

# TEMA 5

## Discretización de Señales

Enrique Martín Gullón

7 de octubre de 1998

## Índice General

<b>1</b>	<b>Muestreo teórico de señales continuas</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Análisis espectral del muestreo. Teorema de Muestras</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Relación entre las transformadas de Fourier de señales y se-</b>	
	<b>cuencias</b>	<b>12</b>
<b>4</b>	<b>Reconstrucción de una señal a partir de sus muestras</b>	<b>15</b>
<b>5</b>	<b>Tratamiento discreto de señales analógicas</b>	<b>16</b>
<b>6</b>	<b>Alteración de la frecuencia de muestreo: diezmado e interpola-</b>	
	<b>ción</b>	<b>20</b>
6.1	Reducción de la frecuencia de muestreo: diezmado . . . . .	22
6.2	Incremento de la frecuencia de muestreo: interpolación . . . . .	25
6.3	Alteración fraccional de la frecuencia de muestreo . . . . .	29
<b>7</b>	<b>Muestreo práctico</b>	<b>30</b>
7.1	Filtrado anti-aliasing . . . . .	30
7.2	Conversión analógico-digital . . . . .	32
7.3	Ruido de cuantización . . . . .	35
7.4	Conversión digital-analógica . . . . .	38
7.5	Consideraciones sobre la implementación de los filtros . . . . .	42

## Índice de Figuras

1	Conversor Continuo-Discreto (conversor C/D). . . . .	4
2	Señal analógica y su secuencia de muestras correspondiente. . . . .	5
3	Diagrama de bloques del conversor continuo-discreto. . . . .	6
4	Proceso que sigue la señal en el conversor C/D. . . . .	7
5	El muestreo en el dominio de la frecuencia. . . . .	8
6	Recuperación de la señal a partir de sus muestras, mediante un filtro paso bajo ideal. . . . .	10
7	(a).- Espectro de la señal continua. (b).- Espectro de la señal muestrea- da. (c).- Espectro de la secuencia en unidades específicas de frecuencia. (d).- Espectro de la secuencia. . . . .	14
8	Construcción de la señal continua mediante la interpolación de funcio- nes <i>sinc</i> . . . . .	15
9	Diagrama de bloques del conversor Discreto-Continuo (conversor D/C). . . . .	17
10	Modelo ideal del sistema empleado en la realización de tratamiento discreto sobre señales continuas. . . . .	18
11	Función de transferencia del filtro discreto paso bajo ideal y de su función de transferencia analógica equivalente. . . . .	20
12	Filtrado paso bajo de una señal analógica utilizando un sistema discreto. . . . .	21
13	Proceso de diezmado de una secuencia ( $M=3$ ). . . . .	22
14	Proceso de diezmado en el dominio de la frecuencia ( $M=3$ ). . . . .	23
15	Sistema diezmador por $M$ . . . . .	24
16	Proceso de interpolación de una secuencia ( $L=3$ ). (a).- Secuencia ex- pandida. (b).- Secuencia interpolada (resultado final). . . . .	26
17	Proceso de interpolación en el dominio de la frecuencia ( $L=3$ ). . . . .	28
18	Sistema interpolador por $L$ . . . . .	28
19	Alteración fraccional de la frecuencia de muestreo. . . . .	29
20	Sistema real empleado para el proceso discreto de señales analógicas. . . . .	31
21	(a).- Sistema real que sustituye al conversor ideal continuo-discreto. (b).- Diagrama de bloques del circuito S/H. (c).- Diagrama de bloques del conversor A/D. . . . .	32
22	Representación de las señales de entrada y salida de un circuito de muestreo y retención. . . . .	33
23	Característica de un cuantizador de ocho niveles. . . . .	34
24	Señal muestreada, cuantificada a tres bits y codificada a complemento a dos. . . . .	35
25	Modelo adoptado para estudiar el error de cuantización. . . . .	36
26	Función densidad de probabilidad del ruido de cuantización. . . . .	37
27	Diagrama de bloques del conversor D/A. . . . .	38
28	Función de transferencia del filtro interpolador compensado. . . . .	40
29	Sistema completo de conversión digital-analógica. . . . .	41
30	Utilización de técnicas de diezmado e interpolación para simplificar los requerimientos de los filtros analógicos anti-aliasing y de reconstruc- ción de la señal. . . . .	42
31	Uso de un diezmador en la conversión analógico-digital. . . . .	43
32	Uso de un interpolador en la conversión digital-analógica. . . . .	44

## 1 Muestreo teórico de señales continuas

Para obtener una representación discreta a partir de una señal continua o analógica se emplea el procedimiento conocido como *muestreo periódico*. Este consiste en obtener una secuencia de muestras  $x[n]$  a partir de una señal analógica  $x_c(t)$  mediante la expresión:

$$x[n] = x_c(nT_s) \quad n \text{ entero} \quad -\infty < n < \infty \quad (1)$$

En la ecuación (1),  $T_s$  es el intervalo de tiempo que transcurre entre dos muestras consecutivas y se le denomina *período de muestreo*. Su inverso,  $f_s = 1/T_s$ , es el número de muestras tomadas por unidad de tiempo y se llama *frecuencia de muestreo*. En la figura 1 se puede observar el sistema mediante el cual se lleva a cabo el muestreo periódico de forma *teórica*. A este sistema se le denomina *conversor C/D* (continuo-discreto). Recibe, por una parte, la entrada de la señal analógica a muestrear,  $x_c(t)$  y, por otra, la del intervalo de muestreo,  $T_s$ , produciendo a su salida la secuencia  $x[n]$ .

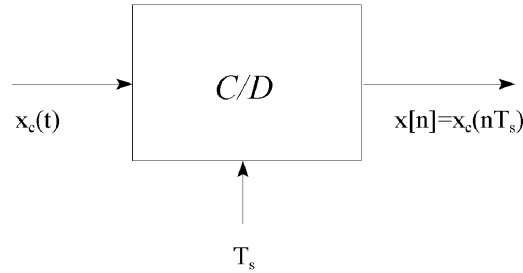


Figura 1: Conversor Continuo-Discreto (conversor C/D).

En realidad, estos conversores ideales no existen, habiendo de ser suplidos por otro tipo de sistemas de comportamiento aproximado. De esto nos ocuparemos en el apartado 7, en el que se estudian los distintos problemas que plantea la implementación del muestreo en la práctica. Antes de llegar a ese punto se justificará matemáticamente el *muestreo teórico* y se caracterizará a los sistemas empleados en la aplicación de esta técnica.

La operación de muestreo, en principio, no es invertible. Echemos un vistazo a la figura 2, en la que se muestra un ejemplo de señal (una señal vocal)  $x_c(t)$  y su correspondiente secuencia  $x[n]$ . A priori, a partir de ésta, parece imposible reconstruir aquella, pues puede haber infinitas señales que tengan exactamente ese conjunto de muestras. Sin embargo, si imponemos cierta restricción a la clase de señales a muestrear, es posible eliminar esta ambigüedad, lo que permite, en ese caso, reconstruir inequívocamente la señal a partir de sus muestras.

Pasemos ahora a estudiar más detenidamente el conversor C/D. En la figura 3 se muestra su diagrama de bloques. El primer bloque es un multiplicador, cuya entrada es la señal a muestrear  $x_c(t)$ , la cual se multiplica por la señal  $s_\delta(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$ , conocida como *onda muestreadora ideal*. Esta última es un tren de deltas de Dirac de idéntica amplitud, repetidas cada  $T_s$  segundos (el intervalo de muestreo). A la salida del multiplicador tendremos la *señal muestreada* (recuérdese la propiedad de muestreo de la  $\delta$  de Dirac):

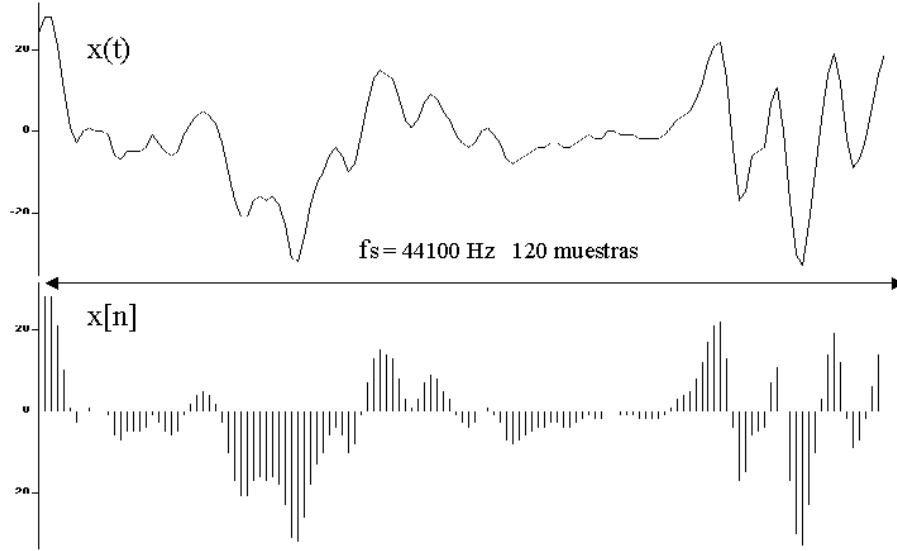


Figura 2: Señal analógica y su secuencia de muestras correspondiente.

$$x_\delta(t) = x_c(t)s_\delta(t) = x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT_s)\delta(t - nT_s) \quad (2)$$

La señal muestreada es todavía una señal de tiempo continuo (es una señal formada por impulsos, no nula sólo en instantes de tiempo múltiplos de  $T_s$ ). Su conversión en secuencia, entendida como serie numérica y, por tanto, independiente de la frecuencia de muestreo (sólo depende del índice  $n$ ), la realiza el segundo bloque de la figura 3.

En la figura 4 se representa un ejemplo gráfico de todo el proceso de transformación de la señal.

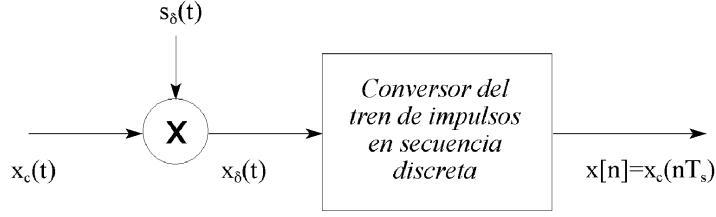


Figura 3: Diagrama de bloques del conversor continuo-discreto.

## 2 Análisis espectral del muestreo. Teorema de Muestras

Para ver lo que sucede en el dominio de la frecuencia es necesario conocer previamente el espectro de la onda muestreadora ideal. Recordando que  $TF[\delta(t)] = 1$  y empleando la propiedad de desplazamiento temporal tendremos:

$$S_\delta(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\Omega n T_s} \quad (3)$$

La expresión derivada en la ecuación (3) no aporta ninguna luz, por el momento. Sin embargo existe una expresión alternativa, que podemos calcularla aprovechando la periodicidad de  $s_\delta(t)$ :

$$s_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi f_s n t} \quad (4)$$

$$c_n = 1/T_s \int_{-T_s/2}^{T_s/2} s_\delta(t) e^{-j2\pi f_s n t} dt = 1/T_s = f_s \quad (5)$$

Calculamos ahora la transformada de Fourier de (4), utilizando la propiedad de desplazamiento en frecuencia:

$$S_\delta(f) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n f_s) \quad (6)$$

El resultado obtenido en la ecuación (6) muestra que la transformada de Fourier de un tren periódico de deltas de Dirac repetidas cada  $T_s$  segundos y amplitud unidad es otro tren periódico de deltas de Dirac en el dominio de la frecuencia, repetidas cada  $f_s$  Hz y de amplitud  $f_s$ .

Visto esto, podemos calcular el espectro de la señal muestreada,  $x_\delta(t)$ :

$$X_\delta(f) = X_c(f) * S_\delta(f) = X_c(f) * f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n f_s) \quad (7)$$

$$X_\delta(f) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_c(f - n f_s) \quad (8)$$

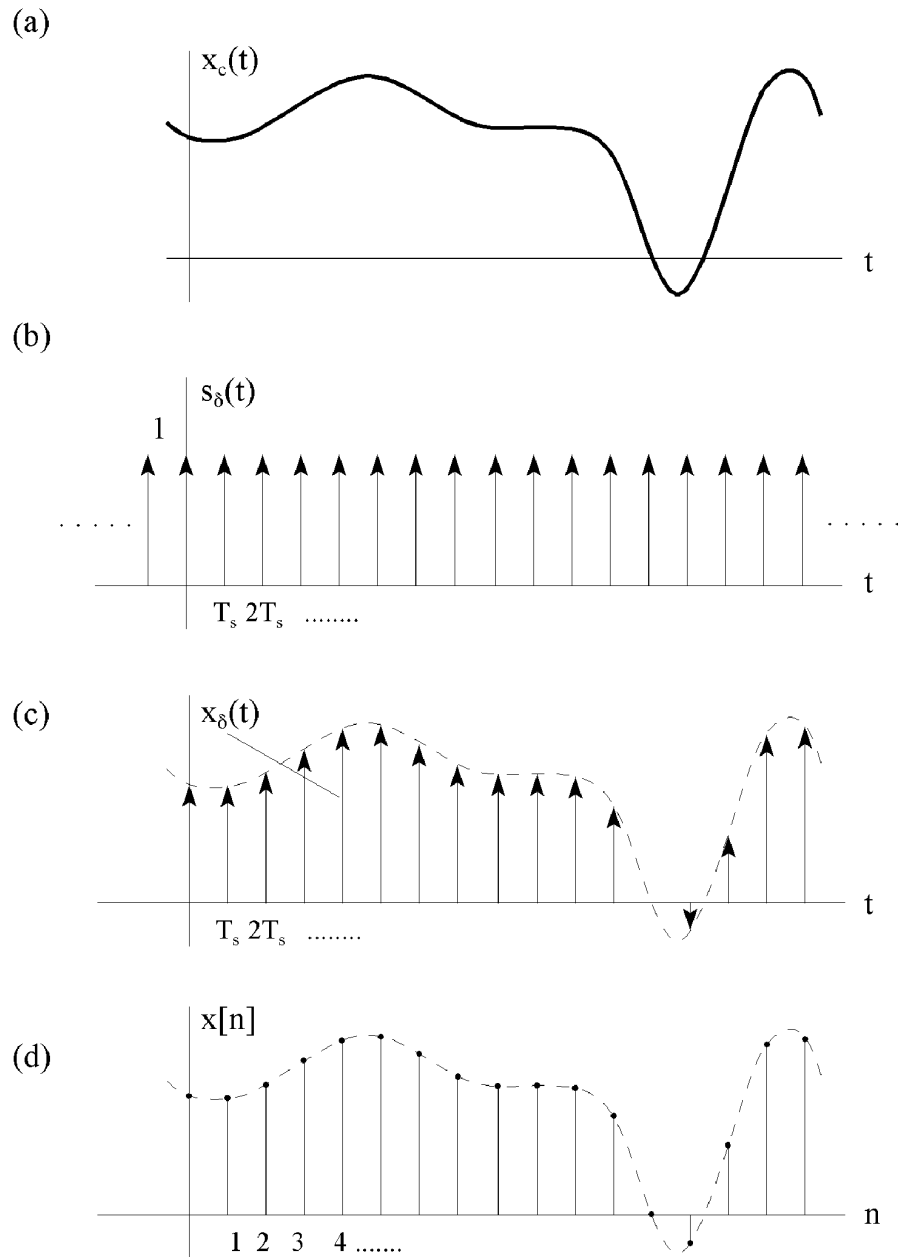


Figura 4: Proceso que sigue la señal en el conversor C/D.

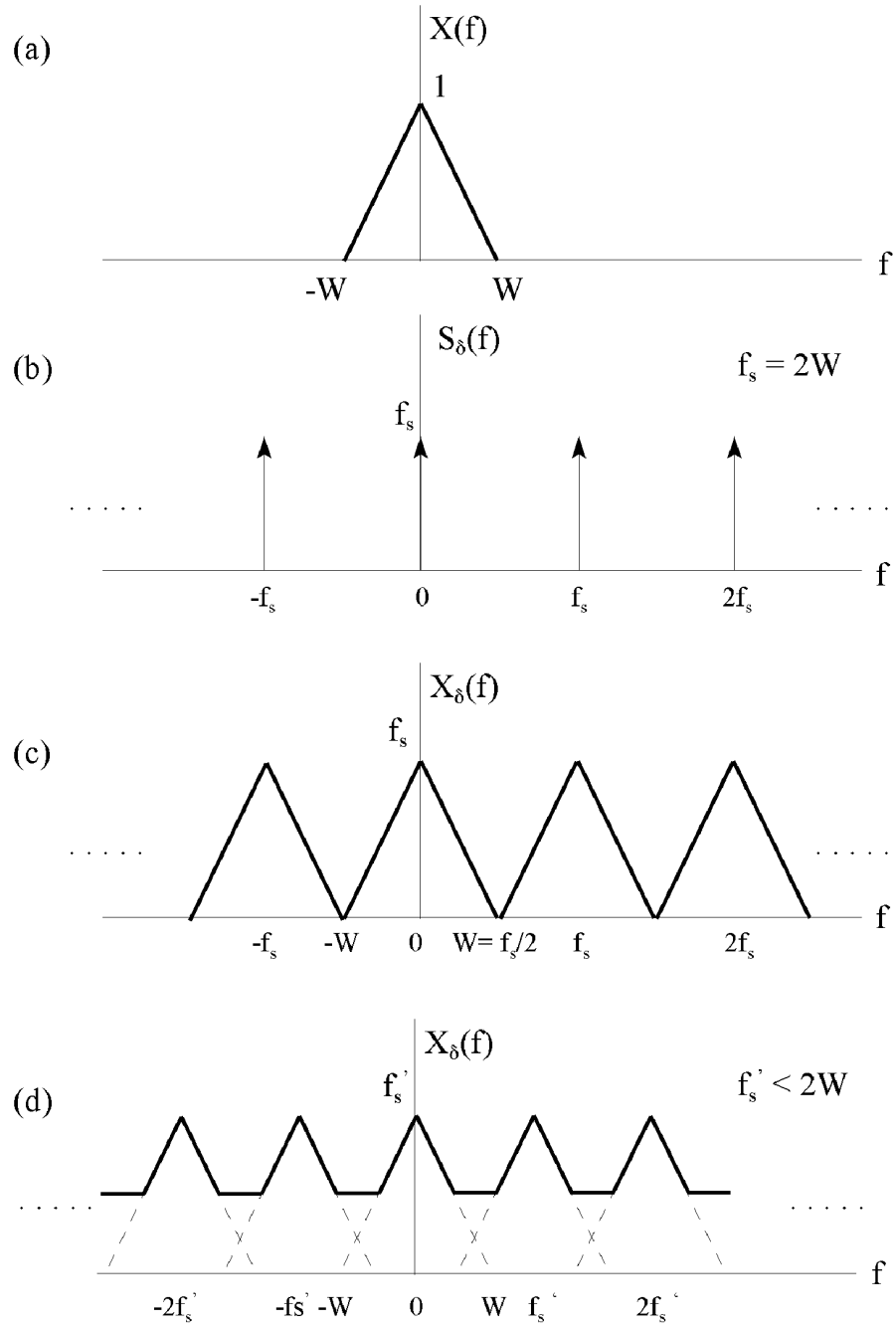


Figura 5: El muestreo en el dominio de la frecuencia.



De (8) se desprende que la transformada de Fourier de la señal muestreada  $x_\delta(t)$  consiste en infinitas copias (subespectros) del espectro de la señal analógica,  $X_c(f)$  (escaladas por  $f_s$ ), repetidas periódicamente cada  $f_s$  Herzios. Este resultado se puede observar en la figura 5 para una señal  $x_c(t)$  dada, de espectro  $X_c(f)$ . Si la señal  $x_c(t)$  es limitada en banda a  $W$  Hz, como es el caso de la figura, y atendiendo a los valores de  $W$  y  $f_s$ , se pueden dar dos situaciones. La primera, mostrada en la figura 5c, se dará cuando

$$f_s - W > W, \text{ o igualmente } f_s > 2W \quad (9)$$

En este caso las infinitas copias de  $X_c(f)$  que forman  $X_\delta(f)$  no se solapanán, y, por tanto, en cada múltiplo entero de  $f_s$  tendremos una réplica exacta del espectro de la señal analógica (salvo en su amplitud). Si ahora hiciéramos pasar  $x_\delta(t)$  por un filtro paso bajo ideal  $H_r(f)$  de ancho de banda  $B$  tal que  $W < B < (f_s - W)$  eliminaríamos todos los subespectros en  $X_\delta(f)$  salvo el centrado en  $f = 0$  Hz, por lo que, a su salida, la señal recuperada  $x_r(t)$  sería exactamente igual a la señal analógica,  $x_c(t)$ .

Sin embargo, si  $f_s < 2W$  (figura 5d) los subespectros se solapanán y se sumarán (en módulo y fase) en la resultante  $X_\delta(f)$ , por lo que  $x_c(t)$  no podrá ser recuperada exactamente mediante un filtro paso bajo ideal, obteniéndose a la salida de éste una versión distorsionada de ella, tanto más cuanto mayor sea el solapamiento. Este fenómeno de solapamiento se denomina *aliasing*. Por supuesto, si la señal  $x_c(t)$  no es limitada en banda a  $W$  Hz, esto es, tiene un ancho de banda infinito (como siempre ocurre en realidad, pues recuérdese que toda señal de duración finita es ilimitada en banda) siempre se producirá el fenómeno de aliasing. Afortunadamente este problema no es tan grave, pues, en la práctica, cualquier señal tiene un contenido espectral extremadamente reducido por encima de determinada frecuencia (que depende de su naturaleza) lo cual hace que, escogiendo adecuadamente la frecuencia de muestreo, el problema de aliasing sea insignificante. Incluso, para mayor exactitud, podemos limitar en banda artificialmente a la señal  $x_c(t)$  antes de muestrearla (despreciando la porción más insignificante de su espectro), de esta forma eliminando por completo el aliasing. Esta técnica será vista en el apartado 7.

Podemos expresar analíticamente el resultado anterior. Sea  $x_c(t)$  una señal de energía finita limitada en banda a  $W$  Hz. La función de transferencia de un filtro paso bajo ideal de ancho de banda  $B$  será:

$$H_r(f) = K \prod \left( \frac{f}{2B} \right) e^{-j\Omega t_0} \quad (10)$$

Por tanto el espectro  $X_r(f)$  de la señal recuperada a la salida del filtro será:

$$X_r(f) = H_r(f) X_\delta(f) = K \prod \left( \frac{f}{2B} \right) e^{-j\Omega t_0} \cdot f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_c(f - n f_s) \quad (11)$$

Calculando la transformada inversa de Fourier de (11) obtenemos la señal  $x_r(t)$  correspondiente:

$$x_r(t) = x_\delta(t) * h_r(t) \quad (12)$$

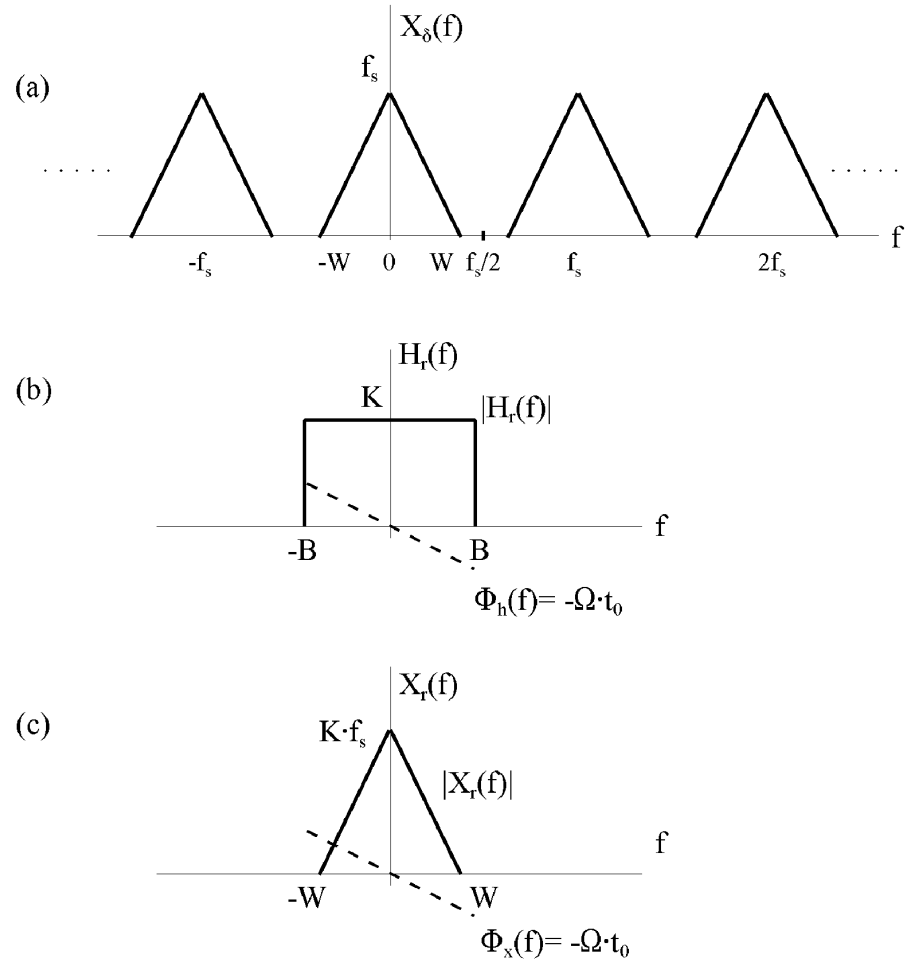


Figura 6: Recuperación de la señal a partir de sus muestras, mediante un filtro paso bajo ideal.

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT_s) \delta(t - nT_s) * 2BK \operatorname{sinc}[2B(t - t_0)] \quad (13)$$

$$x_r(t) = 2BK \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT_s) \cdot \operatorname{sinc}[2B(t - t_0 - nT_s)] \quad (14)$$

Si se cumple que  $f_s > 2W$  y, además, el filtro cumple que  $W < B < (f_s - W)$  a su salida tendremos:

$$X_r(f) = K f_s X_c(f) e^{-j\Omega t_0} \quad (15)$$

$$x_r(t) = K f_s x_c(t - t_0) \quad (16)$$

En (16) se comprueba que la señal recuperada  $x_r(t)$  es una versión de  $x_c(t)$ , idéntica, aunque retardada  $t_0$  segundos y escalada por un factor  $K f_s$  (obsérvese su espectro,  $X_r(f)$ , en la figura 6).

Si escogemos la frecuencia de muestreo  $f_s = 1/T_s = 2W$ , esto es, exactamente igual al doble del ancho de banda de la señal y un filtro tal que:

$$\begin{aligned} t_0 &= 0 \\ B &= W \\ K &= T_s = 1/f_s \end{aligned} \quad (17)$$

la ecuación (14) se simplifica y pasa a ser:

$$x_r(t) = x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(n/2W) \cdot \operatorname{sinc}[2W(t - n/2W)] \quad (18)$$

en donde  $x_r(t) = x_c(t)$  es un desarrollo en serie de la familia de funciones ortogonales  $\operatorname{sinc}[2W(t - n/2W)]$  cuyos coeficientes son las muestras de ella misma tomadas a intervalos regulares de  $T_s = 1/2W$  segundos. Este desarrollo prueba que, si  $x_c(t)$  es una señal limitada en banda a  $W$  Hz queda unívocamente descrita a partir de sus muestras  $\{x_c(nT_s)\}$  tomadas a intervalos regulares de  $T_s \leq 1/2W$  segundos y, por tanto, podemos reconstruirla exactamente a partir de éstas. Por el contrario, en el caso de que exista aliasing, bien por que  $T_s > 1/2W$ , bien por que la señal no es limitada en banda, es (14) la expresión genérica de  $x_r(t)$ . En este caso no es posible reconstruir la señal a partir de sus muestras, pues no existe el desarrollo en serie de funciones ortogonales que garantiza que aquella quede unívocamente descrita a partir de éstas.

La ecuación (18) es la base del **Teorema de Muestras** de Nyquist, que afirma que *toda señal de energía finita y de banda limitada a  $W$  Hz puede expresarse de modo único en función de sus muestras, tomadas a intervalos regulares  $T_s$ , siempre que  $1/T_s = f_s \geq 2W$*  (siendo  $W$  la máxima frecuencia espectral de la señal). A la frecuencia  $f_s = 2W$  se le llama **frecuencia de Nyquist** y al intervalo de muestreo,  $T_s$ , **intervalo de Nyquist**.

Si una señal limitada en banda a  $W$  se muestrea a  $f_s \geq 2W$ , se dice que se cumple el **criterio de Nyquist**.

Aunque no lo demostraremos, para señales de potencia media finita y, por tanto, energía infinita, el teorema de muestras es igualmente válido, aunque matizando que la frecuencia de muestreo ha de ser **superior** a la frecuencia de

Nyquist, no siendo válido el signo igual en este caso. Esto es, ha de cumplirse que  $1/T_s = f_s > 2W$ .

### 3 Relación entre las transformadas de Fourier de señales y secuencias

El estudio espectral del muestreo se ha realizado desde una perspectiva analógica. Llegados a este punto es necesario relacionar el espectro de la secuencia  $x[n]$  obtenida con el de la señal analógica muestreada.

Sea una señal continua  $x_c(t)$ . Su espectro,  $X_c(f)$ , estará relacionado con ella mediante la transformada de Fourier de tiempo continuo:

$$x_c(t) \longleftrightarrow X_c(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t) e^{-j\Omega t} dt \quad (19)$$

Por otra parte, dada la secuencia  $x[n]$ , su espectro,  $X(e^{j\omega})$ , estará relacionado con ella mediante la transformada de Fourier de tiempo discreto:

$$x[n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad (20)$$

Si muestreamos  $x_c(t)$  con una frecuencia de muestreo  $f_s = 1/T_s$  obtendremos la señal muestreada  $x_\delta(t)$ , cuyo espectro, como ya sabemos (8), será:

$$X_\delta(f) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_c(f - nf_s) \quad (21)$$

Si recordamos (2) y (3) podemos derivar una expresión alternativa a (21):

$$X_\delta(f) = X(e^{j\Omega T_s}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT_s) e^{-j\Omega n T_s} \quad (22)$$

A la función  $X(e^{j\Omega T_s})$  se le denomina *transformada de Fourier de la secuencia en unidades específicas de frecuencia*, y verifica la igualdad:

$$X(e^{j\Omega T_s}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT_s) e^{-j\Omega n T_s} = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_c(f - nf_s) \quad (23)$$

Si en  $X(e^{j\Omega T_s})$  hacemos la sustitución  $\Omega T_s = \omega$  tendremos:

$$X(e^{j\Omega T_s})|_{\Omega T_s = \omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT_s) e^{-j\omega n} \quad (24)$$

expresión idéntica a (20) ya que  $x_c(nT_s) = x[n]$ . Por tanto, advirtiéndose que  $\Omega = 2\pi f$ , la transformada de Fourier de la secuencia  $x[n]$  guardará con la transformada de Fourier de la señal analógica la relación:

$$X(e^{j\omega}) = X(e^{j\Omega T_s})|_{\Omega T_s = \omega} = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_c(f/f_s - n) \quad (25)$$

De (25) se deduce que la transformada de Fourier de una secuencia es igual a la transformada de Fourier de la señal muestreada de la que se obtuvo, esto es, infinitas copias de  $X_c(f)$  repetidas y escaladas, pero aplicando sobre ella una normalización en el eje de frecuencias tal que su periodicidad pase de ser  $f_s$  a ser la unidad (su periodicidad será  $2\pi$  si la representamos frente al eje  $\omega$ ). Este razonamiento se encuentra ilustrado en la figura 7 y concuerda absolutamente con el hecho de que una secuencia es una sucesión numérica, en la que, a priori, no existe información sobre su frecuencia de muestreo, ni siquiera de si fue obtenida por muestreo o fue generada artificialmente. La transformada de Fourier en unidades específicas de frecuencia se puede ver como la transformada de Fourier de la secuencia una vez se le ha incorporado la frecuencia de muestreo, siendo por ello idéntica, sin ninguna normalización, a la de la señal muestreada. Lo anterior es válido independientemente de si se verifica o no el criterio de Nyquist en el muestreo.

Solamente si se verifica el criterio de Nyquist (señal limitada en banda a  $W$  Hz;  $f_s \geq 2W$ ) y, por tanto, no existe aliasing, es posible invertir la relación (25), derivando una expresión del espectro de la señal analógica en función del espectro de la secuencia:

$$X_c(f) = \begin{cases} T_s X(e^{j\Omega T_s}) & |\Omega| < \pi/T_s, (|f| < f_s/2) \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (26)$$

Lógicamente, el espectro de la señal analógica se obtiene a partir del espectro de la secuencia en unidades específicas de frecuencia simplemente eliminando todos los subespectros que la componen excepto el centrado en  $f = 0$  Hz y finalmente escalando éste por  $T_s$ .

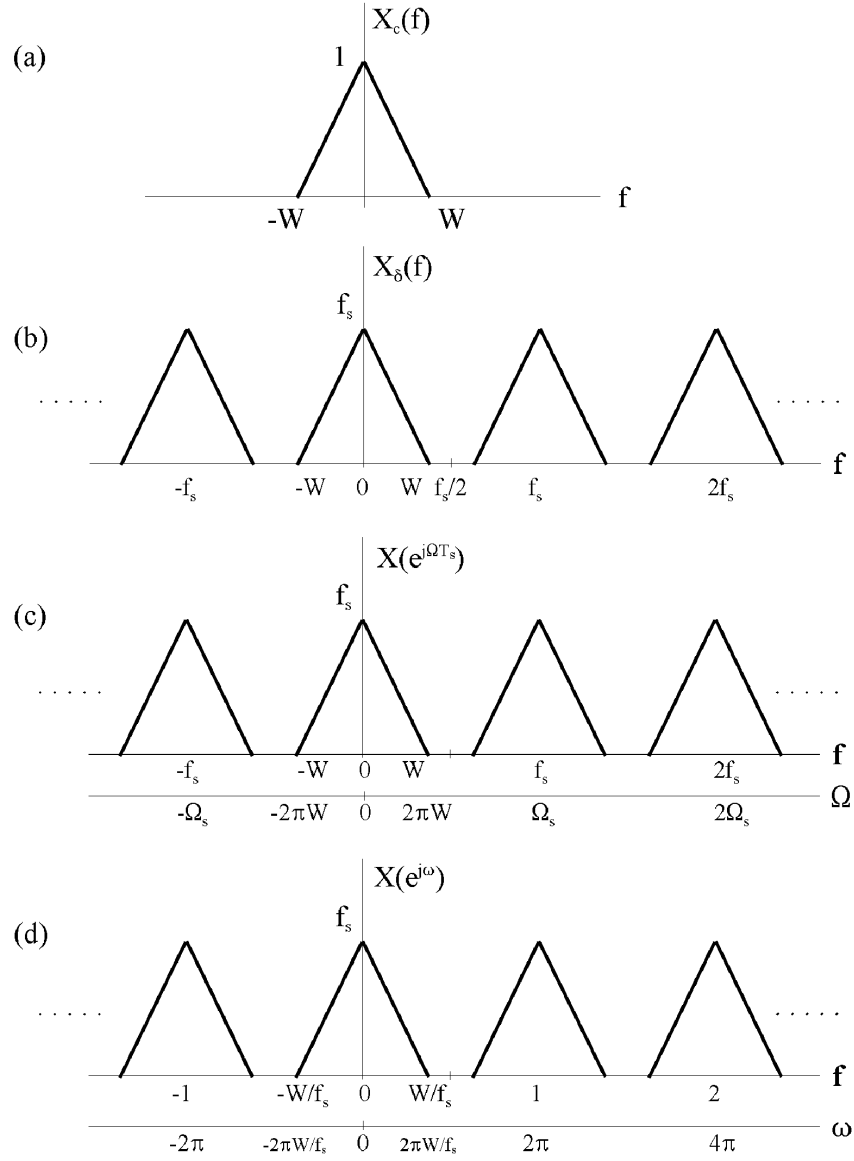


Figura 7: (a).- Espectro de la señal continua. (b).- Espectro de la señal muestreada. (c).- Espectro de la secuencia en unidades específicas de frecuencia. (d).- Espectro de la secuencia.

## 4 Reconstrucción de una señal a partir de sus muestras

Si analizamos la ecuación (18) vemos que  $x_c(t)$  se obtiene interpolando funciones *sinc* ponderadas por  $x_c(n/2W)$ , es decir, sus propias muestras. En este caso estamos muestreando exactamente a la frecuencia de Nyquist ( $f_s = 2W$ ) pero el teorema es válido también muestreando por encima de esta frecuencia, es decir:  $f_s = 1/T_s \geq 2W$ . En este caso (18) se convierte en:

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT_s) \cdot \text{sinc}\left[\frac{1}{T_s}(t - nT_s)\right] \quad (27)$$

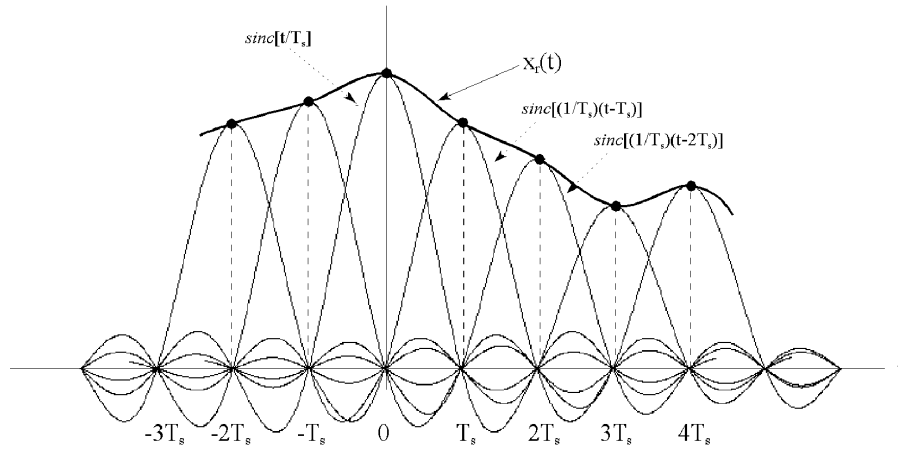


Figura 8: Construcción de la señal continua mediante la interpolación de funciones *sinc*.

A la ecuación (27) se la conoce como *fórmula de interpolación*, y a la función  $\text{sinc}[\frac{1}{T_s}(t - nT_s)]$  se le llama *impulso interpolador*. Como se observa en la figura 8, la *sinc* centrada en  $nT_s$  pasa por cero en todos los instantes de tiempo múltiplos positivos y negativos de  $T_s$ , excepto en  $t = nT_s$ . En cada uno de estos instantes de tiempo todas las *sinc* que se suman en (27) se anulan salvo una, justamente aquella cuyo coeficiente de ponderación es la muestra de  $x_c(t)$  en dicho instante. Por ello, y como corolario del Teorema de Muestras se puede afirmar que, *dada la colección discreta de valores  $x_c(nT_s)$  existe una función  $x_c(t)$  y sólo una, de banda limitada a  $W \leq f_s/2 = 1/2T_s$  que pasa por todos los puntos dados*, y se construye por medio de la ecuación (27).

A partir del desarrollo de funciones ortogonales (27) se puede demostrar que la energía de  $x_c(t)$  puede también expresarse en función de sus muestras. Esto es:

$$E_{x_c} = \int_{-\infty}^{\infty} |x_c(t)|^2 dt = T_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_c(nT_s)|^2 \quad (28)$$

De todo lo anterior podemos inferir como sería un sistema ideal capaz de reconstruir una señal analógica  $x_c(t)$  a partir de una secuencia numérica  $x[n]$ , ob-

tenida de ella muestreo. A este sistema se le denomina *conversor D/C* (discreto-continuo). El diagrama de bloques del conversor D/C se representa en la figura 9. Consta de un primer subsistema que convierte la secuencia numérica en un tren de impulsos (deltas de Dirac), cada uno de ellos con un área de valor igual a la amplitud de la muestra que le corresponde. A este bloque entra, por una parte, la secuencia  $x[n]$  y por otra el intervalo de muestreo  $T_s$ . A la salida habremos reconstruido la señal analógica muestreada  $x_\delta(t)$ . El segundo bloque es un filtro paso bajo ideal de reconstrucción, conocido como *filtro interpolador* cuya función de transferencia  $H_r(f)$  será:

$$H_r(f) = T_s \prod \left( \frac{f}{f_s} \right) \quad (29)$$

Este filtro sustituye cada impulso de la señal muestreada por un *sinc* de amplitud igual a la de la muestra correspondiente,  $x_c(nT_s)$ , como se recoge en (27), obteniéndose a su salida  $x_r(t) = x_c(t)$ . Visto en el dominio de la frecuencia, el filtro elimina todos los subespectros de  $X_\delta(f)$  excepto el centrado en  $f = 0$  Hz, como se vio en (15).

Los bloques que constituyen el conversor D/C no son realizables físicamente, por lo que habrán de ser suplidos por otros de comportamiento aproximado. Por ejemplo, aun manteniendo su idealidad, el filtro de reconstrucción siempre producirá retardo y, posiblemente, la amplitud de su función de transferencia no sea igual a  $T_s$ , por lo que la salida del conversor vendrá dada por (15) y (16) esto es,  $x_r(t)$  será una versión no distorsionada (retardada y escalada, aunque exactamente de la misma forma) de  $x_c(t)$  siempre que se cumpla el criterio de Nyquist. Pero, en general, la secuencia que entra al conversor D/C pudiera ser no limitada en banda, por lo cual no podemos afirmar que se cumplan las relaciones (15) y (16). Por ello  $X_r(f)$  se suele dejar indicado en función de la característica del filtro de reconstrucción:

$$X_r(f) = H_r(f)X(e^{j\Omega T_s}) \quad (30)$$

La ecuación (30) describe el comportamiento del conversor D/C en el dominio de la frecuencia.

Finalmente, es importante recalcar que la secuencia  $x[n]$  a la entrada del conversor no aporta ninguna información sobre la frecuencia de muestreo a la que fue obtenida; incluso podría ser una sucesión de números generada artificialmente (no obtenida por muestreo). Por ello es necesario conocer a priori el valor de  $T_s$  si se quiere reconstruir correctamente  $x_c(t)$ , ya que, en caso de introducir un valor diferente, a la salida del conversor no obtendríamos  $x_c(t)$  sino otra señal (de la misma forma aunque de distinta duración). Esta propiedad es utilizada en ocasiones intencionadamente para generar distintas señales a partir de una misma secuencia.

## 5 Tratamiento discreto de señales analógicas

El proceso de señales de tiempo continuo o analógicas, como ya se ha visto en capítulos anteriores, se lleva a cabo mediante sistemas, generalmente lineales e invariantes, denominados filtros. Un filtro analógico es usualmente un circuito



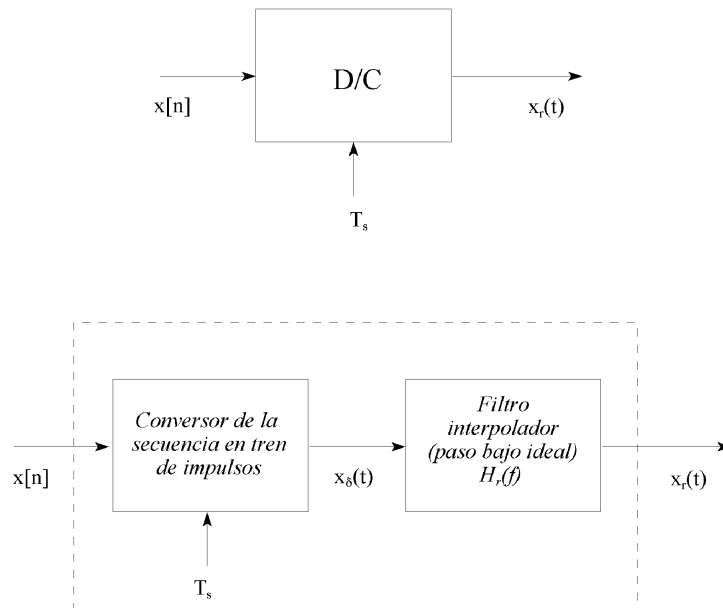


Figura 9: Diagrama de bloques del conversor Discreto-Continuo (conversor D/C).

eléctrico de parámetros concentrados, compuesto de bobinas (inductancias) resistencias y condensadores (capacitancias) y los correspondientes hilos o pistas de interconexión entre éstos.

Debido a su naturaleza física, los filtros presentan algunos inconvenientes:

- Tolerancia en los valores de los componentes. Cuando se diseña un filtro analógico se obtienen valores para los distintos componentes que son irrealizables con la precisión matemática que exige el resultado. En la implementación real hay que utilizar componentes con un determinado margen de tolerancia, con el consiguiente empeoramiento de las prestaciones.
- Alteración de los valores de los componentes. Los valores de las capacidades, inductancias y resistencias son sensibles a variaciones en las condiciones ambientales de temperatura, humedad, presión, golpes, etc. Además, sus valores se alteran levemente con el paso del tiempo.
- No son programables. Una vez diseñado un filtro no se pueden cambiar sus características, es necesario construir otro.
- Son costosos. Construir un filtro analógico tiene un coste, que además depende de la calidad que se exija en su diseño. A mayores prestaciones, mayor número de componentes y por tanto mayor coste.

A pesar de los inconvenientes anteriores, los filtros analógicos son insustituibles en multitud de situaciones, como por ejemplo cuando las señales que se manejan son de frecuencias elevadas o tienen gran ancho de banda.

Una de las principales aplicaciones del tratamiento discreto de secuencias utilizando sistemas se halla en el proceso de señales analógicas. Ello se lleva a cabo sustituyendo el filtro analógico por el sistema de la figura 10b.

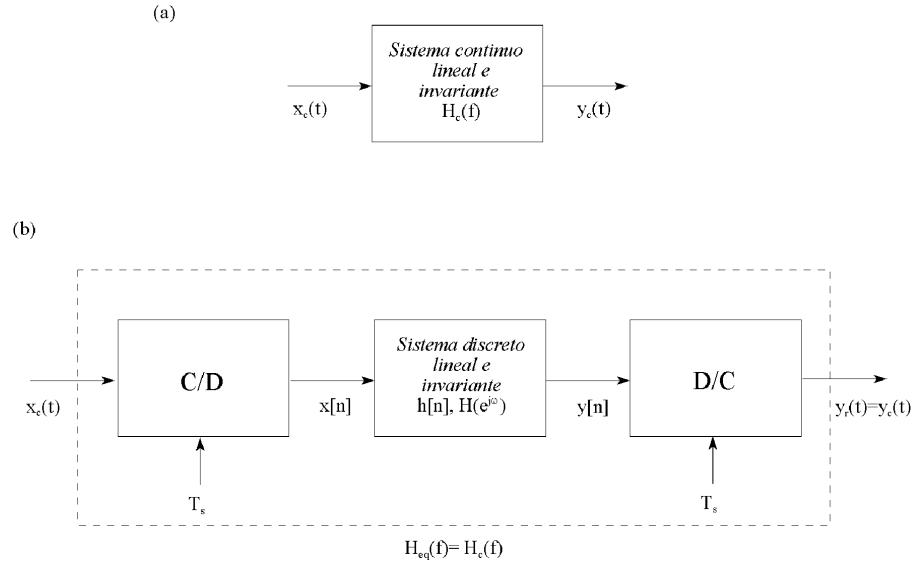


Figura 10: Modelo ideal del sistema empleado en la realización de tratamiento discreto sobre señales continuas.

La señal analógica  $x_c(t)$  es convertida en secuencia  $x[n] = x_c(nT_s)$ , al hacerla pasar por un conversor C/D, como el estudiado en el apartado 1. Esta secuencia entrará en tiempo real (al ritmo impuesto por la frecuencia de muestreo) en el sistema discreto, el cual la transformará en otra secuencia,  $y[n]$ . Finalmente, el conversor D/C creará de nuevo una señal de tiempo continuo  $y_r(t)$ , de la forma:

$$y_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \cdot \text{sinc}\left[\frac{1}{T_s}(t - nT_s)\right] \quad (31)$$

Por simplicidad se ha supuesto que las frecuencia de muestreo de ambos conversores es la misma, lo que no es necesario, como más adelante se verá.

El espectro de la señal analógica a la salida será:

$$Y_r(f) = H_r(f)Y(e^{j\Omega T_s}) \quad (32)$$

Suponiendo que  $y_r(t)$  va a ser limitada en banda (tomaremos las precauciones para que la señal a la entrada del sistema lo sea y que además éste tenga un comportamiento lineal e invariante) podemos desarrollar la relación anterior y escribir:

$$Y_r(f) = \begin{cases} T_s Y(e^{j\Omega T_s}) & |\Omega| < \pi/T_s, (|f| < f_s/2) \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (33)$$

Todavía no hemos hablado de las características del sistema discreto. El sistema más simple sería el sistema identidad, es decir  $y[n] = x[n]$ . Este caso en realidad ya ha sido estudiado; al poner un conversor D/C a la salida de un conversor C/D lo que conseguimos (siempre que  $x_c(t)$  sea limitada en banda y si cumplimos el criterio de Nyquist) es volver a recuperar la señal analógica que teníamos a la entrada, esto es  $y_r(t) = x_r(t) = x_c(t)$ , o, en el peor de los

casos, una versión no distorsionada de la misma. No hay que perder de vista que nuestro objetivo es sustituir el sistema analógico de la figura 10a, por lo que el sistema discreto nunca será el sistema ideal.

Como se ha dicho, los sistemas analógicos que habitualmente se emplean son sistemas lineales e invariantes, por lo que será esta clase de sistemas los que estudiemos, aunque no tiene por qué existir esta restricción. En los casos de sistemas no lineales o que varían con el tiempo es bastante difícil obtener una relación entre los espectros de las señales a la entrada y la salida del sistema.

Si el sistema discreto es lineal e invariante, -un filtro discreto, como el de la figura 10b-, con respuesta impulsiva  $h[n]$  y función de transferencia  $H(e^{j\omega})$  se cumplirá:

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \quad (34)$$

Combinando (32) y (34) obtenemos:

$$Y_r(f) = H_r(f)H(e^{j\Omega T_s})X(e^{j\Omega T_s}) \quad (35)$$

$H(e^{j\Omega T_s})$  es la función de transferencia del filtro discreto, en unidades específicas de frecuencia, a la frecuencia de muestreo  $f_s$  dada.

Si  $x_c(t)$  es limitada en banda a  $W \leq f_s/2$  el filtro de reconstrucción ideal (29) cancela todos los subespectros de  $X(e^{j\Omega T_s})$  excepto el centrado en el origen, obteniéndose:

$$Y_r(f) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T_s})X_c(f) & |\Omega| < \pi/T_s, (|f| < f_s/2) \\ 0 & |\Omega| \geq \pi/T_s, (|f| \geq f_s/2) \end{cases} \quad (36)$$

o, lo que es lo mismo:

$$Y_r(f) = H_{eq}(f)X_c(f) \quad (37)$$

y

$$H_{eq}(f) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T_s}) & |\Omega| < \pi/T_s, (|f| < f_s/2) \\ 0 & |\Omega| \geq \pi/T_s, (|f| \geq f_s/2) \end{cases} \quad (38)$$

$H_{eq}(f)$  es la *función de transferencia analógica equivalente* del sistema de la figura 10b la que, como se observa en (38), si se cumplen las condiciones adecuadas, será idéntica a un sólo período de la función de transferencia del filtro discreto.

Si la señal  $x_c(t)$  no es limitada en banda, o no se cumple el criterio de Nyquist en el muestreo, el sistema resultante **no tendrá un comportamiento lineal e invariante**, ya que no se puede dar el paso de (35) a (36), no pudiendo definirse una función de transferencia analógica equivalente.

Vamos a considerar un ejemplo de sistema lineal e invariante discreto: el filtro paso bajo ideal. Como se ha visto en el capítulo tercero, Su función de transferencia, representada en la figura 11 es:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{\omega - 2\pi n}{2\omega_c}\right) \quad \omega_c \leq \pi \quad (39)$$

La función de transferencia analógica equivalente, suponiendo que la entrada sea limitada en banda y se cumpla el criterio de Nyquist se puede calcular a partir de (38) y será:

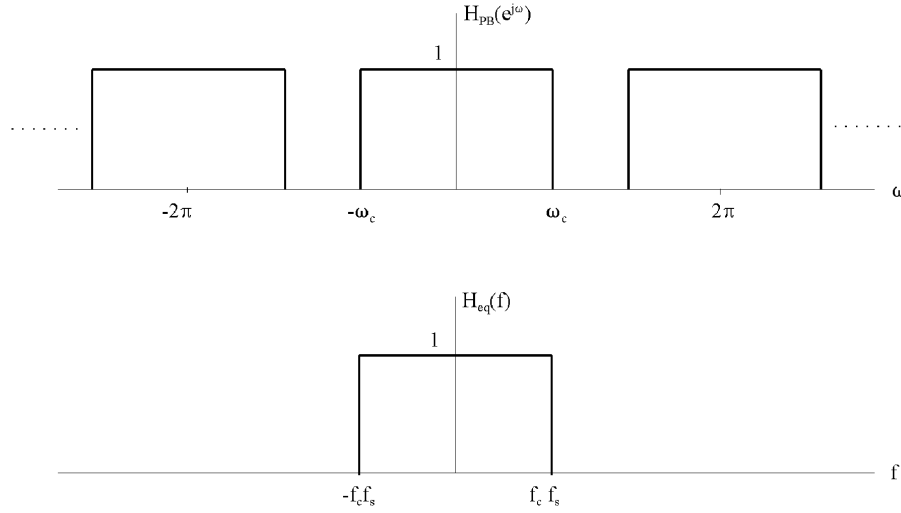


Figura 11: Función de transferencia del filtro discreto paso bajo ideal y de su función de transferencia analógica equivalente.

$$H_{eq}(f) = \begin{cases} 1 & |f| < f_c f_s \\ 0 & |f| \geq f_c f_s \end{cases} \quad (40)$$

En la figura 12 se ilustra el filtrado paso bajo de una señal analógica. Nótese que, como resultado de variar la frecuencia de muestreo  $f_s$ , el ancho de banda del filtro analógico equivalente también variaría.

Si enfocamos el problema desde el punto de vista de diseño, la función de transferencia del filtro discreto que habría que implementar para suplir a un filtro analógico con una  $H_c(f)$  dada, la obtendremos invirtiendo (38) y haciendo  $H_c(f) = H_{eq}(f)$ .

$$H(e^{j\omega}) = H_c(f/f_s) \quad |\omega| < \pi \quad (41)$$

sólo siempre y cuando se cumpla también que

$$H_c(f) = 0 \quad |f| \geq f_s/2 \quad (42)$$

recordando que en (41) se expresa sólo un periodo  $H(e^{j\omega})$  y que ésta se repite cada  $2\pi$  radianes.

La ecuación (42) indica que el filtro analógico tiene que ser también limitado en banda y cumplir el criterio de Nyquist para la frecuencia de muestreo elegida.

## 6 Alteración de la frecuencia de muestreo: diezmado e interpolación

En ciertas ocasiones es necesario alterar la frecuencia de muestreo de una señal discreta  $x[n] = x_c(nT_s)$ . Esto nos llevaría a obtener una nueva secuencia:

$$x'[n] = x_c(nT'_s) \quad (43)$$

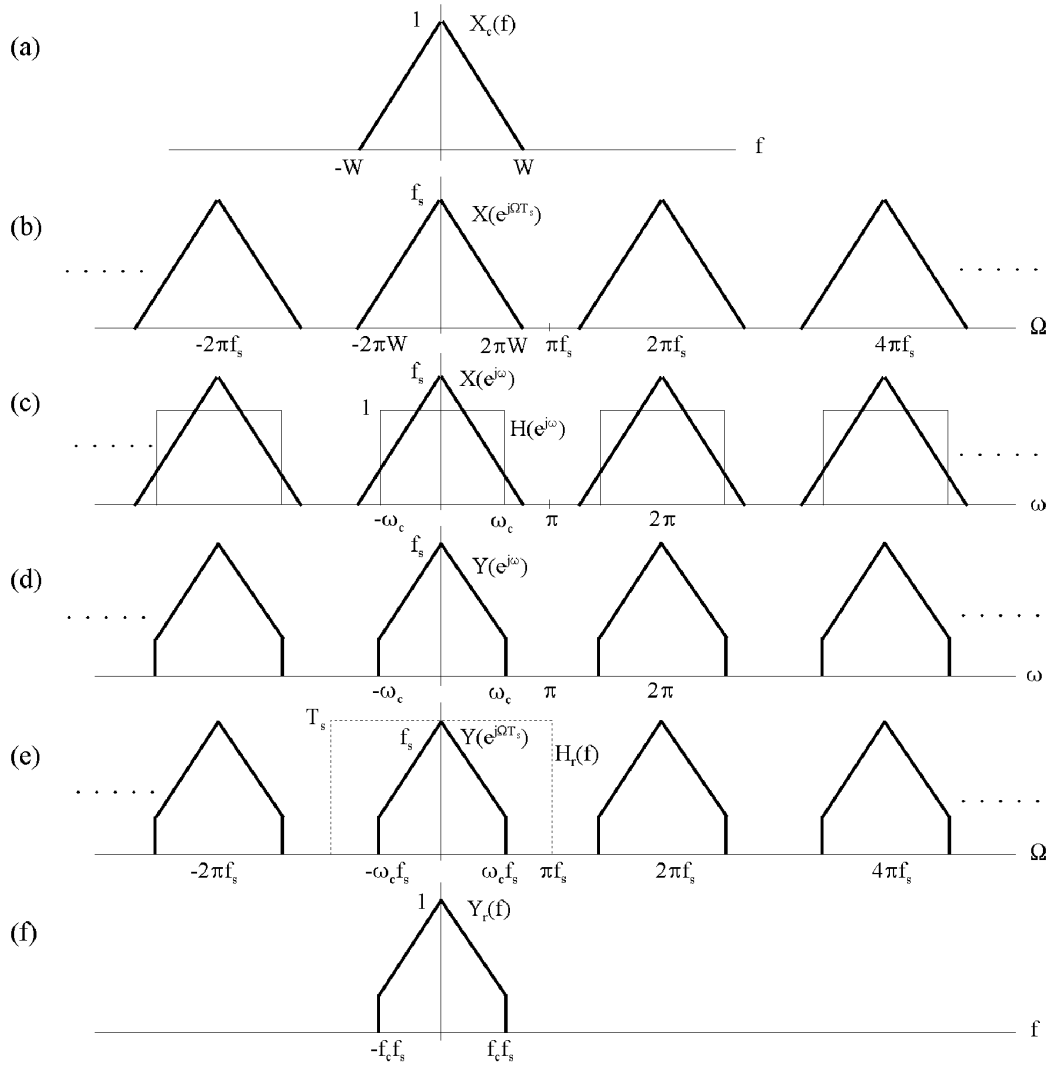


Figura 12: Filtrado paso bajo de una señal analógica utilizando un sistema discreto.

en donde  $T'_s \neq T_s$ . Si se pretende reducir la frecuencia de muestreo ( $T'_s > T_s$ ) se emplea la técnica de *diezmado*; mientras que elevarla ( $T'_s < T_s$ ) se consigue mediante la técnica de *interpolación*.

### 6.1 Reducción de la frecuencia de muestreo: diezmado

La técnica de *diezmado* consiste simplemente en, dada una secuencia  $x[n] = x_c(nT_s)$  obtenida por muestreo de una señal analógica  $x_c(t)$ , eliminar parte de sus muestras. Habitualmente se divide la frecuencia de muestreo por un número entero. En la figura 13 se representa un proceso de diezmado de una señal en el que la frecuencia de muestreo se ha dividido por tres, o lo que es equivalente, nos quedamos con una de cada tres muestras, desechando las demás. Dividir la frecuencia de muestreo por un número entero equivale a multiplicar su período por el mismo número, de tal forma que el nuevo período de muestreo será:  $T'_s = MT_s$ :

$$x_d(nT'_s) = x_c(nMT_s) \quad (44)$$

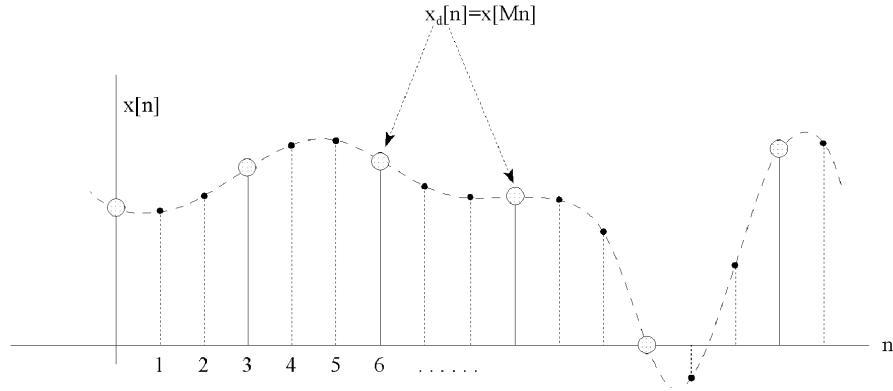


Figura 13: Proceso de diezmado de una secuencia ( $M=3$ ).

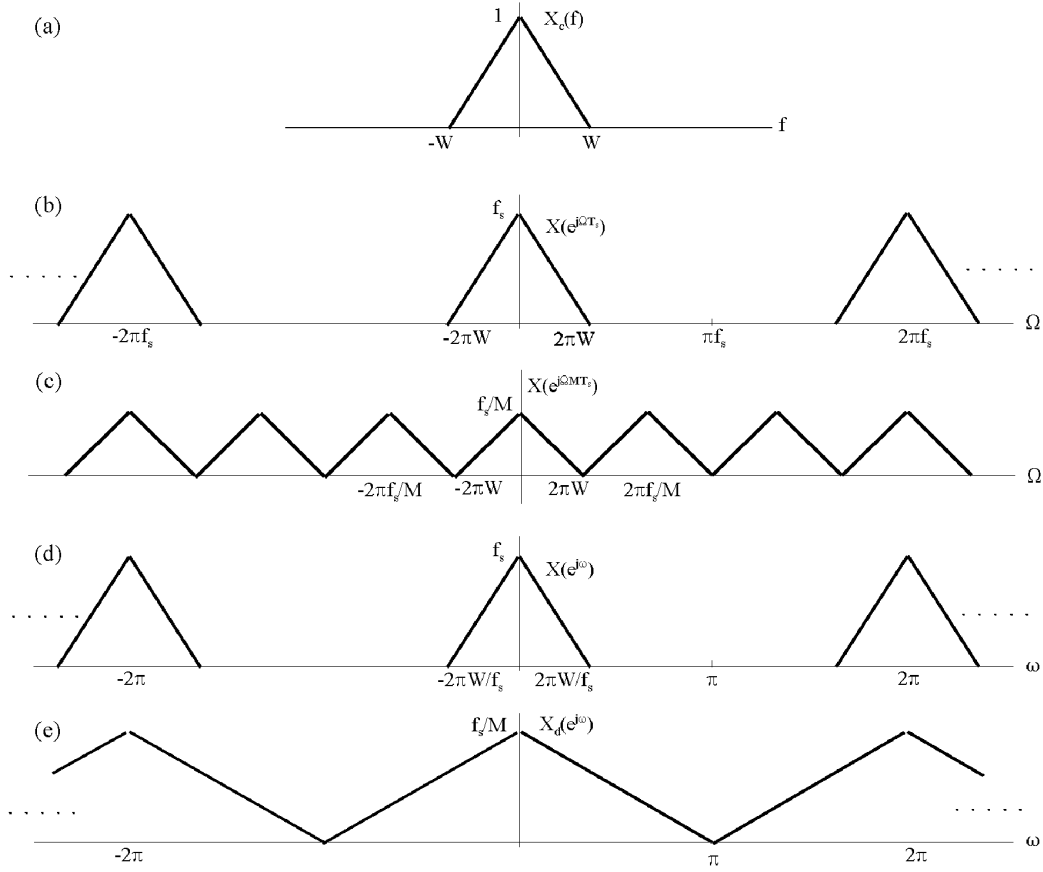
Si, analíticamente, la operación de diezmado la escribimos como:

$$x[n]|_{f_s} \longrightarrow x_d[n]|_{f'_s=f_s/M} \quad (45)$$

Entonces, combinando (44) y (45) tendremos que:

$$x_d[n] = x[Mn] \quad (46)$$

La secuencia obtenida,  $x_d[n]$  sigue siendo una representación discreta de la señal analógica  $x_c(t)$ , pero con sus muestras más espaciadas. Veamos que ocurre en el dominio de la frecuencia. Si  $x_c(t)$  es limitada en banda a  $W$  Hz y  $f'_s = f_s/M > 2W$ , esto es, a la nueva frecuencia de muestreo reducida se cumple todavía el criterio de Nyquist, podríamos todavía recuperar con exactitud la señal analógica a partir de  $x_d[n]$ . Dicho en otras palabras: la frecuencia de muestreo puede reducirse  $M$  veces si es  $M$  veces superior a la frecuencia de Nyquist de la señal analógica. En caso contrario se generaría aliasing entre los

Figura 14: Proceso de diezmado en el dominio de la frecuencia ( $M=3$ ).

subespectros de la señal muestreada que harían imposible el proceso de recuperación de la señal a partir de  $x_d[n]$ . En la figura 14 se ilustra el procedimiento completo de diezmado en el dominio de la frecuencia y se puede observar este hecho.

Los espectros en unidades específicas de frecuencia de la secuencias original y diezmada serán:

$$X(e^{j\Omega T_s}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n T_s} = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_c(f - n f_s) \quad (47)$$

$$X_d(e^{j\Omega T'_s}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d[n]e^{-j\Omega n T'_s} = f'_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_c(f - n f'_s) \quad (48)$$

Conocida la relación existente entre la secuencia diezmada y la original, dada en (46) tendremos:

$$X_d(e^{j\Omega T'_s}) = X_d(e^{j\Omega M T_s}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[Mn]e^{-j\Omega n M T_s}$$

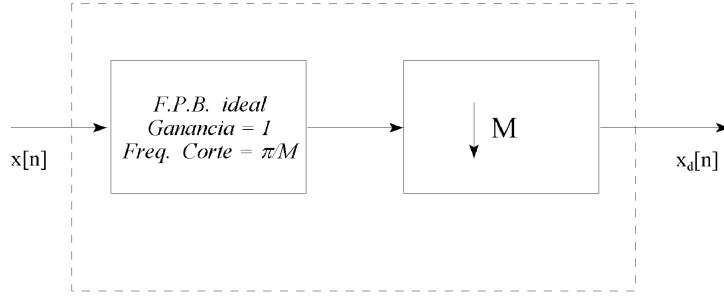


Figura 15: Sistema diezmador por M.

$$= f_s/M \sum_{-\infty}^{\infty} X_c(f - n f_s/M) \quad (49)$$

En las figuras 14b y 14c se pueden observar las diferencias entre los espectros de las secuencias original (47) y diezmada (49). Ambas consisten en infinitas copias del espectro de la señal analógica original, repetidas periódicamente a la frecuencia de muestreo para cada caso. Lógicamente, a mayor frecuencia de muestreo, más espaciadas estarán dichas copias. Obsérvese que, efectivamente, en caso de no cumplirse la condición  $f_s/M > 2W$  se produciría aliasing, pues los subespectros en la figura 14c se solaparían. A la vista de la figura se puede poner un espectro en función de otro:

$$\begin{aligned} X_d(e^{j\Omega MT_s}) &= 1/M \left( X(e^{j\Omega T_s}) + X(e^{j(\Omega - \frac{2\pi f_s}{M})T_s}) + \dots + X(e^{j(\Omega - \frac{2\pi f_s(M-1)}{M})T_s}) \right) \\ &= 1/M \sum_{k=0}^{M-1} X(e^{j(\Omega - \frac{2\pi f_s k}{M})T_s}) \end{aligned} \quad (50)$$

Finalmente, para eliminar la dependencia de la frecuencia de muestreo, calcularemos la transformada de Fourier de  $x_d[n]$ . Para ello en la ecuación (50) habremos de hacer  $\omega = \Omega MT_s$ . Despejando tendremos:

$$X_d(e^{j\omega}) = 1/M \sum_{k=0}^{M-1} X(e^{j(\frac{\omega - 2\pi k}{M})}) = f_s/M \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_c\left(\frac{f}{f_s/M} - n\right) \quad (51)$$

Es decir, debido al diferente escalado en frecuencias en  $x[n]$  y  $x_d[n]$  (sus espectros tienen ambos una periodicidad  $2\pi$ ), el espectro de la secuencia diezmada consiste en infinitas copias del de la señal analógica pero más anchas cada una de ellas, según se concluye de la comparación entre las figuras 14d y 14e. La condición que ha de cumplirse para que no exista aliasing se convierte ahora en:

$$\omega_W < \pi/M \quad (52)$$

Al circuito empleado para reducir por un factor M la frecuencia de muestreo se le denomina *diezmador* y se representa en la figura 15.

Para evitar que no se cumpla (52) y, por tanto, que aparezca aliasing es preferible hacer pasar primeramente a la secuencia de entrada por un filtro



discreto paso bajo ideal con una frecuencia de corte  $\omega_C = \pi/M$ . Si la secuencia cumplía de antemano (52) no ocurre nada; en caso contrario (casi siempre) el filtro producirá una distorsión sobre ella, al eliminar parte de su espectro, lo que impedirá recuperar con exactitud la señal analógica a la salida del diezmador. Esta distorsión será tanto mayor cuanto más energía de la secuencia se encuentre por encima de la frecuencia de corte del filtro, ya que éste no la dejará pasar. El segundo bloque del diezmador selecciona una de cada  $M$  muestras, eliminando las demás.

## 6.2 Incremento de la frecuencia de muestreo: interpolación

En este contexto, *Interpolar* consiste en encontrar muestras que no están presentes en la secuencia original e intercalarlas en su posición, lo que produce un incremento de la frecuencia de muestreo efectiva de ésta. Como vamos a ver, dada una secuencia  $x[n] = x_c(nT_s)$  en donde  $x_c(t)$  es limitada en banda a  $W$  y  $f_s > 2W$  es posible encontrar otra  $x_i[n] = x_c(nT'_s)$  en donde  $T'_s < T_s$  que también constituye una representación discreta exacta de la señal analógica, o, lo que es lo mismo: podemos predecir con exactitud los valores de muestras no presentes en la secuencia de partida. Generalmente se busca incrementar la frecuencia de muestreo por un número entero (o lo que es equivalente, dividir el período de muestreo por un número entero). En la figura 16 se representa un proceso de interpolación de una señal en el que la frecuencia de muestreo se ha incrementado en un factor de tres. Si el nuevo período de muestreo es  $T'_s = T_s/L$  tendremos:

$$x_i[n] = x_i(nT'_s) = x_c(nT_s/L) \quad (53)$$

La operación de interpolación se puede escribir analíticamente como:

$$x[n]|_{f_s} \longrightarrow x_i[n]|_{f'_s = Lf_s} \quad (54)$$

Los espectros en unidades específicas de frecuencia de la secuencias original e interpolada serán:

$$X(e^{j\Omega T_s}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega nT_s} = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_c(f - nf_s) \quad (55)$$

$$X_i(e^{j\Omega T'_s}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_i[n]e^{-j\Omega nT'_s} = f'_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_c(f - nf'_s) \quad (56)$$

Conocida la relación existente entre la secuencia interpolada y la original, dada en (53) podemos escribir:

$$\begin{aligned} X_i(e^{j\Omega T'_s}) = X_i(e^{j\Omega T_s/L}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT_s/L)e^{-j\Omega nT_s/L} \\ &= Lf_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_c(f - nLf_s) \end{aligned} \quad (57)$$

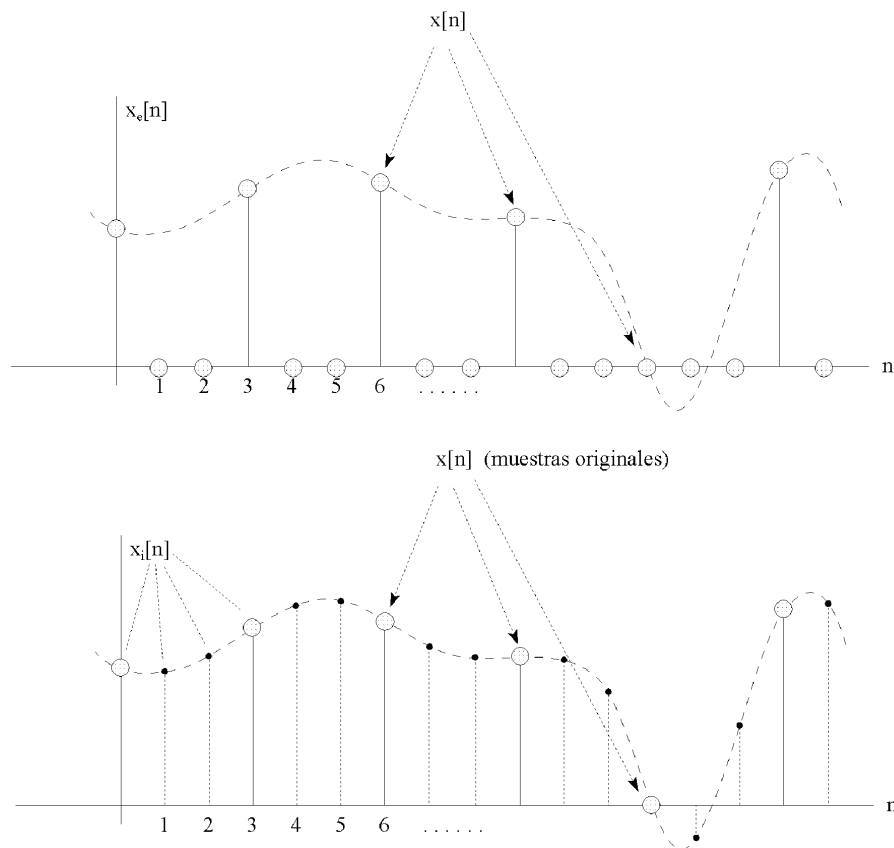


Figura 16: Proceso de interpolación de una secuencia ( $L=3$ ). (a).- Secuencia expandida. (b).- Secuencia interpolada (resultado final).

En las figuras 17a y 17d se muestran, para un caso concreto, los espectros de las secuencias original e interpolada. Nótese que  $x_c(t)$  debe ser limitada en banda y ha de estar muestreada a la frecuencia de Nyquist o superior para que no exista aliasing.

En el caso del diezmado, Para conseguir  $x_d[n]$  a partir de  $x[n]$  simplemente teníamos que eliminar muestras. En este caso el proceso no es tan directo y necesitamos primeramente formar una nueva secuencia *expandida*,  $x_e[n]$  (ver figura 16) de la siguiente forma:

$$x_e[n] = \begin{cases} x[n/L] & n = 0, \pm L, \pm 2L \dots \\ 0 & \text{resto de valores de } n \end{cases} \quad (58)$$

Suponiendo a  $x_e[n]$  una frecuencia de muestreo igual a la de la señal interpolada que buscamos, esto es, L veces superior a la frecuencia de muestreo original, su espectro en unidades específicas de frecuencia será:

$$\begin{aligned} X_e(e^{j\Omega T_s/L}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e[n] e^{-j\Omega n T_s/L} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j(\Omega n T_s/L) \cdot L} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n T_s} = X(e^{j\Omega T_s}) \end{aligned} \quad (59)$$

De la igualdad  $X_e(e^{j\Omega T_s/L}) = X(e^{j\Omega T_s})$  expresada en la ecuación anterior se deduce, como no podía ser de otra forma, que el hecho de insertar muestras nulas no altera las propiedades del espectro, aunque la frecuencia de muestreo se haya aumentado efectivamente L veces. Esto se puede observar en las figuras 17a y 17b.

Normalicemos ahora el eje de frecuencias, viendo cual es la transformada de Fourier de la secuencia  $x_e[n]$ . Para ello haremos  $\omega = \Omega T_s/L$ :

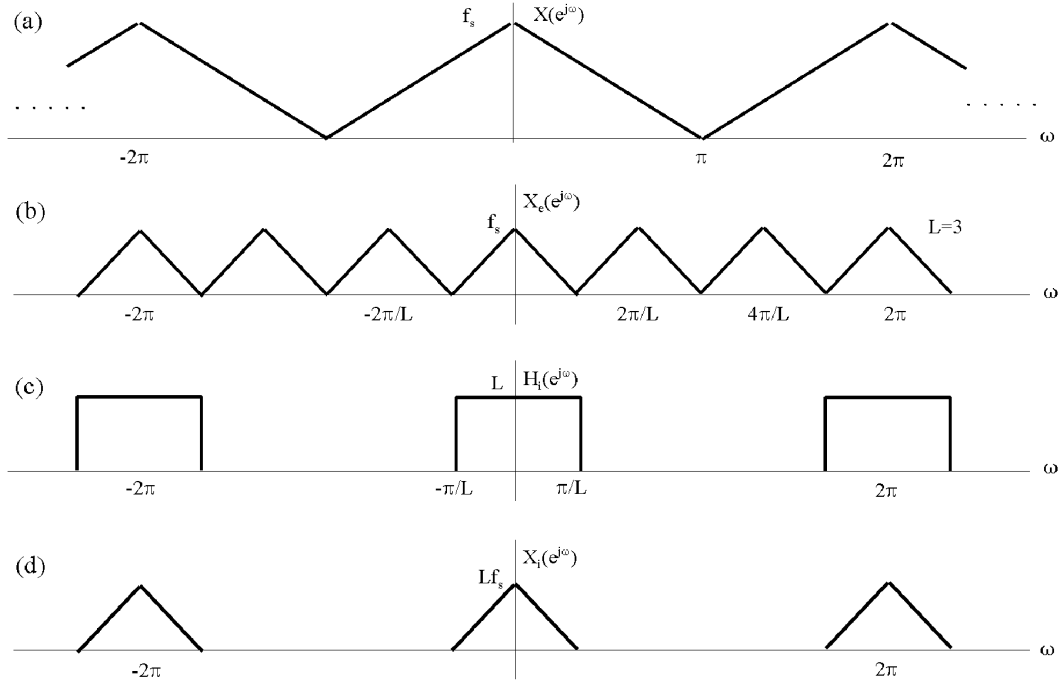
$$X_e(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n L} = X(e^{j\omega L}) \quad (60)$$

Por otra parte, la transformada de Fourier de  $x_i[n]$  será (figura 17d):

$$X_i(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT_s/L) e^{-j\omega n} = Lf_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_c(f/Lf_s - n) \quad (61)$$

En las figuras 17a y 17b se encuentran representados los espectros de las secuencias original y expandida, respectivamente. Como se puede observar, el espectro de la señal expandida es idéntico al de la señal original, aunque su periodicidad es  $2\pi/L$  como consecuencia de la compresión que produce la normalización en el eje de frecuencias angulares respecto a sus diferentes frecuencias de muestreo.

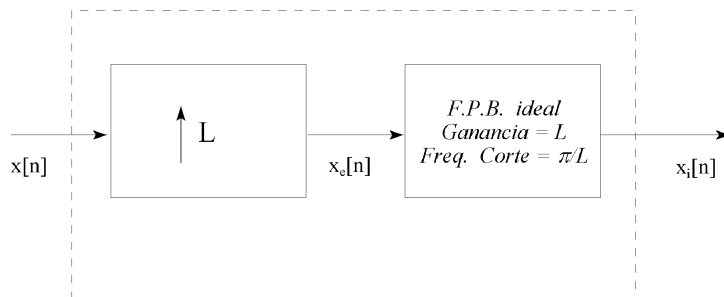
De la observación de las figuras 17b y 17d se deduce que, si hacemos pasar a  $x_e[n]$  por un filtro paso bajo ideal (figura 17c) con una frecuencia de corte  $\omega_C = \pi/L$  obtendremos  $x_i[n]$ , consiguiendo incrementar efectivamente la frecuencia

Figura 17: Proceso de interpolación en el dominio de la frecuencia ( $L=3$ ).

de muestreo y encontrando una representación discreta exacta de  $x_c(t)$ , a una frecuencia de muestreo  $L$  veces superior a la original.

En la figura 18 se representa un sistema *interpolador*. Consta de dos módulos; el primero se encarga de introducir  $L - 1$  muestras a 0 entre cada dos muestras de  $x[n]$ , teniéndose a su salida  $x_e[n]$ . El segundo es un filtro discreto paso bajo ideal, de frecuencia de corte  $\omega_C = \pi/L$ , a cuya salida tendremos la secuencia interpolada que buscábamos  $x_i[n]$ .

En la práctica habitual, para elevar la frecuencia efectiva de muestreo se emplea un procedimiento más simple, denominado *interpolación lineal*. Este último no reconstruye las muestras exactas de la señal, con la consiguiente distorsión que ello produce, aunque ésta es tolerable en algunas aplicaciones, en

Figura 18: Sistema interpolador por  $L$ .

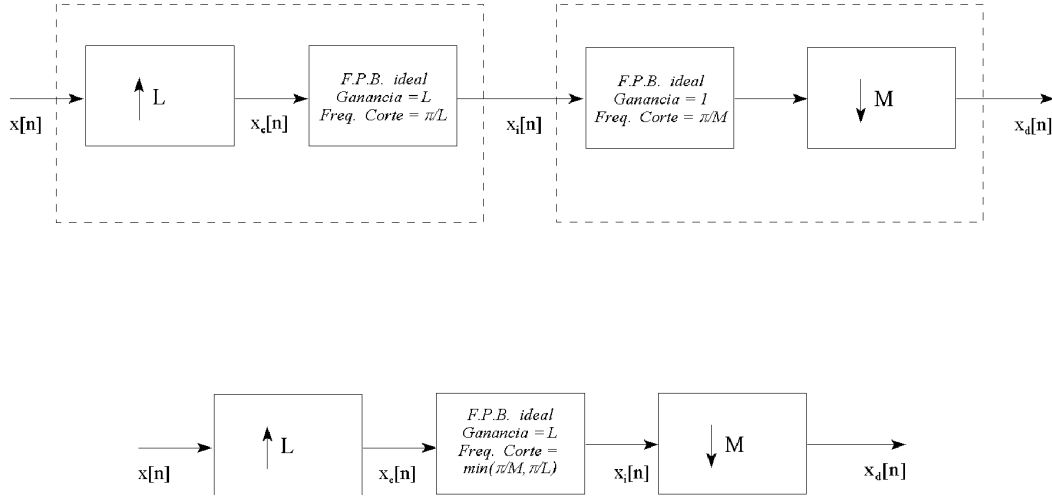


Figura 19: Alteración fraccional de la frecuencia de muestreo.

las que no priman tanto criterios de calidad como de sencillez y coste. Consiste en trazar una línea recta entre cada par de muestras adyacentes de  $x[n]$  y situar las  $L - 1$  nuevas muestras que queremos insertar en dicha línea. A la secuencia interpolada linealmente la llamaremos  $x_{lin}[n]$ . Este procedimiento funciona adecuadamente siempre que la frecuencia de muestreo original sea bastante superior a la frecuencia de Nyquist. El sistema interpolador lineal es el mismo de la figura 18 sustituyendo el filtro paso bajo ideal por otro de respuesta impulsiva:

$$h_{lin}[n] = \begin{cases} 1 - |n|/L & |n| \leq L \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (62)$$

### 6.3 Alteración fraccional de la frecuencia de muestreo

Esto se logra mediante la combinación en cascada de un interpolador por  $L$  y de un diezmador por  $M$ , según se representa en la figura 19.

Escogiendo adecuadamente  $L$  y  $M$  podemos conseguir modificar a voluntad la frecuencia de muestreo, siendo la frecuencia definitiva:

$$f'_s = (L/M)f_s \quad (63)$$

Nótese que, de los dos filtros paso bajo ideales del sistema, podemos eliminar uno: aquel cuya frecuencia de corte sea mayor. La frecuencia de corte del filtro deberá ser, por tanto:

$$\omega_C = \min(\pi/L, \pi/M) \quad (64)$$

La alteración intencionada de la frecuencia de muestreo es una técnica que da origen a toda una rama del proceso digital de la señal que se ha dado en llamar *proceso de señal multitasa* (multirate signal processing).

## 7 Muestreo práctico

La exposición realizada hasta este momento se ha basado en una serie de suposiciones que permiten justificar matemáticamente la validez del procedimiento de muestreo para obtener representaciones discretas exactas de señales continuas y poder, de esta manera, procesar señales analógicas mediante sistemas discretos. Estas suposiciones son:

- Utilización de conversores ideales continuo-discreto y discreto-continuo (figuras 1 y 9 respectivamente). Estos conversores requieren la existencia de la delta de Dirac, por lo que, obviamente, son irrealizables, debiendo ser sustituidos por otro sistemas de comportamiento aproximado.
- Las señales muestreadas han de ser limitadas en banda. Como se sabe, toda señal limitada en el tiempo es ilimitada en banda, de donde se deduce que las señales limitadas en banda realmente no existen y que, por tanto, el problema causado por el aliasing siempre estará presente, en mayor o menor medida.
- Utilización de un filtro paso bajo ideal de interpolación para la reconstrucción de la señal. Los filtros ideales son irrealizables, por lo que deberá ser suplido por un filtro real con un comportamiento aproximado.

El no cumplimiento de las suposiciones anteriores no invalida el desarrollo expuesto, siempre y cuando tengamos las precauciones adecuadas al sustituir los elementos irrealizables por otros reales. A cambio obtendremos un ligero empeoramiento de las prestaciones del sistema que puede ser acotado, lo que nos permite establecer el compromiso calidad-precio que resulte mas adecuado para cada aplicación concreta.

En la figura 20 se compara el diagrama de bloques ideal que se presentó para proceso discreto de señales analógicas con el sistema que se emplea en la práctica.

Se puede observar que el único bloque coincidente con el sistema ideal es el filtro discreto de proceso. El conversor C/D se sustituye por una cadena de tres bloques: *filtro anti-aliasing* para limitar en banda a la señal de entrada y evitar que sufra posteriormente aliasing, un circuito de *muestreo y retención*, a cuya salida se obtiene una señal analógica escalonada en la que la amplitud de cada peldaño es el valor de una muestra y un *conversor analógico-digital*, cuya misión es convertir la señal escalonada en secuencia de valores. El conversor D/C se suple por dos bloques; primero un *conversor digital-analógico*, cuya función es la inversa a la del analógico-digital, esto es, si a su entrada se pone una secuencia a la salida se obtiene una señal analógica escalonada y, finalmente, un *filtro de interpolación compensado*, que es un filtro paso bajo real en cuya función de transferencia se considera corregir las imperfecciones que causa que la señal a su entrada no sea un tren de deltas de Dirac, sino una señal escalonada. En los subapartados que siguen se analizará el efecto causado por cada uno de los bloques anteriores.

### 7.1 Filtrado anti-aliasing

Ya se ha dicho que las señales de la naturaleza son forzosamente ilimitadas en banda, dada su limitación temporal. Afortunadamente, su espectro suele decaer

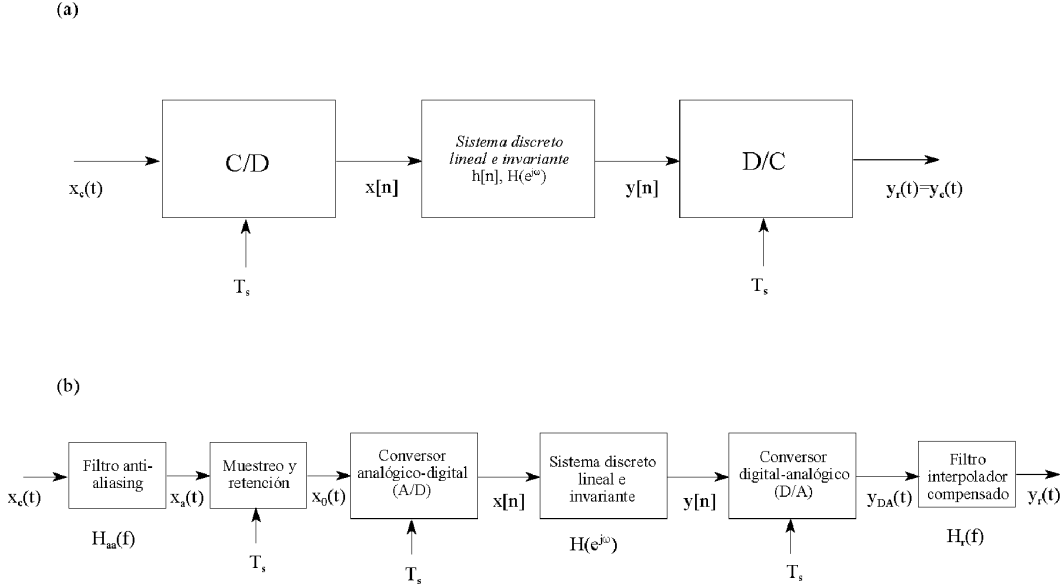


Figura 20: Sistema real empleado para el proceso discreto de señales analógicas.

asintóticamente hacia infinito a partir de cierto punto, lo que permite despreciar su contenido espectral por encima de determinada frecuencia-límite y considerarlas como de banda limitada. Si la frecuencia límite de la señal es muy elevada, su frecuencia de Nyquist será el doble. La velocidad de cálculo del sistema en tiempo discreto que empleemos para procesar la señal, una vez muestreada y convertida en secuencia, deberá ser superior a la frecuencia de muestreo, pues si no quedaría colapsado por las muestras a su entrada. Desgraciadamente cuanto mayor haya de ser la velocidad de proceso del sistema más costoso será éste. Incluso puede llegar a ser irrealizable. Para solucionar este problema, en aquellas señales que lo permiten, se opta por limitar artificialmente su ancho de banda a una frecuencia tal que la inteligibilidad de la información que transporta no quede dañada de consideración. Un ejemplo es el de las señales vocales en los sistemas de telefonía. Se requiere un ancho de banda de unos 4 kHz para tener una adecuada inteligibilidad, aunque el contenido espectral de una señal de este tipo es considerable hasta los 20 kHz. Esta limitación se lleva a cabo mediante un filtro paso bajo, analógico, denominado *filtro anti-aliasing*. Su función de transferencia será, idealmente:

$$H_{aa}(f) = \prod \left( \frac{f}{2W} \right) \quad W < f_s/2 \quad (65)$$

Además de evitar que se produzca aliasing, el filtro cumple otra función,: garantizar el funcionamiento lineal e invariante de todo el sistema. En efecto, en el apartado 5 se vio que no se puede definir una función de transferencia analógica equivalente si la señal a la entrada no está limitada en banda. En la práctica, el filtro anti-aliasing no puede ser ideal, por lo que siempre existirá un aliasing residual, estando la función de transferencia analógica equivalente del sistema de la figura 20 afectada por la de éste, en la forma:

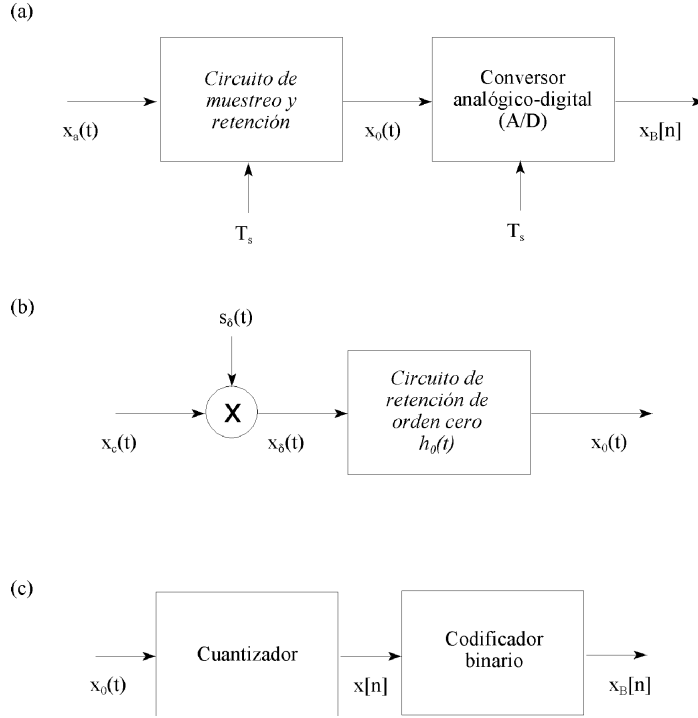


Figura 21: (a).- Sistema real que sustituye al conversor ideal continuo-discreto. (b).- Diagrama de bloques del circuito S/H. (c).- Diagrama de bloques del conversor A/D.

$$H_{eq}(f) \approx H_{aa}(f)H(e^{j\Omega T_s}) \quad (66)$$

No se puede poner el signo igual puesto que, como se ha visto, el aliasing residual existente causará un comportamiento no lineal e invariante del sistema. Para que filtro atenúe al máximo por encima de  $f_s/2$  Hz se puede diseñar de tal forma que no sea completamente plano en su banda de paso. Puesto que ambos filtros están en cascada, la distorsión que esto produciría puede ser compensada posteriormente, teniéndola en cuenta en el diseño del filtro discreto de proceso.

## 7.2 Conversión analógico-digital

En la figura 21a se representa el diagrama de bloques del sistema real que sustituye al conversor ideal continuo-discreto. A la salida de dicho sistema tendremos  $x_B[n]$ , que es una versión cuantizada y codificada en código binario de  $x[n]$ , cuestiones ambas imprescindibles para poder realizar los cálculos correspondientes al filtrado con una precisión finita en un sistema de hardware digital.

El conversor A/D es un dispositivo que, cada  $T_s$  segundos, convierte la tensión a su entrada en una palabra de bits cuyo valor es el más próximo al de dicha tensión, de entre un conjunto finito de valores posible. Se puede decir que a su salida tenemos el valor de la tensión *cuantizado*. El proceso de conversión no es instantáneo y, en la práctica, el conversor A/D necesita que el valor de la tensión a convertir permanezca constante durante cierto tiempo a su entrada.



Debido a ello se hace atravesar previamente a la señal por el circuito de *muestreo y retención* (Sample and Hold, S/H). Analíticamente, su salida viene dada por:

$$x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_0(t - nT_s) \quad (67)$$

en donde  $h_0(t)$  es la respuesta impulsiva del *sistema de retención de orden cero* (que obviamente existe por ser éste lineal e invariante):

$$h_0(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < T_s \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (68)$$

La señal a la salida de este circuito es una señal escalonada, representada en la figura 22. Como se puede observar, el comportamiento de este circuito consiste en "tomar" la muestra y retener su valor durante  $T_s$  segundos, instante en el cual se repite la operación.

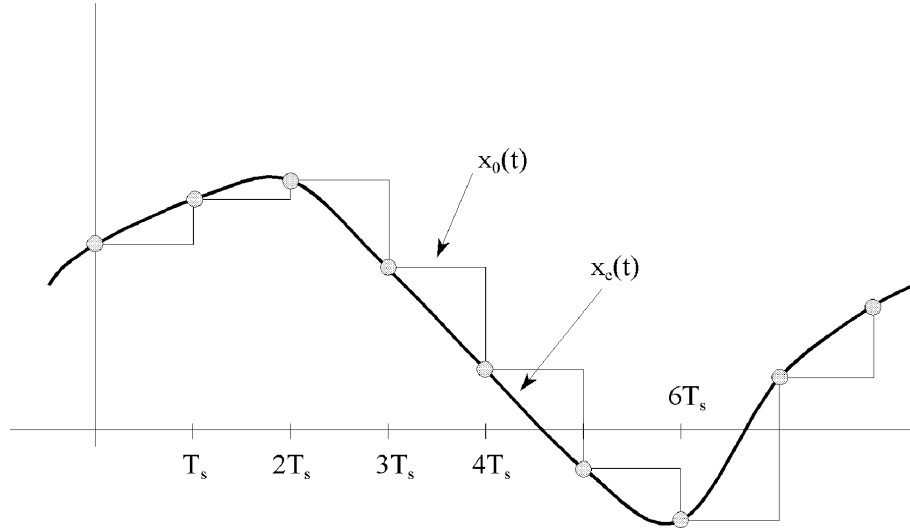


Figura 22: Representación de las señales de entrada y salida de un circuito de muestreo y retención.

La ecuación (67) también se puede escribir como:

$$x_0(t) = h_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s)\delta(t - nT_s) \quad (69)$$

en cuyo caso la figura 21b representa el comportamiento del circuito de muestreo y retención. Se trata de un muestreador ideal seguido de un sistema de retención de orden cero, que filtra la señal muestreada, obteniéndose a su salida la señal escalonada deseada, cuyos peldaños tienen la amplitud de cada muestra. En la práctica, el comportamiento del circuito de muestreo y retención no es perfecto, no manteniéndose perfectamente constante la tensión durante los  $T_s$  segundos.

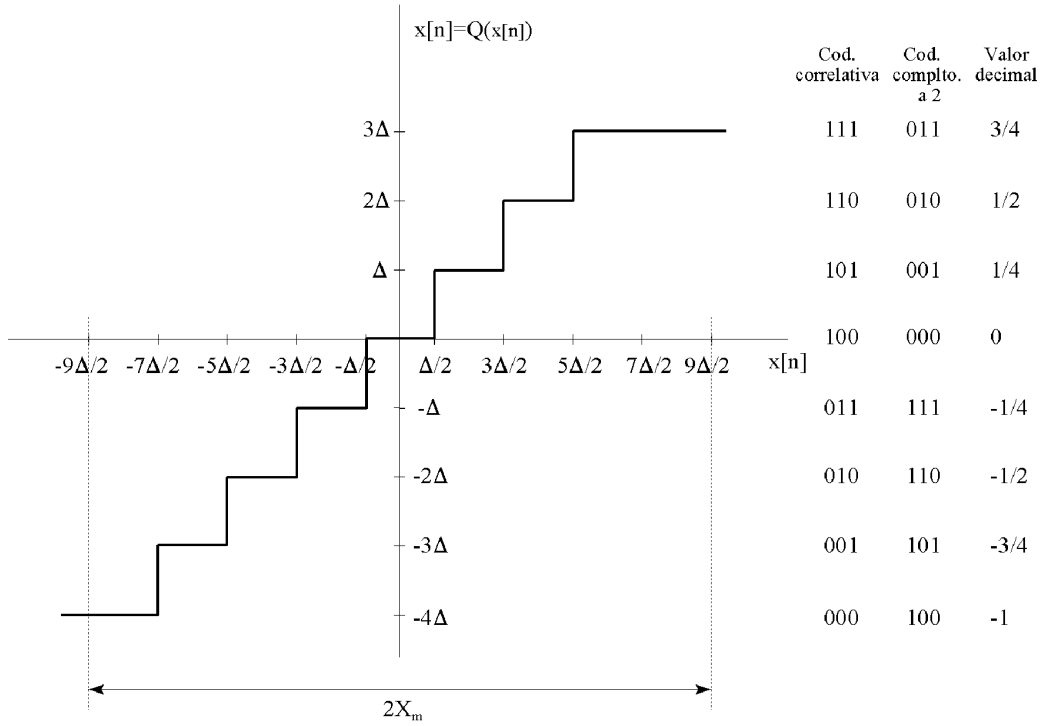


Figura 23: Característica de un cuantizador de ocho niveles.

Tras el circuito de muestreo y retención la señal atraviesa el conversor A/D, cuyo diagrama de bloques equivalente se puede ver en la figura 21c. El cuantizador es un sistema no lineal cuyo propósito es medir el valor real de tensión de cada escalón de la señal  $x_0(t)$  a su entrada y cuantizarlo, esto es, asociarlo con el valor numérico más próximo de entre un conjunto finito posible. Esta operación se podría representar mediante la expresión:

$$\hat{x}[n] = Q(x[n]) \quad (70)$$

A  $\hat{x}[n]$  se le denomina *muestra cuantizada*. La cuantización suele uniforme, esto es; los niveles de cuantización están equiespaciados. En la figura 23 se representa una característica de cuantización uniforme en la que a la muestra de entrada se le asigna el nivel de cuantización más próximo. Este tipo de cuantizador permite que las muestras a la entrada puedan ser positivas o negativas. Generalmente el número de niveles de cuantización es potencia de dos, pues ello permite la posterior conversión binaria con más facilidad. El cuantizador de la figura es solamente de ocho niveles, aunque en la práctica el número de éstos es muy superior.

Ocupémonos ahora del codificador binario. En este caso, como hay ocho niveles, podemos codificarlos con tres bits. Es claro que  $2^{B+1}$  niveles pueden ser codificados con  $(B+1)$  bits. La manera de asignar los bits a cada nivel suele ser el sistema de complemento a dos, ya que permite realizar cálculos aritméticos directamente con las palabras de bits que representarán a cada muestra. Esta se lleva a cabo numerando correlativamente en binario cada nivel, comenzando

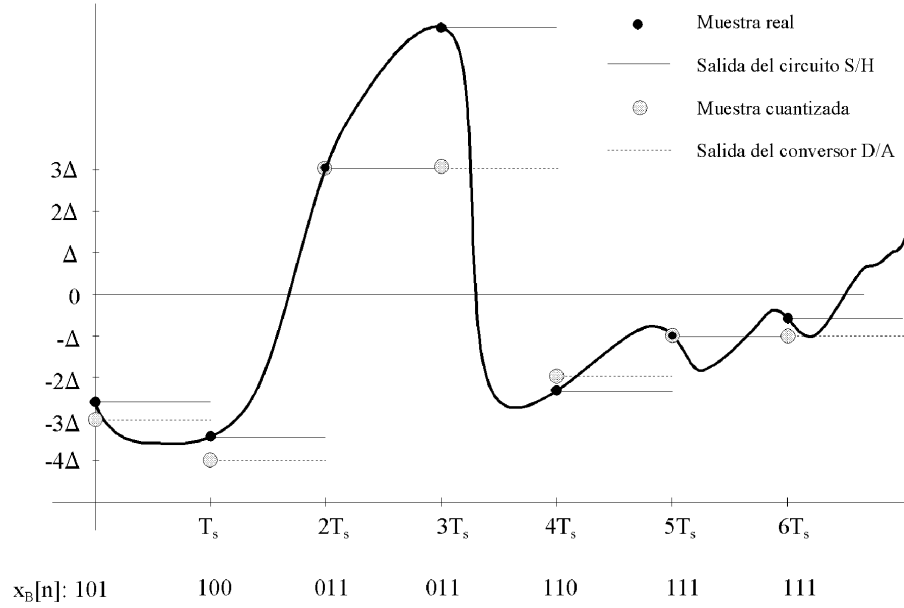


Figura 24: Señal muestreada, cuantificada a tres bits y codificada a complemento a dos.

por el más negativo y, después, complementando el bit más significativo (que será el bit de signo). El valor decimal  $\hat{x}_B[n]$  que se asocia a cada palabra de  $(B + 1)$  bits de la forma  $a_0a_1a_2 \dots a_n$  se calculará como

$$-a_02^0 + a_12^{-1} + a_22^{-2} + \dots + a_B2^{-B} \quad (71)$$

Por ejemplo, en la figura 23 al nivel 001 le correspondería el valor cuantizado decimal  $1/4$ . De esta forma, los valores de las muestras de la secuencia cuantizada  $\hat{x}_B[n]$  a la salida del conversor estarán acotados en el intervalo de valores decimales  $[-1, 1]$ . Un parámetro importante del conversor es su *margen dinámico*  $2X_m$  (ver la figura), que es la máxima excursión que la señal puede tomar a su entrada. Dado este parámetro, el tamaño del escalón de cuantización, correspondiente al bit menos significativo de cada palabra, se calculará como:

$$\Delta = \frac{2X_m}{2^{B+1}} = \frac{X_m}{2^B} \quad (72)$$

Finalmente el valor real de la muestra cuantizada, dado el margen dinámico y el valor cuantizado decimal a la salida  $\hat{x}_B[n]$ , vendrá dado como:

$$\hat{x}[n] = X_m \hat{x}_B[n] \quad (73)$$

En la figura 24 se presenta un ejemplo de señal cuantizada a tres bits y codificada de acuerdo con el procedimiento de complemento a dos.

### 7.3 Ruido de cuantización

Como se ha visto en el subapartado anterior, a la salida del conversor A/D no tendremos las muestras reales de la señal, sino las muestras cuantizadas  $\hat{x}[n]$ .

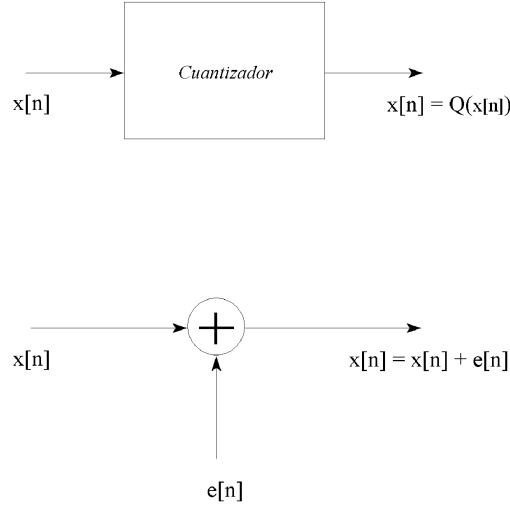


Figura 25: Modelo adoptado para estudiar el error de cuantización.

La diferencia entre los valores reales y los cuantizados se denomina *error o ruido de cuantización*, y se puede definir analíticamente como otra secuencia:

$$e[n] = \hat{x}[n] - x[n] \quad (74)$$

Echando un vistazo a la figura 23 se puede ver que la secuencia  $e[n]$  estará acotada:

$$-\Delta/2 < e[n] \leq +\Delta/2 \quad (75)$$

siempre que el valor de la muestra a la entrada del conversor no exceda su margen dinámico:

$$(-X_m - \Delta/2) < x[n] \leq (X_m + \Delta/2) \quad (76)$$

Ai se excede dicho margen el conversor "recortará" la muestra, asignándole el valor del nivel máximo (si es positiva) o mínimo (si es negativa); siendo en este caso mayor el error de cuantización.

Si en (74) despejamos  $\hat{x}[n]$  se puede considerar que el ruido de cuantización es una secuencia perturbadora de naturaleza aleatoria que se suma a  $x[n]$  (figura 25).

Se suele adoptar un modelo estadístico para estudiar la influencia del ruido de cuantización, basado en las siguientes premisas:

- La secuencia error  $e[n]$  es un proceso aleatorio discreto estacionario.
- $e[n]$  está incorrelado con  $x[n]$ .
- Las variables aleatorias extraídas del proceso  $e[n]$  están incorreladas entre sí. Se puede considerar al ruido de cuantificación como un ruido blanco.
- El proceso aleatorio sigue una distribución de probabilidades uniforme.

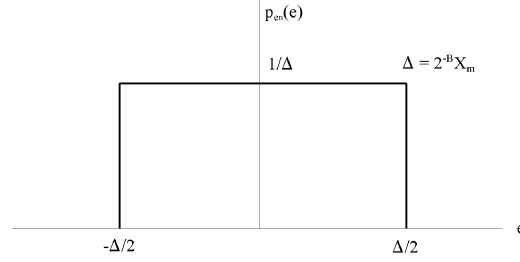


Figura 26: Función densidad de probabilidad del ruido de cuantización.

Los supuestos anteriores son válidos siempre que la secuencia  $x[n]$  tenga una naturaleza suficientemente compleja para considerarla pseudoaleatoria y el escalón de cuantización sea suficientemente pequeño con relación a las variaciones de ésta. En caso de señales determinísticas sencillas se cometen grandes errores utilizando este modelo, ya que la señal puede permanecer constante durante muchas muestras, o tener variaciones periódicas. Afortunadamente, todas las señales habitualmente empleadas (voz, video...) tienen las características requeridas y por tanto el modelo funciona bastante bien, para un escalón de cuantización suficientemente pequeño.

En la figura 26 se muestra la función densidad de probabilidad del error de cuantización, dados los supuestos establecidos. Puesto que  $e[n]$  sigue una distribución de probabilidades uniforme, su valor medio será 0 y su varianza, esto es, su potencia, vendrá dada por:

$$\sigma_e^2 = \frac{\Delta^2}{12} \quad (77)$$

Si el cuantizador es de  $(B + 1)$  bits, la potencia del ruido de cuantización pasará a ser:

$$\sigma_e^2 = \frac{2^{-2B} X_m^2}{12} \quad (78)$$

La calidad de la conversión A/D se puede medir en términos de la relación entre la potencia de la señal a su entrada y la del ruido de cuantización que éste produce. Si  $\sigma_x^2$  es la potencia de la señal (suponiendo que no tiene componente continua) la *relación señal-ruido* del conversor se da en forma logarítmica según la expresión:

$$\begin{aligned} \left( \frac{S}{N} \right)_{dB} &= 10 \log_{10} \frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} = 10 \log_{10} \frac{12 \cdot 2^{2B} \sigma_x^2}{X_m^2} \\ &= 6.02B + 10.8 - 20 \log_{10} \frac{X_m}{\sigma_x} \end{aligned} \quad (79)$$

Obsérvese que la relación señal-ruido se incrementa aproximadamente en 6 dB por cada bit adicional en la conversión, o, lo que es equivalente, cada vez que se dobla el número de niveles. El último término de (79) nos da la relación entre el margen dinámico del conversor y el valor eficaz de la señal a la entrada. Recuerdese que el valor eficaz es siempre menor o igual al valor de pico de la señal,

si bien da una medida de la amplitud máxima promedio de ésta. Si este valor es muy pequeño frente  $X_m$  el último término de (79) aumentará, disminuyendo en la misma medida la relación señal-ruido. Por el contrario, si es excesivamente grande los picos de la señal saturarán con frecuencia al conversor, quedando cortados y produciendo una gran distorsión. Así pues, es sumamente crítico que el nivel de señal a la entrada del conversor se adecúe convenientemente, mediante los amplificadores o atenuadores necesarios al margen dinámico de éste. Desafortunadamente, la relación que guarda el valor eficaz de una señal con su valor de pico depende de la naturaleza de ésta. Por ejemplo, para señales de audio, se considera adecuado adaptar el nivel de la señal para que  $\sigma_x = X_m/4$ , lo que hace que la relación señal-ruido para este tipo de señales en un conversor A/D sea:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} = 6.02B - 1.25dB \quad (80)$$

De esta forma, con 16 bits (65536 niveles de cuantización) la relación señal-ruido del conversor será de unos 95 dB, siempre que el valor eficaz de la entrada esté perfectamente adecuado al margen dinámico del conversor.

#### 7.4 Conversión digital-analógica

En la figura 9 se representaba el diagrama de bloques del sistema ideal empleado para la reconstrucción de la señal a partir de sus muestras, al que denominábamos conversor D/C. La contrapartida real a dicho sistema la constituye el circuito denominado *conversor digital-analógico* o conversor D/A, seguido de un filtro paso bajo de reconstrucción. En la figura 27 se muestra el diagrama de bloques del conversor D/A. La función de este circuito es inversa a la del conversor A/D y la señal a su salida vendrá dada por:

$$\begin{aligned} x_{DA}(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_m \hat{x}_B[n] h_0(t - nT_s) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}[n] h_0(t - nT_s) \end{aligned} \quad (81)$$

en donde  $h_0(t)$  es la respuesta impulsiva del sistema de retención de orden cero, dada en (68).

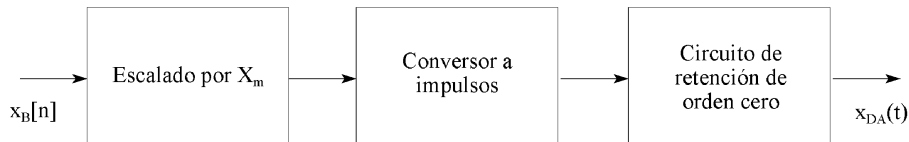


Figura 27: Diagrama de bloques del conversor D/A.

La señal  $x_{DA}(t)$  es ya una señal analógica escalonada, en la que cada escalón tendrá un valor de tensión igual al valor de la muestra cuantizada. Empleando el modelo de ruido aditivo descrito en el apartado anterior tendremos:

$$x_{DA}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_0(t - nT_s) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n]h_0(t - nT_s) \quad (82)$$

Definiendo las señales  $x_0(t)$  y  $e_0(t)$ :

$$x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_0(t - nT_s) \quad (83)$$

$$e_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n]h_0(t - nT_s) \quad (84)$$

podemos escribir (82) como:

$$x_{DA}(t) = x_0(t) + e_0(t) \quad (85)$$

La señal  $x_0(t)$  está relacionada con la señal a la entrada, pues  $x[n] = x_a(nT_s)$ , mientras que  $e_0(t)$  es una señal escalonada aleatoria que depende directamente de  $e[n]$ , el ruido de cuantización. Veamos lo que sucede en el dominio de la frecuencia. Los trenes de impulsos generados a partir de las secuencias  $x[n]$  y  $e[n]$  atraviesan el circuito de retención de orden cero, cuya función de transferencia,  $H_0(f)$ , será la transformada de Fourier de (68):

$$H_0(f) = T_s \text{sinc}(fT_s) e^{-j\Omega T_s/2} \quad (86)$$

El espectro de  $x_0(t)$  será, calculando la transformada de Fourier de (83):

$$\begin{aligned} X_0(f) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]H_0(f)e^{-j\Omega nT_s} \\ &= \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega nT_s} \right) H_0(f) \\ &= X(e^{j\Omega T_s})H_0(f) \end{aligned} \quad (87)$$

Recordando que:

$$X(e^{j\Omega T_s}) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(f - nf_s) \quad (88)$$

entonces resultará que:

$$X_0(f) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(f - nf_s)H_0(f) \quad (89)$$

Como  $X_a(f)$  es limitada en banda a  $f_s/2$ , pues tuvo que atravesar el filtro anti-aliasing, en (89) no se producirá solape entre las distintas copias periódicas. De esta forma es posible extraer el subespectro central mediante un filtro de reconstrucción paso bajo de frecuencia de corte  $W = f_s/2$ . Sin embargo, si sóloamente hiciéramos esto obtendríamos a la salida una versión distorsionada de la señal deseada, debido al filtrado efectivo que realiza el circuito de retención y cuya influencia en (89) la aporta el término  $H_0(f)$ . Puesto que conocemos

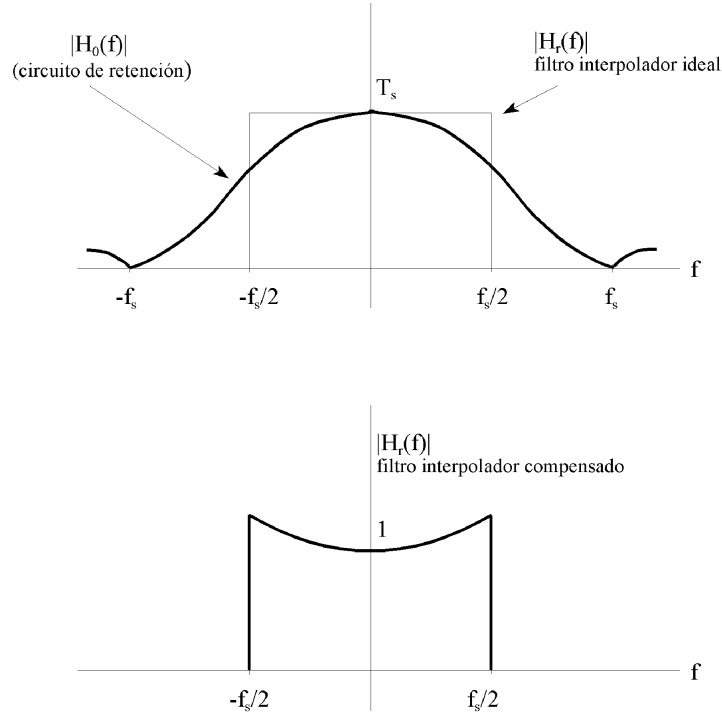


Figura 28: Función de transferencia del filtro interpolador compensado.

la función de transferencia de este término (86), podremos compensar su efecto en el diseño del filtro de reconstrucción, definiendo un *filtro de interpolación compensado*, cuya función de transferencia sería:

$$\tilde{H}_r(f) = \frac{H_r(f)}{H_0(f)} \quad (90)$$

Combinando (29), (86) y (90) la función de transferencia ideal del filtro interpolador compensado sería:

$$\tilde{H}_r(f) = \frac{e^{j\Omega T_s/2}}{\text{sinc}(fT_s)} \cdot \prod\left(\frac{f}{f_s/2}\right) \quad (91)$$

El módulo de la función de transferencia se muestra en la figura 28. La fase de  $\tilde{H}_r(f)$  correspondería a un adelanto en el tiempo de la señal de  $T_s/2$  segundos, para compensar el retardo introducido por el circuito de retención. Esto es irrealizable en la práctica, por lo que se asume este retardo. Incluso, frecuentemente, ni siquiera se emplea un filtro de reconstrucción compensado, despreciándose la distorsión ocasionada por el circuito de retención del conversor D/A, ya que la máxima atenuación introducida por éste es solamente de 4 db a la máxima frecuencia  $f = f_s/2$ . Si la frecuencia de muestreo está suficientemente por encima de la frecuencia máxima de la señal muestreada, el efecto distorsionador causado por el circuito de retención será realmente muy pequeño.

En la figura 29 se muestra el sistema completo. La señal analógica reconstruída a su salida,  $\hat{x}_r(t)$ , vendrá dada por:



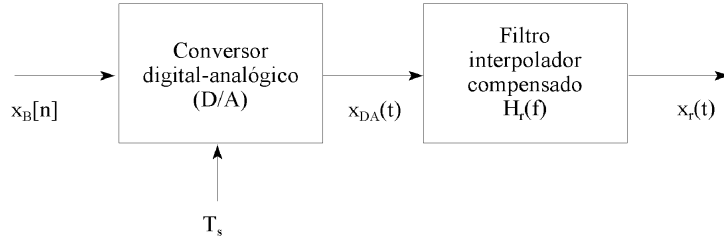


Figura 29: Sistema completo de conversión digital-analógica.

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_r(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}[n] \text{sinc}\left[\frac{1}{T_s}(t - nT_s)\right] \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \text{sinc}\left[\frac{1}{T_s}(t - nT_s)\right] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n] \text{sinc}\left[\frac{1}{T_s}(t - nT_s)\right] \quad (92)
 \end{aligned}$$

La fórmula anterior se podría escribir como:

$$\hat{x}_r(t) = x_a(t) + e_a(t) \quad (93)$$

en donde  $x_a(t)$  será la señal analógica buscada y  $e_a(t)$  es un ruido interferidor, gaussiano y limitado en banda.

Si retomamos ahora el sistema para proceso discreto de señales analógicas de la figura 20, podemos escribir la señal reconstruida a la salida  $\hat{y}_r(t)$  como:

$$\hat{y}_r(t) = y_a(t) + e_a(t) \quad (94)$$

en donde  $y_a(t)$  sería la señal realmente buscada, la cual estará inevitablemente contaminada por el ruido limitado en banda  $e_a(t)$ . En el dominio de la frecuencia, el espectro de  $y_a(t)$  vendría dado por:

$$Y_a(f) = H_{aa}(f)H(e^{j\Omega T_s})H_0(f)\tilde{H}_r(f) \cdot X_c(f) \quad (95)$$

en donde  $H_{aa}(f)$ ,  $H_0(f)$  y  $\tilde{H}_r(f)$  son las respuestas en frecuencia del filtro anti-aliasing, sistema de retención de orden cero y filtro de reconstrucción, respectivamente, y  $H(e^{j\Omega T_s})$  es la respuesta en frecuencia del filtro discreto diseñado. En efecto, la señal a la entrada atraviesa distintos sistemas cuyo comportamiento equivale al de esos cuatro filtros en cascada. Se puede definir ahora una función de transferencia analógica equivalente en la forma:

$$H_{eq}(f) = H_{aa}(f)H(e^{j\Omega T_s})H_0(f)\tilde{H}_r(f) \quad (96)$$

En el proceso de diseño se supone que el filtro anti-aliasing y el de reconstrucción son ideales, por lo que la ecuación (96) se convierte en (38) y se puede seguir aplicando (41). No obstante, la ecuación anterior constituye el modelo de comportamiento de un sistema real de proceso discreto de señales analógicas. Además, no olvidemos que, como consecuencia del proceso de cuantización, a

la salida obtendremos inevitablemente un ruido limitado en banda, el cual, suponiendo el modelo gaussiano, tendrá una función de densidad espectral de potencia que vendrá dada por:

$$G_{e_a}(f) = |H(e^{j\Omega T_s})H_0(f)\tilde{H}_r(f)|^2 \sigma_e^2 \quad (97)$$

## 7.5 Consideraciones sobre la implementación de los filtros

El proceso discreto de señales analógicas intenta resolver los problemas que presenta el filtrado analógico de señales, expuestos en el apartado 5. Sin embargo, si nos fijamos en el sistema real de la figura 20 y recordamos lo visto, rápidamente nos daremos cuenta de que el filtro anti-aliasing y el filtro de reconstrucción son analógicos, resultando que, queriendo eliminar un filtro de este tipo introducimos dos. Además, si se desea un sistema de buena calidad ambos filtros han de aproximarse a la idealidad y sus respectivos flancos de caída habrán de ser abruptos, lo que implica que serán filtros complicados y costosos. Finalmente, sus frecuencias de corte serán fijas, impidiéndonos alterar la frecuencia de muestreo del sistema, lo que elimina una gran ventaja del filtrado discreto, que es su programabilidad. Por todo ello es deseable encontrar un sistema que permita eliminar estos filtros analógicos, o, al menos, simplificar sus requerimientos.

Una posible solución se ilustra en la figura 30.

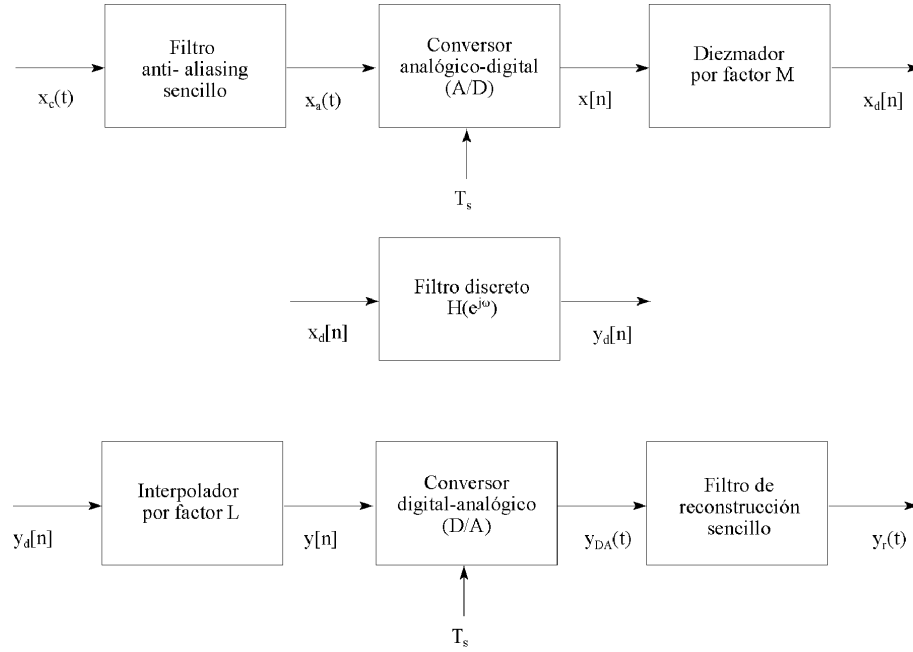


Figura 30: Utilización de técnicas de diezmado e interpolación para simplificar los requerimientos de los filtros analógicos anti-aliasing y de reconstrucción de la señal.

La señal analógica se muestrea a una frecuencia muy superior a su frecuencia de Nyquist, prefiltrándola por un sencillo filtro anti-aliasing, fijo, de flancos poco abruptos. Tras su conversión en secuencia se la hace pasar por un diezmador por M, el cual, por su propia naturaleza, incluye un filtro paso bajo de alta calidad

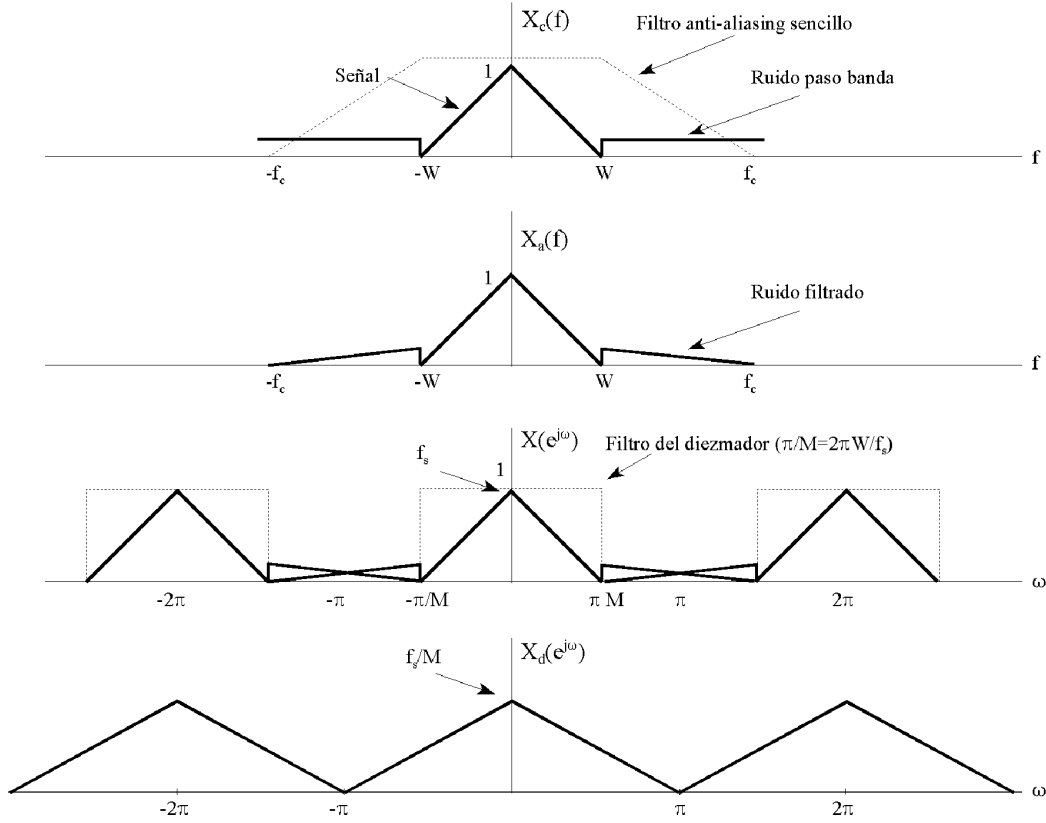


Figura 31: Uso de un diezmador en la conversión analógico-digital.

que suplirá las deficiencias del filtro anti-aliasing a la entrada (nótese que este filtro ya es discreto). La frecuencia de muestreo es lo suficientemente elevada para que, al realizarse el diezmado, no se genere aliasing. Tras el diezmador la secuencia es procesada por el filtro discreto diseñado a tal efecto. Trás ser filtrada, la secuencia a la salida del filtro será introducida en un circuito interpolador por  $L$  (podríamos hacer  $L=M$ ) que eleva de nuevo la frecuencia de muestreo de la secuencia. Este circuito incluye, por su propia naturaleza, un filtro paso bajo de alta calidad, discreto, en cuyo diseño se puede prever la compensación de la distorsión que introducirá posteriormente el circuito de retención de orden 0. Tras el interpolador haremos pasar a la secuencia por el conversor D/A y por un sencillo filtro de reconstrucción analógico, el cual no tiene que compensar ya la referida distorsión ni tiene por que ser muy abrupto, puesto que la frecuencia de muestreo será muy elevada respecto a la frecuencia máxima de la señal, -estrictamente limitada por el filtro discreto del interpolador-, evitándose por completo el posible aliasing. En las figuras 31 y 32 se ilustra el proceso completo, para una señal  $x_c(t)$  dada, que además va acompañada de un ruido paso banda que el sistema también elimina, si se elige adecuadamente el parámetro  $M$  del diezmador.

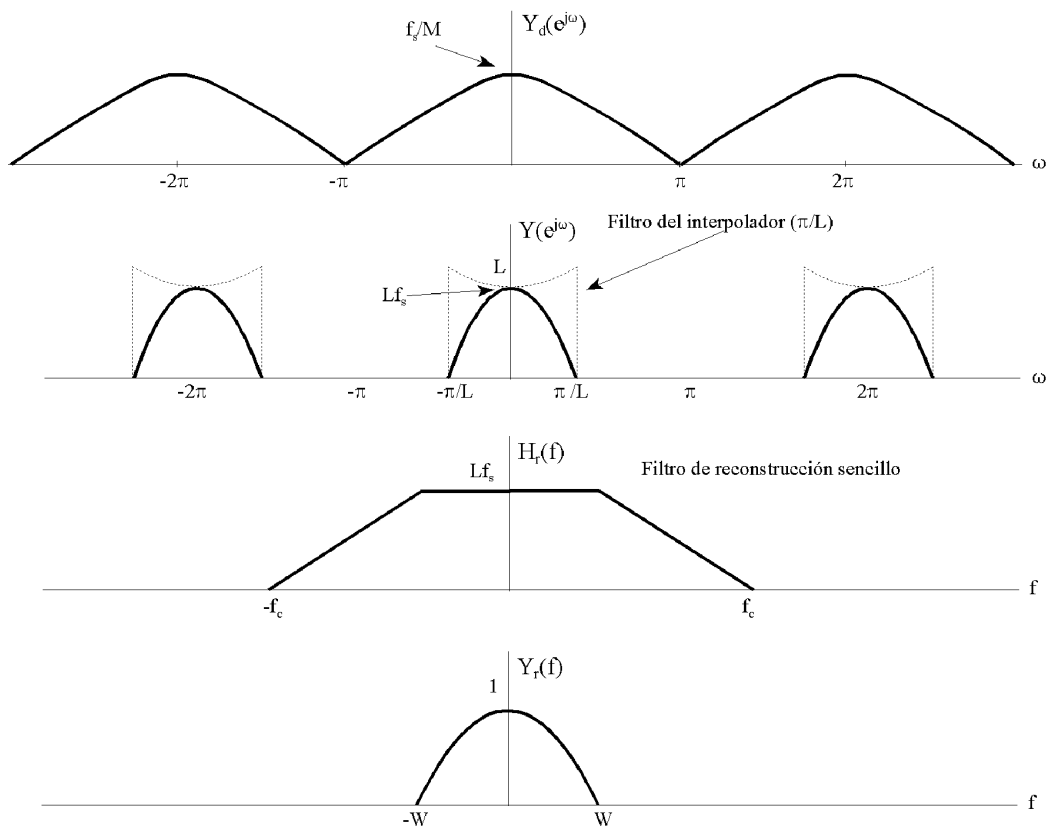


Figura 32: Uso de un interpolador en la conversión digital-analógica.

## Referencias

- [1] Alan W. Oppenheim and Ronald W. Schaffer  
*Discrete-Time Signal Processing*  
Prentice-Hall, Inc., 1.989.
- [2] José María Hernando Rábanos  
*Teoría de la Comunicación, Vol. I*  
ETS Ingenieros de Telecomunicación, Madrid, 1.982.