(NKM) Macro Avançada

Gustavo Baamonde

June 30, 2021

Household

Nesse problema, a restrição orçamentária é dada

$$\int_0^1 P_t(i)C_t(i)di + Q_tB_t \leq B_{t-1} + W_tN_t - T_t \tag{1}$$

Aqui, precisamos achar a preço quando eles são flexíveis. Note que temos uma variedade de produtos, logo precisamos saber como a família aloca seus gastos com consumo em cada produto. Portanto, Precisamos maximizar

$$C_t \equiv \left(\int_0^1 C_t(i)^{1-\frac{1}{\varepsilon}}di\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \tag{2}$$

Sujeito à um nível qualquer de gasto, isto é, sujeito à

$$\int_0^1 P_t(i)C_t(i)di \equiv Z_t \tag{3}$$

Assim, o Lagrangiano será;

$$\mathcal{L} = \left[\int_0^1 C_t(i)^{1-\frac{1}{\varepsilon}}di\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} - \lambda\left(\int_0^1 P_t(i)C_t(i)di - Z_t\right) \tag{4}$$

A condição de primeira ordem implica que :

$$\begin{aligned} &\tfrac{\epsilon}{\epsilon-1}C_t(i)^{-\frac{1}{\epsilon}}C_t^{\frac{1}{\epsilon}}\tfrac{\epsilon-1}{\epsilon} - \lambda P_t(i) = 0 \\ &C_t(i)^{-\frac{1}{\epsilon}}C_t^{\frac{1}{\epsilon}} = \lambda P_t(i) \end{aligned} \tag{5}$$

Para qualquer dois produtos (i, j), temos

$$\frac{C_t(i)^{-\frac{1}{\epsilon}}C_t^{\frac{1}{\epsilon}}}{C_t(j)^{-\frac{1}{\epsilon}}C_t^{\frac{1}{\epsilon}}} = \frac{\lambda P_t(i)}{\lambda P_t(j)} \tag{6}$$

$$C_t(i) = C_t(j)\left(\frac{P_t(i)}{P_t(j)}\right)^{-\varepsilon} \tag{7}$$

Multiplicando os dois lados por $P_t(j)^{1-\varepsilon}$, temos

$$C_t(i)P_t(j)^{1-\varepsilon} = C_t(j)P_t(j)\left(\frac{1}{P_t(i)}\right)^{\varepsilon}$$

Integrando dois dois lados em j, ou seja, usando a equação 3, temos

$$C_t(i)P_t^{1-\varepsilon} = \left(\frac{1}{P_t(i)}\right)^{\varepsilon} Z$$

$$C_t(i) = \left(\frac{P_t}{P_t(i)}\right)^{\varepsilon}\frac{Z}{P_t} \tag{8}$$

Plugando esse resultado em

$$C_t = \left(\int_0^1 C_t(i)^{1-\frac{1}{\varepsilon}} di\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}$$

$$C_t = ZP_t^{\varepsilon-1}\underbrace{\left[\int_0^1 P_t(i)^{1-\varepsilon}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}}_{P_t^{-\varepsilon}}$$

Logo, ficamos com

$$C_tP_t = Z$$

Voltando na equação 8, temos

$$C_t(i) = \left(\frac{P_t(i)}{P_t}\right)^{-\varepsilon} C_t \tag{9}$$

Com isso, note que a restrição orçamentária fica igual ao problema passado (portanto o problema a ser resolvido é igual), ou seja,

$$P_tC_t + Q_tB_t \leq B_{t-1} + W_tN_t - T_t \tag{10}$$

A utilidade das famílias é dada por:

$$U\left(C_t, N_t\right) = \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\varphi}}{1+\varphi} \tag{11}$$

E a restrição orçamentária é dada por;

$$P_tC_t + Q_tB_t \leq B_{t-1} + W_tN_t - T_t \tag{12}$$

Assim, o lagrangiano será:

$$\begin{aligned} L_t =& E_t\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\beta^k\left[\frac{C_{t+k}^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{N_{t+k}^{1+\varphi}}{1+\varphi} - \Lambda_{t+k}\left(P_{t+k}C_{t+k}\right.\right.\right. \\ & \left.\left.\left. + Q_{t+k}B_{t+k} - B_{t+k-1} - W_{t+k}N_{t+k} + T_{t+k}\right)\right]\right\} \end{aligned} \tag{13}$$

As condições de primeira ordem serão:

$$\begin{array}{l} \frac{\partial L_t}{\partial C_t} = C_t^{-\sigma} - \Lambda_tP_t = 0 \Rightarrow \Lambda_t = \frac{C_t^{-\sigma}}{P_t} \\ \frac{\partial L_t}{\partial N_t} = -N_t^{\varphi} + \Lambda_tW_t = 0 \Rightarrow \Lambda_t = \frac{N_t^{\varphi}}{W_t} \\ \frac{\partial L_t}{\partial B_t} = -\Lambda_tQ_t + \beta E_t\left\{\Lambda_{t+1}\right\} = 0 \Rightarrow Q_t = \beta E_t\left\{\frac{\Lambda_{t+1}}{\Lambda_t}\right\} \end{array} \tag{14}$$

Juntando a primeira e a segunda equação, temos que:

$$C_t^{\sigma}N_t^{\varphi} = \frac{W_t}{P_t} \tag{15}$$

Juntando a primeira e a terceira equação, temos:

$$Q_t = \beta E_t\left\{\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\sigma}\frac{P_t}{P_{t+1}}\right\} \tag{16}$$

Log-linearizando as equações 16 e 15, temos:

Primeiro considere que $\log Q_t \equiv (1 + i_{t+1})$ e que para qualquer variável x, temos $x = \log X$, logo a equação de Euler ficará:

$$\begin{aligned} Q_t =& \beta E_t\left\{\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\sigma}\frac{P_t}{P_{t+1}}\right\} \\ 1 =& E_t\left\{\beta(1+i_{t+1})\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\sigma}\frac{P_t}{P_{t+1}}\right\} \\ 1 =& E_t\left\{e^{\log\beta + \log(1+i_{t+1}) - \log\frac{P_{t+1}}{P_t} + \sigma(c_t - c_{t+1})}\right\} \end{aligned}$$

Usando do fato que

$$\begin{array}{l} \log(1+i_{t+1}) \approx i_{t+1} \\ \log\left(\frac{P_{t+1}}{P_t}\right) = \log\left(1 + \frac{P_{t+1}-P_t}{P_t}\right) \approx \pi_{t+1} \end{array}$$

Sabemos que no *steady-state*, esse exponencial tem que ser igual à 1, ou seja, o expoente tem que ser igual a 0. Sabendo disso, temos que no *steady-state* o expoente fica:

$$0 = \log\beta + i + \underbrace{\pi}_{\equiv 0} - \sigma \overbrace{\Delta c}^{\equiv g}$$

Onde $\Delta c \equiv \overline{c_{t+1}} - \overline{c_t}$.O que implica que

$$i = -\log\beta + \pi + \sigma\Delta c \tag{17}$$

Para fazer a expansão de Taylor, vamos definir $\phi \equiv \log\beta + \log(1+i_{t+1}) - \log\frac{P_{t+1}}{P_t} + \sigma(c_t - c_{t+1})$. Tal que

$$1 = E_t\left\{e^{\phi}\right\}$$

A expansão de Taylor do lado direito da equação acima em torno do *steady-state* será dada por:

$$e^{\phi^*} + e^{\phi^*}(i_{t+1} - i) - e^{\phi^*}(\pi_{t+1} - \pi) + e^{\phi^*}\sigma(c_t - \overline{c_t}) - e^{\phi^*}\sigma(c_{t+1} - \overline{c_{t+1}})$$

Temos que $e^{\phi^*} = 1$, logo substituindo a equação 17 e usando do fato que $\rho \equiv -\log\beta$, temos que:

$$1 = 1 + i_{t+1} - (-\log\beta + \cancel{\pi} + \cancel{\sigma g}) + (\pi_{t+1} - \cancel{\pi}) + \sigma(c_t - c_{t+1}) + \cancel{\sigma g} \tag{18}$$

Assim, ficamos no final com:

$$c_t = E_t\left\{c_{t+1}\right\} - \frac{1}{\sigma}\left(i_{t+1} - E_t\left\{\pi_{t+1}\right\} - \rho\right) \tag{19}$$

Note que no livro do Gali, tem um i_t em vez de i_{t+1}. Isso acontece dependendo da maneira como você define o i_{t+1}. Note primeiro que mesmo estando em $t+1$, essa variável não tem esperança. A ideia aqui é que estamos considerando o juros que foi acordado no contrato. Esse contrato foi assinado em t, por isso que o livro considera i_t, mas podemos fazer que nem aqui e considerar que o contrato foi assinado em t mas os juros só serão pagos em $t+1$, por isso o i_{t+1}.

Agora precisamos log-linearizar a condição intra temporal. Note, entretanto, que não precisamos fazer todo esse processo igual à equação de Euler (fizemos aqui pois tem uma esperança e não é simplesmente passar log). Aqui, precisamos apensas usar o operador log que já estamos log-linearizando (mas se quiser pode repetir o mesmo processo acima que chegará no mesmo resultado).

Logo, a log-linearização da intra temporal é dada por:

$$\omega_t - p_t = \varphi n_t + \sigma c_t \tag{20}$$

No equilíbrio, temos que $Y_t = C_t$, logo:

$$\text{In } Y_t = E_t\left[\ln Y_{t+1}\right] - \frac{1}{\sigma}\left\{i_{t+1} - E_t\left[\pi_{t+1}\right] - \rho\right\} \qquad \text{[IS]} \tag{21}$$

Uma intuição aqui é que se i_{t+1} aumenta, então as pessoas poupam menos e tomam menos emprestado, mas como no equilíbrio $C = Y$, se todo mundo quer pegar emprestado e ninguém quer emprestar $B = 0$, logo não teríamos efeito demanda aqui. A introdução da rigidez de preço no problema que faz com que haja um efeito demanda.

Preços Flexiveis

As firmas resolvem o seguinte problema:

$$\max_{P_t(i)} \left\{P_t(i)Y_t(i) - W_t L_t(i)\right\} \tag{22}$$

Como as empresas são competidoras monopolísticas, elas maximizam seu lucro levando em consideração o consumo de cada consumidor(ou seja, levando em conta a demanda). Logo, o lucro é dado por:

Sabemos que a função produção é dada por:

$$Y_t = A_t L_t(i) \tag{23}$$

E que no equilíbrio $Y_t = C_t$.

$$\begin{aligned}
\pi_t(i) =& C_t(i)P_t - W_t\frac{C_t(i)}{A_t} \\
=& \left(\left(\frac{P_t(i)}{P_t}\right)^{-\varepsilon} C_t\right) P_t - \frac{W_t}{A_t}\left(\left(\frac{P_t(i)}{P_t}\right)^{-\varepsilon} C_t\right) \\
=& \frac{P_t(i)^{(1-\varepsilon)}}{P_t^{-\varepsilon}} C_t - \frac{W_t}{A_t}\left(\left(\frac{P_t(i)}{P_t}\right)^{-\varepsilon} C_t\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \pi_t(i)}{\partial P_t(i)} =& 0 \\
=& (1-\varepsilon)\frac{P_t^{-\varepsilon}}{\cancel{P_t^{-\varepsilon}}}\cancel{C}_t = (-\varepsilon)\left(\frac{W_t}{A_t}\right)\frac{P_t(i)^{-\varepsilon-1}}{\cancel{P_t^{-\varepsilon}}}\cancel{C}_t \\
=& (1-\varepsilon)\cancel{P_t(i)^{-\varepsilon}} = -\varepsilon\left(\frac{W_t}{A_t}\right)P_t(i)^{-1-\cancel{\varepsilon})}
\end{aligned}
$$

Logo, o preço ótimo é dado por:

$$
P_t^* = \underbrace{\frac{-\varepsilon}{1-\varepsilon}}_{\text{Mark-up}} \quad \overbrace{\frac{W_t}{A_t}}^{\text{Marginal Cost}} \tag{24}
$$

O problema pede o custo marginal real, ou seja, o custo marginal dividido pelo preço. Logo, basta usar a equação 33 acima e chegar que o custo marginal real é dado por:

$$
\underbrace{\frac{W_t}{A_t P_t^*}}_{\text{Real Marginal Cost}} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \tag{25}
$$

Se o problema tivesse empresas em competição perfeita, esse custo marginal real seria igual à 1.

Rigidez de preço e Problema da Firma

Optimal price of firms that change price at time t

O problema da firma é dado por

$$
\max_{P_t^*} \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k E_t \left\{ \frac{1}{1+i_{t+k}} \left(P_t^* Y_{t+k|t} - \Psi_{t+k}\left(Y_{t+k|t}\right)\right)\right\} \tag{26}
$$

Onde que da equação 9, temos [1]

$$
Y_{t+k}(i) = \left(\frac{P_t(i)}{P_t}\right)^{-\varepsilon} Y_{t+k} \tag{27}
$$

FOC

[1] Aqui usamos o fato de que no equilíbrio $Y = C$

$$\sum \theta^k E_t \left\{ \left[(1-\epsilon) \left(\frac{P_t^*}{P_{t+k}} \right)^{-\varepsilon} + \varepsilon \frac{W_{t+k}}{A_{t+k}} \frac{(P_t^*)^{-(1+\varepsilon)}}{P_{t+k}^{-\varepsilon}} \right] \frac{Y_{t+k}}{1+i_{t+k}} \right\} = 0$$

$$\sum \theta^k E_t \left\{ \left[(1-\epsilon) + \varepsilon \frac{W_{t+k}}{A_{t+k}} \frac{1}{P_t^*} \right] \left(\frac{P_t^*}{P_{t+k}} \right)^{-\varepsilon} \frac{Y_{t+k}}{1+i_{t+k}} \right\} = 0$$

Usando a equação 27 e Multiplicando os dois lados por $\frac{P^*}{1-\varepsilon}$, temos

$$\sum \theta^k E_t \left\{ \left[P_t^* - \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \frac{W_{t+k}}{A_{t+k}} \right] \frac{Y_{t+k}(i)}{1+i_{t+k}} \right\} = 0$$

Note que o termo entre colchetes mostra que o monopolista quer o preço ótimo mais perto do custo marginal com o *mark-up*[2]

Dado que

$$\frac{1}{1+i_{t+k}} = \beta \underbrace{E_t \left\{ \left(\frac{Y_{t+k}}{Y_t} \right)^{-\sigma} \frac{P_t}{P_{t+k}} \right\}}_{\phi_{t+k}}$$

Plugando a equação acima na condição de primeira ordem.

$$\sum (\theta\beta)^k E_t \left\{ \left[P_t^* - \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \frac{W_{t+k}}{A_{t+k}} \right] Y_{t+k}(i) \phi_{t+k} \right\} = 0$$

Note que o coeficiente β indica a preferência temporal, isto é, quanto você se importa com o futuro. Já o coeficiente θ é a probabilidade de não mudar o preço no futuro, assim se θ for alto, a empresa vai ficar travada no tempo com maior probabilidade. Reescrevendo a equação acima, temos

$$\sum (\theta\beta)^k E_t \{ P_t^* Y_{t+k}(i) \phi_{t+k} \} = \sum (\theta\beta)^k E_t \left\{ \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \frac{W_{t+k}}{A_{t+k}} Y_{t+k}(i) \phi_{t+k} \right\}$$

Agora vamos log linearizar[3].

$$E_t \left\{ \sum (\theta\beta)^k e^{p_t^* + \log(Y_{t+k}(i)\phi_{t+k})} \right\} = E_t \left\{ \sum (\theta\beta)^k e^{\log \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1} \log \frac{W_{t+k}}{A_{t+k}} \log(Y_{t+k}(i)\phi_{t+k})} \right\}$$

Definindo o custo marginal nominal como $mc_{t+k}^N \equiv \frac{W_{t+k}}{A_{t+k}}$, temos

[2] lembrar o exemplo do professor de fazer esses cálculos usando a minimização.

[3] Note que $p_t \equiv \log P_t$

$$\cancel{e^{p^*+\log \phi y}} \sum (\theta\beta)^k E_t \left[(p_t^* - p) + \cancel{(\log \phi_{t+k} Y_{t+k}(i) - \log \phi y)} \right] =$$
$$\cancel{e^{\log \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1} + \log \frac{W}{A} + \log(Y\phi)}} \sum (\theta\beta)^k E_t \left[(mc_{t+k}^N - mc^N) + \cancel{(\log \phi_{t+k} Y_{t+k}(i) - \log \phi y)} \right] \quad (28)$$

Note que

$$\sum^{\infty} (\beta\theta)^k = \frac{1}{1-\beta\theta}$$

Portanto, ficamos com

$$\frac{1}{1-\beta\theta}(p_t^* - p) = \sum^{\infty} (\beta\theta)^k E_t \left[mc_{t+k}^N - mc^N \right]$$

Isolando p_t^*

$$p_t^* = (1-\beta\theta) \sum^{\infty} (\beta\theta)^k E_t \left[mc_{t+k}^N - \underbrace{(mc^N - p)}_{mc = \text{custo marginal real}} \right]$$

Somando e subtraindo p_{t+k}, temos

$$\begin{aligned} p_t^* &= (1-\beta\theta) \sum^{\infty} (\beta\theta)^k E_t \left[(mc_{t+k} - mc) + p_{t+k} \right] \\ &= (1-\beta\theta) \sum^{\infty} (\beta\theta)^k E_t \left[(\widehat{mc_{t+k}} + p_{t+k} \right] \end{aligned}$$

O preço agregado no tempo t é dado por

$$P_t = \left[\theta P_{t-1}^{1-\varepsilon} + (1-\theta) P_t^{*1-\varepsilon} \right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$$

Dividindo por P_{t-1}, temos

$$\Pi_t^{1-\varepsilon} = \theta + (1-\theta) \left(\frac{P_t^*}{P_{t-1}} \right)^{1-\varepsilon}$$

Passando log, ficamos com

$$(1-\varepsilon)\Pi_t = \log \left[\theta + (1-\theta) \left(\frac{P_t^*}{P_{t-1}} \right)^{1-\varepsilon} \right]$$

Fazendo a expansão de Taylor do lado direito em torno do *steady-state* com $\pi = 0$ [4]

[4] Note que $\frac{P_{ss}^*}{P_{ss}} = 1$

$$\frac{(1-\theta)(1-\varepsilon)}{\theta+(1-\theta)\left(\frac{P_{ss}^*}{P_{ss}}\right)^{1-\varepsilon}}\left[\left(\frac{P_{ss}^*}{P_{ss}}\right)^{1-\varepsilon}\frac{P_t^*-P_{ss}^*}{P_{ss}^*}-\left(\frac{P_{ss}^*}{P_{ss}}\right)^{1-\varepsilon}\frac{P_{t-1}^*-P_{ss}^*}{P_{ss}^*}\right]$$

$$(1-\theta)(1-\varepsilon)\left[\widehat{P_t^*}-\widehat{P_{t-1}^*}\right]\approx(1-\theta)(1-\varepsilon)\left[P_t^*-P_{ss}^*-(P_{t+1}^*-P_{ss})\right]$$

$$(1-\varepsilon)\pi_t=(1-\theta)(1-\varepsilon)\left[p_t^*-p_{t-1}\right]$$

Rearranjando

$$p_t=\theta p_{t+1}+(1-\theta)p_t^*$$

Lembre-se que

$$p_t=(1-\beta\theta)\sum^{\infty}(\beta\theta)^k E_t\left[(\widehat{mc_{t+k}}+p_{t+k}\right]$$

Em $t+1$

$$\begin{aligned}
E_t(p_{t+1}^*) &= (1-\beta\theta)\sum^{\infty}(\beta\theta)^k E_{t+1}\left[(mc_{t+1+k}-mc)+p_{t+1+k}\right]\\
&= \frac{(1-\beta\theta)}{\beta\theta}\sum^{\infty}(\beta\theta)^{k+1}E_t\left[(\widehat{mc_{t+k}}+p_{t+k}\right]+\frac{(1-\beta\theta)}{\beta\theta}\left[(\widehat{mc_t}+p_t)-(\widehat{mc_t}+p_t)\right]\\
&= \frac{(1-\beta\theta)}{\beta\theta}\left\{(\widehat{mc_t}+p_t)+\sum_{k=1}^{\infty}(\beta\theta)^k\left(\widehat{mc_{t+1+k}}+p_{t+1+k}\right)\right\}-\frac{(1-\beta\theta)}{\beta\theta}(\widehat{mc_t}+p_t)\\
&= \frac{1}{\beta\theta}p_t^*-\frac{(1-\beta\theta)}{\beta\theta}(\widehat{mc_t}+p_t)
\end{aligned}$$

Plugando

$$p_t^*=\frac{p_t-\theta p_{t-1}}{1-\theta}$$

E

$$p_{t+1}^*=\frac{p_{t+1}-\theta p_t}{1-\theta}$$

$$E_t\left[p_{t+1}^*=\frac{p_{t+1}-\theta p_t}{1-\theta}\right]=\frac{1}{\beta\theta}p_t^*=\frac{p_t-\theta p_{t-1}}{1-\theta}-\frac{1-\beta\theta}{\beta\theta}(\widehat{mc_t}+p_t)$$

Reescrevendo

$$\beta E_t(p_{t+1} - p_t) = (p_t - p_{t-1}) - \underbrace{\left(\frac{(1-\beta\theta)(1-\theta)}{\theta}\right)}_{\equiv\lambda}\widehat{mc_t}$$

$$\beta E_t \pi_{t+1} = \pi_t - \lambda\widehat{mc_t}$$

$$\pi_t = \beta E_t \pi_{t+1} + \lambda\widehat{mc_t}$$

Lembre-se que

$$mc_t = (\sigma + \varphi)y_t - (1+\varphi)a_t$$

$$mc_t - mc = (\sigma + \varphi)(y_t - \bar{y_t}) - (1+\varphi)(a_t - a_t)$$

Logo a curva de Phillips fica

$$\pi_t = \beta E_t \pi_{t+1} + \lambda(\sigma + \varphi)(y_t - \bar{y_t})$$

Agora, usando o fato de

$$\overline{r_{t+1}} = \rho + \sigma\left(\frac{1+\varphi}{\sigma+\varphi}\right)(E_t\{a_{t+1}\} - a_t)$$

A curva IS é

$$y_t = E_t\{y_{t+1}\} - \frac{1}{\sigma}(i_{t+1} - E_t\{\pi_{t+1}\} - \rho)$$

$$\begin{aligned}
(y_t - \bar{y_t}) &= E_t\{y_{t+1} - \bar{y_{t+1}}\} + E_t\{\bar{y_{t+1}} - \bar{y_t}\} - \frac{1}{\sigma}(i_{t+1} - E_t\{\pi_{t+1}\} - \rho) \\
&= E_t\{y_{t+1} - \bar{y_{t+1}}\} + \frac{1+\varphi}{\sigma+\varphi}(E_t a_{t+1} - a_t) - \frac{1}{\sigma}(i_{t+1} - E_t\{\pi_{t+1}\} - \rho) \\
&= E_t\{y_{t+1} - \bar{y_{t+1}}\} - \frac{1}{\sigma}\left(i_{t+1} - E_t\{\pi_{t+1}\} - r^N_{t+1}\right)
\end{aligned}$$

Note que da Curva IS para a primeira linha, subtraímos $\bar{y_t}$ dos dois lados e somamos e subtraímos $\bar{y_{t+1}}$ do lado direito.

Auxiliar

No equilíbrio, temos que $Y_t = C_t$. Ademais, *market clearing* no mercado de trabalho requer que[5]:

$$
\begin{aligned}
L_t &= \int_0^1 L_t(i)di \\
L_t &= \int_0^1 \left(\frac{Y_t(i)}{A_t}\right) di \\
&= \left(\frac{Y_t}{A_t}\right) \int_0^1 \left(\frac{P_t(i)}{P_t}\right)^{-\varepsilon} di
\end{aligned} \tag{29}
$$

Podemos descartar o termo $\int_0^1 \left(\frac{P_t(i)}{P_t}\right)^{-\varepsilon} di$ pois perto do *steady-state* a inflação é igual a zero, logo esse termo é igual a 1, e $\log 1 = 0$.

Logo, passando o log na equação 29 acima, temos que:

$$
l_t \approx y_t - a_t \tag{30}
$$

Juntando a equação 30 acima e a condição intra-temporal, temos que:

$$
w_t - p_t = \sigma y_t + \varphi l_t = \sigma y_t + \varphi y_t - \varphi a_t \tag{31}
$$

Vamos fazer uma breve digressão e voltar para o problema, é que temos que mostrar algumas coisas antes. Aqui, queremos encontrar o produto natural e a taxa de juros real natural. Estas, não devem depender de nenhuma variável nominal. O barra em cima da variável indica que ela é natural.

O custo marginal real é dado por:

$$
MC_t = \log \frac{W_t}{A_t P_t} = w_t - p_t - a_t \tag{32}
$$

Vimos que o o preço flexivel ótimo é dado por

$$
P_t^* = \underbrace{\frac{-\varepsilon}{1-\varepsilon}}_{\text{Mark-up}} \overbrace{\frac{W_t}{A_t}}^{\text{Marginal Cost}} \tag{33}
$$

Logo, juntando as duas equações acima, temos:

$$
\overline{MC_t} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \rightarrow \overline{mc_t} = -\log \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \tag{34}
$$

[5] Aqui usamos o fato de $Y_t(i) = A_t N_t(i)$

Da condição intra temporal, da equação 31 e somando a_t dos dois lados, temos :

$$\overline{w_t - p_t} - a_t = -\log \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} = (\sigma + \varphi)\overline{y_t} - (1+\varphi)a_t \tag{35}$$

Isolando $\overline{y_t}$, temos que

$$\overline{y_t} = \frac{-\log \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1} + (1+\varphi)a_t}{\sigma + \varphi} \tag{36}$$

Note aqui que se $\uparrow a_t \rightarrow \uparrow \overline{y_t}$ e que se $\uparrow$ Mark-up $\rightarrow \downarrow \overline{y_t}$. A primeira indica que uma melhora na tecnologia faz com que o produto natural aumente. A segunda mostra que se o *Mark-up* aumenta, ou seja, se as firmas tem maior poder de mercado, elas colocam o preço tão alto que as pessoas não vão consumir tanto.

Da curva IS, temos que

$$y_t = E_t\left\{y_{t+1}\right\} - \frac{1}{\sigma}\left(i_{t+1} - E_t\left\{\pi_{t+1}\right\} - \rho\right) \tag{37}$$

Assim, para o produto natural, a curva IS ficará:

$$\overline{y_t} = E_t\left\{\overline{y_{t+1}}\right\} - \frac{1}{\sigma}\left(\overbrace{i_{t+1} - E_t\left\{\pi_{t+1}\right\}}^{\text{Juro Real}} - \rho\right) \tag{38}$$

Substituindo os valores encontrados na equação 36, temos:

$$\frac{-\log \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1} + (1+\varphi)a_t}{\sigma + \varphi} = E_t\left\{\frac{-\log \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1} + (1+\varphi)a_{t+1}}{\sigma + \varphi}\right\} - \frac{1}{\sigma}\left(\overline{r_{t+1}} - \rho\right) \tag{39}$$

Isolando $\overline{r_{t+1}}$, ficamos com:

$$\overline{r_{t+1}} = \rho + \sigma\left(\frac{1+\varphi}{\sigma+\varphi}\right)\left(E_t\left\{a_{t+1}\right\} - a_t\right) \tag{40}$$

Note que o juro real natural não depende de nenhuma variável nominal.

Note também que sem rigidez nominal de preços, o modelo seria esse, onde tudo está "natural".

Modelo Final

No final, temos o modelo

$$(y_t - \bar{y}_t = E_t\left\{y_{t+1} - \bar{y_{t+1}}\right\} + -\frac{1}{\sigma}\left(i_{t+1} - E_t\left\{\pi_{t+1}\right\} - r^N_{t+1}\right) \tag{41}$$

$$\pi_t = \beta E_t \pi_{t+1} + \lambda(\sigma + \varphi)(y_t - \bar{y}_t) \tag{42}$$

$$i_{t+1} = \rho + \phi_\pi \pi_t + \phi_y (y_t - \bar{y}_t) + \nu_t \tag{43}$$

Problema por minimização

O problema da firma por minimização é dado por

$$\min_{p_t(i)} E_t \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k \left[p_t(i) - \log \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} - mc^n_{t+k} \right]^2 \tag{44}$$

FOC

$$E_t \sum^{\infty} (\beta\theta)^k \left[p_t(i) - \log \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} - mc^n_{t+k} \right]$$

$$E_t \sum^{\infty} (\beta\theta)^k \left[p_t(i) \right] = E_t \sum^{\infty} (\beta\theta)^k \left[\log \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} + mc^n_{t+k} \right]$$

Como

$$\sum^{\infty} (\beta\theta)^k = \frac{1}{1 - \beta\theta}$$

Temos

$$p_t^*(i) = (1 - \beta\theta) \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k E_t \left[\log \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} + mc^n_{t+k} \right]$$

Usando a equação 34 e o fato de que o juros real é o juros nominal menos o preço, temos

$$mc^n_{t+k} = mc_{t+k} + p_{t+k}$$

Como

$$\underbrace{\widehat{mc_{t+k}}}_{\text{Desvio do s.s}} = mc_{t+k} - mc = mc_{t+k} - \log \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}$$

Então

$$mc^n_{t+k} = mc_{t+k} + p_{t+k} = \widehat{mc_{t+k}} - \log \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} + p_{t+k}$$

Portanto

$$p_t^*(i) = (1 - \beta\theta) \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k E_t \left[\widehat{mc_{t+k}} + p_{t+k} \right] \tag{45}$$