2016《线性代数 I》期末考试卷(A)标准答案

使用专业、班级__________ 学号____________ 姓名________________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

本题得分	

一、填空题(每小题 4 分, 共 20 分)

(1) 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&3\\0&2&1\end{pmatrix}$, 则 $A^{-1}=$ $\begin{pmatrix}1/2&0&0\\0&-1/2&3/2\\0&1&-2\end{pmatrix}$.

(2) 已知三阶方阵 A 有三个特征值 $-1,1,2$, 则 $\left|2A^{-1}+E\right|=$ ____-6____.

(3) 设三阶方阵 A 满足 $A^2+2A-E=O$, 则 $R\left(A^*\right)=$ ____3____.

(4) 当 $k=$ ____1____ 时，向量 $\beta=(-1,1,k)^T$ 能由向量 $\alpha_1=(1,0,5)^T$, $\alpha_2=(3,-2,3)^T$ 线性表示.

(5) 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2^2+6x_2x_3+tx_3^2$ 正定，则 t 应满足条件 ____$t>5$____.

本题得分	

二、选择题(每小题 4 分, 共 16 分)

(1) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵, 则下列等式成立的是 [B]

(A) $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$ (B) $(A+B)^T=A^T+B^T$

(C) $(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$ (D) $(AB)^T=A^TB^T$.

(2) 设 n 阶方阵 A 经过有限次初等变换得到矩阵 B，则有 [C]

(A) $|A|=|B|$; (B) $|A|\neq|B|$; (C) 若 $|A|=0$, 则 $|B|=0$; (D) 若 $|A|>0$, 则 $|B|>0$.

(3) 设矩阵 $A_{m\times n}$ 的秩 $R(A)=m<n$, 则下列结论正确的是 [C]

(A) A 的任意 m 个列向量线性无关 ; (B) A 经过初等行变换必可化为 (E_m, O) ;

(C) 若矩阵 B 满足 $BA=O$, 则 $B=O$; (D) 齐次线性方程组 $Ax=O$ 只有零解 .

(4) 设 A,B 为 n 阶方阵，且 A 与 B 相似，则 [A]

(A) A,B 有相同的特征值 ; (B) A,B 有相同的特征向量 ;

(C) A,B 与同一个对角阵相似 ; (D) $A-\lambda E=B-\lambda E$.

本题得分	

三、解答题(每小题 8 分, 共 16 分)

(1) 计算行列式 $\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}$

$$\overset{\sum r_i}{=}\begin{vmatrix}10&10&10&10\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_2-2r_1\\r_3-3r_1\\r_4-4r_1}}{=}10\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&-1\\0&1&-2&-1\\0&-3&-2&-1\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&-1\\0&0&-4&0\\0&0&4&-4\end{vmatrix}$$

$=160$

考试形式开卷（ ）、闭卷（√），在选项上打（√）

开课教研室 大学数学部 命题教师________ 命题时间 2016-12-12 使用学期 16-17-1 总张数 3 教研室主任审核签字 ______________

(2) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\-2&0&0\\1&3&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&-1&3\\4&3&2\end{pmatrix}$，且 $XA=X+B$, 求矩阵X.

解：$(A-E)^T X^T=B^T \quad \cdots\cdots(2')$

$$A-E=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&-1&0\\1&3&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&-2&1&1&4\\0&-1&3&-1&3\\0&0&1&3&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\times(-1)]{r_1-r_3,\ r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&-2&0&-2&2\\0&1&0&10&3\\0&0&1&3&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+2r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&18&8\\0&1&0&10&3\\0&0&1&3&2\end{pmatrix}\cdots\cdots(6')$$

因此 $X=\begin{pmatrix}18&10&3\\8&3&2\end{pmatrix}\cdots\cdots(8')$

本题得分	

四、(本题10分) 设向量组 $\alpha_1=(1,2,3,4)^T$, $\alpha_2=(2,3,4,5)^T$, $\alpha_3=(3,4,5,6)^T$，$\alpha_4=(4,5,6,7)^T$，求该向量组的秩以及一个最大无关组，并将其余向量用该最大无关组线性表示.

解：
$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-r_1]{r_4-r_3,\ r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-r_1]{r_4-r_2,\ r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\times(-1)]{r_1+2r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&2&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\cdots\cdots(6')$$

该向量组的秩为2.$\cdots\cdots(7')$

最大无关组：$\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots(8')$

$\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$

$\alpha_4=-2\alpha_1+3\alpha_2\cdots\cdots(10')$

本题得分	

五、(本题15分) 问 λ 为何值时，线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+\lambda x_3=-1\\x_1+\lambda x_2+x_3=-1\\\lambda x_1+x_2+x_3=\lambda+4\end{cases}$ 有惟一解，无解，无穷多解？并求其通解.

解：
$$B=\begin{pmatrix}1&1&\lambda&-1\\1&\lambda&1&-1\\\lambda&1&1&\lambda+4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-\lambda r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&1&\lambda&-1\\0&\lambda-1&1-\lambda&0\\0&1-\lambda&1-\lambda^2&2\lambda+4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&1&\lambda&-1\\0&\lambda-1&1-\lambda&0\\0&0&(1-\lambda)(\lambda+2)&2\lambda+4\end{pmatrix}\cdots\cdots(6')$$

(1) 当 $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq-2$ 时，$R(A)=R(B)=3$,方程组有惟一解.$\cdots\cdots(8)$

(2) 当 $\lambda=1$ 时，$R(A)=1$, $R(B)=2$. 方程组无解.$\cdots\cdots(10)$

(3) 当 $\lambda=-2$ 时，$R(A)=R(B)=2<3$,方程组有无穷多解.

此时，$B\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，得同解方程组 $\begin{cases}x_1-x_3=-1\\x_2-x_3=0\end{cases}$

令 $x_3=C$,得通解

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$$，其中 C 为任意常数.$\cdots\cdots(15)$

本题得分	

六、(本题15分) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$,求一个正交矩阵 P 和对角矩阵 $\mathbf{\Lambda}$,

使 $P^{-1}AP=\mathbf{\Lambda}$.

解: $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\0&3-\lambda&2\\0&2&3-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2(5-\lambda)\cdots\cdots(2')$

特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=5.\cdots\cdots(5')$

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时,解 $(A-E)X=O$

$A-E=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, 得同解方程组 $x_2+x_3=0$

得基础解系 $\xi_1=(1\ \ 0\ \ 0)^T,\xi_2=(0\ \ -1\ \ 1)^T$.

当 $\lambda_3=5$ 时,解 $(A-5E)X=O$

$A-5E=\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&-2&2\\0&2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$, 得同解方程组 $\begin{cases}x_1=0\\x_2-x_3=0\end{cases}$

得基础解系 $\xi_3=(0\ \ 1\ \ 1)^T.\cdots\cdots(11')$

将 ξ_1,ξ_2,ξ_3 单位化,得 $p_1=(1\ \ 0\ \ 0)^T,p_2=\left(0\ \ -1/\sqrt{2}\ \ 1/\sqrt{2}\right)^T,p_3=\left(0\ \ 1/\sqrt{2}\ \ 1/\sqrt{2}\right)^T$.

令 $P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\\0&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$, $\mathbf{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&5\end{pmatrix}$.

则 $P,\mathbf{\Lambda}$ 即为所求.$\cdots\cdots(15')$

本题得分	

七、(本题8分) 设 λ_1,λ_2,$\cdots$,λ_m 为 n 阶方阵 A 的 m 个互不相等的特征值,$p_1,p_2,\cdots,p_m$ 为对应的特征向量,证明: $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 线性无关.

证明: 令 $k_1p_1+k_2p_2+\cdots+k_mp_m=0$

用 A^i 左乘上式得 $\lambda_1^ik_1p_1+\lambda_2^ik_2p_2+\cdots+\lambda_m^ik_mp_m=0\quad 1\le i\le m-1$.

合并这些式子得 $(k_1p_1,\ k_2p_2,\cdots,\ k_mp_m)\begin{pmatrix}1&\lambda_1&\cdots&\lambda_1^{m-1}\\1&\lambda_2&\cdots&\lambda_2^{m-1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&\lambda_m&\cdots&\lambda_m^{m-1}\end{pmatrix}=O$

令 $\Lambda=\begin{pmatrix}1&\lambda_1&\cdots&\lambda_1^{m-1}\\1&\lambda_2&\cdots&\lambda_2^{m-1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&\lambda_m&\cdots&\lambda_m^{m-1}\end{pmatrix}$,则 $|\Lambda|=\prod_{m\ge i>j\ge1}(\lambda_i-\lambda_j)\ne0$.

因此 Λ 可逆.

即得 $(k_1p_1,\ k_2p_2,\cdots,\ k_mp_m)=O$

又 $p_i\ne0$, 故 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$

因此 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 线性无关.