2018 级《线性代数 II》期末考试卷(A)

使用专业、班级__________ 学号__________ 姓名______________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

本题得分	

一、填空题(每小题 4 分, 共 24 分)

(1) 设 A, B 为四阶方阵, 且 $|A|=-2$, $|B|=3$, 则 $|-A^*B^{-1}|=$ $\underline{\quad -\frac{8}{3} \quad}$.

(2) 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, 则 $A^{-1}=$ $\underline{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}}$

(3) 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2+2A+2E=O$, 则 $(A+2E)^{-1}=$ $\underline{\quad -\frac{A}{2} \quad}$.

(4) 设方阵 $A=\begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & a \end{pmatrix}$ 的特征值为3 ,3 ,12 , 则 $a=$ $\underline{\quad 4 \quad}$.

(5) 已知四元非齐次线性方程组 $AX=b$ 的系数矩阵 A 的秩为 2, α_1, α_2, α_3 为它的三个线性无关的解, 则该方程组的通解为 $\underline{X=k_1(\alpha_1-\alpha_2)+k_2(\alpha_1-\alpha_3)+\alpha_1}$.

(6) 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+(2-a)x_2^2+(a+3)x_3^2+2x_1x_2$ 正定, 则 a 的取值范围为 $\underline{\quad -3<a<1 \quad}$.

本题得分	

二、选择题(每小题 4 分, 共 16 分)

(1) 设 A, B 为 n 阶方阵, 则下列结论成立的是 [B]

(A) 若 $AB=O$, 则 $A=O$ 或 $B=O$; (B) 若 $AB=O$, 则 $|A|=0$ 或 $|B|=0$;

(C) 若 $|AB|=0$, 则 $A=O$ 或 $B=O$; (D) 若 $AB\neq O$, 则 $|A|\neq 0$ 或 $|B|\neq 0$.

(2) 设 n 阶方阵 A, B, C 满足 $ABC=E$, 则下列正确的是 [C]

(A) $BAC=E$; (B) $ACB=E$; (C) $BCA=E$; (D) $CBA=E$.

(3) 下列说法错误的是 [D]

(A) 若向量组 A：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关, 则 A 中至少有一个向量能由其余向量线性表示;

(B) 若向量组 A：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关, 且 $\alpha_1\neq 0$, 则存在 α_i $(2\le i\le m)$, 使得 α_i 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}$ 线性表示;

(C) 若向量组 A：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关, 且向量组 A 能由向量组 B: $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 线性表示, 则向量组 A 与向量组 B 等价;

(D) 若向量组 A：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 与向量组 B: $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 均线性无关, 则向量组 A 与向量组 B 等价.

(4) 设 n 阶方阵 A 与 B 相似, 则下列结论正确的是 [D]

(A) 存在正交阵 P, 使得 $P^{-1}AP=B$; (B) A, B 与同一个对角阵相似 ;

(C) A, B 有相同的特征值和特征向量; (D) A, B 同时可逆或不可逆 .

本题得分	

三、解答题(每小题 8 分, 共 16 分)

1 解矩阵方程 $A+X=AX$, 其中 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

解: $(A-E)X=A$ ……(2′)

$$(A-E\,|\,A)=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{\substack{r_1\leftrightarrow r_3 \\ r_2-3r_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_2+r_3 \\ r_3+2r_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \overset{\substack{r_2\times(-1) \\ r_1-r_3 \\ r_2-2r_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(4')$$

$$\therefore X=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(2')$$

考试形式开卷（ ）、闭卷（√），在选项上打（√）

开课教研室 大学数学部 命题教师________ 命题时间 2019-5-28 使用学期 18-19-2 总张数 3 教研室主任审核签字 ______________

2 设n阶方阵A满足$A_{ij}=a_{ij}$，$\forall 1\le i, j\le n$，且$a_{nn}=-1$，求$|A|$并解方程组$AX=(0,0,\cdots,2)^T$.

解： $A^*=A^T$ 两边取行列式得$|A|^{n-1}=|A|$

又$|A|=\sum_{i=1}^{n} a_{in}A_{in}=\sum_{i=1}^{n} a_{in}^2=a_{1n}^2+a_{2n}^2+\cdots+a_{n-1,n}^2+1\ge 1$

$\therefore |A|=1$ 且$a_{1n}=a_{2n}=\cdots=a_{n-1,n}=0$…………$(4')$

令$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 则$\alpha_n=(0,0,\cdots,-1)^T$

因此$0\cdot\alpha_1+0\cdot\alpha_2+\cdots+0\cdot\alpha_{n-1}+(-2)\alpha_n=(0,0,\cdots,2)^T$

$\therefore X=(0,0,\cdots,-2)^T$为方程组$AX=(0,0,\cdots,2)^T$的一个解.

又$|A|=1\ne 0$ 即A可逆

$\therefore$方程组$AX=(0,0,\cdots,2)^T$有唯一解，

$\therefore$方程组$AX=(0,0,\cdots,2)^T$的解为$X=(0,0,\cdots,-2)^T$.…………$(4')$

本题得分	

四、(本题12分) 设向量组$\alpha_1=(1,1,-1,0)^T$，$\alpha_2=(1,0,0,1)^T$，$\alpha_3=(1,-1,0,0)^T$，$\alpha_4=(1,2,0,3)^T$，$\alpha_5=(0,2,1,4)^T$，求该向量组的秩以及一个最大无关组，并将其余向量用该最大无关组线性表示.

解：
$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\1&0&-1&2&2\\-1&0&0&0&1\\0&1&0&3&4\end{pmatrix}\overset{\substack{r_2-r_1\\r_3+r_1}}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&-1&-2&1&2\\0&1&1&1&1\\0&1&0&3&4\end{pmatrix}\overset{\substack{r_3+r_2\\r_4+r_2}}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&-1&-2&1&2\\0&0&-1&2&3\\0&0&-2&4&6\end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_4-2r_3\\r_2\times(-1)\\r_3\times(-1)}}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&-1&-2\\0&0&1&-2&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{\substack{r_1-r_3\\r_2-2r_3\\r_1-r_2}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&0&-1\\0&1&0&3&4\\0&0&1&-2&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad\cdots\cdots(6')$$

$\therefore R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=3$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为所求的一个极大无关组

$\alpha_4=3\alpha_2-2\alpha_3$

$\alpha_5=-\alpha_1+4\alpha_2-3\alpha_3$. ……$(6')$

本题得分	

五、(本题12分) 问λ为何值时，线性方程组$\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=1\\x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=1-\lambda\\x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=1+\lambda^2\end{cases}$有惟一解，无解，无穷多解？并在有无穷多解时求其通解.

解：
$$B=(A\ \ b)=\begin{pmatrix}1+\lambda&1&1&1\\1&1+\lambda&1&1-\lambda\\1&1&1+\lambda&1+\lambda^2\end{pmatrix}\overset{\substack{r_1\leftrightarrow r_3\\r_2-r_1\\r_3-(1+\lambda)r_1}}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1+\lambda&1+\lambda^2\\0&\lambda&-\lambda&-\lambda-\lambda^2\\0&-\lambda&-\lambda(\lambda+2)&-\lambda^3-\lambda^2-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_3+r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1+\lambda&1+\lambda^2\\0&\lambda&-\lambda&-\lambda-\lambda^2\\0&0&-\lambda(\lambda+3)&-\lambda(\lambda^2+2\lambda+2)\end{pmatrix}\qquad\cdots\cdots(4)$$

$\therefore \lambda\ne 0$且$\lambda\ne -3$时，$R(A)=R(B)=3$，方程组有唯一解； ……(2)

$\lambda=-3$时，$B\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&10\\0&-3&3&-6\\0&0&0&15\end{pmatrix}$，$R(A)=2, R(B)=3$，方程组无解； ……$(2)$

$\lambda=0$时，$B\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，$R(A)=R(B)=1<3$，方程组有无穷多解；

此时，$x_1+x_2+x_3=1$ 令$x_2=c_1, x_3=c_2$

得通解$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，其中$c_1, c_2$为任意常数. ……$(4)$

本题得分	

六、（本题14分） 设 $A=\begin{pmatrix}1&-2&-4\\-2&4&-2\\-4&-2&1\end{pmatrix}$，求正交阵 P 和对角阵 Λ，使 $P^T AP=\Lambda$.

解： $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&-4\\-2&4-\lambda&-2\\-4&-2&1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+4)(\lambda-5)^2$

$\therefore \lambda_1=\lambda_2=5,\quad \lambda_3=-4$ ……(6′)

当 $\lambda_1=\lambda_2=5$ 时，解 $(A-5E)X=\mathbf{0}$

$A-5E\sim\begin{pmatrix}2&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得正交的基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}4\\2\\-5\end{pmatrix}$,

单位化得 $p_1=\begin{pmatrix}-1/\sqrt5\\2/\sqrt5\\0\end{pmatrix},p_2=\begin{pmatrix}4/3\sqrt5\\2/3\sqrt5\\-5/3\sqrt5\end{pmatrix}$, ……(4′)

当 $\lambda_3=-4$ 时，解 $(A+4E)X=\mathbf{0}$

$A+4E\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得基础解系 $\xi_3=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ 单位化得 $p_3=\begin{pmatrix}2/3\\1/3\\2/3\end{pmatrix}$, ……(2′)

令 $P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}-1/\sqrt5&4/3\sqrt5&2/3\\2/\sqrt5&2/3\sqrt5&1/3\\0&-5/3\sqrt5&2/3\end{pmatrix}$ （P 正交） $\Lambda=\begin{pmatrix}5&&\\&5&\\&&-4\end{pmatrix}$

则 $P^T AP=\Lambda$. ……(2′)

本题得分	

七、（本题6分） 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 为 n 阶方阵 A 的 m 个互不相同的特征值，$p_1,p_2,\cdots,p_m$ 为对应的特征向量，证明：$p_1,p_2,\cdots,p_m$ 线性无关.

证明： 已知 $Ap_i=\lambda_i p_i,\ 1\le i\le m$

设 $k_1p_1+k_2p_2+\cdots+k_mp_m=\mathbf{0}$

上式左乘 A^i，得 $\lambda_1^i k_1p_1+\lambda_2^i k_2p_2+\cdots+\lambda_m^i k_mp_m=\mathbf{0},\ 1\le i\le m-1$

合并得 $(k_1p_1,k_2p_2,\cdots,k_mp_m)\begin{pmatrix}1&\lambda_1&\cdots&\lambda_1^{m-1}\\1&\lambda_2&\cdots&\lambda_2^{m-1}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\1&\lambda_m&\cdots&\lambda_m^{m-1}\end{pmatrix}=O$

令 $K=\begin{pmatrix}1&\lambda_1&\cdots&\lambda_1^{m-1}\\1&\lambda_2&\cdots&\lambda_2^{m-1}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\1&\lambda_m&\cdots&\lambda_m^{m-1}\end{pmatrix}$，则 $|K|=\prod\limits_{1\le j<i\le m}(\lambda_i-\lambda_j)\neq0$ $\therefore K$ 可逆

因此 $(k_1p_1,k_2p_2,\cdots,k_mp_m)=O$ 即得 $k_ip_i=\mathbf{0},\ 1\le i\le m$

由 $p_i\neq\mathbf{0}$ 可知 $k_i=0,\ 1\le i\le m$

因此 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 线性无关.