五. 2012~2013 (I)

3. 设随机变量 X 与 Y 独立，$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$Y/\sigma^2\sim\chi^2(n)$，$T=\dfrac{X-\mu}{\sqrt{Y}}\sqrt{n}$，则 T 服从的分布为 $t(n)$，$\dfrac{1}{T^2}$ 服从的分布为____(均要求写出分布的参数)。

$$T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}} \qquad T^2=\frac{X^2}{Y/n}$$

$$\frac{1}{T^2}=\frac{Y/n}{X^2/1}$$ 服从 $F(n,1)$ 分布

(2)F 分布的性质.

①若 $F\sim F(n_1,n_2)$，则 $\frac{1}{F}\sim F(n_2,n_1)$.

②$F_{1-\alpha}(n_1,n_2)=\dfrac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}$. 自证！

(四)正态总体条件下的常用结论 四个结论有机联系

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，$\overline{X}$，S^2 分别是样本的均值和方差，则

(1) $\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$，即 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma}\sim N(0,1)$；

(2) $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$；

(3) $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n-1)$ (μ 未知时，在(2)中用 $\overline{X}$ 替代 μ)；

(4) $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立，$\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S}\sim t(n-1)$ (σ 未知时，在(1)中用 S 替代 σ). 进一步有

$\dfrac{n(\overline{X}-\mu)^2}{S^2}\sim F(1,n-1)$.

为以后知识铺垫 见例 3.6.2

5. 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 和 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 分别为来自两个独立正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本，参数 μ_1, μ_2 均未知，在显著性水平 α 下，检验假设 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$，$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ 的统计量为 $\cancel{S_n^{*2}}$ $\dfrac{S_X^{*2}}{S_Y^{*2}}$；拒绝域为________。

对于两个样本方差的检验，理论依据：

$$\frac{S_X^{*2}/\sigma_1^2}{S_Y^{*2}/\sigma_2^2} \sim F(m-1, n-1)$$

令 $F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1) < \dfrac{S_X^{*2}/\sigma_1^2}{S_Y^{*2}/\sigma_2^2} < F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)$

$\Rightarrow F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1) < \dfrac{S_X^{*2}}{S_Y^{*2}} < F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)$

接受域为开区间，拒绝域为闭区间

三、(12 分)已知随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 是严格单调的连续函数。

(1)求证 $Y=F(X)$ 服从[0，1]上的均匀分布；(2)求 $Z=-3\ln F(X)$ 的密度函数。

应当铭记的过程.

四、(12 分)设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为来自 X 的一个样本，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$。

(1)求常数 C 使统计量 $\hat{\sigma}=C\sum_{i=1}^{n}|X_i-\mu|$ 为 σ 的无偏估计，(2)求 X_1 与 $\overline{X}$ 的协方差。

$$E(\hat{\sigma})=CnE(|X_i-\mu|)$$

$$Y=(X_i-\mu)\sim N(0,\sigma^2)$$

$$E(|Y|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_0^{+\infty}y\,e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy$$

令 $t=\frac{y^2}{2\sigma^2}$　$dt=\frac{1}{\sigma^2}y\,dy$　$\therefore y\,dy=\sigma^2dt$

故 $I=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_0^{+\infty}\sigma^2t^0e^{-t}\,dt$

$$=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}0!=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}$$

$\therefore nC\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}=\sigma$　$\therefore C=\frac{\sqrt{2\pi}}{2n}$

(2) 第三套的(五)中有相似问题，很容易