# 2017 级《线性代数 II》期末考试卷(B)答案

使用专业、班级__________ 学号____________ 姓名_________________

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | | |

本题得分

一、填空题(每小题 4 分, 共 24 分)

(1) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&4\\0&4&5\end{pmatrix}$, 则 $A^{-1}=$ $\begin{pmatrix}1/2&0&0\\0&-5&4\\0&4&-3\end{pmatrix}$.

(2) 设向量 $\alpha=(1,-1,0)^T$, $\beta=(2,3,1)$, 矩阵 $A=\alpha\beta$, 则 $A^{100}=$ $\begin{pmatrix}-2&-3&-1\\2&3&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

(3) 设 $\eta_1,\eta_2,\eta_3$ 为四元非齐次线性方程组 $AX=b$ 的三个解向量, $R(A)=3$, 又 $\eta_1+2\eta_2=(0,1,2,3)^T$, $2\eta_2-3\eta_3=(1,2,3,4)^T$, 则 $AX=b$ 的通解为 $X=k(3,7,11,15)^T-(1,2,3,4)^T$.

(4) 设三阶方阵 $A$ 的特征值为 $1,2,3$, 则 $|2A^*+E|=$ 455.

(5) 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2\\x&y\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}1&-1\\-6&2\end{pmatrix}$ 相似，则 $x=$ 3 , $y=$ 2

(6) 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=6x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2tx_1x_2$ 正定, 则 $t$ 满足 $|t|<2\sqrt{3}$.

本题得分

二、选择题(每小题 4 分, 共 16 分)

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶方阵, 则下列结论成立的是 [ $D$ ]

(A) $A=E\Leftrightarrow|A|=1$ (B) $B$ 为 $n$ 阶方阵, 则 $AB=O\Leftrightarrow A=O$ 或 $B=O$

(C) $|A|=0\Leftrightarrow A=O$ (D) 存在 $n$ 阶方阵 $B$, 使 $AB=E\Leftrightarrow|A|\neq 0$ .

(2) 如果向量组线性相关，那么向量组内________可由其余向量线性表示. [ $A$ ]

(A) 至少有一个向量; (B) 至多有一个向量;

(C) 没有一个向量; (D) 任意一个向量.

(3) 设矩阵 $A,B$ 为 $n$ 阶方阵，且 $R(A)=R(B)$, 则下列结论正确的是 [ $C$ ]

(A) 存在可逆阵 $P$, 使得 $P^{-1}AP=B$; (B) 存在可逆阵 $P$, 使得 $P^TAP=B$;

(C) 存在可逆阵 $P,Q$, 使得 $PAQ=B$ ; (D) $|A|=|B|$.

(4) 设 $A,B$ 为 $n$ 阶相似方阵, 则下列结论错误的是 [ $D$ ]

(A) $R(A)=R(B)$; (B) $A,B$ 的特征值相同 ; (C) $A$ 与 $B$ 同时可逆或不可逆;

(D) 若 $\lambda$ 为 $A,B$ 的特征值，则 $(A-\lambda E)X=O$ 与 $(B-\lambda E)X=O$ 的解相同.

本题得分

三、解答题(每小题 8 分, 共 16 分)

(1) 设 $A$ 为三阶方阵, 且 $|A|=-2$, 求 $\left|\frac{1}{3}A^{-1}-\left(\frac{1}{2}A\right)^*\right|$.

解：原式 $=\left|\frac{1}{3}A^{-1}-\frac{1}{4}A^*\right|\cdots\cdots(2')$

$=\left|\frac{1}{3}A^{-1}+\frac{1}{2}A^{-1}\right|\cdots\cdots(4')$

$=\left|\frac{5}{6}A^{-1}\right|$

$=\left(\frac{5}{6}\right)^3\frac{1}{|A|}$

$=-\frac{125}{432}\cdots\cdots(8')$

考试形式开卷（ ）、闭卷（√），在选项上打（√）

开课教研室 大学数学部 命题教师_______ 命题时间 2018-5-18 使用学期 17-18-2 总张数 3 教研室主任审核签字 ____________

(2) 设 $A=\begin{pmatrix}3&1&-1\\2&2&0\\1&0&2\end{pmatrix}$，且 $BA=A+B$，求矩阵 $B$．

解：$B(A-E)=A \qquad (A-E)^T B^T=A^T \cdots\cdots(2')$

$$\left((A-E)^T \mid A^T\right)=\begin{pmatrix}2&2&1&3&2&1\\1&1&0&1&2&0\\-1&0&1&-1&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2-2r_1\\r_3+r_1}]{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&1&0&1&2&0\\0&0&1&1&-2&1\\0&1&1&0&2&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_2-r_3\\r_1-r_2}]{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&2&-2&-1\\0&1&0&-1&4&1\\0&0&1&1&-2&1\end{pmatrix}\cdots\cdots(7')$$

$$\therefore B=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-2&4&-2\\-1&1&1\end{pmatrix}\cdots\cdots(8')$$

| 本题得分 | |
|---|---|

四、(本题12分) 设向量组 $\alpha_1=(1,-1,2,4)^T$，$\alpha_2=(0,3,1,2)^T$，$\alpha_3=(3,0,7,14)^T$，$\alpha_4=(1,-1,2,0)^T$，$\alpha_5=(2,1,5,6)^T$，求该向量组的秩以及一个最大无关组，并将其余向量用该最大无关组线性表示.

解：$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-1&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&6\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\r_4-4r_1}]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&3&3&0&3\\0&1&1&0&1\\0&2&2&-4&-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4\div 2]{r_2\div 3}\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&1&1&0&1\\0&1&1&-2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_4-r_2\\r_3\leftrightarrow r_4}]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&-2&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1-r_3]{r_3\div(-2)}\begin{pmatrix}1&0&3&0&1\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\cdots\cdots(6')$$

$\therefore R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=3\cdots\cdots(8')$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 为所求的一个最大无关组$\cdots\cdots(10')$

$\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2, \qquad \alpha_5=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4\cdots\cdots(12')$

| 本题得分 | |
|---|---|

五、(本题12分) 问 $\lambda$ 为何值时，线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=3\\x_1+4x_2-4x_3=5\\-2x_1-x_2+x_3=-\lambda-2\end{cases}$ 无解，有无穷多解？并求其通解.

解：$$B=(A,b)=\begin{pmatrix}1&2&-2&3\\1&4&-4&5\\-2&-1&1&-\lambda-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+2r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&2&-2&3\\0&2&-2&2\\0&3&-3&4-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-3r_2]{r_2\div 2}\begin{pmatrix}1&2&-2&3\\0&1&-1&1\\0&0&0&1-\lambda\end{pmatrix}\cdots\cdots(6')$$

$\therefore \lambda\neq 1$时，$R(A)=2$，$R(B)=3$,方程组无解;$\cdots\cdots(8)$

$$\lambda=1\text{时}，B\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&-2&3\\0&1&-1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&-1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$R(A)=R(B)=2<3$,方程组有无穷多解;

此时,$\begin{cases}x_1=1\\x_2-x_3=1\end{cases}$，令 $x_3=c$,得通解 $X=c\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ 其中 $c$为任意常数.$\cdots\cdots(12)$

| 本题得分 | |
|---|---|

六、(本题12分) 已知三阶实对称矩阵 $A$ 有三个特征值 $1,1,-1$，向量 $\xi_1=(1,1,1)^T$，$\xi_2=(2,2,1)^T$ 为 $A$ 的属于特征值1的特征向量，求 $A$.

解：设 $\xi_3=(x_1,x_2,x_3)^T$ 为对应于特征值 $-1$ 的特征向量，由实对称矩阵的性质可知

$\xi_1^T\xi_3=0,\quad \xi_2^T\xi_3=0$

即 $\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$

得基础解系 $\xi_3=(1,-1,0)^T\cdots\cdots(3')$

将 $\xi_1,\xi_2$ 施密特正交化得 $\eta_1=\xi_1=(1,1,1)^T$，$\eta_2=\xi_2-\dfrac{[\eta_1,\xi_2]}{[\eta_1,\eta_1]}\eta_1=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$

将 $\eta_1,\eta_2$，$\xi_3$ 单位化得 $p_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix},p_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\\-2/\sqrt{6}\end{pmatrix},p_3=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}\cdots\cdots(8')$

令 $P=(p_1,p_2,p_3)$，$\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}$，

则 $A=P\Lambda P^T=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdots\cdots(12')$

| 本题得分 | |
|---|---|

七、(本题8分) 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性无关，证明：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3+\alpha_4$ 线性无关.

证明：由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性无关可知，$\alpha_1,\alpha_2$ 线性无关

又由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关 可知 $\alpha_3$ 能由 $\alpha_1,\alpha_2$ 线性表示

若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3+\alpha_4$ 线性相关，则 $\alpha_3+\alpha_4$ 能由 $\alpha_1,\alpha_2$ 线性表示

故 $\alpha_4$ 能由 $\alpha_1,\alpha_2$ 线性表示

即 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性相关　与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性无关矛盾.

因此 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3+\alpha_4$ 线性无关.