

Zihao Guan, Arno Clognier

1 Partie I : Simulation statique

1.1 Théorie

Objectif : Modéliser la température d’une pièce en utilisant l’équation de chaleur stationnaire ou équation de poisson :

$$\Delta u = f \quad (1)$$

En 2D cela revient à :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \quad (2)$$

Le développement de Taylor nous donne :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2} \quad (4)$$

On obtient

$$\frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2} + \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} = f \quad (5)$$

Soit

$$\frac{u_{i,j-1} - 4u_{i,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i+1,j}}{h^2} = f \quad (6)$$

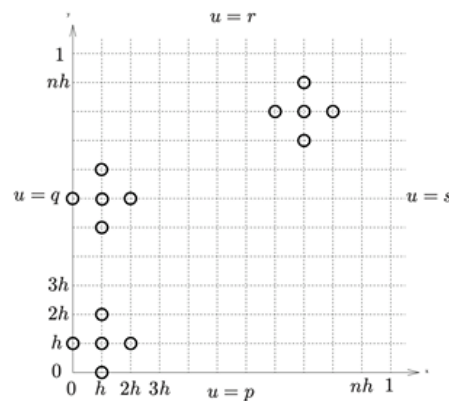


Figure 1: Schéma à 5 points

Nous avons les conditions limites suivantes :

$$\begin{cases} (x, 0) = p(x) \\ u(0, y) = q(x) \\ u(x, 1) = r(x) \\ u(1, y) = s(x) \end{cases}$$

Ce qui nous donne $(n - 1)^2$ équations que l'on peut représenter sous forme matricielle $Au = f$:

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -4 & 1 & & & & \\ 1 & -4 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & -4 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ \vdots \\ u_{1,n} \\ u_{2,1} \\ u_{2,2} \\ \vdots \\ u_{2,n} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n,1} \\ u_{n,2} \\ \vdots \\ u_{n,n} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} := \begin{pmatrix} f_{1,1} - \frac{1}{h^2}(p_1 + q_1) \\ f_{1,2} - \frac{1}{h^2}q_2 \\ \vdots \\ f_{1,n} - \frac{1}{h^2}(q_n + r_1) \\ f_{2,1} - \frac{1}{h^2}p_2 \\ f_{2,2} \\ \vdots \\ f_{2,n} - \frac{1}{h^2}r_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{n,1} - \frac{1}{h^2}(p_n + s_1) \\ f_{n,2} - \frac{1}{h^2}(s_2) \\ \vdots \\ f_{n,n} - \frac{1}{h^2}(r_n + s_n) \end{pmatrix}.$$

Figure 2: système sous forme matricielle

1.2 Cas tests

Commençons par créer deux pièces de configurations différentes.

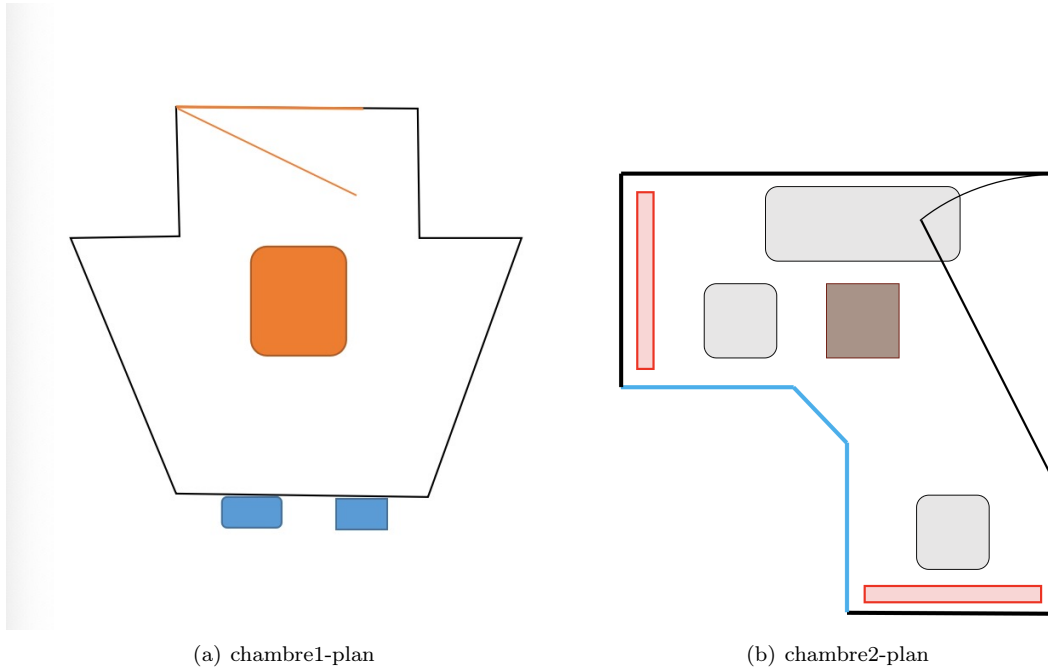
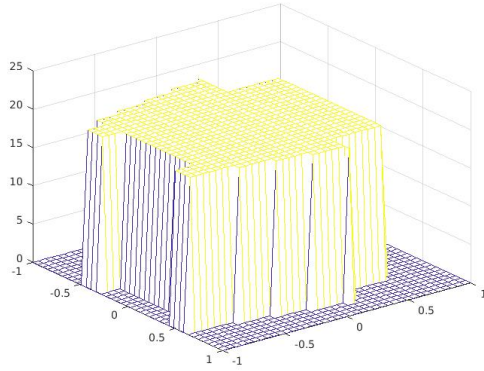


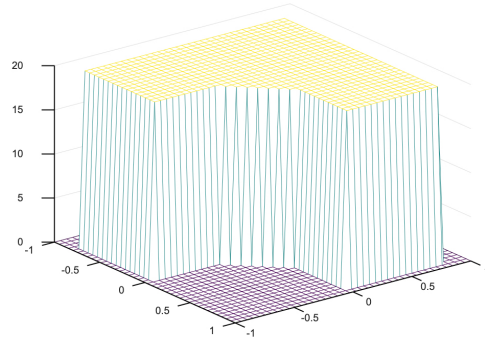
Figure 3: plans des pièces

1.2.1 Température ambiante en été.

Nous simulons la température ambiante de deux pièces en été, lorsque les portes et les fenêtres sont à 20C.



(a) chambre1-summer



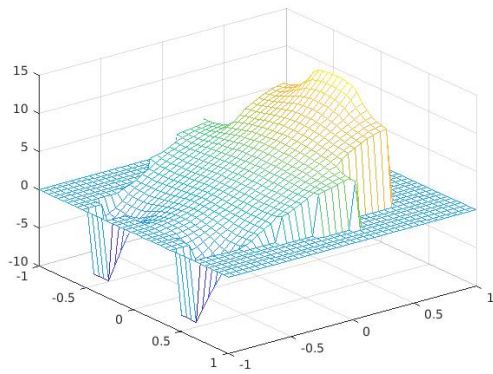
(b) chambre2-summer

Figure 4: température ambiante en été

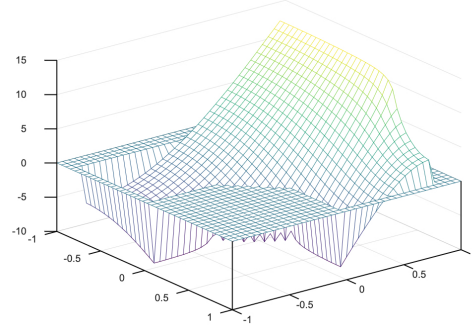
Nous remarquons dans ce cas une température constante dans toute la pièce.

1.2.2 Température ambiante en hiver sans chauffage.

Simulons maintenant la température ambiante en hiver sans chauffage.



(a) chambre1-winter



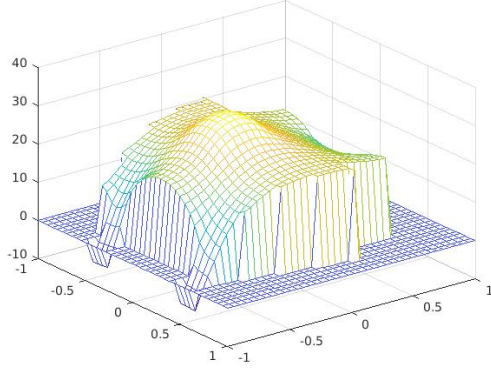
(b) chambre2-winter

Figure 5: température ambiante en hiver

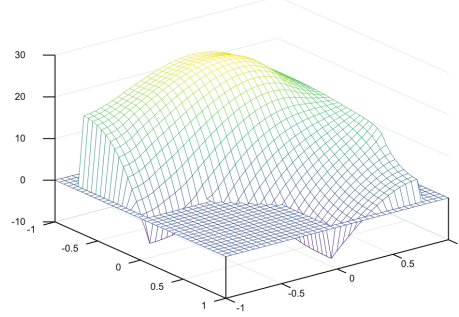
Ici, nous remarquons une variation progressive de la température entre les fenêtres et la porte. La température intérieure n'est pas idéale car très variable et surtout très froide dans la plupart de la pièce.

1.2.3 Température ambiante en hiver avec chauffage.

Ensuite, nous allumons les radiateurs en faisant en sorte d'obtenir une température moyenne intérieure aux alentours de 22°C.



(a) chambre1-winter with heater



(b) chambre2-winter with heater

Figure 6: la température ambiante en hiver avec chauffage

En allumant les radiateurs, la température moyenne de la pièce atteint environ 22°C dans un état d'équilibre. De plus, elle se trouve être plutôt bien répartie. On peut ainsi considérer que les radiateurs sont assez bien positionnés. Ainsi, nous utiliserons cet état dans la méthode d'Euler explicite et implicite en deuxième partie pour la simulation de la température ambiante en hiver, avec chauffage.

2 Partie II : Simulation instationnaire

2.1 Théorie

Objectif : Réaliser une simulation instationnaire du processus de transmission de chaleur dans une pièce en utilisant la discrétisation de l'équation de la chaleur par la méthode d'Euler explicite et implicite.

Schéma d'Euler explicite :

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{i-1,j}^n + u_{i,j+1}^n - 4u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n + u_{i+1,j}^n}{h^2} = 0 \quad (7)$$

Schéma d'Euler implicite :

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{i-1,j}^{n+1} + u_{i,j+1}^{n+1} - 4u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1} + u_{i+1,j}^{n+1}}{h^2} = 0 \quad (8)$$

Soit A la forme matricielle de l'opérateur laplacien, on peut alors transformer ce système en équation matricielle.

Méthode Euler explicite

$$U^{n+1} = (I + \nu A)U^n + \frac{\nu \Delta t}{h^2} b \quad (9)$$

Méthode Euler implicite:

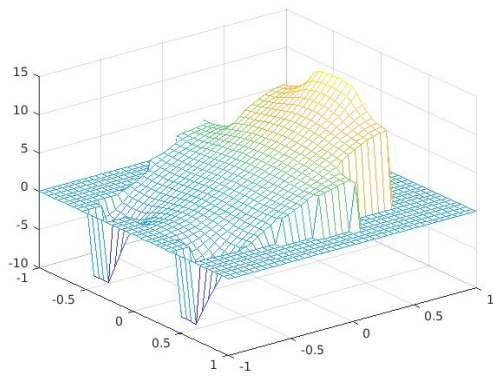
$$U^{n+1} = (I - \nu A)^{-1} (U^n + \frac{\nu \Delta t}{h^2} b) \quad (10)$$

Nous considérons les conditions aux limites de Neumann dans la matrice A et les conditions aux limites de Dirichlet en ajoutant les températures de la porte et des fenêtres dans b.

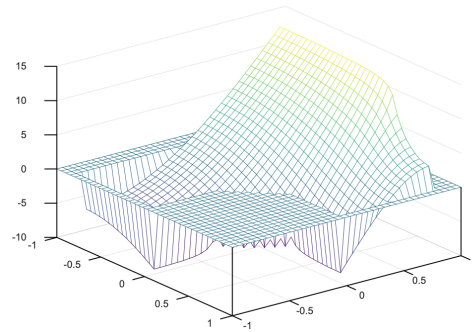
2.2 Cas tests

2.2.1 Impact des radiateurs en hiver dans le temps

Commençons par étudier le cas où l'on allume les radiateurs en période hivernale (retour de vacances au ski) afin d'atteindre un état d'équilibre.

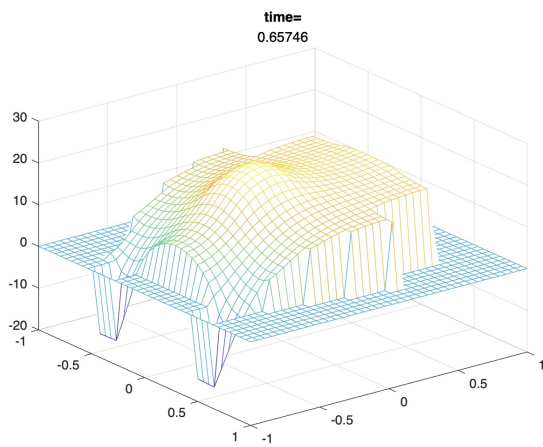


(a) chambre1

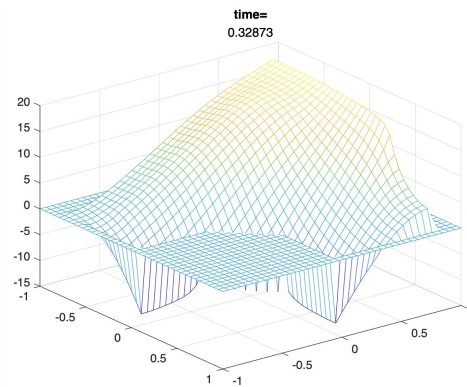


(b) chambre2

Figure 7: État de départ



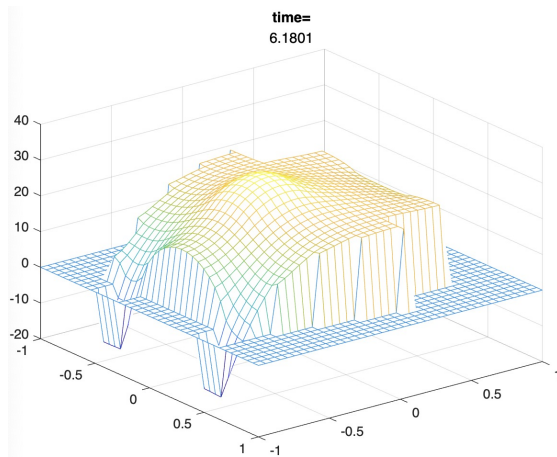
(a) chambre1



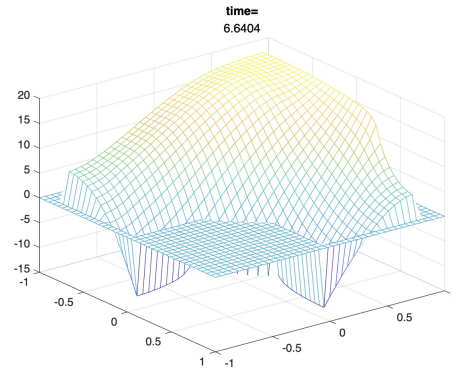
(b) chambre2

Figure 8: État de $T=0.65$

La température augmente progressivement jusqu'à se stabiliser.



(a) chambre1



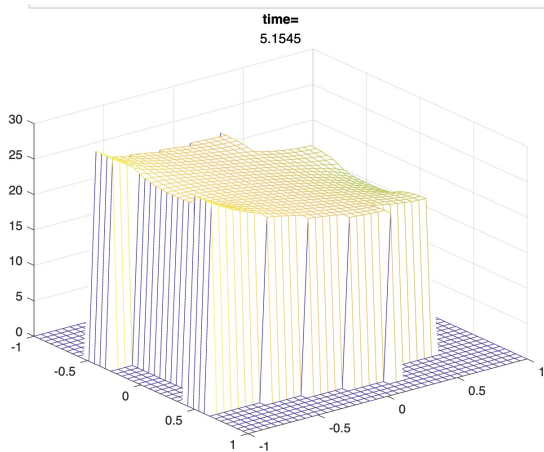
(b) chambre2

Figure 9: État final

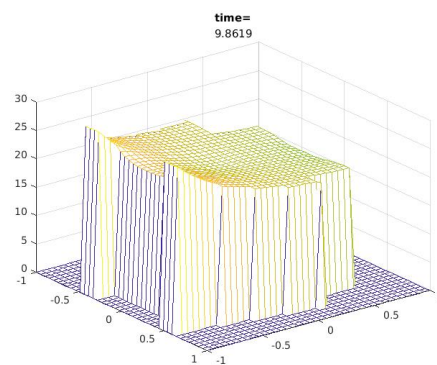
Nous pouvons constater que l'image finale obtenue par la méthode explicite d'Euler et la méthode implicite d'Euler est presque la même, et la température de l'état final est très petite à partir de l'état stable de la première partie. Nous avons constaté que les images à l'état final obtenue par la méthode d'Euler explicite et la méthode d'Euler implicite étaient similaires.

2.2.2 Impact de la climatisation en été dans le temps

Ensuite, nous simulons la température de la pièce en été avec une température extérieure de 30°C (au départ à l'état d'équilibre). Nous réglons la température du radiateur à 0 degré pour simuler le fonctionnement de la climatisation. Une fois le processus stabilisé, nous obtenons l'image ci-dessous. On constate une diminution de la température moyenne de la pièce à environ 7 degrés.



(a) with out air-condition



(b) air-conditioned

Figure 10: Summer

On peut voir qu'en été, lorsque la température extérieure est de 30 degrés et que la porte est de 20 degrés, le climatiseur est allumé et la température intérieure moyenne chute de 25 degrés à moins de 20 degrés.

2.2.3 Schema Crank-Nicolson

Etudions ensuite le schéma Crank-Nicolson :

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} - 0.5 * \nu \frac{u_{i-1,j}^n + u_{i,j+1}^n - 4u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n + u_{i+1,j}^n}{h^2} - 0.5 * \nu \frac{u_{i-1,j}^{n+1} + u_{i,j+1}^{n+1} - 4u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1} + u_{i+1,j}^{n+1}}{h^2} \quad (11)$$

$$U^{n+1} = \frac{1}{2}((I + \nu A)U^n + \frac{\nu \Delta t}{h^2}b) + \frac{1}{2}((I - \nu A) \setminus (U^n - \frac{\nu \Delta t}{h^2}b)) \quad (12)$$

L'image générée par cette méthode ressemble énormément aux images générées par les méthodes Euler ci-dessus. Nous allons discuter de sa stabilité ci-dessous.

2.3 Analyse

Dans le code, nous avons ajouté une minuterie et constaté que le temps de calcul requis pour la simulation avec la méthode implicite d'Euler est environ deux fois plus grand qu'avec le schéma explicite d'Euler. De plus, en modifiant la valeur de ν , on constate que lorsque ν est très grand, Euler explicite ne permet pas d'afficher une bonne image, contrairement à la méthode d'Euler implicite.

Nous allons dans la suite étudier la stabilité des deux méthodes.

Nous utilisons la transformation de Fourier pour transformer les méthodes explicites et implicites d'Euler en les styles suivants

$$A(k, m)^n = e^{2i\pi(kj\Delta x + ml\Delta y)} \quad (13)$$

Schema explicite:

$$A(k, m) = (1 - \frac{2v\Delta t}{(\Delta x)^2} - \frac{2v\Delta t}{(\Delta y)^2}) + \frac{v\Delta t}{(\Delta x)^2}(e^{2i\Delta x} + e^{-2i\Delta x}) + \frac{v\Delta t}{(\Delta y)^2}(e^{2i\Delta y} + e^{-2i\Delta y}) \quad (14)$$

$$A(k, m) = 1 - 4\frac{v\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2(\pi k \Delta x) - 4\frac{v\Delta t}{(\Delta y)^2} \sin^2(\pi m \Delta y) \quad (15)$$

Schema implicite:

$$A(k, m)^{-1} = (1 + \frac{2v\Delta t}{(\Delta x)^2} + \frac{2v\Delta t}{(\Delta y)^2}) - \frac{v\Delta t}{(\Delta x)^2}(e^{2i\Delta x} + e^{-2i\Delta x}) - \frac{v\Delta t}{(\Delta y)^2}(e^{2i\Delta y} + e^{-2i\Delta y}) \quad (16)$$

$$A(k, m)^{-1} = 1 + 4\frac{v\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2(\pi k \Delta x) + 4\frac{v\Delta t}{(\Delta y)^2} \sin^2(\pi m \Delta y) \quad (17)$$

Schema Crank-Nicolson:

$$A(k, m)(1 + 2\frac{v\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2(\pi k \Delta x) + 2\frac{v\Delta t}{(\Delta y)^2} \sin^2(\pi m \Delta y)) = 1 - 2\frac{v\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2(\pi k \Delta x) - 2\frac{v\Delta t}{(\Delta y)^2} \sin^2(\pi m \Delta y) \quad (18)$$

$$-1 = < \frac{1 - 2\frac{v\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2(\pi k \Delta x) - 2\frac{v\Delta t}{(\Delta y)^2} \sin^2(\pi m \Delta y)}{1 + 2\frac{v\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2(\pi k \Delta x) + 2\frac{v\Delta t}{(\Delta y)^2} \sin^2(\pi m \Delta y)} = < 1 \quad (19)$$

Pour le Schema implicite et Schema Crank-Nicolson, $|A(k, m)| = < 1$ dans toutes les conditions, il est donc *inconditionnellement stable*

Pour le Schema explicite, la condition est

$$\frac{2v\Delta t}{(\Delta x)^2} + \frac{2v\Delta t}{(\Delta y)^2} = < 1 \quad (20)$$

Car $\Delta x = \Delta y = h$, l'équation égale a:

$$2v\Delta t = < 0.5 \quad (21)$$

Dans le programme, nous utilisons $\alpha = 2\nu\Delta t$ et obtenons les images de la méthode explicite d'Euler inférieure et supérieure à 0,5.

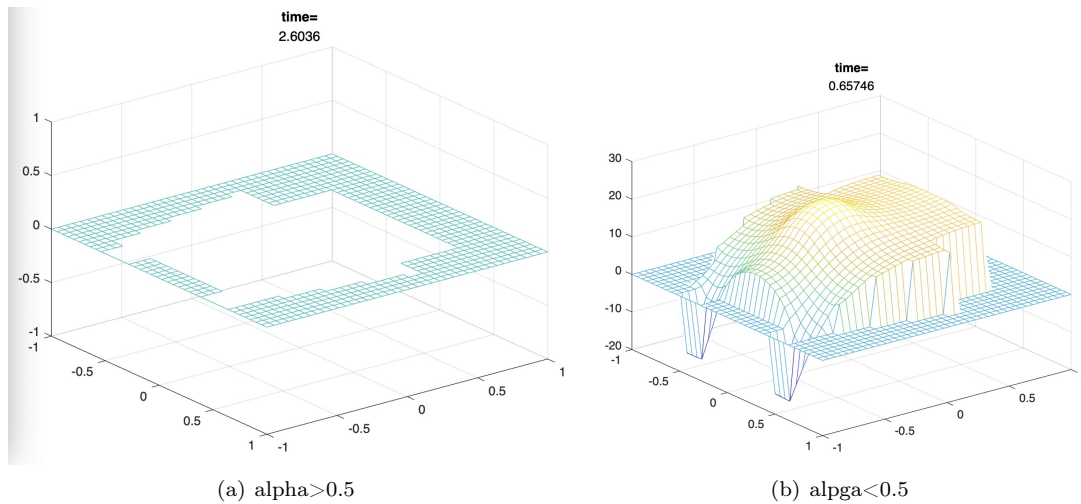


Figure 11: Etude de stabilité

Pour les deux autres méthodes, définir l'alpha sur plus de 0,5 peut toujours générer l'image correcte

Par conséquent, la méthode explicite d'Euler est *conditionnellement stable*.

De plus, nous ajoutons également le minuteur tic ... tac pour mesurer que pour tout le cycle de la méthode Euler, le temps de calcul requis pour la méthode implicite est à peu près celui de la méthode explicite