

2013《复变函数与积分变换》期末考试卷(A) 参考答案

一、求解下列各题 【每小题 9 分，共计 18 分】

1. 计算 $\sqrt[5]{-1}$ 。

解：由 $-1 = e^{\pi i}$ 可得： $\sqrt[5]{-1} = e^{\frac{(2k+1)\pi i}{5}}$ ， $k = 0, 1, 2, 3, 4$ 。

2. 已知 $F(s) = \frac{(s+3)^2}{(s^2+6s+25)^2}$ ，求其 Laplace 逆变换 $L^{-1}[F(s)]$ 。

解：由 $F(s) = \frac{(s+3)}{(s+3)^2+16} \cdot \frac{(s+3)}{(s+3)^2+16}$ ，而 $L^{-1}\left[\frac{(s+3)}{(s+3)^2+16}\right] = e^{-3t} \cos 4t$ ，因

此由卷积定理可得 $L^{-1}[F(s)] = (e^{-3t} \cos 4t) * (e^{-3t} \cos 4t) = \left(\frac{1}{2}t \cos 4t + \frac{1}{8} \sin 4t\right)e^{-3t}$

二、计算下列各题 【每小题 10 分，共计 20 分】

1. 计算积分 $\oint_C \frac{e^{\frac{1}{z}} \cdot \sin \frac{1}{z}}{z(z-1)^3} dz$ ，其中 $C: |z| = 2$ ，曲线 C 取正方向。

解：由 $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}} \cdot \sin \frac{1}{z}}{z(z-1)^3}$ 有奇点 $z_1 = 0, z_2 = 1$ ，且都在 $C: |z| = 2$ 的内部，于是 ∞ 点

为孤立奇点。由留数定理及 ∞ 点的留数性质与计算知：

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 2\pi i \sum_{k=1}^2 \operatorname{Res}[f(z), z_k] = -2\pi i \operatorname{Res}[f(z), \infty] = 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right] \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{z^2 e^z \sin z}{(1-z)^3}, 0\right] = 0. \end{aligned}$$

2. 计算积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{25+8x+x^2} dx$ 。

解：作辅助函数 $f(z) = \frac{1}{25+8z+z^2} e^{iz}$ ，易知 $f(z)$ 满足：(1) $m-n=2 \geq 1$ ；(2)

在实轴上无奇点。 $f(z)$ 在上半平面的奇点为 $z_1 = -4+3i$ ，且是 1 级极点。于是

$$\text{原积分} = \operatorname{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx\right)$$

而 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \operatorname{Res}[f(z), z_1] = \frac{\pi}{3} e^{-3-4i}$ ，因此

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{25+8x+x^2} dx = -\frac{\pi}{3} e^{-3} \sin 4.$$

三、【13 分】求函数 $f(z) = \frac{z \cdot \cos z}{z^2 + 4}$ 在扩充复平面内的孤立奇点及分类。如果是极点，

请指出它的级数，并说明理由。

解：因为 $f(z)$ 在复平面内有孤立奇点 $z_{1,2} = \pm 2i$ ，因此在扩充复平面内的孤立奇点

$z_{1,2} = \pm 2i$ 和 ∞ 点。因 $z_{1,2} = \pm 2i$ 是 $\frac{1}{f(z)}$ 的 1 级零点, 从而 $z_{1,2} = \pm 2i$ 是 $f(z)$ 的 1 级极点。

当 $2 < |z| < +\infty$ 时, $f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 + \frac{4}{z^2}} \cdot \cos z = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{z^2}\right)^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ 有无穷多

个正幂项, 所以 ∞ 点是 $f(z)$ 的本性奇点。

四、【13 分】已知 $u(x, y) = e^{px} \sin y$ 为调和函数, 求 p 的值。进一步求解析函数 $f(z) = u + iv$ 。

解: 由 $u(x, y) = e^{px} \sin y$, 则 $\frac{\partial u}{\partial x} = p e^{px} \sin y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = e^{px} \cos y$;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = p^2 e^{px} \sin y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^{px} \sin y$$

于是由 $u(x, y)$ 为调和函数知: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv 0$, 即 $p^2 = 1$, 解得 $p = \pm 1$ 。

当 $p = 1$ 时, $u(x, y) = e^x \sin y$ 。再由解析函数的微分性质可得:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = e^x \sin y - i e^x \cos y = -i e^{x+iy} = -i e^z$$

因此 $f(z) = -i e^z + C_1$ (C_1 为任意复常数);

当 $p = -1$ 时, $u(x, y) = e^{-x} \sin y$ 。再由解析函数的微分性质可得:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = -e^{-x} \sin y - i e^{-x} \cos y = -i e^{-(x+iy)} = -i e^{-z}$$

因此 $f(z) = i e^{-z} + C_2$ (C_2 为任意复常数);

五、【12 分】将函数 $f(z) = \frac{z}{(z+1)^2(z-2)}$ 在圆环域 $0 < |z-2| < 3$ 内展开成 Laurent 级数。

解: 由 $f(z) = \frac{z}{(z+1)^2(z-2)} = \frac{1}{3} \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{2}{9} \frac{1}{z-2} - \frac{2}{9} \frac{1}{z+1}$

当 $0 < |z-2| < 3$ 时, $\frac{1}{z+1} = \frac{1}{3+(z-2)} = \frac{1}{3} \frac{1}{1+\frac{z-2}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-2)^n}{3^{n+1}}$

进一步, 由逐项可微的性质知:

$$\frac{1}{(z+1)^2} = \frac{d}{dz} \left(-\frac{1}{z+1} \right) = \frac{d}{dz} \left(-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (z-2)^n}{3^{n+1}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (-1)^{n-1} (z-2)^{n-1}}{3^{n+1}}$$

因此 $f(z) = \frac{z}{(z+1)^2(z-2)} = \frac{1}{3} \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{2}{9} \frac{1}{z-2} - \frac{2}{9} \frac{1}{z+1}$

$$= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (-1)^{n-1} (z-2)^{n-1}}{3^{n+1}} - \frac{2}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-2)^n}{3^{n+1}} + \frac{2}{9} \frac{1}{z-2}$$

$$= \frac{2}{9} \frac{1}{z-2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-1) \cdot (-1)^n (z-2)^n}{3^{n+3}}$$

六、【13 分】利用 Laplace 变换求解微分初值问题：

$$\begin{cases} y'' + 2y + \int_0^t z(\tau) d\tau = t \\ y'' + 2y' + z = e^t \end{cases}$$

其中 $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$ 。

解：记 $Y(s) = L[y(t)]$, $Z(s) = L[z(t)]$, 对方程两边施行 Laplace 变换可得：

$$\begin{cases} [s^2 Y(s) - s + 1] + 2Y(s) + \frac{1}{s} Z(s) = \frac{1}{s^2} \\ [s^2 Y(s) - s + 1] + 2[sY(s) - 1] + Z(s) = \frac{1}{s-1} \end{cases}$$

整理可得：

$$\begin{cases} (s^2 + 2)Y(s) + \frac{1}{s} Z(s) = \frac{1}{s^2} + s - 1 \\ (s^2 + 2s)Y(s) + Z(s) = \frac{1}{s-1} + s + 1 \end{cases}$$

$$\text{解得：} \begin{cases} Y(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3} - \frac{1}{(s-1)^2} \\ Z(s) = \frac{2}{s-1} + \frac{2}{s^2} + \frac{3}{s} + \frac{3}{(s-1)^2} \end{cases}$$

因此 $y(t) = L^{-1}[Y(s)] = e^t(1-t) - t - \frac{1}{2}t^2$, $z(t) = L^{-1}[Z(s)] = e^t(2+3t) + 2t + 3$ 。

七、【11 分】利用 Fourier 变换与 Fourier 逆变换证明：

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos wt}{a^2 + w^2} dw = \frac{\pi}{2a} e^{-a|t|}$$

其中实常数 $a > 0$ 。

证明：记 $f(t) = e^{-a|t|}$, 于是 $f(t)$ 的 Fourier 变换为：

$$F(w) = F[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} \cdot e^{-iwt} dt = \int_{-\infty}^0 e^{(a-iw)t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-(a+iw)t} dt = \frac{2a}{a^2 + w^2}$$

由于 $f(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 则有 Fourier 逆变换可得：

$$\begin{aligned} f(t) &= F^{-1}[F(w)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(w) \cdot e^{iwt} dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2a}{a^2 + w^2} \cdot e^{iwt} dw \\ &= \frac{2a}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos wt}{a^2 + w^2} dw \end{aligned}$$

故有 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos wt}{a^2 + w^2} dw = \frac{\pi}{2a} e^{-a|t|}$ 。