7. 设 X, Y 独立，其中 X 的分布律为 $P\{X=1\}=0.3$，$P\{X=2\}=0.7$，Y 服从参数为 2 的指数分布，则 $Z=X+Y$ 的分布函数为________。

$$F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-\lambda y}, & y\geq 0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$F_Z(z)=P\{X+Y\leq z\}$$

$$=0.3P\{Y\leq z-1\}+0.7P\{Y\leq z-2\}$$

$$=0.3F_Y(z-1)+0.7F_Y(z-2)$$

代入上式即可

六、(14 分)设总体 $Y=\ln X$ 服从正态分布 $N(\mu,1)$，$\ln 0.5$, $\ln 1.25$, $\ln 0.8$, $\ln 2.0$ 是来自总体 Y 的样本。

(1) 求 X 的概率密度函数；(2) 求 μ 的置信度为 0.95 的置信区间（已知 $u_{0.025}=1.96$）；

(3) 求 EX（记 EX 为 b），并求 b 的置信度为 0.95 的置信区间。

(1) $f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}}$

$P_Y(y)=\int_{-\infty}^{y}f_Y(y)$

$F_X(x)=P\{X\le x\}=P\{e^Y\le x\}=P\{Y\le \ln x\}=F_Y(\ln x)$

故 $f_X(x)=\frac{f_Y(\ln x)}{x}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}x}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2}}$

(2) $\bar{Y}\sim(\mu,\frac{1}{4})$

故 $\frac{\mu-\bar{Y}}{\frac{1}{2}}\sim N(0,1)$

$u_{1-\frac{\alpha}{2}}<\frac{\mu-\bar{Y}}{\frac{1}{2}}<u_{\frac{\alpha}{2}}\Rightarrow u_{1-\frac{\alpha}{2}}<\frac{\mu}{\frac{1}{2}}<u_{\frac{\alpha}{2}}$

故 $(-0.98, 0.98)$ 是所求区间

(3) $E(X)=E(e^Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}}dy=e^{\mu+\frac{1}{2}}=b$

$\mu+\frac{1}{2}=\ln b$

$-\frac{1}{2}u_{\frac{\alpha}{2}}<\mu<\frac{1}{2}u_{\frac{\alpha}{2}}$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}u_{\frac{\alpha}{2}}<\ln b-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}u_{\frac{\alpha}{2}}$

$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}u_{\frac{\alpha}{2}}<\ln b<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}u_{\frac{\alpha}{2}}$

故 $(e^{-0.48}, e^{1.48})$ 即为所求

当一个变量的置信区间不好求，可以借助其他变量

四、(14 分)设二维随机变量 $H_1: \mu \neq 5.15$ 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} x, & 0<x<1, 0<y<3x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(1) 问 X 与 Y 是否独立？为什么？(2) 设 $Z=X+Y$，求 Z 的概率密度 $f_Z(z)$。