2018 级《线性代数 I》期末考试卷 (A) 参考答案

本题 得分	

一、判断题 (1-10 小题，每题 2 分，共 20 分)

(注：正确的在后方括号中打”√”，错误的在后方括号中打”×”)

1. 已知 n 阶方阵 A, B. 若 $AB = O, A \neq O$, 则 $B = O$. (×)
2. 初等矩阵都是可逆阵, 并且其逆阵都是它们本身. (×)
3. 若 n 阶方阵 A, B 均可逆, 则它们的乘积 AB 也可逆. (√)
4. 若向量组 α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 线性相关, 则 α_1, α_2, α_3 线性相关. (×)
5. 若向量组 α_1, α_2, α_3 线性无关, 则 $\alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_2 + \alpha_3$, $\alpha_3 + \alpha_1$ 线性无关. (√)
6. 若三阶方阵 A 有三个不同的特征值, 则方阵 A 相似与某一对角矩阵. (√)
7. 已知 A, B 是可逆矩阵. 若 A 与 B 相似, 则 A^{-1} 与 B^{-1} 相似. (√)
8. 已知 A, B 是可逆矩阵, 若 A 与 B 相似, 则 $A + A^{-1}$ 与 $B + B^{-1}$ 相似. (√)
9. 正交矩阵一定可逆. (√)
10. 若 n 阶方阵 A, B 均正定, 则它们的和 $A + B$ 也正定. (√)

本题 得分	

二、填空题 (11-15 小题，每题 4 分, 共 20 分)

11. 设 A 为三阶矩阵，其行列式 $|A| = 3$, A^* 为其伴随矩阵。若交换矩阵 A 的第一行和第二行得到矩阵 B, 则行列式 $|BA^*| =$ ______.

答案：-27.

12. 设四元线性方程组 $Ax = b$ 的系数矩阵 A 的秩为 3，α_1, α_2, α_3 是它的三个解，其中 $\alpha_1 = (1, -2, -3, 4)^T$, $5\alpha_2 - 2\alpha_3 = (2, 0, 1, 8)^T$, 则其导出组 $Ax = 0$ 的基础解系为 ______.

答案：$(-1, 6, 10, -4)^T$

13. 设二阶矩阵 A 的特征值为 -2 和 -3, $f(x) = x^2 - x - 1$, 则行列式 $|f(A)| =$ ______.

答案：55.

14. 设 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\alpha = (1, 2)^T$, 则向量 $A\alpha$ 的长度 $\|A\alpha\| =$ ______.

答案：$\sqrt{5}$.

15. 当 t 满足不等式 ________ 时，二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + tx_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$ 正定。

答案：$t > \frac{3}{5}$

本题得分	

三、计算题 (16-19 小题, 共 48 分)

16. (本题 12 分) 设 α_1, α_2, α_3 是 3 维向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的一组基,

(1) 求由基 α_1, $\frac{1}{2}\alpha_2$, $\frac{1}{3}\alpha_3$ 到基 $\alpha_1+\alpha_2$, $\alpha_2+\alpha_3$, $\alpha_3+\alpha_1$ 的过渡矩阵;

(2) 设向量 β 在基 α_1, α_2, α_3 下的坐标为 $(1,1,1)$, 求 β 在基 $\alpha_1+\alpha_2$, $\alpha_2+\alpha_3$, $\alpha_3+\alpha_1$ 下的坐标。

解: (1) $(\alpha_1,\ \frac{1}{2}\alpha_2,\ \frac{1}{3}\alpha_3) = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

所以

$$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3) = (\alpha_1,\ \tfrac{1}{2}\alpha_2,\ \tfrac{1}{3}\alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^{-1} = (\alpha_1,\ \tfrac{1}{2}\alpha_2,\ \tfrac{1}{3}\alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 3 分

另一方面,

$$(\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_3+\alpha_1) = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha_1,\ \frac{1}{2}\alpha_2,\ \frac{1}{3}\alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha_1,\ \frac{1}{2}\alpha_2,\ \frac{1}{3}\alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 3 分

故所求的过渡矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. $\cdots\cdots\cdots\cdots$ 2 分

(2) 依题意和 (1) 可得

$$\beta = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_3+\alpha_1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

因此新坐标为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 4 分

17. (本题 12 分) 已知四元线性方程组 $Ax=b$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & 2a & 1 & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & 1 \\ 0 & 0 & a^2 & 2a \end{pmatrix},\quad x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T,\quad b = (1,0,0,0)^T.$$

(1) 求行列式 $|A|$;

(2) a 为何值时，方程组有唯一解，并求 x_1;

(3) a 为何值时，方程组有无穷多解，并求通解。

解：(1) 按第一行展开可得行列式 $|A| = 5a^4$. $\cdots\cdots$ 4 分

(2) 由 (1), 当 $a\neq 0$ 时，$|A|\neq 0$，该方程组有唯一解．由克拉姆法则

$$x_1 = \frac{D_3}{D_4} = \frac{4a^3}{5a^4} = \frac{4}{5a}.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 4 分

(3) 当 $a=0$ 时方程组的增广矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由此可知 $rank(A|b) = rank(A) = 3 < 4$, 故当 $a=0$ 时方程组有无穷多个解，导出组的基础解系中仅有一个解向量，可取为 $\xi = (1,0,0,0)^T$, 方程组的特解可取为 $\eta = (0,1,0,0)^T$. 故通解为

$$x = \eta + k\xi,\quad k\in\mathbb{R}.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 4 分

18. (本题 10 分) 已知向量组 $\alpha_1=(1,2,3,1)^T$，$\alpha_2=(3,-1,2,-4)^T$，$\alpha_3=(-1,2,1,3)^T$，$\alpha_4=(-2,3,1,5)^T$，求它的秩和一个最大线性无关组，并将其余向量用最大线性无关组表示出来。

解：将向量组拼成矩阵进行初等行变换如下：

$$\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\2&-1&2&3\\3&2&1&1\\1&-4&3&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\0&-7&4&7\\0&-7&4&7\\0&-7&4&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\0&7&-4&-7\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\0&1&-\frac{4}{7}&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{5}{7}&1\\0&1&-\frac{4}{7}&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

………………………………………………………………… 4 分

向量组的秩为 2，最大线性无关组可取 α_1，α_2;

$\alpha_3=\frac{5}{7}\alpha_1-\frac{4}{7}\alpha_2$;

$\alpha_4=\alpha_1-\alpha_2$.

………………………………………………………………… 6 分

19. (本题 14 分) 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&2\\0&0&3\end{pmatrix}$.

(1) 求矩阵 A 的特征值和特征向量;

(2) 求矩阵 B 的特征值和特征向量;

(3) 求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=B$.

解： (1) 解特征方程 $|\lambda E-A|=0$ 可得矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3=3$.
$\lambda_1=\lambda_2=0$ 所对应的特征向量为

$$\xi_1=(-1,1,0)^T,\quad \xi_2=(-1,0,1)^T.$$

$\lambda_3=3$ 所对应的特征向量为

$$\xi_3=(1,1,1)^T.$$

令 $P_1=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$, 则有

$$P_1^{-1}AP_1=diag(0,0,3).$$

………………………………………………………………… 5 分

(2) 解特征方程 $|\lambda E-B|=0$ 可得矩阵 B 的特征值为 $\eta_1=\eta_2=0$, $\eta_3=3$.

$\eta_1=\eta_2=0$ 所对应的特征向量为

$$\zeta_1=(1,0,0)^T,\quad \zeta_2=(0,1,0)^T.$$

$\lambda_3=3$ 所对应的特征向量为

$$\zeta_3=(1,2,3)^T.$$

令 $P_2=(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&3\end{pmatrix}$, 则有

$$P_2^{-1}BP_2=diag(0,0,3).$$

………………………………………………………………… 5 分

(3) 由 (1) 和 (2) 得

$$P_1^{-1}AP_1=diag(0,0,3)=P_2^{-1}BP_2.$$

于是有

$$P_2P_1^{-1}AP_1P_2^{-1}=B$$

令 $P=P_1P_2^{-1}$, 则有 $P^{-1}AP=B$。计算可得

$$P=P_1P_2^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-1&\frac{4}{3}\\1&0&0\\0&1&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

………………………………………………………………… 4 分

本题	
得分	

四、证明题 (20-21 小题，每题 6 分, 共 12 分)

20. 设 α 是 n 维列向量，其长度为 1，E 是 n 阶单位矩阵，令 $H = E - 2\alpha\alpha^T$, 证明：H 是对称的正交矩阵。

证明：对称性：$H^T = (E - 2\alpha\alpha^T)^T = E^T - 2(\alpha\alpha^T)^T = E - 2(\alpha^T)^T\alpha^T = E - 2\alpha\alpha^T = H.$

………………………………………………………………… 2 分

正交性：

$$H^TH = H^2 = (E - 2\alpha\alpha^T)(E - 2\alpha\alpha^T)$$
$$= E^2 - 2\alpha\alpha^T E - E2\alpha\alpha^T + 4\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T \qquad (\because \alpha^T\alpha = 1)$$
$$= E - 4\alpha\alpha^T + 4\alpha\alpha^T = E.$$

………………………………………………………………… 4 分

21. 设 λ, μ 是对称矩阵 A 的两个不同的特征值，p, q 是对应的特征向量，证明：p 与 q 正交。

证明:

$$\lambda p^Tq = (\lambda p^T)q = (\lambda p)^Tq = (Ap)^Tq$$
$$= p^TA^Tq = p^TAq = p^T\mu q = \mu p^Tq.$$

………………………………………………………………… 4 分

即 $\lambda p^Tq = \mu p^Tq$. 由 $\lambda \neq \mu$ 知 $p^Tq = 0$, 故 p 与 q 正交。

………………………………………………………………… 2 分