2013《复变函数与积分变换》期末考试卷（A）参考答案

一、求解下列各题　〖每小题 9 分，共计 18 分〗

1. 计算 $\sqrt[5]{-1}$。

解：由 $-1=e^{\pi i}$ 可得：$\sqrt[5]{-1}=e^{\frac{(2k+1)\pi i}{5}}$，$k=0,1,2,3,4$。

2. 已知 $F(s)=\dfrac{(s+3)^2}{(s^2+6s+25)^2}$，求其 Laplace 逆变换 $L^{-1}\left[F(s)\right]$。

解：由 $F(s)=\dfrac{(s+3)}{(s+3)^2+16}\cdot\dfrac{(s+3)}{(s+3)^2+16}$，而 $L^{-1}\left[\dfrac{(s+3)}{(s+3)^2+16}\right]=e^{-3t}\cos 4t$，因此由卷积定理可得 $L^{-1}\left[F(s)\right]=(e^{-3t}\cos 4t)*(e^{-3t}\cos 4t)=(\dfrac{1}{2}t\cos 4t+\dfrac{1}{8}\sin 4t)e^{-3t}$

二、计算下列各题　〖每小题 10 分，共计 20 分〗

1. 计算积分 $\displaystyle\oint_C \frac{e^{\frac{1}{z}}\cdot\sin\frac{1}{z}\cdot dz}{z(z-1)^3}$，其中 $C:|z|=2$，曲线 C 取正方向。

解：由 $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z}}\cdot\sin\frac{1}{z}}{z(z-1)^3}$ 有奇点 $z_1=0,z_2=1$，且都在 $C:|z|=2$ 的内部，于是 ∞ 点为孤立奇点。由留数定理及 ∞ 点的留数性质与计算知：

原式 $=2\pi i\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\mathrm{Re}\,s[f(z),z_k]=-2\pi i\,\mathrm{Re}\,s[f(z),\infty]=2\pi i\,\mathrm{Re}\,s[\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z}),0]$

$=2\pi i\,\mathrm{Re}\,s[\dfrac{z^2e^z\sin z}{(1-z)^3},0]=0$。

2. 计算积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{25+8x+x^2}dx$。

解：作辅助函数 $f(z)=\dfrac{1}{25+8z+z^2}e^{iz}$，易知 $f(z)$ 满足: (1) $m-n=2\geq 1$; (2) 在实轴上无奇点。　$f(z)$ 在上半平面的奇点为 $z_1=-4+3i$，且是 1 级极点。于是

$$\text{原积分}=\mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx\right)$$

而 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=2\pi i\,\mathrm{Re}\,s[f(z),z_1]=\frac{\pi}{3}e^{-3-4i}$，因此

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{25+8x+x^2}dx=-\frac{\pi}{3}e^{-3}\sin 4$。

三、〖13 分〗求函数 $f(z)=\dfrac{z\cdot\cos z}{z^2+4}$ 在扩充复平面内的孤立奇点及分类。如果是极点，请指出它的级数，并说明理由。

解：因为 $f(z)$ 在复平面内有孤立奇点 $z_{1,2}=\pm 2i$，因此在扩充复平面内的孤立奇点

$z_{1,2}=\pm 2i$ 和 ∞ 点。因 $z_{1,2}=\pm i$ 是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 1 级零点, 从而 $z_{1,2}=\pm 2i$ 是 $f(z)$ 的 1 级极点。

当 $2<|z|<+\infty$ 时, $f(z)=\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{4}{z^2}}\cdot\cos z=\dfrac{1}{z}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\dfrac{4}{z^2})^n\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ 有无穷多个正幂项, 所以 ∞ 点是 $f(z)$ 的本性奇点。

四、〖13 分〗已知 $u(x,y)=e^{px}\sin y$ 为调和函数，求 p 的值。进一步求解析函数 $f(z)=u+iv$。

解：由 $u(x,y)=e^{px}\sin y$，则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=pe^{px}\sin y$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=e^{px}\cos y$;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=p^2e^{px}\sin y,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-e^{px}\sin y$$

于是由 $u(x,y)$ 为为调和函数知: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\equiv 0$，即 $p^2=1$，解得 $p=\pm 1$。

当 $p=1$ 时，$u(x,y)=e^x\sin y$。再由解析函数的微分性质可得:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=e^x\sin y-ie^x\cos y=-ie^{x+iy}=-ie^z$$

因此 $f(z)=-ie^z+C_1$ （C_1 为任意复常数);

当 $p=-1$ 时，$u(x,y)=e^{-x}\sin y$。再由解析函数的微分性质可得:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=-e^{-x}\sin y-ie^{-x}\cos y=-ie^{-(x+iy)}=-ie^{-z}$$

因此 $f(z)=ie^{-z}+C_2$ （C_2 为任意复常数);

五、〖12 分〗将函数 $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)^2(z-2)}$ 在圆环域 $0<|z-2|<3$ 内展开成 Laurent 级数。

解: 由 $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)^2(z-2)}=\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{(z+1)^2}+\dfrac{2}{9}\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{2}{9}\dfrac{1}{z+1}$

当 $0<|z-2|<3$ 时, $\dfrac{1}{z+1}=\dfrac{1}{3+(z-2)}=\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1+\dfrac{z-2}{3}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(z-2)^n}{3^{n+1}}$

进一步，由逐项可微的性质知:

$$\frac{1}{(z+1)^2}=\frac{d}{dz}\left(-\frac{1}{z+1}\right)=\frac{d}{dz}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(z-2)^n}{3^{n+1}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(-1)^{n-1}(z-2)^{n-1}}{3^{n+1}}$$

因此 $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)^2(z-2)}=\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{(z+1)^2}+\dfrac{2}{9}\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{2}{9}\dfrac{1}{z+1}$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(-1)^{n-1}(z-2)^{n-1}}{3^{n+1}}-\frac{2}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-2)^n}{3^{n+1}}+\frac{2}{9}\frac{1}{z-2}$$

$$=\frac{2}{9}\frac{1}{z-2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n-1)\cdot(-1)^n(z-2)^n}{3^{n+3}}$$

六、〖13 分〗利用 Laplace 变换求解微分初值问题：

$$\begin{cases} y''+2y+\int_0^t z(\tau)d\tau=t \\ y''+2y'+z=e^t \end{cases}$$

其中 $y(0)=1$，$y'(0)=-1$。

解：记 $Y(s)=L[y(t)]$，$Z(s)=L[z(t)]$，对方程两边施行 Laplace 变换可得：

$$\begin{cases} [s^2Y(s)-s+1]+2Y(s)+\frac{1}{s}Z(s)=\frac{1}{s^2} \\ [s^2Y(s)-s+1]+2[sY(s)-1]+Z(s)=\frac{1}{s-1} \end{cases}$$

整理可得：

$$\begin{cases} (s^2+2)Y(s)+\frac{1}{s}Z(s)=\frac{1}{s^2}+s-1 \\ (s^2+2s)Y(s)+Z(s)=\frac{1}{s-1}+s+1 \end{cases}$$

解得：$\begin{cases} Y(s)=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^3}-\frac{1}{(s-1)^2} \\ Z(s)=\frac{2}{s-1}+\frac{2}{s^2}+\frac{3}{s}+\frac{3}{(s-1)^2} \end{cases}$

因此 $y(t)=L^{-1}[Y(s)]=e^t(1-t)-t-\frac{1}{2}t^2$，$z(t)=L^{-1}[Z(s)]=e^t(2+3t)+2t+3$。

七、〖11 分〗利用 Fourier 变换与 Fourier 逆变换证明：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos wt}{a^2+w^2}dw=\frac{\pi}{2a}e^{-a|t|}$$

其中实常数 $a>0$。

证明：记 $f(t)=e^{-a|t|}$，于是 $f(t)$ 的 Fourier 变换为：

$$F(w)=F[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a|t|}\cdot e^{-iwt}dt=\int_{-\infty}^{0}e^{(a-iw)t}dt+\int_0^{+\infty}e^{-(a+iw)t}dt=\frac{2a}{a^2+w^2}$$

由于 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则有 Fourier 逆变换可得：

$$f(t)=F^{-1}[F(w)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(w)\cdot e^{iwt}dw=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2a}{a^2+w^2}\cdot e^{iwt}dw$$

$$=\frac{2a}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos wt}{a^2+w^2}dw$$

故有 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos wt}{a^2+w^2}dw=\frac{\pi}{2a}e^{-a|t|}$。