

Intégration numérique

Informatique pour tous

Calculer une intégrale

Question

Comment calculer une intégrale $\int_a^b f(x)dx$?

Calculer une intégrale

Question

Comment calculer une intégrale $\int_a^b f(x)dx$?

- 1 Trouver une primitive.

Calculer une intégrale

Question

Comment calculer une intégrale $\int_a^b f(x)dx$?

- 1 Trouver une primitive.
- 2 Intégration par partie.

Calculer une intégrale

Question

Comment calculer une intégrale $\int_a^b f(x)dx$?

- 1 Trouver une primitive.
- 2 Intégration par partie.
- 3 Changement de variable.

Calculer une intégrale

Question

Comment calculer une intégrale $\int_a^b f(x)dx$?

- 1 Trouver une primitive.
- 2 Intégration par partie.
- 3 Changement de variable.
- 4 ???

Calculer une intégrale

En général, on ne sait pas calculer la valeur exacte d'une intégrale

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Calculer une intégrale

En général, on ne sait pas calculer la valeur exacte d'une intégrale

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Il faut donc trouver des moyens d'**approximer** $\int_a^b f(x)dx$.

Calculer une intégrale

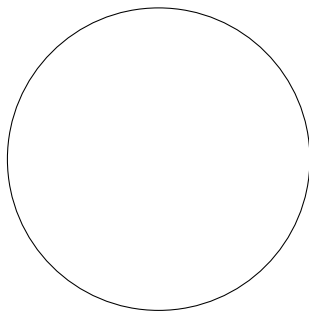
En général, on ne sait pas calculer la valeur exacte d'une intégrale $\int_a^b f(x)dx$.

Il faut donc trouver des moyens d'**approximer** $\int_a^b f(x)dx$.

Idée: interpréter $\int_a^b f(x)dx$ comme l'aire sous la courbe de f , et l'approcher par l'aire de «quelque chose» qu'on sait calculer.

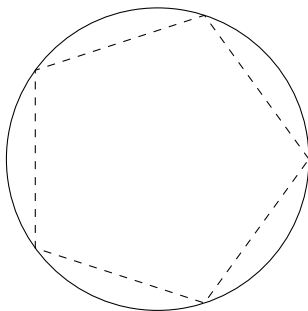
Calculer une aire

Archimède a approximé l'aire d'un cercle de rayon 1 (π) par des polygones:



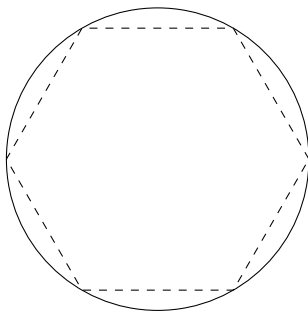
Calculer une aire

Archimède a approximé l'aire d'un cercle de rayon 1 (π) par des polygones:



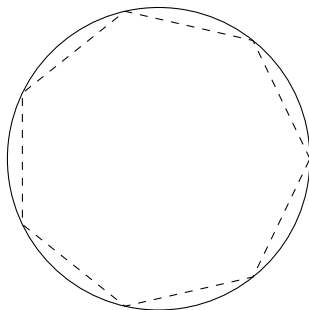
Calculer une aire

Archimède a approximé l'aire d'un cercle de rayon 1 (π) par des polygones:



Calculer une aire

Archimède a approximé l'aire d'un cercle de rayon 1 (π) par des polygones:



Calculer une aire

En utilisant un polygone à 96 côtés, Archimède parvient à l'approximation:

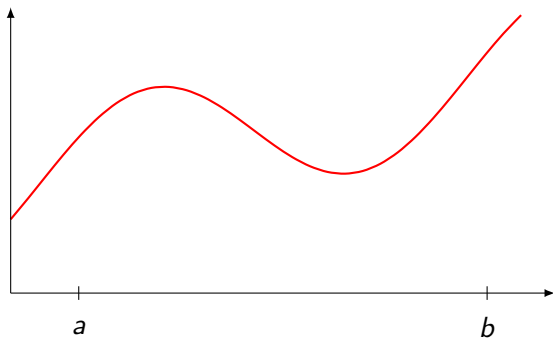
$$\frac{220}{71} \leq \pi \leq \frac{22}{7}$$

Méthode des rectangles

La **méthode des rectangles** approxime l'aire $\int_a^b f(x)dx$ sous la courbe par des rectangles.

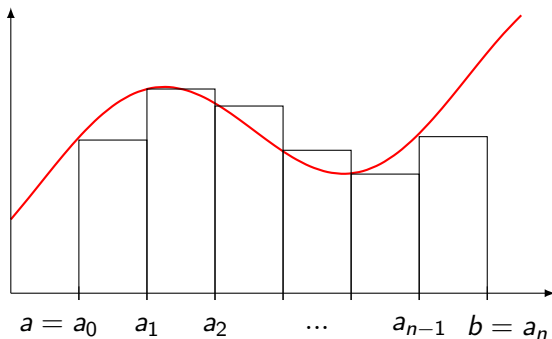
Méthode des rectangles

La **méthode des rectangles** approxime l'aire $\int_a^b f(x)dx$ sous la courbe par des rectangles.

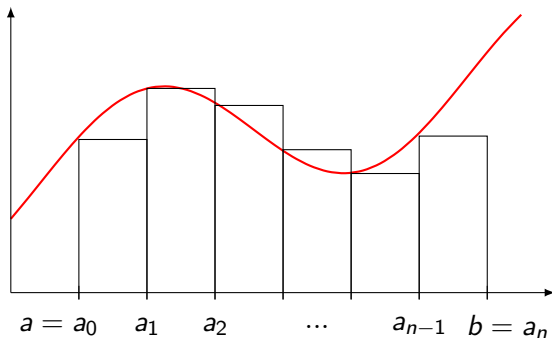


Méthode des rectangles

La **méthode des rectangles** approxime l'aire $\int_a^b f(x)dx$ sous la courbe par des rectangles.



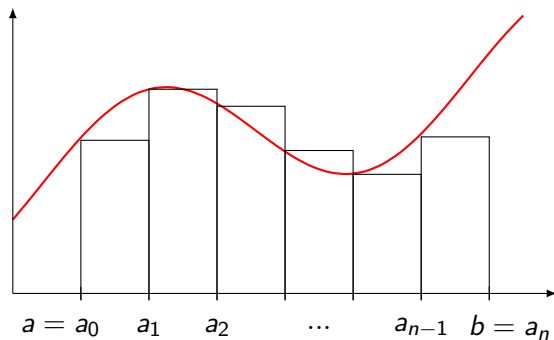
Méthode des rectangles



Question

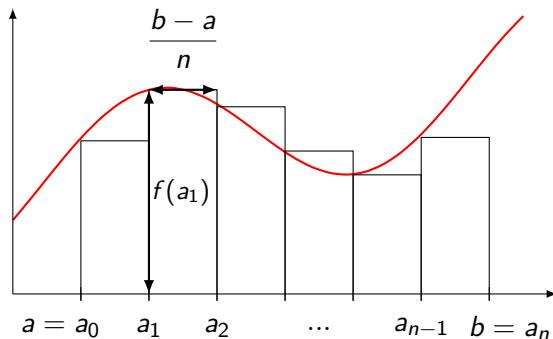
Que vaut a_k , si a_0, \dots, a_n sont $n+1$ réels régulièrement espacés de a à b ?

Méthode des rectangles



$$a_k = a + k \times \frac{b - a}{n}$$

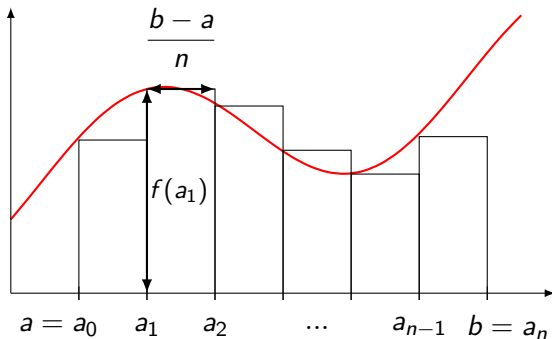
Méthode des rectangles



Question

Que vaut l'aire totale des n rectangles?

Méthode des rectangles



$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

Méthode des rectangles

Vous verrez en cours de mathématiques:

Sommes de Riemann

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ **continue**. Alors:

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f$$

Méthode des rectangles

Question

Écrire une fonction `rectangle` qui approxime l'intégrale d'une fonction par la méthode des rectangles (quels sont ses arguments)?

Méthode des rectangles

Question

Écrire une fonction `rectangle` qui approxime l'intégrale d'une fonction par la méthode des rectangles (quels sont ses arguments)?

```
def rectangle(f, a, b, n):  
    res = 0  
    pas = (b - a) / n  
    for k in range(n):  
        res += f(a + k * pas)  
    return pas * res
```


Méthode des rectangles: exemple

```
def rectangle(f, a, b, n):  
    res = 0  
    pas = (b - a) / n  
    for k in range(n):  
        res += f(a + k * pas)  
    return pas * res
```

Méthode des rectangles: exemple

```
def rectangle(f, a, b, n):  
    res = 0  
    pas = (b - a) / n  
    for k in range(n):  
        res += f(a + k * pas)  
    return pas * res
```

```
In [5]: rectangle(lambda x : 1/(1+x**2), 0, 1, 100)  
Out[5]: 0.7878939967307818
```

Méthode des rectangles: exemple

```
def rectangle(f, a, b, n):  
    res = 0  
    pas = (b - a) / n  
    for k in range(n):  
        res += f(a + k * pas)  
    return pas * res
```

```
In [5]: rectangle(lambda x : 1/(1+x**2), 0, 1, 100)  
Out[5]: 0.7878939967307818
```

Vérification: on peut montrer mathématiquement que $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$.

Méthode des rectangles

```
def rectangle(f, a, b, n):  
    res = 0  
    pas = (b - a) / n  
    for k in range(n):  
        res += f(a + k * pas)  
    return pas * res
```

Question

Comment utiliser rectangle pour approximer $\ln(2)$?

Méthode des rectangles

```
def rectangle(f, a, b, n):  
    res = 0  
    pas = (b - a) / n  
    for k in range(n):  
        res += f(a + k * pas)  
    return pas * res
```

Question

Comment utiliser rectangle pour approximer $\ln(2)$?

Utiliser $\ln(2) = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$.

Question

Quelle est la complexité de rectangle?

Méthode des trapèzes

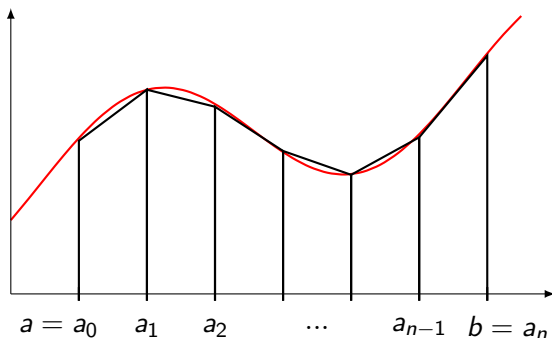
La **méthode des trapèzes** approxime l'aire $\int_a^b f(x)dx$ sous la courbe par des trapèzes

Méthode des trapèzes

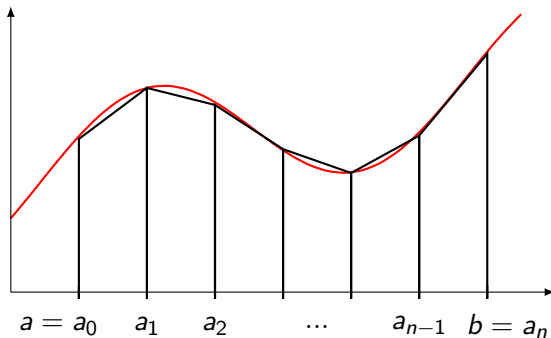
La **méthode des trapèzes** approxime l'aire $\int_a^b f(x)dx$ sous la courbe par des trapèzes (trapèze = quadrilatère ayant 2 côtés parallèles).

Méthode des trapèzes

La **méthode des trapèzes** approxime l'aire $\int_a^b f(x)dx$ sous la courbe par des trapèzes (trapèze = quadrilatère ayant 2 côtés parallèles).



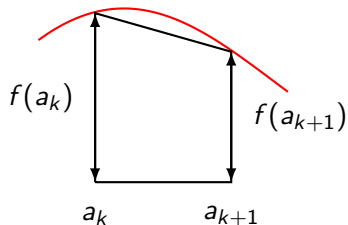
Méthode des trapèzes



Question

Que vaut l'aire du trapèze de a_k à a_{k+1} ?

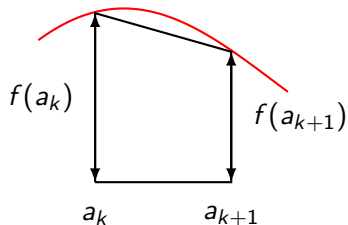
Méthode des trapèzes



Question

Que vaut l'aire du trapèze de a_k à a_{k+1} ?

Méthode des trapèzes

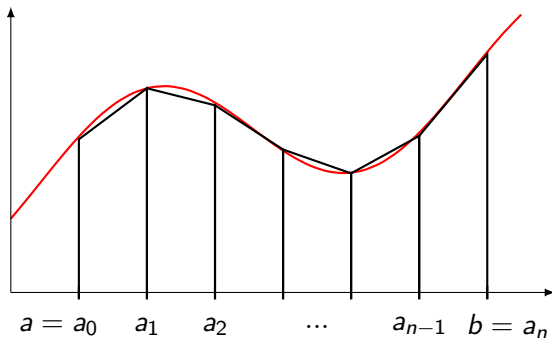


Question

Que vaut l'aire du trapèze de a_k à a_{k+1} ?

$$\underbrace{(a_{k+1} - a_k)}_{= \frac{b-a}{n}} \times \frac{f(a_k) + f(a_{k+1})}{2}$$

Méthode des trapèzes



La méthode des trapèzes consiste à approximer $\int_a^b f$ par:

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(a_k) + f(a_{k+1})}{2}$$

Comparaisons des deux méthodes

En posant $a_k = a + k \frac{b-a}{n}$:

① **Méthode des rectangles:** $\int_a^b f \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)$

② **Méthode des trapèzes:** $\int_a^b f \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(a_k) + f(a_{k+1})}{2}$

La méthode des trapèzes demande de calculer deux fois plus de valeurs de f pour le même n , mais donne une meilleure approximation de l'intégrale.