

(3) Macro Avançada

Gustavo Baamonde

May 15, 2021

1 A Special Case of the Model

- Aqui não vamos considerar o governo e $\delta = 1$;
- Logo $K_{t+1} = Y_t - C_t$ e $1 + r_t = \alpha \left(\frac{A_t L_t}{K_t} \right)^{1-\alpha}$;
- Ha 2 variáveis de estado: capital e tecnologia;
- A ideia aqui é substituir $(1 - s)Y$ em C sempre que possível

Podemos reescrever a equação de euler ?? como:

$$-\ln \left[(1 - s_t) \frac{Y_t}{N_t} \right] = -\rho + \ln E_t \left[\frac{1 + r_{t+1}}{(1 - s_{t+1}) Y_{t+1}/N_{t+1}} \right] \quad (1)$$

Usando os dados acima, é possível mostrar que:

$$\begin{aligned} & -\ln(1 - s_t) - \ln Y_t + \ln N_t \\ &= -\rho + \ln E_t \left[\frac{\alpha Y_{t+1}}{K_{t+1}(1 - s_{t+1}) Y_{t+1}/N_{t+1}} \right] \\ &= -\rho + \ln E_t \left[\frac{\alpha N_{t+1}}{s_t(1 - s_{t+1}) Y_t} \right] \\ &= -\rho + \ln \alpha + \ln N_t + n - \ln s_t - \ln Y_t + \ln E_t \left[\frac{1}{1 - s_{t+1}} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

Logo,

$$\ln s_t - \ln(1 - s_t) = -\rho + n + \ln \alpha + \ln E_t \left[\frac{1}{1 - s_{t+1}} \right] \quad (3)$$

Note que A e K não entram na equação acima. Isso implica que s é constante. Logo $s_t = \hat{s}, \forall t$.
Então:

$$\ln \hat{s} = \ln \alpha + n - \rho \quad (4)$$

Ou

$$\hat{s} = \alpha e^{n-\rho} \quad (5)$$

Além disso, usando a equação ??, podemos escrever:

$$\ln \left[(1 - \hat{s}) \frac{Y_t}{N_t} \right] - \ln (1 - \ell_t) = \ln w_t - \ln b \quad (6)$$

Pegando w_t através da função de produção, temos:

$$\begin{aligned} \ln(1 - \hat{s}) + \ln Y_t - \ln N_t - \ln(1 - \ell_t) \\ = \ln(1 - \alpha) + \ln Y_t - \ln \ell_t - \ln N_t - \ln b. \end{aligned}$$

Cancelando os termos e rearranjando

$$\ln \ell_t - \ln(1 - \ell_t) = \ln(1 - \alpha) - \ln(1 - \hat{s}) - \ln b.$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned} \ell_t &= \frac{1 - \alpha}{(1 - \alpha) + b(1 - \hat{s})} \\ &\equiv \hat{\ell} \end{aligned}$$

- Oferta de trabalho é constante;
- Isso ocorre pois choques de tecnologia ou capital neutralizam impactos do efeito do salário relativo e da taxa de juros no oferta de trabalho

1.1 Discussion

- As flutuações no produto são determinadas pela dinâmica da tecnologia e do estoque de capital.

Considere um caso que a função de produção é $Y_t = K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha}$, ou seja:

$$\ln Y_t = \alpha \ln K_t + (1 - \alpha) (\ln A_t + \ln L_t)$$

Sabemos que $K_t = \hat{s} Y_{t-1}$ e $L_t = \hat{\ell} N_t$; portanto:

$$\begin{aligned} \ln Y_t &= \alpha \ln \hat{s} + \alpha \ln Y_{t-1} + (1 - \alpha) (\ln A_t + \ln \hat{\ell} + \ln N_t) \\ &= \alpha \ln \hat{s} + \alpha \ln Y_{t-1} + (1 - \alpha) (\bar{A} + gt) \\ &\quad + (1 - \alpha) \tilde{A}_t + (1 - \alpha) (\ln \hat{\ell} + \bar{N} + nt) \end{aligned}$$

Podemos reescrever a equação acima como:

$$\tilde{Y}_t = \alpha \tilde{Y}_{t-1} + (1 - \alpha) \tilde{A}_t \quad (7)$$

Podemos rearranjar e chegar em:

$$\tilde{A}_{t-1} = \frac{1}{1 - \alpha} \left(\tilde{Y}_{t-1} - \alpha \tilde{Y}_{t-2} \right) \quad (8)$$

Usando do fato que $\tilde{A}_t = \rho_A \tilde{A}_{t-1} + \epsilon_{A,t}$, temos:

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_t &= \alpha \tilde{Y}_{t-1} + (1 - \alpha) \left(\rho_A \tilde{A}_{t-1} + \epsilon_{A,t} \right) \\ &= \alpha \tilde{Y}_{t-1} + \rho_A \left(\tilde{Y}_{t-1} - \alpha \tilde{Y}_{t-2} \right) + (1 - \alpha) \epsilon_{A,t} \\ &= (\alpha + \rho_A) \tilde{Y}_{t-1} - \alpha \rho_A \tilde{Y}_{t-2} + (1 - \alpha) \epsilon_{A,t} \end{aligned} \quad (9)$$

- O desvio do log do produto de seu caminho normal segue um AR(2).
- Esse modelo específico não é tão bom. Primeiro a poupança é constante
- Adicionar depreciação e o governo melhora a previsão do modelo.

2 Modelo do Problema

A função utilidade do problema é:

$$U_t = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t E_t [\log c_t] \quad (10)$$

Sabemos também que o agente ganha $w \geq 0, \forall t$. Além disso, os mercados são competitivos e o retorno de equilíbrio é r_{t+1}

Assim, o Lagrangiano do problema será:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\log c_t - \lambda_t (c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t - w - r_t k_t)] \quad (11)$$

Fazendo as derivadas, temos:

$$[c_t] : \frac{1}{c_t} = \lambda_t \quad (12)$$

$$[k_{t+1}] : -\lambda_t - \beta E_t [\lambda_{t+1} (1 - \delta + r_{t+1})] \quad (13)$$

Juntando as duas equações acima ¹, podemos mostrar que:

$$\frac{1}{c_t} = \beta E_t \left[\frac{1}{c_{t+1}} (1 - \delta + r_{t+1}) \right] \quad (14)$$

Para finalizar e facilitar as contas, vamos assumir que $\delta = 0$, assim ficamos com:

$$\frac{1}{c_t} = \beta \left\{ E_t \left[\frac{1}{c_{t+1}} \right] E_t [(1 + r_{t+1})] + Cov \left(\frac{1}{c_{t+1}}, 1 + r_{t+1} \right) \right\} \quad (15)$$

Poderíamos abrir isso na formula da covariância como antes, mas para continuar a partir desse ponto, precisaríamos fazer alguma hipótese sobre o modelo (igual o professor faz em seus slides). ²

¹Não esquecer que não sabemos as coisas em $t + 1$, logo precisa do operador esperança.

²Mostrar até aqui já deve deixar o professor feliz, mas se quiser pode tentar formular alguma hipótese assim como na aula passada e tentar continuar. De qualquer forma, o livro do Romer faz um caso parecido com isso (só não tem a depreciação), logo seria só juntar o que já fizemos.