四. 2011~2012 (Ⅱ)

4. 设元件的寿命服从参数为0.01的指数分布，则由5个这种元件串联而组成的系统，能够正常工作100小时以上的概率为 e^{-5}

指数分布 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 其他\end{cases}$ $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$

三、(12 分)设总体 X，Y 相互独立，$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，$\mu_1,\sigma_1^2$ μ_2,σ_2^2 均未知。今分别从两总体中抽取样本，获得观测值如下：

X：24.3， 20.8， 23.7， 21.3， 17.4

Y：18.2， 16.9， 20.2， 16.7

(1)利用 X 的观测值求 μ_1 的置信度为95%的置信区间。

(已算得样本均值 $\bar{x}=21.5$，修正样本方差 $S_X^{*2}=7.505$)。

(2)检验假设 $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$，$H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$，$(\alpha=0.05)$。

（已知 $F_{0.025}(4,3)=15.10$，$F_{0.025}(3,4)=9.98$，$t_{0.025}(4)=2.776$。）

(1) $\bar{x}=21.5$ $S_x^{*2}=7.505$

$\left(\bar{x}-t_{\frac{\alpha}{2}}(5-1)/\sqrt{n},\ \bar{x}+t_{\frac{\alpha}{2}}(5-1)/\sqrt{n}\right)$

五、(14 分)设总体 $X \sim N(1,\sigma^2)$，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是它的一个样本。

(1) 试求 σ^2 的最大似然估计 $\hat{\sigma}^2$；(2) $\hat{\sigma}^2$ 是否为 σ^2 的相合估计量，为什么？

$$p(x_i;\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x_i-1)^2}{2\sigma^2}}$$

故 $L(\sigma^2) = \dfrac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \sigma^n} e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-1)^2}{2\sigma^2}}$

$$\ln L(\sigma^2) = -n\left(\ln\sigma + \frac{1}{2}\ln 2\pi\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-1)^2}{2\sigma^2}$$

$$\frac{\partial \ln L(\sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)^2$$

故 $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)^2$

(2) $E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$

$D(\hat{\sigma}^2) = \dfrac{2\sigma^4}{n} \to 0 \ (n\to\infty)$

是相合估计

六、(14 分) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，$\overline{X}$，S_n^2 分别为样本均值和样本方差。又设 $X_{n+1}\sim N(\mu,\sigma^2)$，且与 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立。记

$Y_i=X_i-\overline{X}$，$i=1,2,\cdots,n+1$。

(1) 求常数 K，使随机变量 $F=K\dfrac{(X_{n+1}-\overline{X})^2}{S_n^2}$ 服从 F 分布。

(2) 求常数 B，使 $U=\dfrac{1}{B}\sum\limits_{i=1}^{n+1}Y_i^2$ 为 σ^2 的无偏估计。

(2) $Y_{n+1}=X_{n+1}-\overline{X}$　　$X_{n+1}\sim N(\mu,\sigma^2)$　　$\overline{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$

故 $Y_{n+1}\sim N(0,\frac{n+1}{n}\sigma^2)$

$Y_i=X_i-\overline{X}$　　$X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$　　$\overline{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$

$\cancel{Y_i\sim N(0,\frac{n+1}{n}\sigma^2)}$　这样写大错特错，因为 X_{n+1} 与 $\overline{X}$ 相互独立，

但 X_i 与 $\overline{X}$ 不独立。

$X_1,X_2\cdots\cdots X_n$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，$\overline{X}$ 是样本均值，则

$(X_i-\overline{X})\sim N(0,\frac{n-1}{n}\sigma^2)$

$E(U)=\frac{1}{B}E\left(\sum\limits_{i=1}^{n+1}Y_i^2\right)=\frac{1}{B}E\left(\sum\limits_{i=1}^{n}Y_i^2+Y_{n+1}^2\right)=\frac{1}{B}E\left(\sum\limits_{i=1}^{n}Y_i^2\right)+\frac{1}{B}E(Y_{n+1}^2)$

$E(Y_i^2)=[E(Y_i)]^2+D(Y_i)=0+\frac{n-1}{n}\sigma^2=\frac{n-1}{n}\sigma^2$

$E(Y_{n+1}^2)=[E(Y_{n+1})]^2+D(Y_{n+1})=0+\frac{n+1}{n}\sigma^2=\frac{n+1}{n}\sigma^2$

故 $E(U)=\frac{1}{B}\left[(n-1)\sigma^2+\sigma^2+\frac{1}{n}\sigma^2\right]=\frac{1}{B}\cdot\frac{n^2+1}{n}\sigma^2$

$\therefore B=\frac{n^2+1}{n}$

七、(14分)设随机变量 X 服从 Gamma 分布 $\Gamma(n,\lambda)$，其概率密度函数为：

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^n x^{n-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(n)}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

(1)求随机变量 $U=2\lambda X$ 的概率密度函数；

(2)设随机变量 Y 与 Z 相互独立，$Y\sim\Gamma(1,\lambda), Z\sim\Gamma(1,\lambda)$，求 $V=Y+Z$ 的概率密度。

(1) $F_U(u)=P\{2\lambda X\le u\}=P\{X\le \frac{u}{2\lambda}\}=F_X(\frac{u}{2\lambda})$

故 $f_U(u)=\dfrac{d\,F_X(\frac{u}{2\lambda})}{du}=f_X(\frac{u}{2\lambda})\cdot\dfrac{1}{2\lambda}=\begin{cases}\dfrac{u^{n-1}}{2^n\Gamma(n)}e^{-u}, & u>0\\ 0, & 其他\end{cases}$

(2) $\Gamma(1,\lambda)$ 的密度函数

$$p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

由 Y、Z 独立可知 $p(y,z)=\begin{cases}\lambda^2 e^{-\lambda y-\lambda z}, & y>0, z>0\\ 0, & 其他\end{cases}$

$$p(y,v-y)=\begin{cases}\lambda^2 e^{-\lambda v}, & 0<y<v\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$\therefore f_V(v)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(y,v-y)\,dy$

$$=\begin{cases}\int_0^v \lambda^2 e^{-\lambda v}\,dy, & v>0\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}\lambda^2 v e^{-\lambda v}, & v>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$