

# 1 Partie I : Cas stationnaire

## 1.1 Théorie

Objectif : résoudre l'équation de Poisson en 2D avec le schema à cinq points pour le Laplacien.  
L'équation de poisson s'écrit comme suit :

$$\Delta u = f \quad (1)$$

En 2D cela revient à :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \quad (2)$$

Le développement de Taylor nous donne :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2} \quad (4)$$

On obtient :

$$\frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2} + \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} = f \quad (5)$$

C'est-à-dire :

$$\frac{u_{i,j-1} - 4u_{i,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i+1,j}}{h^2} = f \quad (6)$$

Avec les conditions aux limites suivantes :  $\begin{cases} (x, 0) = p(x) \\ u(0, y) = q(x) \\ u(x, 1) = r(x) \\ u(1, y) = s(x) \end{cases}$

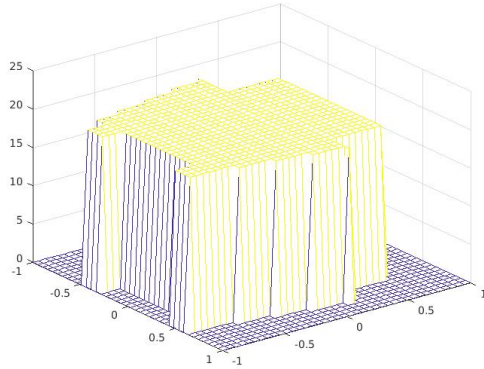
Ce qui nous donne  $(n-1)^2$  équations que l'on peut représenter sous forme matricielle  $Au = f$  tel que :

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -4 & 1 & & & \\ 1 & -4 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -4 & 1 \\ 1 & & & 1 & -4 \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & -4 & 1 \\ & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & -4 & 1 \\ & & & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & & & & & -4 & 1 \\ & & & & & & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ \vdots \\ u_{1,n} \\ u_{2,1} \\ u_{2,2} \\ \vdots \\ u_{2,n} \\ \vdots \\ u_{n,1} \\ u_{n,2} \\ \vdots \\ u_{n,n} \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_{1,1} - \frac{1}{h^2}(p_1 + q_1) \\ f_{1,2} - \frac{1}{h^2}q_2 \\ \vdots \\ f_{1,n} - \frac{1}{h^2}(p_n + r_1) \\ f_{2,1} - \frac{1}{h^2}p_2 \\ f_{2,2} \\ \vdots \\ f_{2,n} - \frac{1}{h^2}r_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{n,1} - \frac{1}{h^2}(p_n + s_1) \\ f_{n,2} - \frac{1}{h^2}s_2 \\ \vdots \\ f_{n,n} - \frac{1}{h^2}(r_n + s_n) \end{pmatrix}.$$

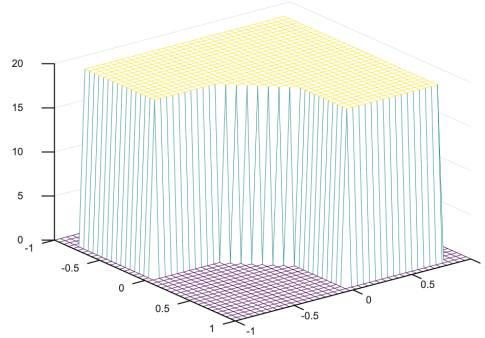
Figure 1: Caption

## 1.2 les cas tests

la température ambiante en été, lorsque les portes et les fenetres sont à 20C



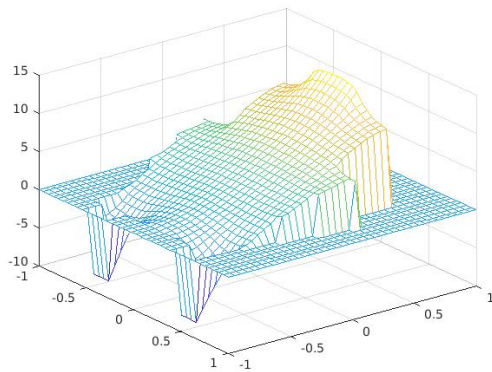
(a) chambre1-summer



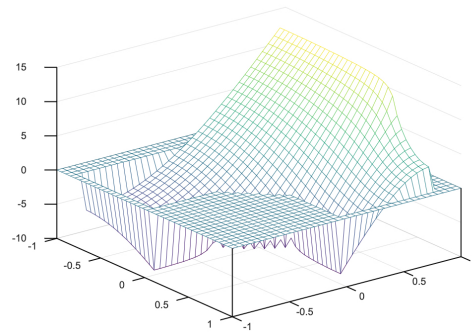
(b) chambre2-summer

Figure 2: la température ambiante en été

Dans ce cas, on peut voir que les températures dans toutes les régions sont presque égales la température ambiante en hiver, sans chauffage



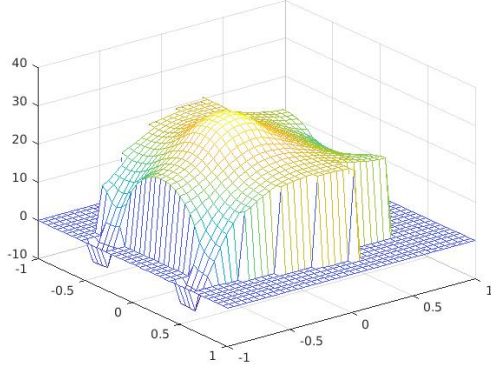
(a) chambre1-winter



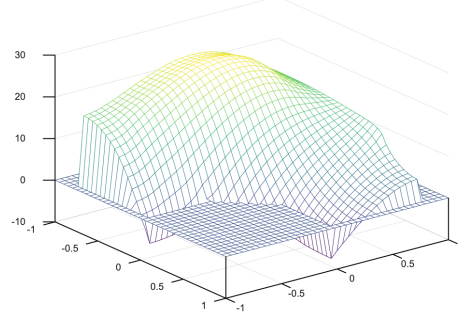
(b) chambre2-winter

Figure 3: la température ambiante en hiver

Dans ce cas, vous pouvez voir que la température est la plus élevée près de la porte, et plus la fenêtre est proche, la température diminue progressivement. Ensuite, nous tournons le radiateur à 300 degrés et utilisons la méthode de Poisson pour obtenir une image qui a atteint un état d'équilibre. C'est aussi l'image finale que nous utiliserons théoriquement la méthode d'Euler explicite ou implicite dans la deuxième partie la température ambiante en hiver, avec la chauffage



(a) chambre1-winter with chauffage



(b) chambre2-winter with chauffage

Figure 4: la température ambiante en hiver avec chauffage

Enfin, on peut voir qu'après avoir allumé le radiateur, la température moyenne de la pièce atteint environ 26 degrés dans un état d'équilibre, et la différence de température entre les différentes positions de la pièce n'est pas trop grande. Par conséquent, on peut considérer que le radiateur est installé dans une bonne position.

## 2 Partie II : Simulation instationnaire

### 2.1 Théorie

Objectif : Utilisez des méthodes Euler explicites ou implicites pour simuler le processus de transmission de chaleur dans la pièce

Méthode Euler explicite:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{i-1,j}^n + u_{i,j+1}^n - 4u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n + u_{i+1,j}^n}{h^2} = f \quad (7)$$

Méthode Euler implicite:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{i-1,j}^{n+1} + u_{i,j+1}^{n+1} - 4u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1} + u_{i+1,j}^{n+1}}{h^2} = f \quad (8)$$

Par la suite, soit A la forme matricielle de l'opérateur laplacien, la formule ci-dessus peut être transformée en

Méthode Euler explicite

$$U^{n+1} = (I + \nu A)U^n + \frac{\nu \Delta t}{h^2} b \quad (9)$$

Méthode Euler implicite:

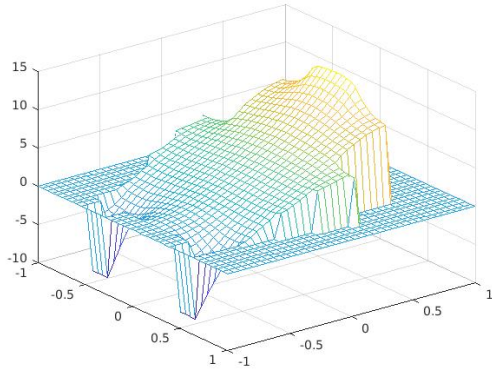
$$U^{n+1} = (I - \nu A)^{-1} (U^n + \frac{\nu \Delta t}{h^2} b) \quad (10)$$

Ensuite, nous allons définir la condition aux limites de Neumann dans A, et ajouter la température aux limites de la porte et de la fenêtre en b (condition aux limites de Dirichlet)

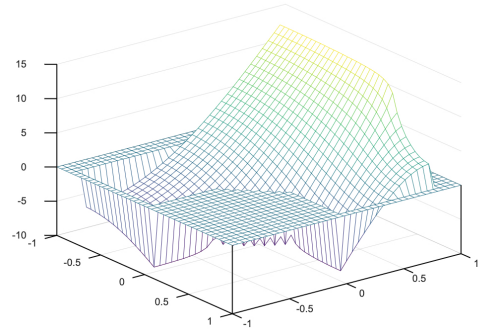
### 2.2 Les cas tests

#### 2.2.1 winter

Nous commençons par la condition de la pièce qui atteint la condition d'équilibre lorsque le radiateur n'est pas allumé en période hivernale (retour à la maison après le ski), puis allumons le radiateur, et la température change avec le temps comme indiqué ci-dessous



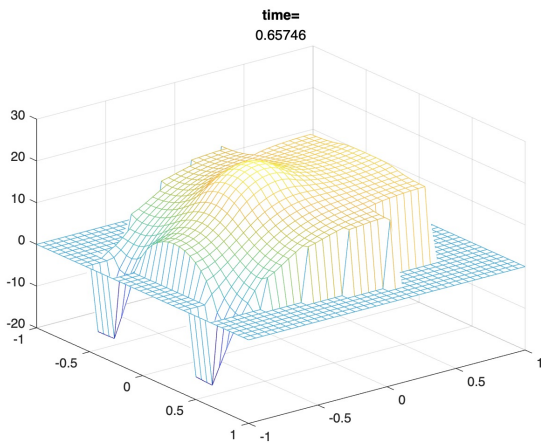
(a) chambre1



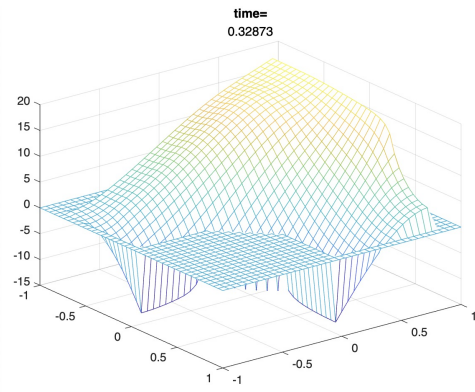
(b) chambre2

Figure 5: État de départ

Par la suite, nous avons simulé en été lorsque la température extérieure était de 30 degrés. Après avoir atteint l'état d'équilibre, nous réglons la température du radiateur à 0 degré pour simuler le fonctionnement de la climatisation. Voici l'image une fois le processus stabilisé. On constate que la température moyenne de la pièce a chuté d'environ 7 degrés

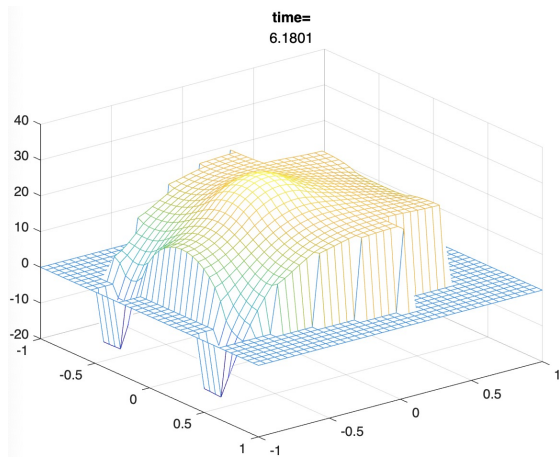


(a) chambre1

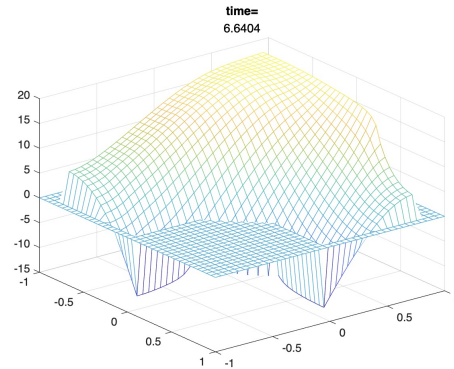


(b) chambre2

Figure 6: État de  $T=0.65$



(a) chambre1



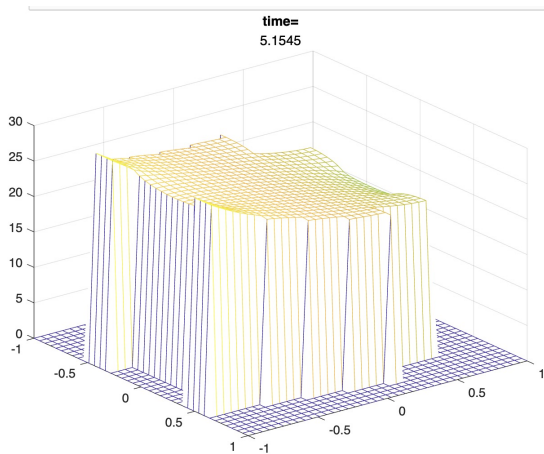
(b) chambre2

Figure 7: État final

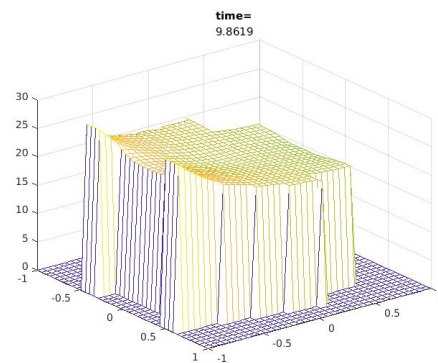
Nous pouvons constater que l'image finale obtenue par la méthode explicite d'Euler et la méthode implicite d'Euler est presque la même, et la température de l'état final est très petite à partir de l'état stable de la première partie

### 2.2.2 Summer

Par la suite, nous réglons le radiateur à 0 degré pour simuler le fonctionnement du climatiseur, et les résultats de fonctionnement obtenus sont les suivants:



(a) with out air-condition



(b) air-conditioned

Figure 8: Summer

On peut voir qu'en été, lorsque la température extérieure est de 30 degrés et que la porte est de 20 degrés, le climatiseur est allumé et la température intérieure moyenne chute de 25 degrés à moins de 20 degrés.

## 2.3 Analyse

Dans le code, nous avons ajouté une minuterie et constaté que le temps de calcul requis pour l'implicite d'Euler est environ deux fois celui de l'explicite d'Euler. Et en modifiant la valeur de  $v$ , on constate que lorsque  $v$  est trop grand, Euler ne peut pas afficher la bonne image explicitement, mais Euler peut toujours l'être implicitement. Ensuite, nous étudions la stabilité des deux méthodes. Nous utilisons la transformation de Fourier pour transformer les méthodes explicites et implicites d'Euler en les styles suivants

$$A(k, m)^n = e^{2i\pi(kj\Delta x + ml\Delta y)} \quad (11)$$

Schema explicite:

$$A(k, m) = \left(1 - \frac{2v\Delta t}{(\Delta x)^2} - \frac{2v\Delta t}{(\Delta y)^2}\right) + \frac{v\Delta t}{(\Delta x)^2}(e^{2i\Delta x} + e^{-2i\Delta x}) + \frac{v\Delta t}{(\Delta y)^2}(e^{2i\Delta y} + e^{-2i\Delta y}) \quad (12)$$

$$A(k, m) = 1 - 4\frac{v\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2(\pi k \Delta x) - 4\frac{v\Delta t}{(\Delta y)^2} \sin^2(\pi m \Delta y) \quad (13)$$

Schema implicite:

$$A(k, m)^{-1} = \left(1 + \frac{2v\Delta t}{(\Delta x)^2} + \frac{2v\Delta t}{(\Delta y)^2}\right) - \frac{v\Delta t}{(\Delta x)^2}(e^{2i\Delta x} + e^{-2i\Delta x}) - \frac{v\Delta t}{(\Delta y)^2}(e^{2i\Delta y} + e^{-2i\Delta y}) \quad (14)$$

$$A(k, m)^{-1} = 1 + 4\frac{v\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2(\pi k \Delta x) + 4\frac{v\Delta t}{(\Delta y)^2} \sin^2(\pi m \Delta y) \quad (15)$$

Pour le Schema implicite,  $|A(k, m)| \leq 1$  dans toutes les conditions, il est donc *inconditionnellement stable*

Pour le Schema explicite, la condition est

$$\frac{2v\Delta t}{(\Delta x)^2} + \frac{2v\Delta t}{(\Delta y)^2} \leq \frac{1}{2} \quad (16)$$

Car  $\Delta x = \Delta y = h$ , l'équation égale a:

$$2v\Delta t = 0.5 \quad (17)$$

Dans le programme, nous définissons l'alpha sur  $2v\Delta t$ . Voici les images de la méthode explicite d'Euler inférieure et supérieure à 0,5

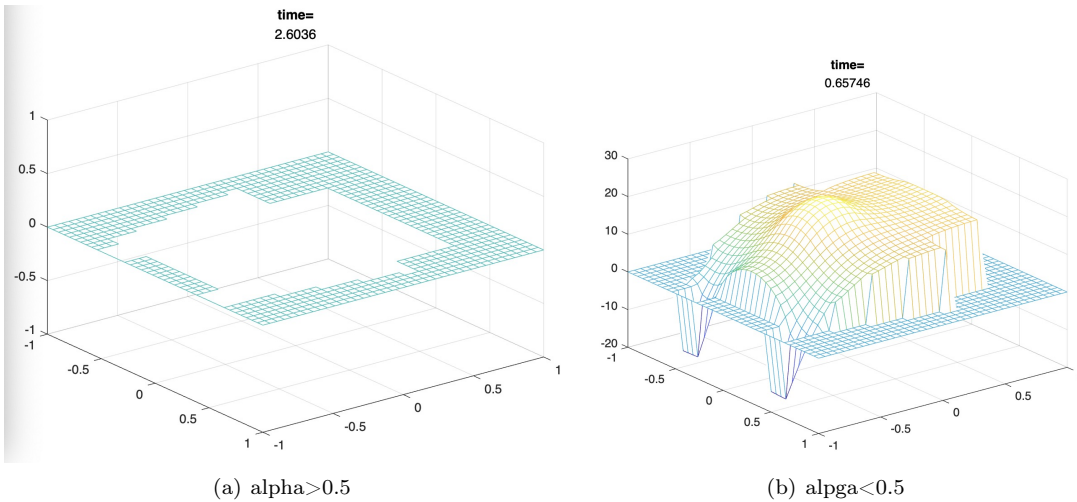


Figure 9: Etude de stabilité

Par conséquent, la méthode explicite d'Euler est *conditionnellement stable*.  
De plus, nous ajoutons également le minuteur tic ... tac pour mesurer que pour tout le cycle de la méthode Euler, le temps de calcul requis pour la méthode implicite est à peu près celui de la méthode explicite