2017 级《高等数学 I&II(1)》期中考试卷

班级________________ 学号________________ 姓名____________________

题号	一	二	三	四	总分
得分					

本题得分	

一、填空题、选择题(1~8小题，每小题 4 分, 共32 分)

(1) 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)(x+2)(x+3)}{x^{\alpha}}=\beta$，则常数 $\alpha=$ __3__ ，$\beta=$ __1__ .

(2) 设 $x\to0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{2}}-1$ 与 $\cos x-1$ 为等价无穷小，则常数 $a=$ __-1__ .

(3) $x=1$ 为函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$ 的第 __一__ 类间断点。

(4) $y=xe^{-x}$ 的单调递增区间为 $(-\infty,1)$，函数对应曲线上的拐点为 $(2,2e^{-2})$.

(5) 设 $y=f(e^x)$，$f'(x)=\arctan x$，则 $dy|_{x=0}=\dfrac{\pi}{4}dx.$

(6) 设 $\{x_n\}$ 是数列，下列命题中**不正确**的是 (D)

(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$

(B) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

(C) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$

(D) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

(7) 设 $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=$ (B)

(A) 0 (B) 1 (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) ∞

(8) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续且 $f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（ ***D*** ）

（A）不可导；（B）可导且 $f'(0)\neq0$；（C）有极大值；（D）有极小值。

本题得分	

二、计算题(9~14小题，每小题 6分, 共 36分)

(9) 求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}$.

解法一： $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}e^{(\ln\tan x)\frac{1}{\cos x-\sin x}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}e^{\frac{\ln\tan x}{\cos x-\sin x}}$

又 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln\tan x}{\cos x-\sin x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sec^2 x}{\tan x(-\sin x-\cos x)}=\dfrac{2}{-\sqrt{2}}=-\sqrt{2}.$

故原式 $=e^{-\sqrt{2}}$.

解法二：

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(1+\tan x-1)^{\frac{1}{\tan x-1}\cdot\frac{\tan x-1}{\cos x-\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[(1+\tan x-1)^{\frac{1}{\tan x-1}}\right]^{\frac{\tan x-1}{\cos x(1-\tan x)}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[(1+\tan x-1)^{\frac{1}{\tan x-1}}\right]^{\frac{-1}{\cos x}}=e^{-\sqrt{2}}.$$

考试形式开卷（ ）、闭卷（ √ ），在选项上打（ √ ）

开课教研室__大学数学部__ 命题教师______ 命题时间__2017-10-15__ 使用学期__17-18-1__ 总张数__3__ 教研室主任审核签字____________

更多考试真题

请扫码获取

(10) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

【解】

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$$

$$=\lim_{x\to 0} e^{\frac{\cos 2x+2x\sin x-1}{x^4}}$$

$$=\lim_{x\to 0} e^{\frac{1-\frac{4x^2}{2}+\frac{2^4x^4}{4!}+2x\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)-1+o(x^4)}{x^4}}$$

$$=e^{\frac{1}{3}}$$

(11) 求导数 $y=\arctan\frac{2x}{1-x^2}$.

解: $\frac{dy}{dx}=\left[\frac{1}{1+(\frac{2x}{1-x^2})^2}\right]\cdot\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)'=\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}\cdot\frac{2\cdot(1-x^2)-2x\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2}=\frac{2}{1+x^2}$.

(12) 设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $e^{x+y}+\sin(xy)=0$ 确定的隐函数，求 $\frac{dy}{dx}$。

解: 方程 $e^{x+y}+\sin(xy)=0$ 两边对 x 求导得

$$e^{x+y}(1+y')+\cos(xy)(y+xy')=0.$$

整理得 $\frac{dy}{dx}=-\frac{e^{x+y}+y\cos(xy)}{e^{x+y}+x\cos(xy)}$

(13) 已知 $\begin{cases}x=\cos 2t\\ y=\tan^2 t\end{cases}$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解: $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2\tan t\sec^2 t}{-2\sin 2t}=-\frac{1}{\cos^4 t}=-\frac{1}{2}\sec^4 t$.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\frac{1}{2}4\sec^3 t\cdot\sec t\cdot\tan t}{-2\sin 2t}=\frac{1}{2}\sec^6 t$$

(14) 设 $f(x)=x^2\ln(1+x)$，求 $f^{(n)}(0)$。

解: $f^{(n)}(x)=[\ln(1+x)]^{(n)}\cdot x^2+n[\ln(1+x)]^{(n-1)}\cdot 2x+\frac{n(n-1)}{2}[\ln(1+x)]^{(n-2)}\cdot 2$,

$[\ln(1+x)]^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!\cdot(1+x)^{-n}$,

故 $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{\cdot(1+x)^n}x^2+2nx\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}}+n(n-1)\frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{(1+x)^{n-2}}$,

$f^{(n)}(0)=(-1)^{n-3}n(n-1)(n-3)!=\frac{(-1)^{n-1}n!}{n-2}$.

本题得分	

三、解答题（15~16小题，每小题8分，共16分）

（15）设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(e^n+x^n)}{n}(x>0)$

（1）求 $f(x)$ 的表达式；（2）讨论 $f(x)$ 的连续性和可导性。

解：$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(e^n+x^n)}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\ln(e^n+x^n)^{\frac{1}{n}}=\begin{cases}1, & 0<x\le e,\\ \ln x, & x>e.\end{cases}$

$\because$ $f(e-0)=f(e+0)=f(e)=1$，$\therefore$ $f(x)$在点$x=e$连续。

又由初等函数的连续性知 $f(x)$在$(0,e)$和$(e,+\infty)$内连续，

$\therefore$ $f(x)\in C(0,+\infty)$。

$\because$ $f'_-(e)=\lim\limits_{x\to e^-}\dfrac{f(x)-f(e)}{x-e}=\lim\limits_{x\to e^-}\dfrac{1-1}{x-e}=0$，

$f'_+(e)=\lim\limits_{x\to e^+}\dfrac{f(x)-f(e)}{x-e}=\lim\limits_{x\to e^+}\dfrac{\ln x-1}{x-e}=\lim\limits_{x\to e^+}\dfrac{\ln x-\ln e}{x-e}$

$\underline{\underline{令t=x-e}}\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\ln(e+t)-\ln e}{t}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\ln(1+\frac{t}{e})}{t}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\frac{t}{e}}{t}=\dfrac{1}{e}$，$\therefore$ $f'(e)$不存在。

$\therefore$ $f'(x)=\begin{cases}0, & 0<x\le e,\\ \dfrac{1}{x}, & x>e.\end{cases}$

（16）已知 $f(x)=\begin{cases}x^k\sin\dfrac{1}{x}, & x\ne0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$（$k$ 为正常数），讨论 k 为何值时存在二阶导数 $f''(0)$。

解：$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^k\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}x^{k-1}\sin\dfrac{1}{x}$，

要使 $f'(0)$ 存在，必须$k>1$。且当$k>1$时，$f'(0)=0$。

当 $x\ne0$ 时，$f'(x)=kx^{k-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{k-2}\cos\dfrac{1}{x}$，

$\therefore$ $f'(x)=\begin{cases}kx^{k-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{k-2}\cos\dfrac{1}{x}, & x\ne0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$（$k>1$），

$\because$ $f''(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{kx^{k-1}\sin\frac{1}{x}-x^{k-2}\cos\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}kx^{k-2}\sin\dfrac{1}{x}-x^{k-3}\cos\dfrac{1}{x}$，

$\therefore$要使 $f''(0)$ 存在，必须$k>3$。

本题得分	

四、证明题（17~18小题，每小题8分，共16分）

（17）证明：当$x>0$时，$\sin x+\cos x>1+x-x^2$.

证明：令 $f(x)=\sin x+\cos x-1-x+x^2$,则 $f(x)$ 在$[0,+\infty$ 上连续且可导。

$f'(x)=\cos x-\sin x-1-x+2x$，

$f''(x)=-\sin x-\cos x+2>0$

所以 $f'(x)$ 单调增，于是 $f'(x)>f'(0)=0$,从而 $f(x)$ 单调增，故 $f(x)>f(0)$,即

$\sin x+\cos x>1+x-x^2$。

(18) 设函数 $f(x)$在$[0,3]$上连续,在$(0,3)$内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$，$f(3)=1$，试证必存在$\xi\in(0,3)$,使 $f'(\xi)=0$。

证明：$\because$ $f(x)$在$[0,3]$上连续，

$\therefore$ $f(x)$在$[0,2]$上连续，且在$[0,2]$上必有最大值 M 和最小值 m，于是

$m\le f(0)\le M$，$m\le f(1)\le M$，$m\le f(2)\le M$，故

$m\le\dfrac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}\le M$，

由介值定理知，至少存在一点$C\in[0,2]$，使 $f(C)=\dfrac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1$，

$\because$ $f(x)$在$[C,3]$上连续，在$(C,3)$内可导，且 $f(C)=1=f(3)$，

$\therefore$由 *Rolle* 定理知，必存在$\xi\in(C,3)\subset(0,3)$,使 $f'(\xi)=0$。