(3) Macro Avançada

Gustavo Baamonde

May 15, 2021

1 Household Optimization under Uncertainty

- Nesse problema, as famílias não tem certeza sobre a taxa de retorno e salário futuro. Logo, as escolhas de c e l dependem dos possíveis choques de tecnologia. Ainda assim, podemos calcular a *euler equation* intuitivamente.
- Um jeito de fazer isso é reduzir a utilidade no tempo corrente em δc e aumentar o consumo futuro. Se estamos agindo de forma ótima, então a utilidade esperada não deve mudar.

A equação de utilidade e da população dizem que:

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} e^{-\rho t} u\left(c_t, 1-\ell_t\right) \frac{N_t}{H} \tag{1}$$

$$\ln N_t = \bar{N} + nt, n < \rho \tag{2}$$

Assim a utilidade marginal de consumir no período t é $e^{-\rho t}\left(N_t/H\right)\left(1/c_t\right)$ e o custo da utilidade dessa mudança é $e^{-\rho t}\left(N_t/H\right)\left(\Delta c/c_t\right)$.

O aumento de consumo no período $t+1$ é $e^{-n}\left(1+r_{t+1}\right)\Delta c$. A utilidade marginal do consumo no período $t+1$ é $e^{-\rho(t+1)}\left(N_{t+1}/H\right)\left(1/c_{t+1}\right)$. Então, o benefício da utilidade esperada no período t é $E_t\left[e^{-\rho(t+1)}\left(N_{t+1}/H\right)e^{-n}(1+r_{t+1}/c_{t+1}\right]\Delta c$. Igualando custoe e benefícios esperados, temos:

$$e^{-\rho t}\frac{N_t}{H}\frac{\Delta c}{c_t} = E_t\left[e^{-\rho(t+1)}\frac{N_{t+1}}{H}e^{-n}\frac{1}{c_{t+1}}\left(1+r_{t+1}\right)\right]\Delta c \tag{3}$$

Como o termo que envolve N não possui incertezas, temos:

$$\frac{1}{c_t} = e^{-\rho}E_t\left[\frac{1}{c_{t+1}}(1+r_{t+1})\right] \tag{4}$$

Logo, temos que:

$$\frac{1}{c_t} = e^{-\rho} \left\{ E_t \left[\frac{1}{c_{t+1}} \right] E_t \left[1 + r_{t+1} \right] + \text{Cov} \left(\frac{1}{c_{t+1}}, 1 + r_{t+1} \right) \right\} \tag{5}$$

Podemos fazer o mesmo argumento acima para a oferta de trabalho que, ao igualar custos e benefícios, teríamos[1]:

$$e^{-\rho t} \frac{N_t}{H} \frac{b}{1 - \ell_t} \Delta\ell = e^{-\rho t} \frac{N_t}{H} \frac{1}{c_t} w_t \Delta\ell \tag{6}$$

Ou

$$\frac{c_t}{1 - l_t} = \frac{w_t}{b} \tag{7}$$

2 Modelo da aula anterior

O Lagrangiano será:

$$L = log(c_1) + b(log(1 - l_1) + \beta E_1[log(c_2 + blog(1 - l_2)] - \lambda[w_1 l_1 + \frac{w_2 l_2}{1 + r} - c_1 - \frac{c_2}{1 + r}] \tag{8}$$

Fazendo igual a aula passada, podemos chegar em:

$$\frac{1}{c_1} = \beta(1 + r) E_1(\frac{1}{c_2}) \tag{9}$$

Assumindo que $1 + r = \frac{1}{\beta}$, temos:

$$\frac{1}{c_1} = E_1(\frac{1}{c_2}) \tag{10}$$

Usando a ideia de utilidade marginal, podemos mostrar também que:

$$\frac{A_1}{c_1} = \frac{b}{1 - l_1} \tag{11}$$

E

$$\frac{A_2}{c_2} = \frac{b}{1 - l_2} \tag{12}$$

Reescrevendo a restrição como;

$$A_2 l_2 = c_2 - (1 + r) \left(A_1 l_1 - c_1 \right). \tag{13}$$

[1] Vale ressaltar que aqui, diferentemente do caso anterior, estamos em um caso intratemporal

Podemos mostrar que:

$$c_2 = \frac{A_2 + (1+r)\,(A_1/_1 - c_1)}{1+b}. \tag{14}$$

Sabendo que:

$$\frac{(1-l_1)A_1}{b} = c_1 \tag{15}$$

Juntando as duas, temos:

$$\frac{1}{c_2} = \frac{1+b}{A_2 + (1+r)\left[A_1 l_1 - \frac{A_1(1-l_1)}{b}\right]} \tag{16}$$

Além disso, da equação 11 e da equação de euler, temos que:

$$\frac{b}{A_1\,(1-L_1)} = E_1\left[\frac{1+b}{A_2 + (1+r)\left[A_1 L_1 - \frac{A_1(1-L_1)}{b}\right]}\right] \tag{17}$$

Isolando para b, temos

$$b = E_1\left[\frac{(1+b)\,(1-L_1)}{\frac{A_2}{A_1} + \beta\left[L_1 - \frac{(1-L_1)}{b}\right]}\right] \tag{18}$$

Vamos replicar o que o professor fez em seu documento. Vamos começar assumindo que A_2 é iqual à $A_H \geq A_1$ com probabilidade $\frac{1}{2}$, e $A_L \leq A_1$ com probabilidade $\frac{1}{2}$. Além disso, seja $E_1(A_2) = A_1$.

Com isso, temos que (assumindo $b = 1$):

$$1 = \frac{(1-L_1)}{\frac{A_H}{A_1} + (1+r)(2L_1 - 1)} + \frac{(1-L_1)}{\frac{A_L}{A_1} + (1+r)(2L_1 - 1)} \tag{19}$$

Perceba que:

$$\sigma_{A_2} = \frac{A_H - A_L}{2} \tag{20}$$

Podemos pensar que um aumento na incerteza , aumentar $A_H - A_L$, mantendo $E(A_2)$ contante. Note que no caso que não há incerteza, $A_H = A_L = A_1$, logo:

$$1 = \frac{(1-L_1)}{1 + (1+r)(2L_1 - a)} + \frac{(1-L_1)}{1 + (1+r)(2L_1 - 1)} \tag{21}$$

O que nos dá:

$$L_1 = \frac{1}{2} \tag{22}$$

Vamos ver o que acontece quando há um aumento em $A_H - A_L$. Note que:

$$F(A_2) = \frac{(1 - L_1)}{\frac{A_2}{A_1} + (1+r)(2L_1 - 1)} \tag{23}$$

$$F^{'}(A_2) = -\frac{1}{A_1}\frac{(1 - L_1)}{\left[\frac{A_2}{A_1} + (1+r)(2L_1 - 1)\right]^2} < 0 \tag{24}$$

$$F^{''}(A_2) = -\frac{1}{A_1}\frac{2(1 - L_1)}{\left[\frac{A_2}{A_1} + (1+r)(2L_1 - 1)\right]^3} > 0 \tag{25}$$

Assim, podemos reescrever a equação 19 como:

$$1 = F(A_H) + F(A_L) \tag{26}$$

Como $F(.)$ é estritamente decrescente e convexa, um aumento em $A_H - A_L$ enquanto mantemos $E(A_2)$ constante, nos leva a um aumento em $F(A_H) + F(A_L)$. Como resultado, L_1 deve aumentar para compensar isso

Intuitivamente, mais incerteza leva à uma maior oferta de trabalho pois a renda negativa afeta a incerteza implica em agentes avessos ao risco.

3 Modelo do problema

O modelo do problema é:

$$U_t = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t E_t \left[\log c_t + b \log{(1 - l_t)}\right] \tag{27}$$

Usando o argumento que discutimos, podemos mostrar que a equação de Euler é:

$$\frac{1}{c_t} = E_t(\frac{1}{c_{t+1}}) \tag{28}$$

Da equação 7, temos que

$$\frac{A_{t+1}}{c_{t+1}} = \frac{b}{1 - l_{t+1}} \tag{29}$$

Logo, juntando 29 e 28, temos:

$$\frac{1}{A_t(1-L_1)} = E_t\left(\frac{1}{A_{t+1}(1-L_{t+1}}\right) \tag{30}$$

Podemos reescrever a equação acima como:

$$1 = E_t\left(\frac{1-L_t}{1-L_{t+1}}\frac{A_t}{A_{t+1}}\right) \tag{31}$$

Vamos assumir que:

$$E_t\left(\frac{A_t}{A_{t+1}}\right) = 1 \tag{32}$$

Logo,

$$1 = E_t\left(\frac{1-L_t}{1-L_{t+1}}\frac{A_t}{A_{t+1}}\right) = E_t\left(\frac{1-L_t}{1-L_{t+1}}\right) + COV\left(\frac{A_t}{A_{t+1}}, \frac{1-L_t}{1-L_{t+1}}\right) \tag{33}$$

Iremos esperar que a covariância é negativa se a produtividade aumenta, então a razão dos trabalhos acima aumenta por um aumento em L_{t+1}. Isso implica que a esperança de L é maior que um, ou seja, a oferta de trabalho aumenta com o passar do tempo. Logo, um aumento das incertezas leva a um aumento da oferta de trabalho.