(3) Macro Avançada

Gustavo Baamonde

May 16, 2021

1 A Special Case of the Model

- Aqui não vamos considerar o governo e $\delta = 1$;
- Logo $K_{t+1} = Y_t - C_t$ e $1 + r_t = \alpha \left(\frac{A_t L_t}{K_t}\right)^{1-\alpha}$;
- Ha 2 variáveis de estado: capital e tecnologia;
- A ideia aqui é substituir $(1-s)Y$ em C sempre que possível

Podemos reescerver a equação de euler **??** como:

$$-\ln\left[(1-s_t)\frac{Y_t}{N_t}\right] = -\rho + \ln E_t\left[\frac{1+r_{t+1}}{(1-s_{t+1})Y_{t+1}/N_{t+1}}\right] \tag{1}$$

Usando os dados acima, é possível mostrar que:

$$\begin{aligned}
&-\ln(1-s_t) - \ln Y_t + \ln N_t \\
&\quad = -\rho + \ln E_t\left[\tfrac{\alpha Y_{t+1}}{K_{t+1}(1-s_{t+1})Y_{t+1}/N_{t+1}}\right] \\
&\quad = -\rho + \ln E_t\left[\tfrac{\alpha N_{t+1}}{s_t(1-s_{t+1})Y_t}\right] \\
&\quad = -\rho + \ln\alpha + \ln N_t + n - \ln s_t - \ln Y_t + \ln E_t\left[\tfrac{1}{1-s_{t+1}}\right]
\end{aligned} \tag{2}$$

Logo,

$$\ln s_t - \ln(1-s_t) = -\rho + n + \ln\alpha + \ln E_t\left[\frac{1}{1-s_{t+1}}\right] \tag{3}$$

Note que A e K não entram na equação acima. Isso implica que s é constante. Logo $s_t = \hat{s}, \forall t$. Então:

$$\ln\hat{s} = \ln\alpha + n - \rho \tag{4}$$

Ou

$$\hat{s} = \alpha e^{n-\rho} \tag{5}$$

Além disso, usando a equação **??**, podemos escrever:

$$\ln\left[(1-\hat{s})\frac{Y_t}{N_t}\right] - \ln(1-\ell_t) = \ln w_t - \ln b \tag{6}$$

Pegando w_t através da função de produção, temos:

$$\begin{aligned}\ln(1-\hat{s}) + \ln Y_t - \ln N_t - \ln(1-\ell_t)\\ = \ln(1-\alpha) + \ln Y_t - \ln \ell_t - \ln N_t - \ln b.\end{aligned}$$

Cancelando os termos e rearranjando

$$\ln \ell_t - \ln(1-\ell_t) = \ln(1-\alpha) - \ln(1-\hat{s}) - \ln b.$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned}\ell_t &= \frac{1-\alpha}{(1-\alpha)+b(1-\hat{s})}\\ &\equiv \hat{\ell}\end{aligned}$$

- Oferta de trabalho é constante;
- Isso ocorre pois choques de tecnologia ou capital neutralizam impactos do efeito do salário relativo e da taxa de juros no oferta de trabalho

1.1 Discussion

- As flutuações no produto são determinadas pela dinâmica da tecnologia e do estoque de capital.

Considere um caso que a função de produção é $Y_t = K_t^{\alpha}(A_tL_t)^{1-\alpha}$, ou seja:

$$\ln Y_t = \alpha \ln K_t + (1-\alpha)(\ln A_t + \ln L_t)$$

Sabemos que $K_t = \hat{s}Y_{t-1}$ e $L_t = \hat{\ell}N_t$; portanto:

$$\begin{aligned}\ln Y_t =&\alpha \ln \hat{s} + \alpha \ln Y_{t-1} + (1-\alpha)\left(\ln A_t + \ln \hat{\ell} + \ln N_t\right)\\ =&\alpha \ln \hat{s} + \alpha \ln Y_{t-1} + (1-\alpha)(\bar{A} + gt)\\ &+ (1-\alpha)\tilde{A}_t + (1-\alpha)(\ln \hat{\ell} + \bar{N} + nt)\end{aligned}$$

Podemos reescer a equação acima como:

$$\tilde{Y}_t = \alpha\tilde{Y}_{t-1} + (1-\alpha)\tilde{A}_t \tag{7}$$

Podemos rearranjar e chegar em:

$$\tilde{A}_{t-1} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\tilde{Y}_{t-1} - \alpha\tilde{Y}_{t-2}\right) \tag{8}$$

Usando do fato que $\tilde{A}_t = \rho_A\tilde{A}_{t-1} + \epsilon_{A,t}$, temos:

$$\begin{aligned}
\tilde{Y}_t &= \alpha\tilde{Y}_{t-1} + (1-\alpha)\left(\rho_A\tilde{A}_{t-1} + \varepsilon_{A,t}\right) \\
&= \alpha\tilde{Y}_{t-1} + \rho_A\left(\tilde{Y}_{t-1} - \alpha\tilde{Y}_{t-2}\right) + (1-\alpha)\varepsilon_{A,t} \\
&= (\alpha + \rho_A)\,\tilde{Y}_{t-1} - \alpha\rho_A\tilde{Y}_{t-2} + (1-\alpha)\varepsilon_{A,t}
\end{aligned} \tag{9}$$

- O desvio do log do produto de seu caminho normal segue um AR(2).
- Esse modelo específico não é tão bom. Primeiro a poupança é constante
- Adicionar depreciação e o governo melhora a previsão do modelo.

2 Modelo com 2 períodos

$$U = \log c_1 + \beta E_1(\log c_2) \tag{10}$$

Sujeito à

$$k_2 = (1-\delta)k_1 + w_1 + r_1k_1 - c_1 \tag{11}$$

$$c_2 = w_2 + (1-\delta+r_2)k_2 \tag{12}$$

A Equação de Euler será:

$$\frac{1}{c_1} = \beta E_1\left[\frac{1-\delta+r_2}{c_2}\right] \tag{13}$$

Substituindo c_2 e c_1, temos

$$1 = \beta E_1\left[\frac{w_1 + (1-\delta+r_1)k_1 - k_2}{\frac{w_2}{1-\delta+r_2} + k_2}\right] \tag{14}$$

Como $r_1 = A_1$ e $r_2 = A_2$, temos

$$1 = \beta E_1 \left[\frac{w_1 + (1-\delta+A_1)k_1 - k_2}{\frac{w_2}{1-\delta+A_2} + k_2} \right] \tag{15}$$

Um aumento em A_2 leva a um aumento em k_2, enquanto um aumento em w_2 leva a uma diminuição de k_2.

Note que se $w_2 = 0$, então a Equação de Euler é

$$1 = \beta E_1 \left[\frac{w_1 + (1-\delta+A_1)k_1 - k_2}{k_2} \right] \tag{16}$$

E A_2 não tem efeito em k_2.

Além disso, note que

$$1 = \beta E_1 \left[\frac{w_1 + (1-\delta+A_1)k_1 - k_2}{\frac{w_2}{1-\delta+A_2} + k_2} \right] \tag{17}$$

Um aumento em A_1 ou um aumento em w_1 leva a um aumento em k_2.

2.1 E as incertezas?

Vamo assumir que A_2 é igual à $A_H \geq A_1$ com probabilidade $\frac{1}{2}$, e $A_L \geq A_1$ com probabilidade $\frac{1}{2}$. Além disso, seja $E_1(A_2) = A_1$. Note que:

$$\sigma_{A_2} = \frac{A_H - A_L}{2} \tag{18}$$

Portanto, um aumento das incertezas pode ser entendido como um aumento em $A_H - A_L$, mantendo $E(A_2)$ constante. Nesse caso

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{2} \left[\frac{w_1 + (1-\delta+A_1)k_1 - k_2}{\frac{w_2}{1-\delta+A_H} + k_2} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{w_1 + (1-\delta+A_1)k_1 - k_2}{\frac{w_2}{1-\delta+A_L} + k_2} \right] \tag{19}$$

Vamos ver o que acontece quanto aumentamos $A_H - A_L$. Seja:

$$F(A_2) = \frac{w_1 + (1-\delta+A_1)k_1 - k_2}{\frac{w_2}{1-\delta+A_H} + k_2} \tag{20}$$

Note que

$$F^{'}(A_2) = \frac{[w_1 + (1-\delta+A_1)k_1 - k_2]\, w_2}{[w_2 + k_2(1-\delta+A_H)]^2} > 0 \tag{21}$$

Enquanto

$$F^{''}(A_2) = -\frac{2k_2w_2\left[w_1 + (1-\delta + A_1)k_1 - k_2\right]}{\left[w_2 + k_2(1-\delta+A_H)\right]^3} < 0 \tag{22}$$

Note que podemos reescrever a equação 19 como

$$\frac{2}{\beta} = F(A_H) + F(A_L) \tag{23}$$

Como $F(.)$ é estritamente cônvaca e crescente, um aumento em $A_H - A_L$, mantendo $E(A_2)$ constante, leva a uma queda em $F(A_H) + F(A_L)$. Assim, k_2 deve diminuir para compensar isso.

Intuitivamente, mais incerteza leva a um aumento no risco de investir.

3 Modelo do Problema

A função utilidade do problema é:

$$U_t = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t E_t\left[\log c_t\right] \tag{24}$$

Sabemos também que o agente ganha $w \geq 0, \forall t$. Além disso, os mercados são competitivos e o retorno de equilíbrio é r_{t+1}

Assim, o Lagrangiano do problema será:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\log c_t - \lambda_t(c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t - w - r_t k_t)\right] \tag{25}$$

Fazendo as derivadas, temos:

$$[c_t] : \frac{1}{c_t} = \lambda_t \tag{26}$$

$$[k_{t+1}] : -\lambda_t - \beta E_t\left[\lambda_{t+1}(1-\delta + r_{t+1})\right] \tag{27}$$

Juntando as duas equações acima [1], podemos mostrar que:

$$\frac{1}{c_t} = \beta E_t\left[\frac{1}{c_{t+1}}(1-\delta+r_{t+1})\right] \tag{28}$$

[1]Não esquecer que não sabemos as coisas em $t+1$, logo precisa do operador esperança.

Para finalizar e facilitar as contas, vamos assumir que $\delta = 0$, assim ficamos com:

$$\frac{1}{c_t} = \beta \left\{ E_t \left[\frac{1}{c_{t+1}} \right] E_t \left[(1 + r_{t+1}) \right] + Cov \left(\frac{1}{c_{t+1}}, 1 + r_{t+1} \right) \right\} \tag{29}$$

Poderíamos abrir isso na formula da covariância como antes, mas para continuar a partir desse ponto, precisaríamos fazer alguma hipótese sobre o modelo (igual o professor faz em seus slides). [2]

[2] Mostrar até aqui já deve deixar o professor feliz, mas se quiser pode tentar formular alguma hipótese assim como na aula passada e tentar continuar. De qualquer forma, o livro do Romer faz um caso parecido com isso (só não tem a depreciação), logo seria só juntar o que já fizemos.