (5) 求h(n)

将  $\tau = \frac{N-1}{2} = 16$  代入, 得:

$$h_d(n) = \delta(n-16) - \frac{\sin[3\pi(n-16)/8]}{\pi(n-16)}$$

其中  $\delta(n-16)$  对应全通滤波器,

$\frac{\sin[3\pi(n-16)/8]}{\pi(n-16)}$  对应的是截止频率为  $\omega_c = \frac{3\pi}{8}$  的理想低通滤波器的

单位脉冲响应, 二者之差就是理想高通滤波器的单位脉冲响应。

$$h(n) = h_d(n) \omega_{Hn}(n) = \left\{ \delta(n-16) - \frac{\sin[3\pi(n-16)/8]}{\pi(n-16)} \right\} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{n\pi}{16}\right) \right] R_{33}$$

## (3) 选择窗函数

已知阻带最小衰减  $\alpha_s = 40\text{dB}$  由表7.2可知汉宁窗和海宁窗都可满足要求, 本例选择汉宁窗。

## (4) 计算窗的长度。

由过渡带宽度:  $B_t \leq \Delta\omega = \omega_p - \omega_s = \frac{\pi}{4}$

汉宁窗的过渡带宽为:  $B_t = 8\pi/N$

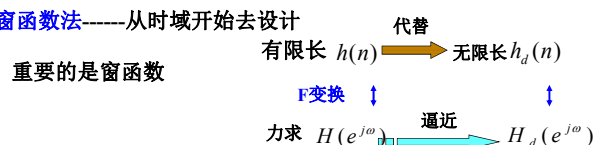
$$\therefore B_t = 8\pi/N \leq \frac{\pi}{4}, \quad N \geq 32, \quad \text{对高通滤波器} N \text{ 必须取奇数}, \quad N=33$$

由汉宁窗公式有:  $\omega_{Hn}(n) = \frac{1}{2} [1 - \cos(\frac{n\pi}{12})] R_{33}$

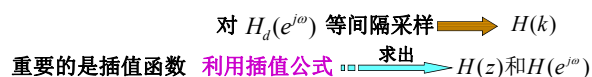
## § 7.3 频率抽样设计法

## 一、基本思想方法

- 窗函数法——从时域开始去设计

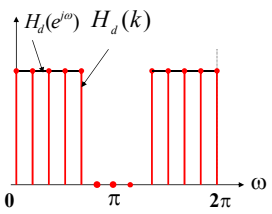


- 频率抽样法——直接从频域去设计



## 二、频率抽样设计法思路

1. 设待设计的滤波器的传输函数用  $H_d(e^{j\omega})$  表示, 对它在  $\omega=0 \sim 2\pi$  之间等间隔采样  $N$  点, 得到  $H_d(k)$ 。

$$H_d(k) = H_d(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k}, \quad k=0, 1, \dots, N-1$$


2. 由  $N$  个  $H_d(k)$  唯一确定有限长的  $h(n)$

$$h(n) = \text{IDFT}[H_d(k)] \quad n=0, 1, \dots, N-1$$

3.  $h(n)$  的系统函数  $H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$  分别对应不同的网络结构

4. 还可由  $H_d(k)$  直接按插值公式得到  $H(z), H(e^{j\omega})$  3——对应直接型 4——对应频率采样结构

$$H(z) = \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H_d(k)}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}k}z^{-1}} = \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) \Phi(z)$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) \Phi(\omega - \frac{2\pi}{N}k)$$

其中  $\Phi(\omega) = \frac{1}{N} \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega(\frac{N-1}{2})}$

### 三、频率抽样设计法特点:

直接从频域出发, 对理想频响取样, 以此来确定  $H_d(k)$  值, 这样可以使设计所得的系统函数  $H(z)$  去逼近理想的系统函数  $H_d(z)$ 。至少在取样点的频率上, 两者可以具有相同的频响。但截止频率只能为  $\pi/N$  的整数倍, 不能自由取值

### § 7.5 滤波器设计小结

滤波器的选择主要取决于滤波时的侧重面以及信号和噪声的特点。

**IIR滤波器:** 良好的通带和阻带幅频特性, 准确的边缘频率, 滤波器阶数较低, 实时性和经济性较好。但一般不具有线性相位频率特性, 存在稳定性问题。

**FIR滤波器:** 理想的线性相位特性和稳定性, 运算误差引起的输出信号噪声功率较小。此外, **FIR滤波器** 可以采用FFT算法实现, 在相同阶数的条件下, 运算速度可以大大提高。但阶数较高, 计算量和成本较高。

### IIR与FIR滤波器的比较

	IIR 滤波器	FIR 滤波器
总体结构	较简单、经济 (由于递归结构, 相同技术指标下, 可以较少阶数实现)	阶数比较高, 成本大。 非递归结构
性能特点	$h(n)$ 无限长, 做不到线性相位	$h(n)$ 有限长, 可以实现严格的线性相位
稳定性	在有限精度的运算中, 有可能不稳定	即使在有限精度的运算中, 也都是稳定的
运算速度	不能用FFT计算	可以用FFT, 加快速度
设计方法	着眼于瞬态特性时: 脉冲响应不变法、阶跃响应不变法 一般用双线性变换法 结合着应用频率变换法	窗函数法较简单 频率抽样法 (适用窄带) 等波纹逼近法 都有最优化设计课题
设计范围	规格化的低通、高通、带通、带阻、全通。	灵活多样, 可适应各种幅度、相位特性要求。
设计工具	可用模拟滤波器设计, 计算工具要求低	一般需借助计算机

### 第七章小结

- 一、FIR滤波器的线性相位概念
- 二、FIR滤波器的线性相位的条件和特点
- 三、窗函数法设计FIR滤波器 (高通, 低通)

## 第二十二次作业

- 第七章: 7.3; 7.4