Chap 2.

1. 左加右减，$x(n-1)$ 是 $x(n)$ 向右移动了一个单位（延迟，Delay）

2. ω 数字角频，Ω 模拟角频

$\Omega T = \omega = \Omega / f_s = 2\pi f/f_s$ 归一化角频

3. 时不变的判定

设 $y(n) = T[x(n)]$，若 $y(n-n_0) = T[x(n-n_0)]$ 则为时不变系统

只对 input，$(x(n))$ 延时

对所有 n 均延时

例 $y = x(2n) = T[x(n)]$ 即 $T[\cdot]$ 将 n 系数扩大2倍

则 $T[x(n-n_0)] = x(2n-n_0)$

例：$y(n) = n x(n)$

$y(n) = x(n) \cdot \cos(\omega_0 n)$

$y(n) = x(2n)$

4. 线性的判定

设 $y_1(n) = T[x_1(n)]$，$y_2(n) = T[x_2(n)]$

若 $T[a x_1(n) + b x_2(n)] = a y_1(n) + b y_2(n)$，则为线性。

将 input $x(n)$ 组合

将 $y(n)$ 线性组合

例：$y(n) = e^{x(n)}$

5. 卷积计算

1) 定义：变翻移乘和

2) 解析：将图形（信号）化为 $\delta(n)$ 之和

3) 不进位乘法

$\boxed{\text{卷积长度 } l_1+l_2-1}$

$x_1(n)$ 开始序号 k_1，$x_2(n)$ 开始序号 k_2，则 $x_1(n) * x_2(n)$ 开始序号 k_1+k_2

6. 奇偶分解 $x_e = \frac{1}{2}[x(n)+x(-n)]$，$x_o = \frac{1}{2}[x(n)-x(-n)]$

周期性：$\frac{2\pi}{\omega} = \frac{P}{q}$，周期为 P

7. 采样定理，采样后周期 $\Omega_s = 2\pi f_s$ 延拓，幅度变为原来 $\frac{1}{T}$

使用理想低通，令截止频率为 $\frac{\pi}{T} = \pi f_s$ 的滤波器

$R_N = u(n) - u(n-N)$

$\varphi_k = Sa[\frac{\pi}{T}(t-kT)]$

Chap 3

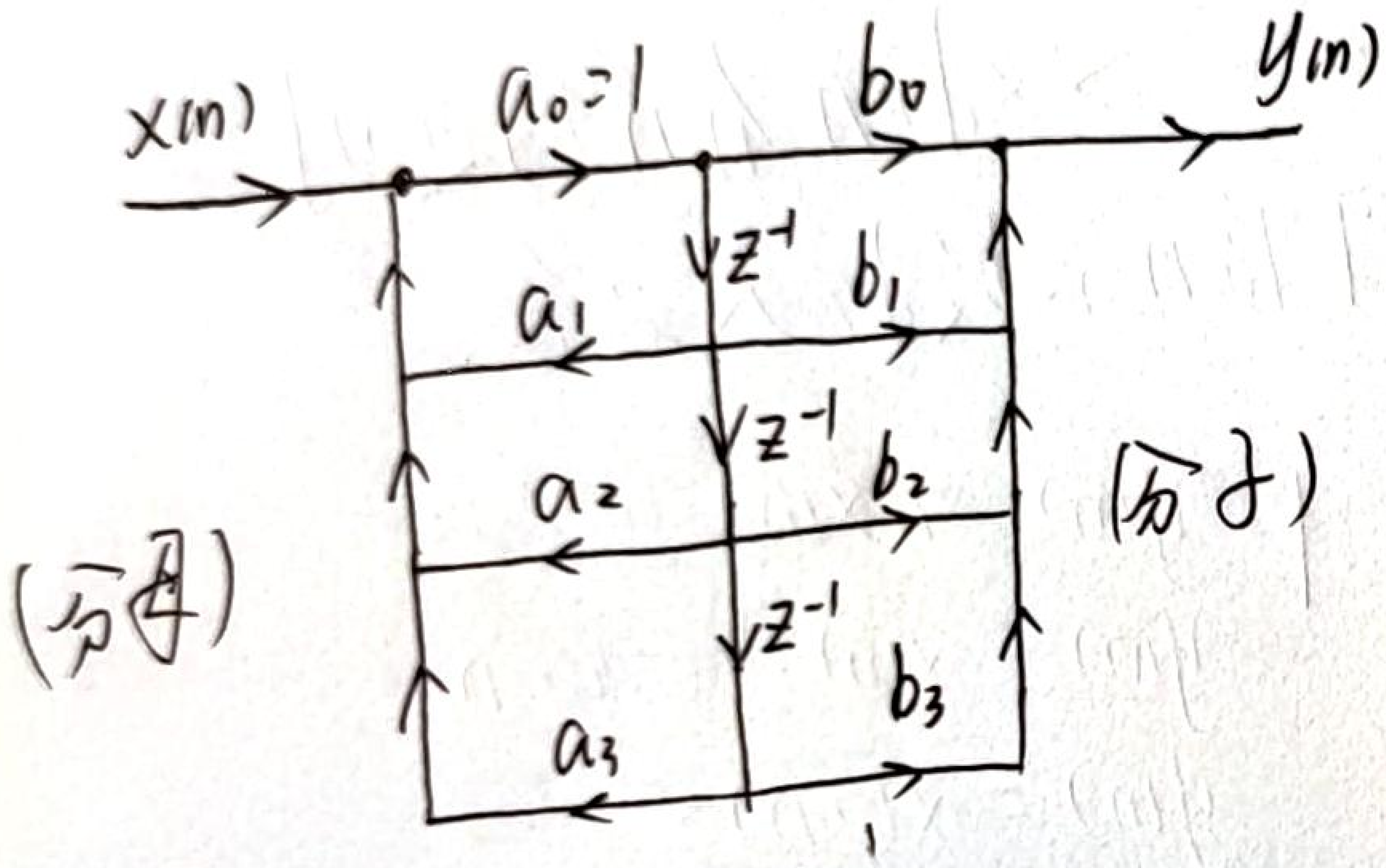
1. DTFT: $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$

IDTFT: $x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$

2. $\sum_{n_1}^{n_2} a^n = \frac{a^{n_1} - a^{n_2+1}}{1-a}$ 常用!

3. ZT一定要说明ROC $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$ 一般是双边变换

4. 直接II型流图



$$\frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

是减号,注意.

根据流图写方程,有时可以人工加入中间变量.

5. 时移与频移 (时同频反)

$x(n \pm n_0) \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) e^{\pm j\omega n_0}$

$G(e^{j(\omega \pm \omega_0)}) \longleftrightarrow g(n) e^{\mp j\omega_0 n}$

6. 共轭对称性

$$\begin{cases} x^*(n) \longleftrightarrow X^*(e^{-j\omega}) \\ x(-n) \longleftrightarrow X(e^{-j\omega}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{Re}[x(n)] \longleftrightarrow X_e(e^{j\omega}), \quad \mathrm{Re}[X(e^{j\omega})] \longleftrightarrow x_e(n) \\ j\,\mathrm{Im}[x(n)] \longleftrightarrow X_o(e^{j\omega}), \quad j\,\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})] \longleftrightarrow x_o(n) \end{cases}$$

Chap 4

1. $$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}$$

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}$$

W因子: $W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$.

2. $$\begin{cases} X(e^{j\omega})=X(z)\big|_{z=e^{j\omega}} \\ X(k)=X(e^{j\omega})\big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} \\ X(k)=X(z)\big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} \end{cases}$$

3. 频域采样定理：$x(n)$ DFT点数N须大于$x(n)$的实际点数

4. $x(n)$为实序列，即 $x(n)=x^*(n)$

则$X(k)$是共轭偶对称的，即 $X(k)=X^*(-k)=X^*(N-k)$

幅度偶对称，相角奇对称

$$\begin{cases} |X(k)|=|X(N-k)| \\ \arg X(k)=-\arg X(N-k) \end{cases}$$

DTFT也有这一性质

5. DFT中$x(n)$若含有$R_N(n)$，应在计算过程中进行阵化

$$\frac{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}km}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}=\frac{e^{-j\frac{\pi}{N}km}(e^{j\frac{\pi}{N}km}-e^{-j\frac{\pi}{N}km})}{e^{-j\frac{\pi}{N}k}(e^{j\frac{\pi}{N}k}-e^{-j\frac{\pi}{N}k})}$$

$$=e^{-j\frac{\pi}{N}k(m-1)}\cdot\frac{\sin(\frac{\pi}{N}km)}{\sin(\frac{\pi}{N}k)}\cdot R_N(k)$$

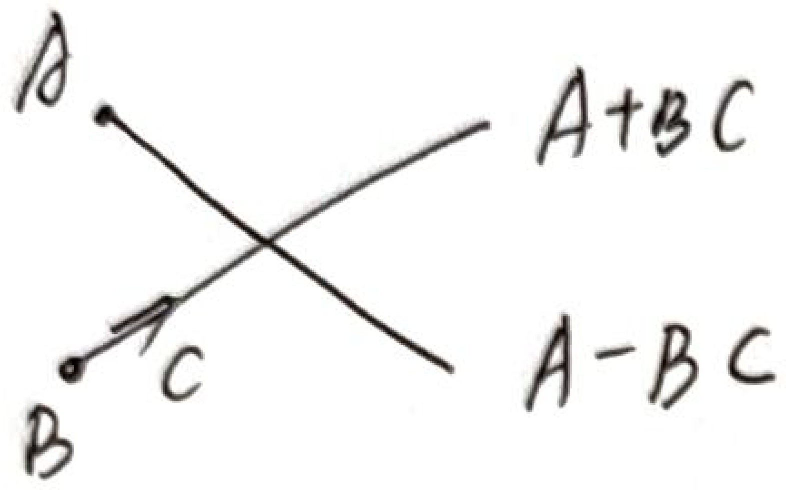
6. $\dfrac{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k\cdot N}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}} = \begin{cases} N, & k=0 \\ 0, & k\neq 0 \end{cases}$

$\dfrac{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}(m-k)N}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}(m-k)}} = \begin{cases} N, & k=m \\ 0, & k\neq m \end{cases}$

7. $X(k)$ 和 $x(n)$ 都是有限长的，记得加 $R_N(n)$，或者规定 $0 \leq n \leq N-1$

Chap 5

1、蝶型单元



2、

	复乘	复加
DFT	N^2	$N(N-1)$
FFT	$\frac{N}{2}\log_2 N$	$N\log_2 N$

	复乘	复加
实乘	4	0
实加	2	2

3. N点FFT包含$\log_2 N$级的蝶形单元
   每级有$\frac{N}{2}$个蝶形单元
   每个蝶形单元一次复乘,两次复加
4. DIT,左边$x(n)$码位倒序,右侧$X(k)$码位正序
5. 同址运算 每次运算结果存入原数据占用的存储单元
   N点FFT使用N个存储单元

Chap 6 IIR数字滤波器设计

6.1 数字滤波器基本概念

$$\alpha_p = 20\lg\frac{|H(e^{j0})|}{|H(e^{j\omega_p})|}\, dB$$

$$\alpha_s = 20\lg\frac{|H(e^{j0})|}{|H(e^{j\omega_s})|}\, dB$$

当 $\frac{|H(e^{j\omega_c})|}{|H(e^{j0})|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时 $w = w_c$，$\alpha_p = 3dB$.

6.2 模拟滤波器设计

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+(\Omega/\Omega_c)^{2N}}$$ Ω为模拟频率

1) 通带最平坦

2) 单调下降的幅频特性.

3) $|H_a(j0)|^2 = 1$ $|H_a(j\Omega_c)|^2 = \frac{1}{2}$

4) 随N增加 接近理想滤波器

Butterworth 设计步骤

1) 确定N $N \geq \frac{\lg\left(\frac{10^{0.1\alpha_s}-1}{10^{0.1\alpha_p}-1}\right)}{2\lg(\Omega_s/\Omega_p)}$

2) 确定w_c

$$\frac{\Omega_p}{(10^{0.1\alpha_p}-1)^{\frac{1}{2N}}} \le \Omega_c \le \frac{\Omega_s}{(10^{0.1\alpha_s}-1)^{\frac{1}{2N}}}$$

通带满足，阻带余量　两边余量　阻带满足，通带余量

3) 查表 $H_n(s) = \frac{1}{B_n(s)}$

4) 将原型系统函数的 s 换为 $\frac{s}{\Omega_c}$，得到$H_a(s)$

6.3 数字滤波器设计

6.3.1 冲激响应不变法

$$H_a(s) \xrightarrow{\text{反 Laplace}} h(t) \xrightarrow[\text{采样}]{t=nT} h(n) \xrightarrow{zT} H(z)$$

步骤:

1) 将 $H_a(s)$ 写为 $H_a(s)=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{s-s_i}$ 形式

2) $H(z)=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{1-e^{s_iT}\cdot z^{-1}}$

优点

1) 数频和模频是线性的 $\omega=\Omega T$, 数字滤波器很好地重现原滤波器的频率特性

2) $h(n)$ 完全模仿 $h(t)$, 时域特性逼近好

缺点

1) 时域采样导致频域周期化, 因此产生频域混叠

2) 不适合高通、带阻滤波器的设计.

6.3.2 双线性变换法

$$\underset{\text{非带限}}{H(s)} \longrightarrow \underset{\text{带限}}{H(s')} \xrightarrow{\text{冲激响应不变法}} H(z)$$

$$\underset{(-\infty,+\infty)}{\Omega} \xrightarrow{\Omega'=\frac{2}{T}\arctan(\frac{\Omega T}{2})} \underset{[-\frac{\pi}{T},\frac{\pi}{T}]}{\Omega'} \xrightarrow{w=\Omega' T} w$$

$$\boxed{w = 2\arctan\left(\frac{\Omega T}{2}\right) \qquad \Omega = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{w}{2}\right)}$$

$$s = \frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$$

$$z = \frac{1+\frac{T}{2}s}{1-\frac{T}{2}s}$$

$$H(z) = H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

优点：消除了频率混叠现象

缺点：Ω和w非线性关系，会有幅度和相位失真

Chap 7 FIR数字滤波器设计

7.1 线性相位特性

第I类 $\theta(\omega) = -\tau\omega \iff h(n) = h(N-1-n)$

第II类 $\theta(\omega) = -\tau\omega + \theta_0 \iff h(n) = -h(N-1-n)$

群时延 $\tau = -\frac{\partial\theta(\omega)}{\partial(\omega)}$

I
- N偶：$H(e^{j\omega})\big|_{\omega=\pi} = 0$ 不可高通和带阻
- N奇： 最适用

II
- N偶 $H(e^{j\omega})\big|_{\omega=0} = 0$ 不适合低通、带阻.
- N奇 $H(e^{j\omega})\big|_{\omega=0,\pi} = 0$ 只可设计带通

7.2 窗函数法

$$H_d(e^{j\omega}) \xrightarrow{\text{IDTFT}} h_d(n) \xrightarrow{\text{加窗}} h(n) \dashrightarrow H(z)$$

给定理想 → 非因果、无限长 → 因果、有限长

理想低通 $H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases} \longleftrightarrow h(n) = \frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)}$

理想高通 $H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & |\omega| < \omega_c \\ e^{-j\omega\alpha}, & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases} \longleftrightarrow h(n) = \delta(n-\alpha) - \frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)}$

$$\alpha = \frac{N-1}{2} \iff N = 2\alpha + 1$$

7.5 FIR与IIR

FIR

$$H(z)=\sum_{j=0}^{M} b_j z^{-j}$$

系统一定稳定

可为线性相位

IIR

$$H(z)=\frac{\sum_{j=0}^{M} b_j z^{-j}}{1-\sum_{i=1}^{N} z^{-i}}$$

可能不稳定

非线性相位.