4. 设 X 服从正态分布 $N(1,\sigma^2)$，且 $P(X\le 2)=0.9773$，则 $P(0\le X\le 2)=$ ~~0.9946~~ 0.9546

又是因为计算错误，千万要规避，尤其不要抄错数

$\hat{\mu}_1=\frac{1}{4}X_1+\frac{3}{4}X_2,\hat{\mu}_2=\frac{1}{2}(X_1+X_2),\hat{\mu}_3=\frac{1}{7}X_1+\frac{4}{7}X_2,\hat{\mu}_4=\frac{2}{5}X_1+\frac{3}{5}X_2$ 均为 μ 的估计量，则最有效的一个估计量是 $\cancel{\hat{\mu}_3}$ $\hat{\mu}_2$

只有无偏估计下，才去讨论有效性

五、(14 分)设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，$\bar{X}$ 和 S_n^2 是该样本的样本均值和样本方差，又设 X_{n+1} 服从 $N(\mu,\sigma^2)$ 分布，且 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，X_{n+1} 相互独立，试求下列统计量的概率分布(无需写出概率密度函数的表达式)：

(1) $T=\frac{X_{n+1}-\bar{X}}{S_n}\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$；(2) $F=\frac{(n-m)\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu)^2}{m\sum_{i=m+1}^{n}(X_i-\mu)^2}$

$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(m)$

$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=m+1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n-m)$

(2) F 分布的性质.

① 若 $F\sim F(n_1,n_2)$，则 $\frac{1}{F}\sim F(n_2,n_1)$.

② $F_{1-\alpha}(n_1,n_2)=\frac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}$. 自证!

(四) 正态总体条件下的常用结论 四个结论有机联系

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，$\bar{X},S^2$ 分别是样本的均值和方差，则

(1) $\bar{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$，即 $\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}\sim N(0,1)$；

(2) $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$；

(3) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n-1)$ (μ 未知时，在(2)中用 $\bar{X}$ 替代 μ)；

(4) $\bar{X}$ 与 S^2 相互独立，$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S}\sim t(n-1)$ (σ 未知时，在(1)中用 S 替代 σ). 进一步有

$\frac{n(\bar{X}-\mu)^2}{S^2}\sim F(1,n-1)$. 为以后知识铺垫

见例 3.6.2