高等数学 I-2-B 卷参考答案

本题得分	

一、填空题（1~4 小题，每小题 4 分，共 16 分）

1. 设 $f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, x^2+y^2\neq 0, \\ 0 \end{cases}$，则 $f_x'(0,0)=$ ____________________.

解： $f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0-0}{x}=0$

2. 函数 $f(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y}$ 在点 $(0,1)$ 处沿从点 $(0,1)$ 指向点 $(1,2)$ 的方向导数为 ____________________.

解 $f_x(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}$，$f_x(0,1)=1$，$f_y(x,y)=\dfrac{-x}{x^2+y^2}$，$f_y(0,1)=0$，答案为 A。

$l=(1,1)$,所以方向导数 $\dfrac{\partial f}{\partial l}|_{(0,1)}=(1,0)\cdot(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}})=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

3. 设 C 是圆周 $x^2+y^2=2x$，则第一类曲线积分 $\int_C(x^2+y^2+3y)ds=$ ________.

解： 根据质心的定义 $\int_C xds=\bar{x}\cdot\int_C ds=2\pi\bar{x}=2\pi.$

$$\int_C yds=\bar{y}\int_C ds=0$$

$$\int_C(x^2+y^2+3y)ds=\int_C(2x+y)ds=2\int_C xds+3\int_C yds=4\pi$$

4. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$ $(-1<x<1)$ 的麦克劳林级数展开式为 ____________________.

（只要写出前三项）

解： $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x}}=(1-x)^{-\frac{1}{3}}=1+\dfrac{1}{3}x+\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{3}\\2\end{pmatrix}(-x)^2+\cdots=1+\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{9}x^2+\cdots$

本题得分	

二、选择题（5~8 小题，每小题 4 分，共16 分）

5. 函数 $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极小值点为【 】

（A） (1,0)　　（B） (-1,0)　　（C） (0,0)　　（D） (1,1)

解： $f_x=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}-x^2e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$，$f_y=-xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

于是驻点为(1,0)和(-1,0)

$$f_x=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}-x^2e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},\ f_y=-xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$\Rightarrow f_{xx}=-2xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}-x(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=(x^3-3x)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$f_{xy}=-y(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},\ f_{yy}=f_y=-xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}+xy^2e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=x(y^2-1)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

在点(1,0)处， $A=f_{xx}(1,0)=-2e^{-\frac{1}{2}}<0$， $B=f_{xy}(1,0)=0$，$C=f_{yy}(1,0)=-e^{-\frac{1}{2}}$，

$AC-B^2>0$,在该点取得极大值。

在点(-1,0)处， $A=f_{xx}(-1,0)=2e^{-\frac{1}{2}}>0$， $B=f_{xy}(-1,0)=0$，$C=f_{yy}(-1,0)=e^{-\frac{1}{2}}$，

$AC-B^2>0$ 在该点取得极小值。选 **B**

6. 曲面 $2xy+4z-\mathrm{e}^z=3$ 在点 $(1,2,0)$ 处的法线与直线 $\dfrac{x-7}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-2}{-2}$ 的夹角为【 】

（A） $\dfrac{\pi}{4}$　　（B） $\dfrac{\pi}{3}$　　（C） $\dfrac{\pi}{2}$　　（D） 0

解： 法线的方向向量为 $n=(F_x,F_y,F_z)|_{(1,2,0)}=(2y,2x,4-e^z)\big|_{(1,2,0)}=(4,2,3)$

$$n=(F_x,F_y,F_z)|_{(1,2,0)}=(2y,2x,4-e^z)\big|_{(1,2,0)}=(4,2,3)$$

$$\cos\theta=\frac{n\cdot s}{|n||s|}=\frac{(4,2,3)\cdot(1,1,-2)}{\sqrt{29}\sqrt{6}}=0$$

所以选 **C**

7. 设 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$，则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{\mathrm{dS}}{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 的值为【 】

（A） 4π　　（B） $\dfrac{16}{5}\pi$　　（C） $\dfrac{16}{3}\pi$　　（D） $\dfrac{8}{3}\pi$

选 **D**

8. 设 $a_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，则下列级数中，绝对收敛的级数是【 】

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ （B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}$ （C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$ （D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}+a_n)$

解 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|(-1)^n a_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$，发散 ——A 错

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n a_{n+1}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \geq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}$$，发散 ——B 错

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_{n+1}-a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{(n+1)}}-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| \geq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{(n+1)}}$$，发散 ——C 错

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_{n+1}+a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{(n+1)}}+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{(n+1)}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{(n+1)}+\sqrt{n})} \approx \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2\sqrt{n}}$$，收敛 ——D 对

答案：D

本题得分	

三、计算题(9~13小题，每小题 8 分，共40 分)

9. 求过点 $A(1,2,3)$，$B(2,3,4)$，$C(2,4,5)$ 的平面的方程。

解：$n=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=(0,-1,1)$ —— 5'

所以平面方程为 $0(x-1)-1(y-2)+(z-3)=0$，即 $y-z+1=0$ —— 3'

10. 设函数 $z=f(xy,g(x))$，函数 f 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$，求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

解：$z_x = yf_1' + g'(x)f_2'$ ……………………3 分

$$z_{xy} = f_1' + y(xf_{11}'' + +0f_{12}'') + g'(x)(xf_{21}'' + 0f_{22}'') = f_1' + xyf_{11}'' + xg'(x)f_{21}''$$

……………………….3 分

由题意 $g(1)=1$， $g'(1)=0$，所以

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = \left. f_1' + xyf_{11}'' + xg'(x)f_{21}''\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = f_1'(1,g(1)) + 1f_{11}''(1,g(1)) + g'(1)f_{21}''(1,g(1))$$

$$= f_1'(1,1) + f_{11}''(1,1)$$

……………………….2 分

11. 计算累次积分 $I=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^1 ye^{xy}dy$.

解 $I=\int_{\frac{1}{2}}^1 dy\int_{\frac{1}{y}}^2 ye^{xy}dx$ ……………………….4 分

$=\int_{\frac{1}{2}}^1 (e^{2y}-e)dy=\frac{1}{2}(e^2-2e)$ ……………………….4 分

12. 计算第二类曲线积分 $I=\int_C (y+x)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y$，其中 C 是自点 $A(-\pi,1)$ 沿曲线 $y=-\cos x$ 到点 $B(\pi,1)$ 的曲线段。

$$I=\int_C (y+x)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y$$

解： $=\oint_{C+\overline{BA}}(y+x)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y-\int_{\overline{BA}}(y+x)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y$ ……………………….2 分

$=\oint_{C+\overline{BA}}(y+x)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y+\int_{\overline{AB}}(y+x)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y$

$$\oint_{C+\overline{BA}}(y+x)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=\iint_D(-1-1)dxdy=-2A(D)=-2*2\pi=-4\pi$$

……………………….4 分

$$\int_{\overline{AB}}(y+x)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=\int_{\overline{AB}}(y+x)\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}(1+x)dx=2\pi$$

……………………2 分

$$\therefore\ I=\int_C(y+x)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=-2\pi.$$

13. 计算第二类曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}x(8z+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-4yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(y-2z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

其中 Σ 是曲线 $\begin{cases}z=1+x^2\\ y=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所成的曲面被平面 $z=3$ 所截下的部分，取下侧。

解：补上截面 Σ_1，取上侧 ……………………1 分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}x(8z+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-4yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(y-2z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}x(8z+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-4yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(y-2z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_1}x(8z+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-4yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(y-2z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}x(8z+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-4yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(y-2z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(8z+1-4z-4z)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}1\,dxdydz=\int_1^3A(\Omega_z)dz\ =\pi\int_1^3(z-1)dz=2\pi$$

……………………3 分

$$\iint\limits_{\Sigma_1}x(8z+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-4yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(y-2z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{(\Sigma_1)_{xy}}(y-18)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-18A((\Sigma_1)_{xy})=-36\pi$$

……………………4 分

$$\therefore I=38\pi$$

本题得分	

四、证明（14~15 小题，每小题5分，共10 分）

14. 证明调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散。

15. 证明：若 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0$，则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛区间为 $(-\infty,\infty)$.

证明：对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x|=0<1$ ……………………3‘

所以数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛，从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 收敛，

因此，幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间为 $(-\infty,\infty)$。........................2'

本题得分	

五、解答题（16~17 小题，每小题9分，共18 分）

16. 要制造一个容积为 4 立方米的长方体形无盖水箱，问长、宽、高各为多少米时，用料最省？

解：设长宽高分别为：x,y,z米，题意即求约束极值问题

$$\begin{cases} \min S(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz \\ s.t. \quad xyz = 4, \ \ x > 0, y > 0, z > 0 \end{cases}$$

作 Lagrange 函数........................3'

$L(x,y,z;\lambda) = xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz - 4)$ ....3'

由 $\begin{cases} L_x = y + 2z + \lambda yz = 0 \\ L_y = x + 2z + \lambda xz = 0 \\ L_z = 2x + 2y + \lambda xy = 0 \\ L_\lambda = xyz - 4 = 0 \end{cases}$ 得唯一解 $x = 2, y = 2, z = 1, \lambda = -2$ ....4'

根据实际问题可知，长、宽、高分别为 2 米，2 米，1 米时，用料最省。

17. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$ 和函数.

解：先求得级数的收敛域为$(-1,1)$. ....3'

令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n, x \in I$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1} = x\sum_{n=1}^{\infty} (x^{n+1})''$$

........................5'

$$= x\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1}\right)'' = x\left(\frac{x^2}{1-x}\right)'' = \frac{2x}{(1-x)^3}, x \neq 0$$

显然，当 $x = 0$ 时，上式也成立，所以

$S(x) == \dfrac{2x}{(1-x)^3}, x \in I$ ....2'