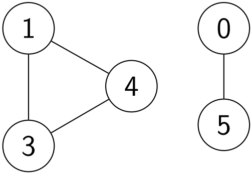
Arbre couvrant de poids minimum

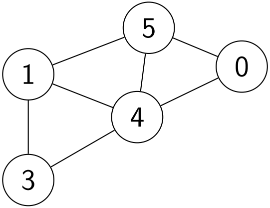
March 14, 2021

Connexité

Un graphe non orienté est **connexe** s'il possède un chemin de n'importe quel sommet à n'importe quel autre.



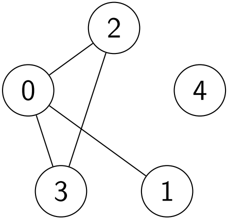
Graphe non connexe



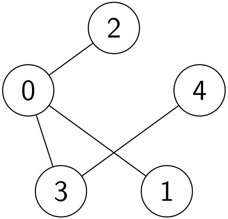
Graphe connexe

Graphe acyclique

Un graphe est **acyclique** (ou: sans cycle) s'il ne contient pas de cycle.



Graphe contenant un cycle



Graphe acyclique

Arbre

Définition

Un graphe est un **arbre** s'il est **connexe** et **sans cycle**

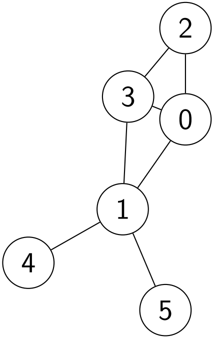
Arbre

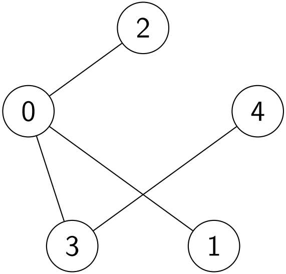
Définition

Un graphe est un **arbre** s'il est **connexe** et **sans cycle**

Définition

Les graphes ci-dessous sont-ils des arbres?





Arbre couvrant de poids minimal

Arbre couvrant

Soit G un graphe pondéré (chaque arête possède un poids).
Un arbre couvrant de G est un ensemble d'arêtes de G qui forme un arbre et qui contient tous les sommets. Son poids est la somme des poids des arêtes de l'arbre.

Arbre couvrant de poids minimal

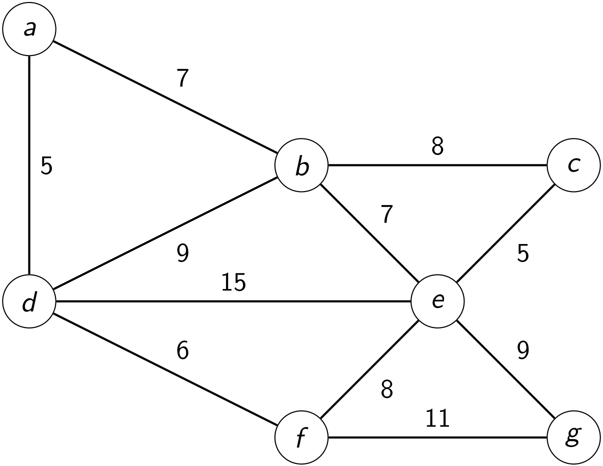
Arbre couvrant

Soit G un graphe pondéré (chaque arête possède un poids).
Un arbre couvrant de G est un ensemble d'arêtes de G qui forme un arbre et qui contient tous les sommets. Son poids est la somme des poids des arêtes de l'arbre.

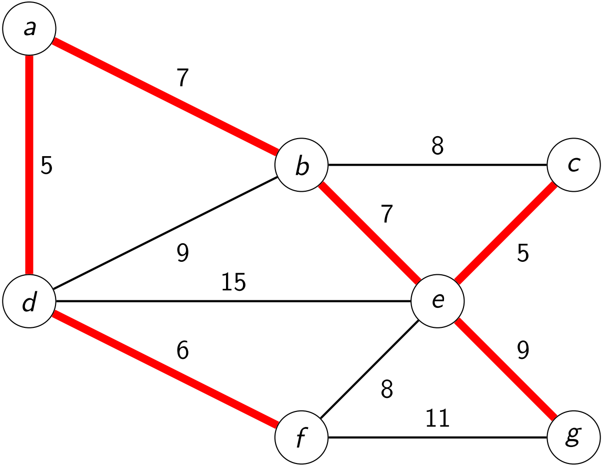
Arbre couvrant de poids minimal

Un arbre couvrant dont le poids est le plus petit possible est appelé un **arbre couvrant de poids minimal**.

Arbre couvrant de poids minimal : exemple



Arbre couvrant de poids minimal : exemple



Arbre couvrant de poids minimal : algorithmes

Il existe deux algorithmes très connus pour trouver un arbre couvrant de poids minimal :

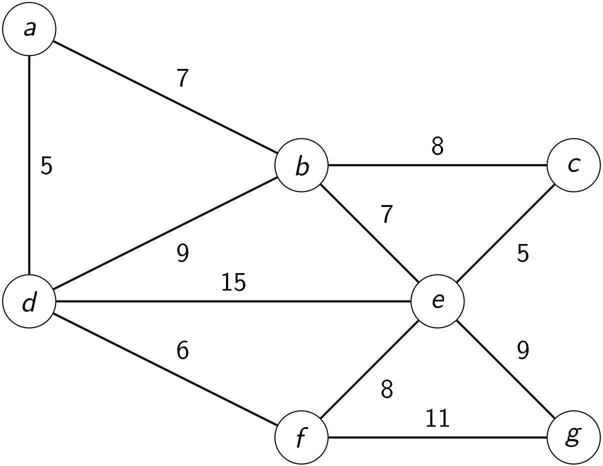
- **Kruskal** : algorithme glouton utilisant un tri des arêtes
- **Prim** : algorithme construisant l'arbre de proche en proche, similaire à Dijkstra

Algorithme de Kruskal

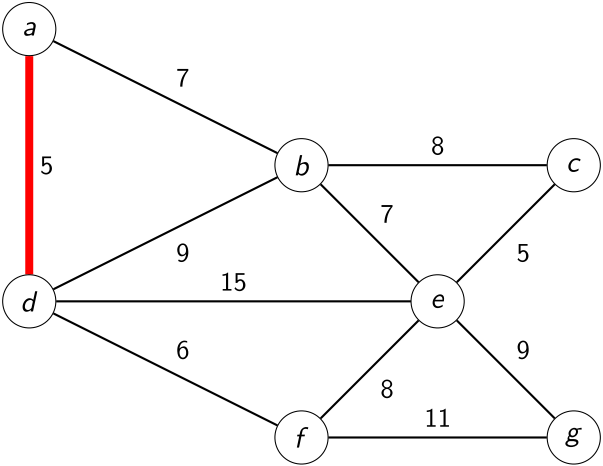
Trier les arêtes par poids croissant.
Commencer avec un arbre T vide (aucune arête).

Pour chaque arête *a* par poids croissant:
    Si l'ajout de *a* ne créé pas de cycle dans T:
        Ajouter *a* à T

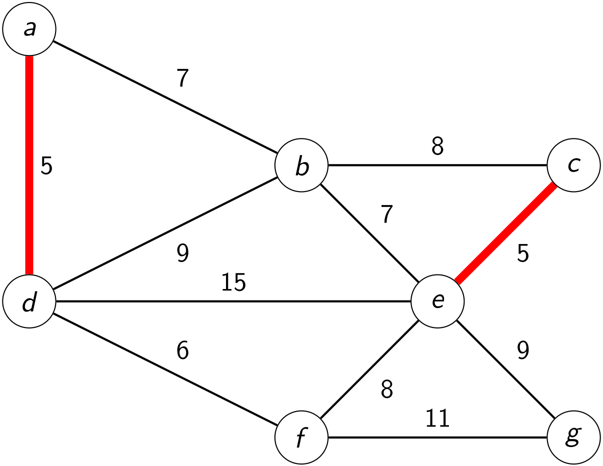
Algorithme de Kruskal



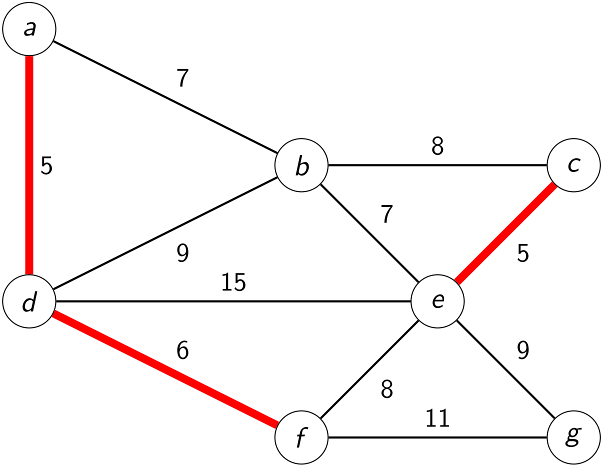
Algorithme de Kruskal



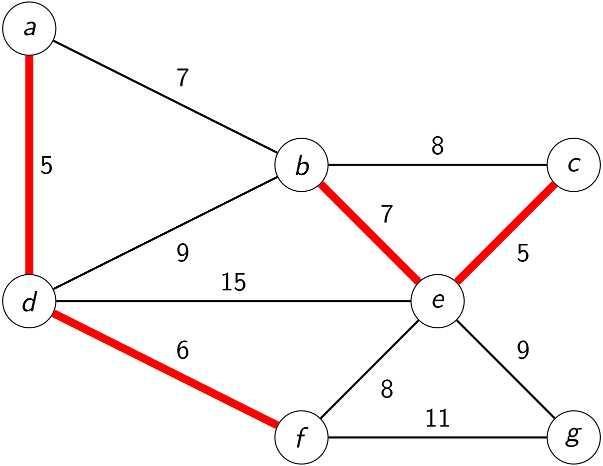
Algorithme de Kruskal



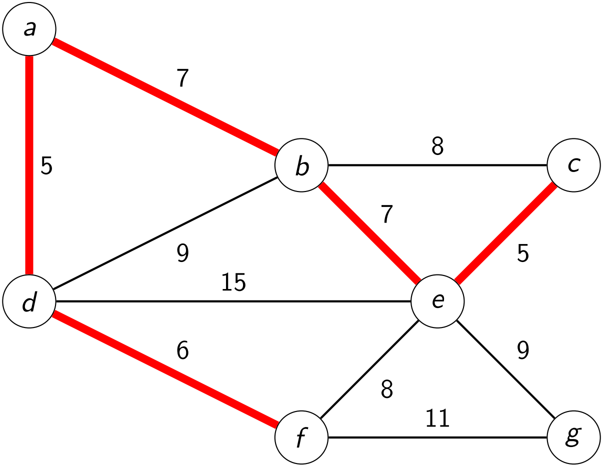
Algorithme de Kruskal



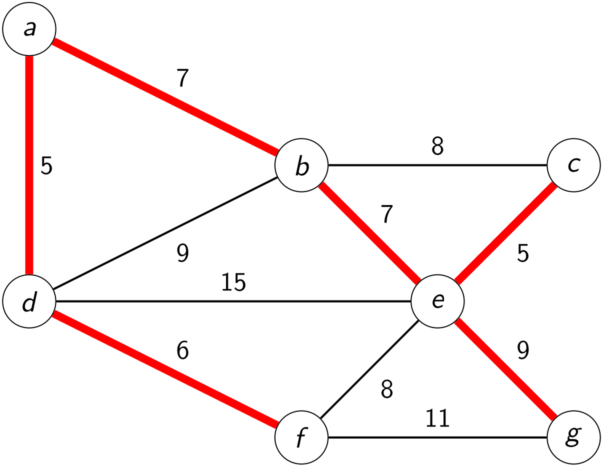
Algorithme de Kruskal



Algorithme de Kruskal



Algorithme de Kruskal



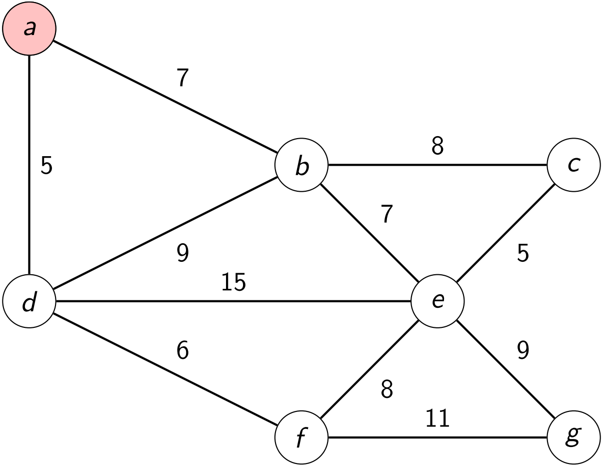
Algorithme de Prim

Commencer avec un arbre T contenant un seul sommet.

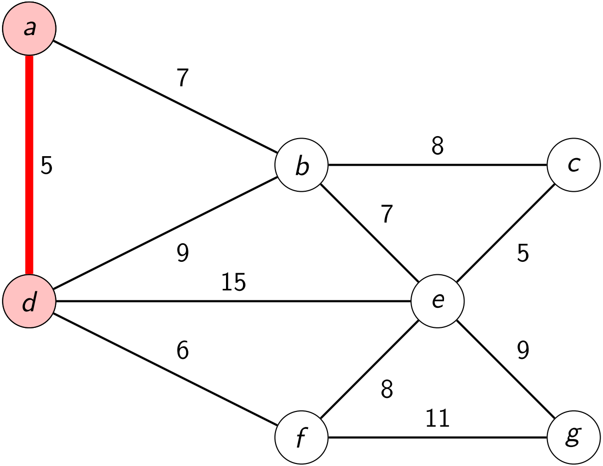
Tant que T ne contient pas tous les sommets:

    Ajouter l'arête sortante de T de poids minimum

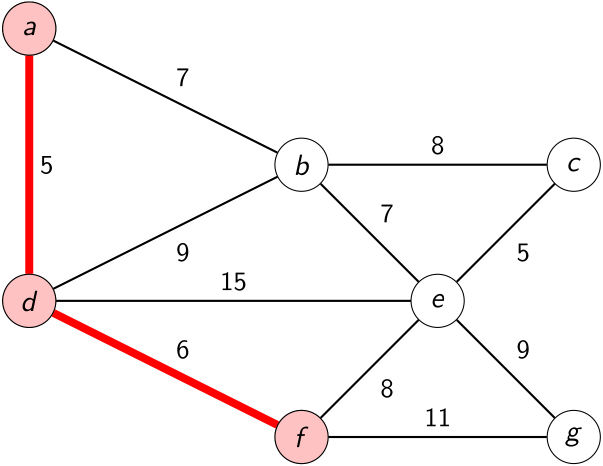
Algorithme de Prim



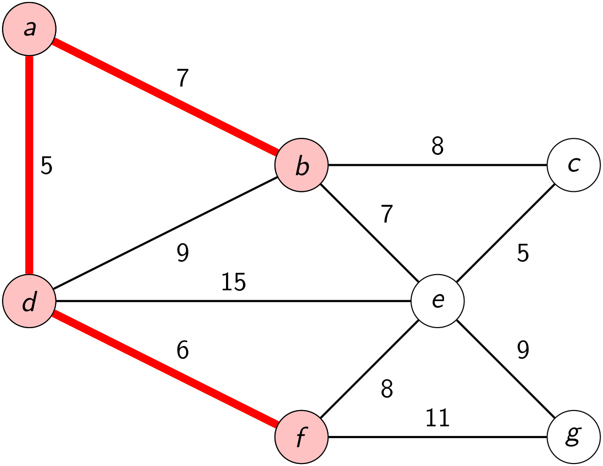
Algorithme de Prim



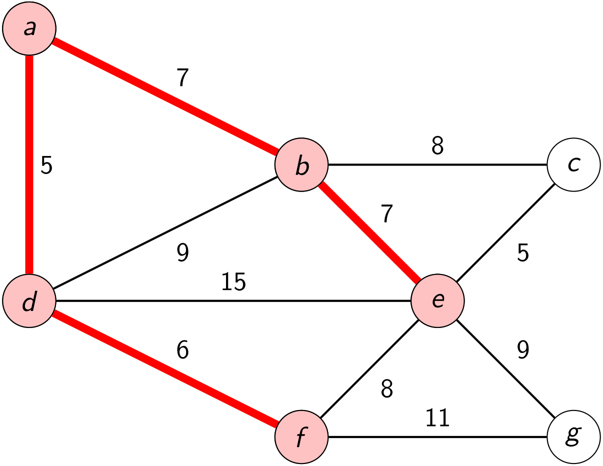
Algorithme de Prim



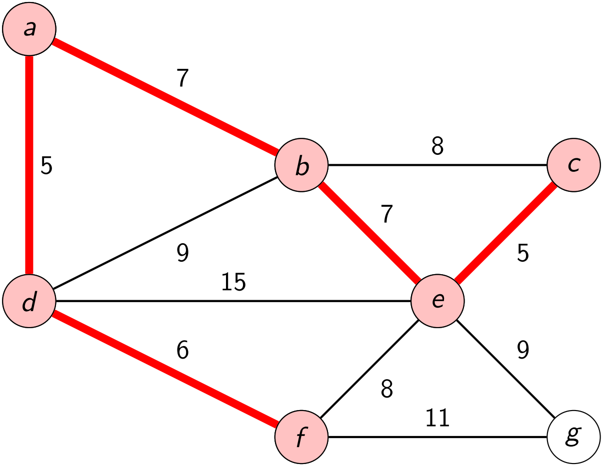
Algorithme de Prim



Algorithme de Prim



Algorithme de Prim



Algorithme de Prim