2012 级《高等数学 I(2)》考试卷(A)评分标准

使用专业、班级__________ 学号__________ 姓名__________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

本题得分	

一、填空题(每小题 4 分, 共 20 分)

(1) 设 $\boldsymbol{a}=(1,0,2)$, $\boldsymbol{b}=(1,1,-1)$, 则以$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$为邻边的三角形面积 = $\underline{\sqrt{14}/2}$.

(2) 函数$f(x,y)=x^2y^3$在点$(2,1)$处沿$\vec{L}=\vec{i}+\vec{j}$的方向导数为 $\underline{16/\sqrt{2}}$.

(3) 交换二次积分的次序 $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx = \underline{\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy}$.

(4) 设 L 是圆周 $x^2+y^2=a^2$, 则曲线积分 $\oint_L x^2 ds = \underline{\pi a^3}$.

(5) 将$f(x)=\dfrac{1}{x+1}$展开成$(x-2)$的幂级数(并指出其收敛域), $f(x)=\underline{\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-2)^n, (-1<x<5)}$.

本题得分	

二、选择题(每小题 4 分, 共 16 分)

(1) xOy 面上曲线 $4x^2-9y^2=36$ 绕 y 轴旋转一周所得曲面方程是

(A) $4(x^2+z^2)-9y^2=36$.　　(B) $4(x^2+z^2)-9(y^2+z^2)=36$.

(C) $4x^2-9(y^2+z^2)=36$.　　(D) $4x^2-9y^2=36$.　　【 A 】

(2) 设$x+z=y\sin(x^2-z^2)$确定了隐函数$z=z(x,y)$, 则$z\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$

(A) x　　(B) y　　(C) z　　(D) $y\sin(x^2-z^2)$　　【 A 】

(3) 设Σ为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$的外侧, 则曲面积分 $\oiint_\Sigma \dfrac{x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 等于

(A) $\dfrac{6}{5}\pi a^4$　　(B) $\dfrac{12}{5}\pi a^4$　　(C) $2\pi a^4$　　(D) $4\pi a^4$　　【 B 】

(4) 设$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n$在$x=-2$处条件收敛, 则其在$x=1$处

(A) 绝对收敛　　(B) 条件收敛　　(C) 发散　　(D) 敛散性不确定　　【 C 】

本题得分	

三、计算下列各题(每小题 7 分, 共 28 分)

(1) 设 $z=f(x, xe^y)$, 其中 $f(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'+e^y f_2'$ .... 3′

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{11}''+e^y f_{12}''+e^y(f_{21}''+e^y f_{22}'')$ .... 6′

$=f_{11}''+2e^y f_{12}''+e^{y} f_{22}''$ .... 7′

(2) 求过点$(1,0,-2)$且与平面$3x+4y-z+6=0$平行, 又与直线$\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z}{1}$垂直的直线的方程.

解: 由题意, 所求直线的方向向量可取为

$$\vec{s}=\vec{n}_0\times\vec{s}_0=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 4 & -1\\ 1 & 4 & 1\end{vmatrix}$$ .... 3′

$=(8,-4,8)$ .... 5′

故所求直线方程为 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{2}$ .... 7′

考试形式开卷( )、闭卷(√), 在选项上打(√)

开课教研室 大学数学部　命题教师 命题组　命题时间 2013-5-25　使用学期 12-13-2　总张数 3　教研室主任审核签字__________

(3) 计算 $\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}dv$，其中 $\Omega: z=x^2+y^2, z=2$ 所围成.

解：$\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}dv$

$= \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_{\rho^2}^2 z\rho dz$....................3'

$=\pi\int_0^1\rho^2(4-\rho^4)d\rho$..............................5'

$=\pi(\frac{4}{3}\rho^3-\frac{1}{7}\rho^7)|_0^1$..................................6'

$=\frac{25\pi}{21}$ ....7'

(4) 设曲面Σ为圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 夹在平面 $z=1$ 和 $z=2$ 之间的部分，其面密度为 $\mu(x,y,z)=x^2+y^2$，求曲面Σ的质量.

解：由题意，曲面Σ的质量

$$M=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS \text{..........................} 2'$$

$\because$ 曲面Σ在 xoy 坐标面上的投影区域 $D_{xy}: 1\le x^2+y^2\le 4$，$dS=\sqrt{2}dxdy$............3'

$\therefore M=\sqrt{2}\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy$..4'

$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2\rho^3d\rho$..6'

$=\frac{15\sqrt{2}}{2}\pi$..7'

本题得分	

四、(本题10分) 设 $I=\int_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，其中 L 是摆线 $\begin{cases}x=t-\sin t-\pi\\ y=1-\cos t\end{cases}$ 上从t=0到t=2π的一段弧，

(1) 证明：I 在去掉原点的上半平面内与路径无关；(2) 求 I.

(1)证：$\because \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$，且 $\frac{\partial Q}{\partial x},\frac{\partial P}{\partial y}$ 在去掉原点的上半平面内连续，....3'

$\therefore I$ 在去掉原点的上半平面内与路径无关..........................4'

(2)由(1)可重选积分路径 $L_1: x^2+y^2=\pi^2$ 的从 $x=-\pi$ 到 $x=\pi$ 上半圆周,....................6'

则 $I=\frac{1}{\pi^2}\int_{L_1}xdy-ydx$..8'

$=\frac{1}{\pi^2}\int_\pi^0\pi\cos\theta d\pi\sin\theta-\pi\sin\theta d\pi\cos\theta$

$=\int_\pi^0 1d\theta=-\pi$..10'

本题(2)用其它方法计算的可酌情给分！

本题得分	

五、(本题10分) 求函数 $z=x^2+xy+y^2-6x-9y$ 的极值.

解：解方程组 $\begin{cases}z_x=2x+y-6=0\\ z_y=x+2y-9=0\end{cases}$，........................2'

得驻点 (1, 4) ....4'

因 $A=z_{xx}=2, B=z_{xy}=1, C=z_{yy}=2$, ...6'

且 $AC-B^2=3>0$，$A=2>0$, ...8'

故函数在点 (1, 4) 处取得极小值 $z(1,4)=-21$ ....10'

本题得分	

六、(本题10分)求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}$的收敛域与和函数.

解：$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{2n+2}}{n+1}}{\frac{x^{2n}}{n}}\right|=|x|^2$，由比值法令$|x|^2<1$，得收敛区间$(-1,1)$…………………………2'

因为$x=\pm1$时$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，所以幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}$的收敛域为$(-1,1)$………………4'

对$x\in(-1,1)$，$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}$，则$s'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}2x^{2n-1}=\frac{2x}{1-x^2}$，…7'

两边$\int_0^x$积分得$s(x)-s(0)=\int_0^x\frac{2x}{1-x^2}dx=-\ln(1-x^2)|_0^x=-\ln(1-x^2)$，……9'

因为$s(0)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}\right)\Big|_{x=0}=0$，故$s(x)=-\ln(1-x^2)$…………………………………10'

本题得分	

七、(本题6分)设$a_n>0(n=1,2,\cdots)$，且级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，证明$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$和$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n}$均收敛.

证：(1)$\because\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，$\therefore\lim_{n\to\infty}a_n=0$……………………………………1'

从而$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{a_n}=\lim_{n\to\infty}a_n=0$，……………………………2'

由正项级数的极限形式比较法知级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛…………3'

(2)$\because\frac{\sqrt{a_n}}{n}=\sqrt{a_n}\cdot\frac{1}{n}\le\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{n^2})$…………………………………4'

又$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$均收敛……………………………………5'

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n}$收敛……………………………………6'