非线性固体力学

信吉平

2023 年 10 月 9 日

目录

第 1 章　线弹性问题

线弹性问题的偏微分方程如(1.1)。

$$-\nabla\cdot\sigma = \mathbf{f} \qquad \mathbf{x}\in\Omega \tag{1.1}$$

Dirichlet 边界条件和 Neumann 边界条件如(1.2)。

$$\sigma\cdot\mathbf{n} = \mathbf{g}_{\mathrm{N}} \qquad \mathbf{x}\in\Gamma_{\mathrm{N}} \tag{1.2a}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}_{\mathrm{D}} \qquad \mathbf{x}\in\Gamma_{\mathrm{D}} \tag{1.2b}$$

(1.1)两边点乘 $\mathbf{v}$，再在 Ω 上积分得到(1.3)，通过散度定理得到变分形式(1.4)。

$$-\int_\Omega \nabla\cdot\sigma\cdot\mathbf{v}\mathrm{d}x = \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\mathrm{d}x \tag{1.3}$$

$$\int_\Omega \sigma:\varepsilon(\mathbf{v})\mathrm{d}x = \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\mathrm{d}x + \int_\Gamma \sigma\cdot\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\mathrm{d}s_x \tag{1.4}$$

本构关系如(1.5)。

$$\sigma(\mathbf{u}) = 2\mu\varepsilon(\mathbf{u}) + \lambda\,\mathrm{tr}(\varepsilon(\mathbf{u}))\mathbf{I} \tag{1.5}$$

将(1.5)代入(1.4)得到(1.6)。

$$\int_\Omega (2\mu\varepsilon(\mathbf{u}):\varepsilon(\mathbf{v}) + \lambda\nabla\cdot\mathbf{u}\nabla\cdot\mathbf{v})\,\mathrm{d}x = \int_\Gamma \sigma\cdot\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\mathrm{d}s_x + \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\mathrm{d}x \tag{1.6}$$

采用线性单元对(1.6)进行离散得到线性方程组(1.7)。

$$KU = b \tag{1.7}$$

1.1 算例（二维线弹收敛性）

(1.8)定义解析解验证收敛性。

$$\Omega := (0,1)^2 \tag{1.8a}$$

$$\Gamma_D := \{x_1 = 0\} \cup \{x_2 = 0\} \tag{1.8b}$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \sin(\pi x_1)\cos(\pi x_2) \\ \cos(\pi x_1)\sin(\pi x_2) \end{pmatrix} \tag{1.8c}$$

$$\mathbf{b} = 2(2\mu+\lambda)\pi^2 \begin{pmatrix} \sin(\pi x_1)\cos(\pi x_2) \\ \cos(\pi x_1)\sin(\pi x_2) \end{pmatrix} \tag{1.8d}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 2(\mu+\lambda)\pi\cos(\pi x_1)\cos(\pi x_2) & -2\mu\pi\sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2) \\ -2\mu\pi\sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2) & 2(\mu+\lambda)\pi\cos(\pi x_1)\cos(\pi x_2) \end{pmatrix} \tag{1.8e}$$

图 1.1为网格加密 5 次的结果，中验证了二次收敛速度。

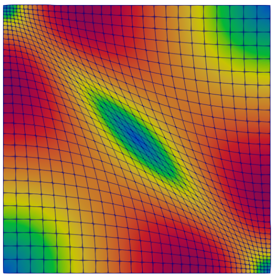

图 1.1: 二维线弹性方程，加密 5 次

	$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|_{L^2}$	ROC
3	0.0037921	
4	0.00094998	3.991768248
5	0.00023762	3.9978958
6	5.9413e-05	3.9995
7	1.4854e-05	3.999798034

表 1.1: 二维线弹性方程，弹性模量 2.5，泊松比 0.25。

1.2 算例（Cook Membrane）

图 1.2和图 1.3是和 Abaqus 的比较，结果吻合。

图 1.2: Cook Membrane 线弹性算例, 弹性模量 1, 泊松比 $\frac{1}{3}$, 拖拽力 $\frac{1}{16}$, 加密 3 次, $\mathbf{u}_2(48,60) = 22.606300354003906$。

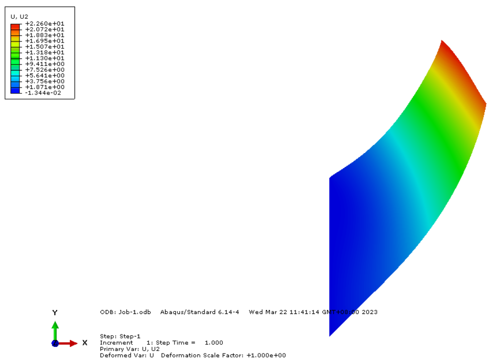

图 1.3: Cook Membrane 线弹性 Abaqus 算例，弹性模量 1，泊松比 $\frac{1}{3}$，拖拽力 $\frac{1}{16}$，网格大小为 0.25，$\mathbf{u}_2(48,60) = 22.6046$。

第 2 章　接触算法

2.1　区域分离法

2.1.1　泊松方程

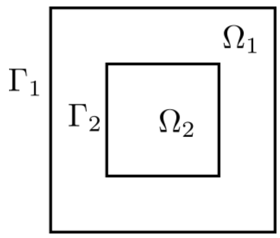

图 2.1: 区域分离

首先根据图 2.1定义问题，包括方程、边界条件和界面条件，如方程(2.1)。

$$
\begin{aligned}
-\Delta u_1 &= f_1 && x \in \Omega_1 && (2.1a)\\
u_1 &= g_1 && x \in \Gamma_1 && (2.1b)\\
-\Delta u_2 &= f_2 && x \in \Omega_2 && (2.1c)\\
u_1 &= u_2 && x \in \Gamma_2 && (2.1d)\\
\frac{\partial u_1}{\partial n_1} &= -\frac{\partial u_2}{\partial n_2} && x \in \Gamma_2 && (2.1e)
\end{aligned}
$$

二维问题采用 continuous piecewise linear function spaces，$u^*_{,h}$ 是该空间基函数，$*$ 是基

函数自由度对应网格顶点的位置，例如 $u_{1,h}^{\Omega_1}$ 是定义在 Ω_1 上的基函数，对应的顶点在 Ω_1 内。

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1}\nabla u_1\nabla v_1\mathrm{d}x &= \int_{\Omega_1} f_1 v_1\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_1}\frac{\partial u_1}{\partial n_1}v_1\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2}\frac{\partial u_1}{\partial n_1}v_1\mathrm{d}x \\
\int_{\Omega_1}\nabla u_1\nabla v_1\mathrm{d}x - \int_{\Gamma_1}\frac{\partial u_1}{\partial n_1}v_1\mathrm{d}x - \int_{\Gamma_2}\frac{\partial u_1}{\partial n_1}v_1\mathrm{d}x &= \int_{\Omega_1} f_1 v_1\mathrm{d}x \\
\underbrace{\int_{\Omega_1}\nabla u_{1,h}^{\Omega_1}\nabla v_{1,h}^{\Omega_1}\mathrm{d}x}_{A_{11}} + \underbrace{\int_{\Omega_1}\nabla u_{1,h}^{\Gamma_2}\nabla v_{1,h}^{\Omega_1}\mathrm{d}x}_{A_{13}} &= \int_{\Omega_1} f_1 v_{1,h}^{\Omega_1}\mathrm{d}x - \int_{\Omega_1}\nabla u_{1,h}^{\Gamma_1}\nabla v_{1,h}^{\Omega_1}\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_2}\nabla u_2\nabla v_2\mathrm{d}x &= \int_{\Omega_2} f_2 v_2\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2}\frac{\partial u_2}{\partial n_2}v_2\mathrm{d}x \\
\int_{\Omega_2}\nabla u_2\nabla v_2\mathrm{d}x - \int_{\Gamma_2}\frac{\partial u_2}{\partial n_2}v_2\mathrm{d}x &= \int_{\Omega_2} f_2 v_2\mathrm{d}x \\
\underbrace{\int_{\Omega_2}\nabla u_{2,h}^{\Omega_2}\nabla v_{2,h}^{\Omega_2}\mathrm{d}x}_{A_{22}} + \underbrace{\int_{\Omega_2}\nabla u_{2,h}^{\Gamma_2}\nabla v_{2,h}^{\Omega_2}\mathrm{d}x}_{A_{23}} &= \int_{\Omega_2} f_2 v_{2,h}^{\Omega_2}\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_2}\frac{\partial u_1}{\partial n_1}v\mathrm{d}x &= -\int_{\Gamma_2}\frac{\partial u_2}{\partial n_2}v\mathrm{d}x \\
\int_{\Gamma_2}\frac{\partial u_1}{\partial n_1}v_1\mathrm{d}x &= -\int_{\Gamma_2}\frac{\partial u_2}{\partial n_2}v_2\mathrm{d}x \\
\int_{\Omega_1}\nabla u_1\nabla v_1\mathrm{d}x - \int_{\Omega_1} f_1 v_1\mathrm{d}x - \int_{\Gamma_1}\frac{\partial u_1}{\partial n_1}v_1\mathrm{d}x + \int_{\Omega_2}\nabla u_2\nabla v_2\mathrm{d}x - \int_{\Omega_2} f_2 v_2\mathrm{d}x &= 0 \\
\underbrace{\int_{\Omega_1}\nabla u_{1,h}^{\Omega_1}\nabla v_{1,h}^{\Gamma_2}\mathrm{d}x}_{A_{31}} + \underbrace{\int_{\Omega_2}\nabla u_{2,h}^{\Omega_2}\nabla v_{2,h}^{\Gamma_2}\mathrm{d}x}_{A_{32}} + \underbrace{\int_{\Omega_1}\nabla u_{1,h}^{\Gamma_2}\nabla v_{1,h}^{\Gamma_2}\mathrm{d}x + \int_{\Omega_2}\nabla u_{2,h}^{\Gamma_2}\nabla v_{2,h}^{\Gamma_2}\mathrm{d}x}_{A_{33}} & \\
= \int_{\Omega_1} f_1 v_{1,h}^{\Gamma_2}\mathrm{d}x - \int_{\Omega_1}\nabla u_{1,h}^{\Gamma_1}\nabla v_{1,h}^{\Gamma_2}\mathrm{d}x + \int_{\Omega_2} f_2 v_{2,h}^{\Gamma_2}\mathrm{d}x &
\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

2.1.2 线弹性方程

2.2 柔性体/刚性体

2.3 接触查找

2.4 接触条件定义

1	1.0654	
2	0.27147	3.924558883
3	0.068537	3.960926215
4	0.017192	3.986563518
5	0.0043005	3.997674689

表 2.1: Ω_2 上的 L^2 误差收敛

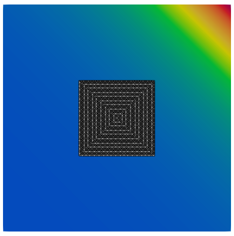

图 2.2: Ω_1

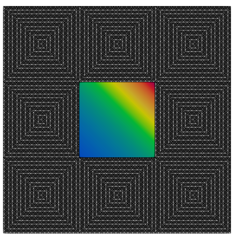

图 2.3: Ω_2

参考文献