2016级《线性代数 I》期末考试卷(A)参考答案评分标准

班级______________ 学号________________ 姓名________________

题 号	一	二	三	四	总分
得 分					

本题得分	

一、填空题(每小题4分, 共20分)

(1)设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, 则其伴随矩阵 $A^*=\underline{\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix}}$.

(2)设 A 是三阶矩阵，若 A 的行列式 $|A|=2$, 则 $|3A|=\underline{54}$

(3)设 $A=\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$， $B=\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}$，则 $(AB)^3=\underline{\begin{pmatrix}4&4\\4&4\end{pmatrix}}$

(4) $\mathbb{R}^2$ 的一组基 $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ 到另一组基 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ 的过渡矩阵是 $\underline{\begin{pmatrix}-1&-5\\1&3\end{pmatrix}}$

(5)若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+6x_3^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 正定,则 a 的范围是 $\underline{(-\sqrt{5},\sqrt{5})}$.

本题得分	

二、选择题(每小题4分, 共20分)

(1)设 A,B 都是 n 阶方阵，若 $AB=O$, 则下列一定成立的是【C】

(A) $A=O$ 或 $B=O$ (B) A,B 都不可逆

(C) A,B 至少有一个不可逆 (D) $A+B=O$

(2)下列矩阵中不是初等矩阵的是【B】

(A) $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, (C) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

(3)向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\,(n\ge 2)$ 线性相关的充分必要条件是【D】

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中含有零向量

(B) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中有两个向量对应分量成比例

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中每一个向量都可以用其它向量线性表示

(D) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中至少有一个向量可以用其它向量线性表示

(4)若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角阵，则【D】

(A) $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵 (B) $\boldsymbol{A}$ 为实对称阵;

(C) $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值 (D) $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量

(5)设 A 是 6×5 矩阵.若齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解空间是2维的,则齐次线性方程组 $A^Tx=0$ 的解空间的维数是【B】

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6

本题得分	

三、解答题(共53分)

(1)(本题8分) 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\1&-2&0\\2&2&-4\end{pmatrix}$,且 $AB=A-2B$,求矩阵 B.

解: $AB=A-2B\Rightarrow(A+2E)B=A\Rightarrow B=(A+2E)^{-1}A$ ....3'

$$(A+2E\vdots A)=\begin{pmatrix}1&-1&0&\vdots&-1&-1&0\\1&0&0&\vdots&1&-2&0\\2&2&-2&\vdots&2&2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&\vdots&-1&-1&0\\1&0&0&\vdots&1&-2&0\\1&1&-1&\vdots&1&1&-2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&\vdots&1&-2&0\\1&-1&0&\vdots&-1&-1&0\\1&1&-1&\vdots&1&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&\vdots&1&-2&0\\0&-1&0&\vdots&-2&1&0\\0&1&-1&\vdots&0&3&-2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&\vdots&1&-2&0\\0&1&0&\vdots&2&-1&0\\0&-1&1&\vdots&0&-3&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&\vdots&1&-2&0\\0&1&0&\vdots&2&-1&0\\0&0&1&\vdots&2&-4&2\end{pmatrix}$$，所以 $B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\2&-1&0\\2&-4&2\end{pmatrix}$ ....5'

考试形式开卷（ ）、闭卷（√），在选项上打（√）

开课教研室__大学数学部__ 命题教师________ 命题时间__2017-3-20__ 使用学期__16-17-2__ 总张数__3__ 教研室主任审核签字______________

（2）（本题 15 分）

讨论 λ 取何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=0 \\ x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=\lambda \\ (1+\lambda)x_1+x_2+x_3=\lambda^2 \end{cases}$ (1) 有唯一解； (2) 无解； (3) 有无穷多解并求出通解.

解：$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1+\lambda & 1 & 1 \end{vmatrix}=-\lambda^2(\lambda+3)$. ....3'

（1）当 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq -3$ 时，有 $|A|\neq 0$，方程组有惟一解；.....................3'

（2）当 $\lambda=-3$ 时，$\overline{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$，

$R(A)=2<R(\overline{A})=3$，所以无解；...3'

（3）当 $\lambda=0$ 时，$\overline{A}\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$R(A)=R(\overline{A})=1<3$，方程组有无穷多解.

基础解系为 $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，故通解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，其中 k_1,k_2 为任意实数。

....6'

（3）（本题 15 分）已知向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\alpha_5=\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，求向量组的秩、最大无关组，并将其余向量用最大无关组表示出来.

解: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/3 \end{pmatrix}$ **..............5'**

所以，向量组的秩为 3，........................2'

最大无关组可选 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$,........................2'

$\alpha_4=-2\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$,

$\alpha_5=-2\alpha_1+\frac{5}{3}\alpha_2+\frac{1}{3}\alpha_3$, ...6'

（4）（本题 15 分） 求一个正交变换 $x=Py$ ，将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^3+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准形。

解:表示该二次型的对称矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$

解特征方程 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&2&-2\\2&5-\lambda&-4\\-2&-4&5-\lambda\end{vmatrix}=0$，得特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=10$ ....3'

解方程 $(A-E)x=0$，

$A-E=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，得 $\xi_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}$ ....6'

$A-10E=\begin{pmatrix}-8&2&-2\\2&-5&-4\\-2&-4&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-5&-4\\-8&2&-2\\-2&-4&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-5&-4\\0&-18&-18\\0&-9&-9\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}2&-5&-4\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得 $\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$,...............3'

取正交矩阵 $P=\begin{pmatrix}0&\frac{2\sqrt{2}}{3}&-\frac{1}{3}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{\sqrt{2}}{6}&-\frac{2}{3}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{\sqrt{2}}{6}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

标准型为

$y_1^2+y_2^2+10y_3^2$ ....3'

本题得分	

四、（本题 7 分） 设 λ 是实对称矩阵 A 的特征值，证明: λ^2 是 A^2 的特征值。

证明：因为 λ 是 A 的特征值，于是存在 $x_0\neq 0$ 使得 $Ax_0=\lambda x_0$ ....3'

从而

$A^2x_0=A(Ax_0)=A(\lambda x_0)=\lambda Ax_0=\lambda\cdot\lambda x_0=\lambda^2x_0$ ....3'

故 λ^2 是 A^2 的特征值。...............1'