2-6 前束范式

前束范式

与命题公式的范式类似，谓词公式也有规范形式。

谓词公式的范式主要是规范量词，即

前束范式---所有量词都在公式前边约束。

前束范式

1. 前束范式定义：

如果一个谓词公式符合下面条件，它就是前束范式：

- 所有量词前面都没有联结词；
- 所有量词都在公式的左面；
- 所有量词的辖域都延伸到公式的末尾。

前束范式举例

例如： $\exists y\forall x\exists z(A(x)\rightarrow(B(x,y)\vee C(x,y,z)))$

$\forall x(A(x)\rightarrow B(x))$

是前束范式；

而 $\exists xA(x)\wedge\forall yB(y)$

$\forall x\exists y(A(x)\rightarrow(B(x,y)\wedge\exists zC(z)))$

$\exists xA(x)\rightarrow B(x)$

均不是前束范式。

求前束范式的步骤

2. 求前束范式的步骤：

1) 消去公式中的联接词→和↔(为了便于量词辖域的扩充)。

2) 如果量词前有“¬”，用量词转化律将“¬”后移。

3) 用约束变元的改名规则或自由变元的代入规则对变元换名(为量词辖域扩充做准备)。

4) 用量词辖域扩充公式提取量词，使之成为前束范式的形式。

求前束范式

例1. 求 $\forall xA(x)\rightarrow\exists xB(x)$ 的前束范式。

解：$\forall xA(x)\rightarrow\exists xB(x)$

$\Leftrightarrow\neg\forall xA(x)\vee\exists xB(x)$

$\Leftrightarrow\exists x\neg A(x)\vee\exists xB(x)$

$\Leftrightarrow\exists x\neg A(x)\vee\exists yB(y)$ (变元换名)

$\Leftrightarrow\exists x(\neg A(x)\vee\exists yB(y))$ (量词辖域扩充)

$\Leftrightarrow\exists x\exists y(\neg A(x)\vee B(y))$

或者

$\forall xA(x)\rightarrow\exists xB(x)$

$\Leftrightarrow\neg\forall xA(x)\vee\exists xB(x)$

$\Leftrightarrow\exists x\neg A(x)\vee\exists xB(x)$

$\Leftrightarrow\exists x(\neg A(x)\vee B(x))$

(量词分配公式)

求前束范式

例2.求$\forall x(P(x)\land R(x))\rightarrow(\neg\exists xP(x)\land Q(x))$的前束范式。

解：$\forall x(P(x)\land R(x))\rightarrow(\neg\exists xP(x)\land Q(x))$

$\Leftrightarrow\neg\forall x(P(x)\land R(x))\lor(\neg\exists xP(x)\land Q(x))$ (去→)

$\Leftrightarrow\exists x\neg(P(x)\land R(x))\lor(\forall x\neg P(x)\land Q(x))$ (量词转换)

$\Leftrightarrow\exists x\neg(P(x)\land R(x))\lor(\forall y\neg P(y)\land Q(z))$ (变元换名)

$\Leftrightarrow\exists x\neg(P(x)\land R(x))\lor\forall y(\neg P(y)\land Q(z))$ (扩量词辖域)

$\Leftrightarrow\exists x\forall y(\neg(P(x)\land R(x))\lor(\neg P(y)\land Q(z)))$(扩量词辖域)

前束合取范式

一个wff A如果具有如下形式，则称为前束合取范式：

$$(Q_1x_1)(Q_2x_2)\ldots(Q_nx_n)[(A_{11}\vee A_{12}\vee\ldots\vee A_{1k_1})\wedge(A_{21}\vee A_{22}\vee\ldots\vee A_{2k_2})\wedge\ldots\wedge(A_{m1}\vee A_{m2}\vee\ldots\vee A_{mk_m})]$$

其中Q_i（$1\le i\le n$）为∃或∀，x_i为客体变元，A_{ij}是原子变元或其否定。

前束合取范式

定理：每一个wff A都可转化为与其等价的前束合取范式。

转化方法：

1. 取消多余量词。
2. 换名
3. 消去条件联结词。
4. 利用量词转化公式，把否定深入到命题变元和谓词填式的前面。
5. 利用量词作用域的扩张和收缩等价式，把量词提到前面。
6. 将除量词外的部分转化为合取范式

例

例题分析见P74 例4

前束析取范式

一个wff A如果具有如下形式，则称为前束析取范式：

$$(Q_1x_1)(Q_2x_2)\ldots(Q_nx_n)[(A_{11}\wedge A_{12}\wedge\ldots\wedge A_{1k_1})\vee(A_{21}\wedge A_{22}\wedge\ldots\wedge A_{2k_2})\vee\ldots\vee(A_{m1}\wedge A_{m2}\wedge\ldots\wedge A_{mk_m})]$$

其中Q_i（$1\leq i\leq n$）为∃或∀，x_i为客体变元，A_{ij}是原子变元或其否定。

前束析取范式

定理：每一个wff A都可转化为与其等价的前束析取范式。

转化方法同前。

谢 谢