(9) Macro Avançada

Gustavo Baamonde

June 30, 2021

A utilidade das famílias é dada por:

$$U\left(C_t, N_t\right) = \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\varphi}}{1+\varphi} \tag{1}$$

E a restrição orçamentária é dada por;

$$P_t C_t + Q_t B_t \leq B_{t-1} + W_t N_t - T_t \tag{2}$$

Assim, o lagrangiano será:

$$\begin{aligned} L_t =& E_t \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \left[\frac{C_{t+k}^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{N_{t+k}^{1+\varphi}}{1+\varphi} - \Lambda_{t+k} \left(P_{t+k} C_{t+k} \right.\right.\right. \\ & \left.\left.\left. + Q_{t+k} B_{t+k} - B_{t+k-1} - W_{t+k} N_{t+k} + T_{t+k} \right) \right] \right\} \end{aligned} \tag{3}$$

As condições de primeira ordem serão:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial L_t}{\partial C_t} &= C_t^{-\sigma} - \Lambda_t P_t = 0 \Rightarrow \Lambda_t = \tfrac{C_t^{-\sigma}}{P_t} \\ \tfrac{\partial L_t}{\partial N_t} &= -N_t^{\varphi} + \Lambda_t W_t = 0 \Rightarrow \Lambda_t = \tfrac{N_t^{\varphi}}{W_t} \\ \tfrac{\partial L_t}{\partial B_t} &= -\Lambda_t Q_t + \beta E_t \left\{ \Lambda_{t+1} \right\} = 0 \Rightarrow Q_t = \beta E_t \left\{ \tfrac{\Lambda_{t+1}}{\Lambda_t} \right\} \end{aligned} \tag{4}$$

Juntando a primeira e a segunda equação, temos que:

$$C_t^{\sigma} N_t^{\varphi} = \frac{W_t}{P_t} \tag{5}$$

Juntando a primeira e a terceira equação, temos:

$$Q_t = \beta E_t \left\{ \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\sigma} \frac{P_t}{P_{t+1}} \right\} \tag{6}$$

Log-linearizando as equações 6 e 5, temos:

Primeiro considere que $\log Q_t \equiv (1+i_{t+1})$ e que para qualquer variável x, temos $x = \log X$, logo a equação de Euler ficará:

$$\begin{aligned}
Q_t =& \beta E_t \left\{ \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\sigma} \frac{P_t}{P_{t+1}} \right\} \\
1 =& E_t \left\{ \beta(1+i_{t+1}) \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\sigma} \frac{P_t}{P_{t+1}} \right\} \\
1 =& E_t \left\{ e^{\log\beta + \log(1+i_{t+1}) - \log\frac{P_{t+1}}{P_t} + \sigma(c_t - c_{t+1})} \right\}
\end{aligned}$$

Usando do fato que

$$\begin{aligned}
&\log(1+i_{t+1}) \approx i_{t+1} \\
&\log\left(\tfrac{P_{t+1}}{P_t}\right) = \log\left(1 + \tfrac{P_{t+1}-P_t}{P_t}\right) \approx \pi_{t+1}
\end{aligned}$$

Sabemos que no *steady-state*, esse exponencial tem que ser igual à 1, ou seja, o expoente tem que ser igual a 0. Sabendo disso, temos que no *steady-state* o expoente fica:

$$0 = \log\beta + i + \underbrace{\pi}_{\equiv 0} - \sigma \overbrace{\Delta c}^{\equiv g}$$

Onde $\Delta c \equiv \overline{c_{t+1}} - \overline{c_t}$.O que implica que

$$i = -\log\beta + \pi + \sigma\Delta c \tag{7}$$

Para fazer a expansão de Taylor, vamos definir $\phi \equiv \log\beta + \log(1+i_{t+1}) - \log\frac{P_{t+1}}{P_t} + \sigma(c_t - c_{t+1})$. Tal que

$$1 = E_t\left\{e^{\phi}\right\}$$

A expansão de Taylor do lado direito da equação acima em torno do *steady-state* será dada por:

$$e^{\phi^*} + e^{\phi^*}(i_{t+1} - i) - e^{\phi^*}(\pi_{t+1} - \pi) + e^{\phi^*}\sigma(c_t - \overline{c_t}) - e^{\phi^*}\sigma(c_{t+1} - \overline{c_{t+1}})$$

Temos que $e^{\phi^*} = 1$, logo substituindo a equação 7 e usando do fato que $\rho \equiv -\log\beta$, temos que:

$$1 = 1 + i_{t+1} - (-\log\beta + \cancel{\pi} + \cancel{\sigma g}) + (\pi_{t+1} - \cancel{\pi}) + \sigma(c_t - c_{t+1}) + \cancel{\sigma g} \tag{8}$$

Assim, ficamos no final com:

$$c_t = E_t\left\{c_{t+1}\right\} - \frac{1}{\sigma}\left(i_{t+1} - E_t\left\{\pi_{t+1}\right\} - \rho\right) \tag{9}$$

Note que no livro do Gali, tem um i_t em vez de i_{t+1}. Isso acontece dependendo da maneira como você define o i_{t+1}. Note primeiro que mesmo estando em $t+1$, essa variável não tem esperança. A ideia aqui é que estamos considerando o juros que foi acordado no contrato. Esse contrato foi assinado em t, por isso que o livro considera i_t, mas podemos fazer que nem aqui e considerar que o contrato foi assinado em t mas os juros só serão pagos em $t+1$, por isso o i_{t+1}.

Agora precisamos log-linearizar a condição intra temporal. Note, entretanto, que não precisamos fazer todo esse processo igual à equação de Euler (fizemos aqui pois tem uma esperança e não é simplesmente passar log). Aqui, precisamos apensas usar o operador log que já estamos log-linearizando (mas se quiser pode repetir o mesmo processo acima que chegará no mesmo resultado).

Logo, a log-linearização da intra temporal é dada por:

$$\omega_t - p_t = \varphi n_t + \sigma c_t \tag{10}$$

No equilíbrio, temos que $Y_t = C_t$, logo:

$$\text{In } Y_t = E_t\left[\ln Y_{t+1}\right] - \frac{1}{\sigma}\left\{i_{t+1} - E_t\left[\pi_{t+1}\right] - \rho\right\} \qquad \text{[IS]} \tag{11}$$

Uma intuição aqui é que se i_{t+1} aumenta, então as pessoas poupam menos e tomam menos emprestado, mas como no equilíbrio $C = Y$, se todo mundo quer pegar emprestado e ninguém quer emprestar $B = 0$, logo não teríamos efeito demanda aqui. A introdução da rigidez de preço no problema que faz com que haja um efeito demanda.