1-4 命题公式的等价

看下面三个公式的真值表：

P	Q	P→Q	¬P∨Q	¬Q→¬P
F	F	T	T	T
F	T	T	T	T
T	F	F	F	F
T	T	T	T	T

从真值表可以看出，不论对P、Q 作何种赋值，P→Q、¬P∨Q和¬Q→¬P 的真值都相同。

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$$

等价定义

等价定义：A、B是含有命题变元 $P_1,P_2,\ldots, P_n$的命题公式，如不论给 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ 何种赋值，A 和 B的真值均相同，则称命题公式 A与 B 等价，记作$A\Leftrightarrow B$。

若两个命题公式的真值表相同，则它们等价。

基础等价公式

(1) 对合律 $\neg\neg P \Leftrightarrow P$

(2) 幂等律 $P \vee P \Leftrightarrow P$ $P \wedge P \Leftrightarrow P$

(3) 交换律 $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$ $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$

(4) 结合律 $P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$

$P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$

(5) 分配律 $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

基础等价公式

(6) 吸收律 $P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$

$P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$

(7) 底·摩根定律 $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$

$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$

(8) 同一律 $P \vee F \Leftrightarrow P$ $P \wedge T \Leftrightarrow P$

(9) 零律 $P \vee T \Leftrightarrow T$ $P \wedge F \Leftrightarrow F$

(10) 否定律 $P \vee \neg P \Leftrightarrow T$ $P \wedge \neg P \Leftrightarrow F$

基础等价公式

⑾ $P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$

⑿ $P \to Q \Leftrightarrow \neg Q \to \neg P$

⒀ $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$

⒁ $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$

⒂ $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

举例

请证明底·摩根定律 $\neg(P\vee Q)\Leftrightarrow \neg P\wedge\neg Q$ 。

证明：构造两个命题公式的真值表：

P	Q	$P\vee Q$	$\neg(P\vee Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P\wedge\neg Q$
F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	F	T	F
T	T	T	F	F	F	F

因为$\neg(P\vee Q)$ 与 $\neg P\wedge\neg Q$ 的真值表相同，所以等价。

等价公式的证明方法

方法1：列真值表。

方法2：用等价公式变换。(用置换定律)

置换定律：

A是一个命题公式，X是A中的一部分且也是合式公式，如果X⇔Y，用Y代替A中的X得到公式B，则A⇔B。

例1　求证 $(\neg P\vee Q)\rightarrow(P\wedge Q)\Leftrightarrow P$

证明：$(\neg P\vee Q)\rightarrow(P\wedge Q)$

$\Leftrightarrow\neg(\neg P\vee Q)\vee(P\wedge Q)$　(公式E_{11})

$\Leftrightarrow(\neg\neg P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge Q)$　(底·摩根定律)

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge Q)$　(对合律)

$\Leftrightarrow P\wedge(\neg Q\vee Q)$　(分配律)

$\Leftrightarrow P\wedge T$　(互补律)

$\Leftrightarrow P$　(同一律)

公式E_{11}：　$P\rightarrow Q\Leftrightarrow\neg P\vee Q$

例2　求证吸收律 $P\wedge(P\vee Q)\Leftrightarrow P$

证明 $P\wedge(P\vee Q)$

$\Leftrightarrow (P\vee F)\wedge(P\vee Q)$　(同一律)

$\Leftrightarrow P\vee(F\wedge Q)$　(分配律)

$\Leftrightarrow P\vee F$　(零律)

$\Leftrightarrow P$　(同一律)

例3　化简$\neg(P\wedge Q)\rightarrow(\neg P\vee(\neg P\vee Q))$

解: $\neg(P\wedge Q)\rightarrow(\neg P\vee(\neg P\vee Q))$

$\Leftrightarrow\neg\neg(P\wedge Q)\vee((\neg P\vee\neg P)\vee Q)$ (结合律)

$\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(\neg P\vee Q)$ (对合律，幂等律)

$\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(Q\vee\neg P)$ (交换律)

$\Leftrightarrow((P\wedge Q)\vee Q)\vee\neg P$ (结合律)

$\Leftrightarrow Q\vee\neg P$ (吸收律)

谢 谢