2020级线性代数 II（A 卷）参考答案

本题 得分	

一、计算题（1~ 9小题，每小题6分，共 54分）

1. 计算四阶行列式$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix}$

解：

$$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & -1+a^2 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} a & -1+a^2 & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 0 & a & a \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & a^2-2 & 1 \\ a & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

$= a^4 - 4a^2$.……4'

2. 已知行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 2019 & 2020 & 2021 & 2022 \end{vmatrix}$，$A_{ij}$ 是 a_{ij} 的代数余子式，求

$A_{41} - A_{42} + A_{43} - A_{44}$

解：因为$A_{41} - A_{42} + A_{43} - A_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$，故$A_{41} - A_{42} + A_{43} - A_{44} = 0$。

3. 设$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$，求$A^{2021}$。

解：因为$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$，

所以

$$A^{2021}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix}=\left(\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)^{2020}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix}=5^{2020}\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$$

4. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&1\\2019&2020&2018\end{pmatrix}$，$P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\10&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, $P_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，求 $P_2^2P_1AP_2$.

解：

$$\begin{aligned}&P_2^2P_1AP_2\\&=P_1AP_2\quad(\because P_2^2=E)\\&=\begin{pmatrix}1&0&0\\10&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&1\\2019&2020&2018\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\12&13&11\\2020&2021&2019\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&1&1\\13&12&11\\2021&2020&2019\end{pmatrix}\end{aligned}$$

5. 设 $A=\begin{pmatrix}2&3\\2&1\end{pmatrix}$ 且矩阵 X 满足 $AX-A=3X$，求矩阵 X.

解：$AX-A=3X\Rightarrow(A-3E)X=A\Rightarrow X=(A-3E)^{-1}A$

$$(A-3E\mid A)=\left(\begin{array}{cc|cc}-1&3&2&3\\2&-2&2&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&-3&-2&-3\\1&-1&1&\frac{1}{2}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&-3&-2&-3\\0&2&3&\frac{7}{2}\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&-3&-2&-3\\0&1&\frac{3}{2}&\frac{7}{4}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&\frac{5}{2}&\frac{9}{4}\\0&1&\frac{3}{2}&\frac{7}{4}\end{array}\right)$$

$$(A-3E)^{-1}A=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}&\frac{9}{4}\\\frac{3}{2}&\frac{7}{4}\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}10&9\\6&7\end{pmatrix}$$

6. 设 4 阶矩阵 A 的秩为 3，ξ_1,ξ_2,ξ_3 是线性方程组 $Ax=b$ 的解，且

$\xi_1+\xi_2=(2,4,6,8)^T$，$\xi_2+\xi_3=(1,3,5,7)^T$,求线性方程组 $Ax=b$ 的通解。

解：$rank(A)=3\Rightarrow\dim S=1$,

$\xi_1-\xi_3=(\xi_1+\xi_2)-(\xi_2+\xi_3)=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6 & 8\end{pmatrix}^T-\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 7\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T\in S$

因为 $A(\xi_1+\xi_2)=A\xi_1+A\xi_2=b+b=2b\Rightarrow A\left(\dfrac{\xi_1+\xi_2}{2}\right)=b$，

所以 $\dfrac{\xi_1+\xi_2}{2}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}^T$ 是 $Ax=b$ 的解，

所以 $Ax=b$ 的通解为

$$x=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}^T+k\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T$$

7. 设三阶矩阵 A 的特征值分别为 $1,2,3$，求行列式 $|(3A)^{-1}-\dfrac{1}{12}A^*|$。

解：由条件 $|A|=1\times2\times3=6$，$A^*=|A|\cdot A^{-1}=6A^{-1}$

$$|(3A)^{-1}-\frac{1}{12}A^*|=|\frac{A^{-1}}{3}-\frac{A^{-1}}{2}|=|-\frac{A^{-1}}{6}|=-\frac{1}{6^3}|A^{-1}|=-\frac{1}{6^3}\times\frac{1}{6}=-\frac{1}{1296}$$

8. 设 A 是三阶正交矩阵，$\beta_1=A\alpha_1$，$\beta_2=A\alpha_2$。若 α_1,α_2 的内积 $(\alpha_1,\alpha_2)=\alpha_1^T\alpha_2=2$，求 $2\beta_1,3\beta_2$ 的内积 $(2\beta_1,3\beta_2)$。

解：
$$\begin{aligned}(2\beta_1,3\beta_2)&=6\beta_1^T\beta_2=6(A\alpha_1)^T(A\alpha_2)\\&=6\alpha_1^TA^TA\alpha_2=6\alpha_1^T\alpha_2=6(\alpha_1,\alpha_2)=12\end{aligned}$$。

9. 设二次型 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz$，判断此二次型的是否正定。

解

$$\begin{aligned}f(x,y,z)&=x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz\\&=\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\end{aligned}$$

顺序子式分别为 $S_1=1>0$，$\begin{vmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1\end{vmatrix}=\dfrac{3}{4}>0$ $S_3=\begin{vmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\end{vmatrix}=\dfrac{1}{2}>0$，

故二次型正定。

本题得分	

二、解答题（10~12 小题，每小题10 分，共30 分）

10. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&a&a\\1&a&0&1\end{pmatrix}$,已知齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系含有两个向量，求参数 a 的值以及齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系.

解：基础解系含有两个向量表明 $rank(A)=4-2=2$.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&a&a\\1&a&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&a&a\\0&a-2&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&a&a\\0&0&-(1-a)^2&-(1-a)^2\end{pmatrix}$$

所以 $a=1$

当 $a=1$ 时，

$$A\to\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\xi_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$

11. 求向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\4\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}4\\2\\6\\3\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}2\\2\\2\\1\end{pmatrix}$ 的秩和极大线性无关组，并将其余向量用此极大无关组表示.

解：

$$\begin{pmatrix}1&1&3&4&2\\0&2&4&2&2\\2&0&2&6&2\\1&1&3&3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&3&4&2\\0&1&2&1&1\\0&-2&-4&-2&-2\\0&0&0&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&3&4&2\\0&1&2&1&1\\0&1&2&1&1\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&3&4&2\\0&1&2&1&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&3&1\\0&1&2&1&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0&-2\\0&1&2&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

向量组的秩为 3

取 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 为向量组的极大无关组

$\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$，$\alpha_5=-2\alpha_1+\alpha_4$，

12. 求可逆矩阵 P 将矩阵 $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\3&0&0\end{pmatrix}$ 相似对角化

解： $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\2&-\lambda&0\\3&0&-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(1-\lambda)$

所以 $\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3=1$.

解方程 $(A-\lambda_1E)x=0$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\3&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系 $p_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, p_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

解方程 $(A-\lambda_3)x=0$

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\2&-1&0\\3&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-1&0\\3&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系 $p_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

令 $P=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&2\\0&1&3\end{pmatrix}$ ，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&1\end{pmatrix}$

本题得分	

三、证明(13~ 14 小题，每小题 8 分，共16 分)

13. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，证明：向量组 $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 线性无关，向量组 $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$ 线性相关.

证明：令 $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+k_3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=0,$ 即

$$(k_1+k_2+k_3)\alpha_1+(k_2+k_3)\alpha_2+k_3\alpha_3=0$$

因为 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$ 线性无关，所以有 $\begin{cases}k_1\ +k_2+k_3=0\\k_2+k_2=0\\k_3=0\end{cases}$ ，

由于方程组只有零解 $k_1=k_2=k_3=0$，故 $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 线性无关。

另一方面，因为 $2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3=-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+3\alpha_1$，所以向量组 $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$ 线性相关.

14. 设 ξ_1,ξ_2 是矩阵 A 的属于不同特征值 λ_1,λ_2 的特征向量，如果 $k_1k_2\neq0$，证明：$k_1\xi_1+k_2\xi_2$ 不是 A 的特征向量.

证明：

因为 ξ_1,ξ_2 是矩阵 A 的属于不同特征值 λ_1,λ_2 的特征向量，所以 ξ_1,ξ_2 都非零且线性无关。

若 $k_1\xi_1+k_2\xi_2$ 是 A 的特征向量，则存在 $\lambda\in\mathbb{R}$，使得

$$A(k_1\xi_1+k_2\xi_2)=\lambda(k_1\xi_1+k_2\xi_2)$$

依题设，$A(k_1\xi_1+k_2\xi_2)=k_1A(\xi_1)+k_2A(\xi_2)=k_1\lambda_1\xi_1+k_2\lambda_2\xi_2$，于是

$$k_1\lambda_1\xi_1+k_2\lambda_2\xi_2=\lambda(k_1\xi_1+k_2\xi_2)\Rightarrow k_1(\lambda_1-\lambda)\xi_1+k_2(\lambda_2-\lambda)\xi_2=0$$

因ξ_1,ξ_2线性无关，所以 $k_1(\lambda_1-\lambda)=k_2(\lambda_2-\lambda)=0$

注意到$k_1k_2\neq 0$，所以$\lambda_1=\lambda,\lambda_2=\lambda$，于是$\lambda_1=\lambda_2$，这与题设矛盾。

因此，$k_1\xi_1+k_2\xi_2$不是A的特征向量.