2015级《高等数学Ⅰ(2)》期末考试卷(A)参考答案

班级__________ 学号__________ 姓名__________

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						

本题得分	

一、填空题(1–5小题，每小题4分，共20分)

1. 已知函数$z=z(x,y)$由方程$z^3-3xyz+x^3-2=0$所确定，则$dz\big|_{x=1,y=0}=$ $\underline{-dx+dy}$.

2. 函数$z=x^2+y^2$在点$A(1,2)$处沿从A点指向$B(2,2+\sqrt{3})$点的方向的方向导数为 $\underline{1+2\sqrt{3}}$.

3. 设C是圆周$x^2+y^2=2x$，则第一类曲线积分$\int_C xds=$ $\underline{2\pi}$.

4. 曲面积分$\iint_\Sigma xdydz+ydzdx+zdxdy=$ $\underline{2\pi}$，其中Σ为上半球面$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$的上侧.

5. 将函数$\dfrac{1}{(x-1)^2}$展开成x的幂级数为$\underline{\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\ (-1<x<1)}$.

本题得分	

二、单项选择题(6~10小题，每小题4分，共20分)

6. 考虑二元函数$f(x,y)$的下面4条性质：

①函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续；②函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处两个偏导数连续；

③函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微；④函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处两个偏导数存在.

则下面结论正确的是【 A 】

(A) ②⇒③⇒① (B) ③⇒②⇒① (C) ③⇒④⇒① (D) ③⇒①⇒④

考试形式开卷（ ）、闭卷（√），在选项上打（√）
开课教研室 大学数学部 命题教师 命题组 命题时间 2016-5-15 使用

7. 设 D 是 xOy 平面上以 $(1,1),(-1,1)$ 和 $(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域，D_1 是 D 在第一象限的部分，则 $\iint\limits_{D}(xy+\cos x\sin y)dxdy$ 等于【A】

(A) $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y dxdy$　(B) $2\iint\limits_{D_1}xydxdy$　(C) $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)dxdy$　(D) 0

8. 累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$ 可以写成 【D】

(A) $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y-y^2}}f(x,y)dx$　　(B) $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$

(C) $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$　　(D) $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}}f(x,y)dy$

9. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-2)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛，则此级数在 $x=4$ 处【B】

(A) 条件收敛　(B) 绝对收敛　(C) 发散　(D) 收敛性不能确定

10. 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^{\alpha}}$ 绝对收敛，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛，则【D】

(A) $0<\alpha\le\frac{1}{2}$　(B) $\frac{1}{2}<\alpha\le 1$　(C) $1<\alpha\le\frac{3}{2}$　(D) $\frac{3}{2}<\alpha<2$

本题得分	

三、计算题(11~15小题，每小题 7 分，共 35 分)

11. 求曲面 $z=x^2+y^2$ 的一个切平面，使此切平面与直线 $\begin{cases}x+2z=1\\ y+2z=2\end{cases}$ 垂直.

解： 直线的方向向量为 $\vec{s}=(1,0,2)\times(1,0,2)=(-2,-2,1)$ ....2′

设切点为 (x_0,y_0,z_0)，则曲面在切点处的法向量为 $\vec{n}=(2x_0,2y_0,-1)$.

由题意 $\vec{s}\,//\,\vec{n}\Rightarrow\frac{2x_0}{-2}=\frac{2y_0}{-2}=\frac{-1}{1}\Rightarrow x_0=1,y_0=1$，

代入曲面方程得 $z_0=2$，所以切点为 $(x_0,y_0,z_0)=(1,1,2)$. ....3′

在切点 $(1,1,2)$ 处的法向量为 $\vec{n}=(2,2,-1)$.

故切平面方程为 $2(x-1)+2(y-1)-(z-2)=0\Rightarrow 2x+2y-z=2$. ....2′

12. 设 $z=f(x,\frac{x}{y})$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$．

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1{}'+\frac{1}{y}f_2{}'$ ………………3'

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(f'_1+\frac{1}{y}f'_2\right)=\frac{\partial}{\partial y}(f'_1)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}f'_2\right) \text{……………1'}$$

$$=\left(f''_{11}\cdot 0+f''_{12}\cdot(-\frac{x}{y^2})\right)-\frac{1}{y^2}f'_2+\frac{1}{y}\left(f''_{21}\cdot 0+f''_{22}\cdot(-\frac{x}{y^2})\right) \text{………………2'}$$

$$=-\frac{1}{y^2}f'_2-\frac{x}{y^2}f''_{12}-\frac{x}{y^3}f''_{22} \text{…………1'}$$

13. 计算曲线积分

$$\int_L(x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy$$

其中 L 是在圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 上由点 $O(0,0)$ 到点 $A(1,1)$ 的一段弧．

解：添加辅助有向线段 $\overline{AB},\overline{BO}$，其中 $B(1,0)$．

$$\int_L(x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy$$
$$=\oint_{L+\overline{AB}+\overline{BO}}(x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy-\int_{\overline{AB}}-\int_{\overline{BO}} \text{…………1'}$$

$$I_1=\oint_{L+\overline{AB}+\overline{BO}}(x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy$$
$$=-\iint_D(-1-(-1))d\sigma=0 \text{……………2'}$$

$$I_2=\int_{\overline{AB}}(x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy$$
$$=-\int_1^0(1+\sin^2 y)dy=\int_0^1(1+\sin^2 y)dy=\frac{3}{2}-\frac{\sin 2}{4} \text{……………2'}$$

$$I_3=\int_{\overline{BO}}(x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy=\int_1^0 x^2dx=-\frac{1}{3} \text{……………1'}$$

$$\int_L(x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy=I_1-I_2-I_3=0-(\frac{3}{2}-\frac{\sin 2}{4})-(-\frac{1}{3})=\frac{\sin 2}{4}-\frac{7}{6} \text{……………1'}$$

解法二：因 $(x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy=d\left(\frac{x^3}{3}-xy-\frac{y}{2}+\frac{\sin 2y}{4}\right)$

$\int_L (x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy$

故
$$=\frac{x^3}{3}-xy-\frac{y}{2}+\frac{\sin 2y}{4}\bigg|_{(0,0)}^{(1,1)}=\frac{\sin 2}{4}-\frac{7}{6}.$$

解法三：先验证积分与路径无关.

$$\int_L (x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy=\int_{\overline{OA}}(x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy$$

$$=\int_0^1(x^2-x)dx-(x+\sin^2 x)dy=\int_0^1(x^2-2x-\sin^2 x)dx=\frac{7}{6}-\frac{\sin 2}{4}$$

14. 求曲面片Σ：$z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\le z\le 1)$的面积.

解：曲面片Σ在xoy面上的投影$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ ....1'

$$M=\iint_\Sigma dS=\iint_\Sigma dS \quad .... 2'$$
$$=\iint_D\sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}\,dxdy$$
$$=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,dxdy \,......2'$$
$$=\sqrt{2}\iint_D dxdy$$
$$=\sqrt{2}\pi \,......\, 2'$$

注：注意到圆锥的表面展开后是扇形，故本题亦可用初等的方法解。

15. 计算三重积分$\iiint_\Omega zdxdydz$，其中Ω是由xoz平面上的曲线$z=x^2$绕z轴旋转一周所得的曲面与平面$z=4$所围成的闭区域.

解：旋转曲面的方程为$z=x^2+y^2$ ....2'

解法一:柱坐标的方法

$$\iiint_\Omega zdxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho d\rho\int_{\rho^2}^4 zdz \quad ......3'$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(16-\rho^4)\rho d\rho=\frac{64\pi}{3}\,......\,2'$$

解法二截面法：

$$\iiint_\Omega zdxdydz=\int_0^4 dz\iint_{\Omega_z} zdxdy \,......\, 2'$$
$$=\int_0^4 zdz\iint_{\Omega_z}dxdy=\int_0^4 z\cdot\pi zdz=\frac{64\pi}{3}\,......\,3'$$

本题得分	

四、解答题（16~17小题，每小题9分，共18分）

16. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的和函数.

解：收敛域为$(-1,1)$，...... 1'

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n=2\sum_{n=0}^{\infty}nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n=2x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad ......2'$$

$$=2x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'+\sum_{n=0}^{\infty}x^n=2x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'+\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad ......3'$$

$$=2x\left(\frac{x}{1-x}\right)'+\frac{1}{1-x}$$

$$=\frac{2x}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x}=\frac{1+x}{(1-x)^2},x\in(-1,1). \quad ......3'$$

17. 求内接于半径为 R 的球且具有最大体积的长方体.

解：设长方体的长、宽、高分别为x,y,z，问题转化为如下条件极值问题：

$$\max V=xyz,$$
$$s.t.\ x^2+y^2+z^2=4R^2,$$
$$x>0,y>0,z>0 .... 4'$$

作 Lagrange 函数 $L(x,y,z;\lambda)=xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-4R^2)$

解方程组 $\begin{cases} L_x=yz+2\lambda x=0, \\ L_y=zx+2\lambda y=0, \\ L_z=xy+2\lambda z=0, \\ L_\lambda=x^2+y^2+z^2-4R^2=0 \end{cases}$ 得 $x=y=z=\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$ .... 5'.

故当 $x=y=z=\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$ 时，即球内接正方体的体积最大.

本题得分	

五、证明题（18 小题，7 分）

18. 设 $u_n > 0, n=1,2,\cdots$，且满足：

(1) $u_n \geq u_{n+1} \quad (n=1,2,3,\cdots)$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，

证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛.

证明： 考察级数的前 $2n$ 项的和

$$\begin{aligned} s_{2n} &= u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + u_{2n-1} - u_{2n} \\ &= (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n}) \end{aligned}$$

由(1), 数列 $\{S_{2n}\}$ 单调增加； **.........2'**

又

$$\begin{aligned} s_{2n} &= u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + u_{2n-1} - u_{2n} \\ &= u_1 - (u_2 - u_3) - \cdots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} \end{aligned}$$

于是 $s_{2n} \leq u_1$。 **......2'**

故数列 $\{S_{2n}\}$ 收敛，设 $S_{2n} \to S$。 **....... 1'**

由(2), $S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1} \to S$ **....... 1'**

所以数列 $\{S_n\}$ 收敛，从而级数收敛. **...... 1'**