3-10 等价关系与等价类

等价关系

等价关系是很重要的关系，它是我们遇到最多的关系类型，例如，数值相等关系=、命题间的等价关系⇔、三角形相似∽和全等关系≌，.....

等价关系

一、等价关系

1.定义：设 R 是集合 A 上的关系，若 R 是自反的、对称的和传递的，则称 R 是A 上的等价关系。

若 a,b∈A，且aRb，则称a与b等价。

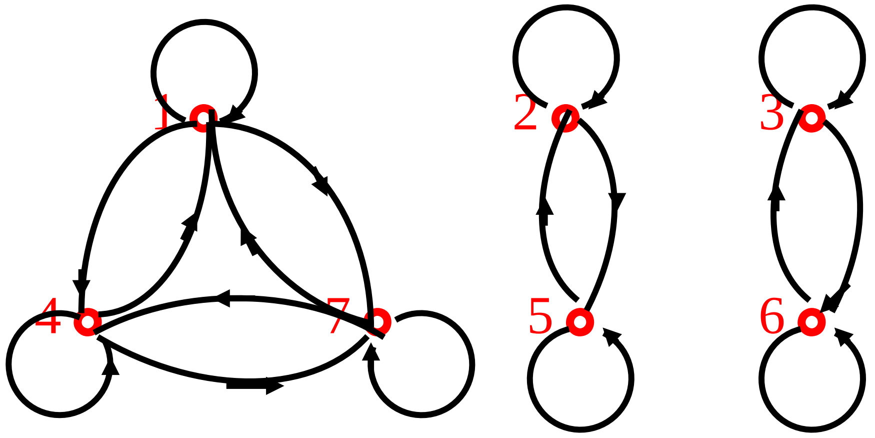
等价关系

例：集合 $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$， R是A上的模3同余关系， 即 $R = \{\langle x,y\rangle \mid x-y$ 可被3整除$\}$ 即 $\langle x,y\rangle \in R \Leftrightarrow x(\mathrm{mod}\ 3) = y(\mathrm{mod} 3)$

例如：因 $4(\mathrm{mod}\ 3)=7(\mathrm{mod} 3)$ 所以 $\langle 4,7\rangle \in R$

$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,4\rangle, \langle 1,7\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,5\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,6\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 4,4\rangle,\langle 4,7\rangle ,\langle 5,2\rangle,\langle 5,5\rangle,\langle 6,3\rangle,\langle 6,6\rangle,\langle 7,1\rangle, \langle 7,4\rangle,\langle 7,7\rangle\}$

从关系图可看出，R是**自反**、**对称**、**传递**的关系，所以R是等价关系

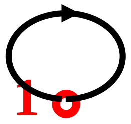


等价关系

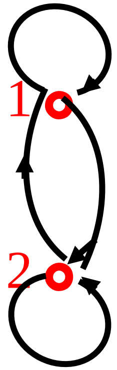
2. 等价关系的关系图

由若干个孤立的完全子图构成。

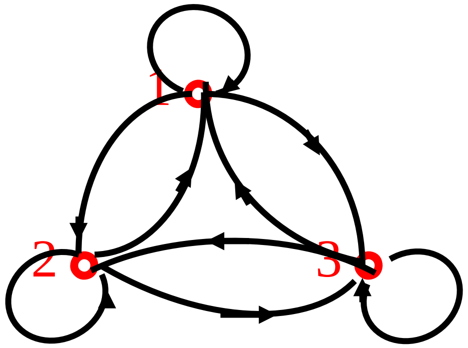
完全关系就是全域关系A×A，下面分别是当A中只有1、2、3个元素时的完全关系的关系图。



A={1}



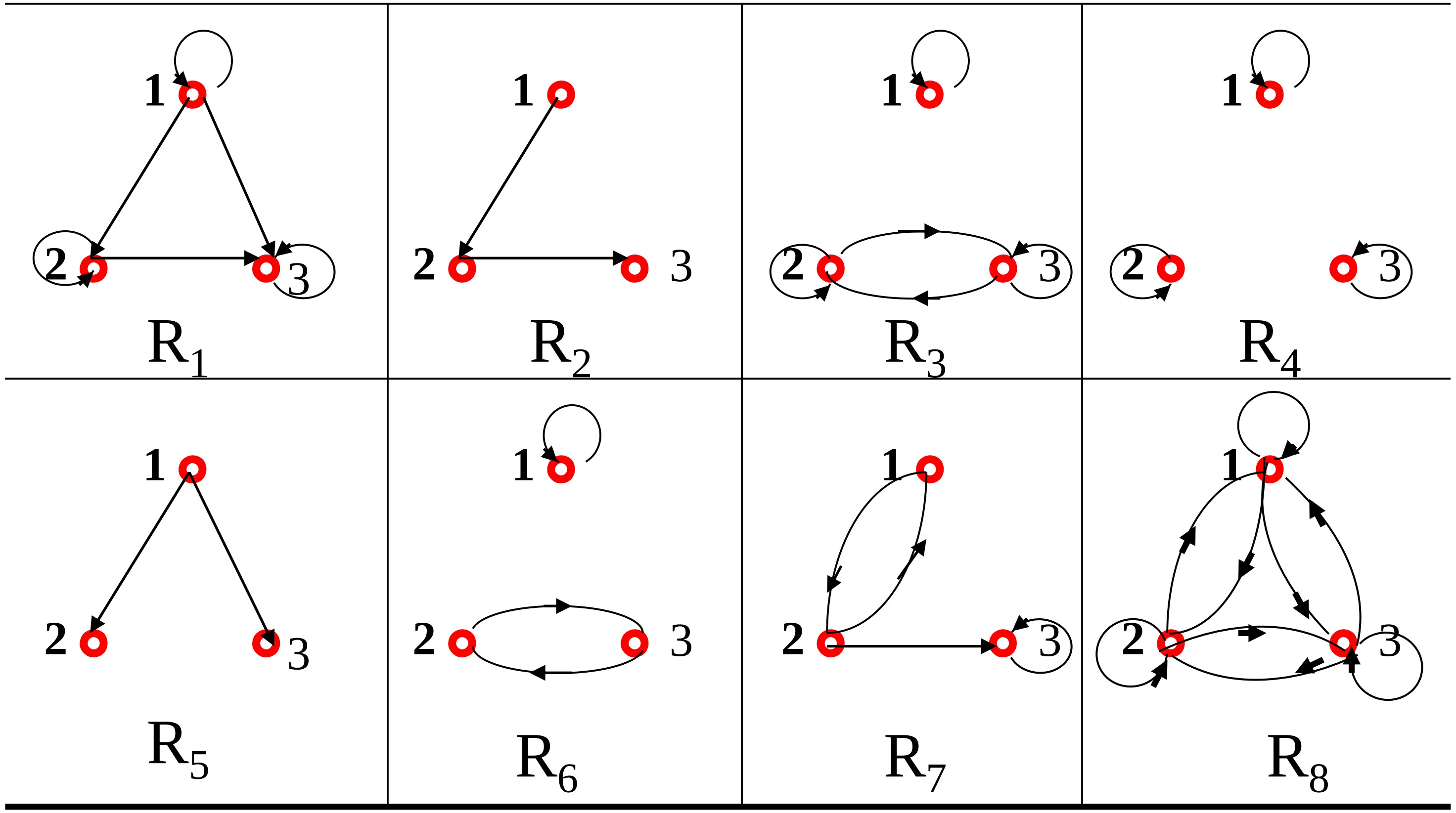
A={1,2}



A={1,2,3}

等价关系

A={1,2,3}下面是定义在A上的关系，根据等价关系有向图的特点，判断哪些是等价关系：



R_3、R_4、R_8 是等价关系

等价关系

思考题：A={1,2,3},可构造多少个A中不同的等价关系？

可以根据等价关系有向图的特点来考虑。

如果等价关系R中有

a)三个独立子图的情形，则(1)个等价关系 。

b)二个独立子图的情形，则(3)个等价关系 。

c)一个独立子图的情形，则(1)个等价关系 。

一共有(5)个中不同的等价关系。

等价类

二、等价类

1. 定义：R是A上的等价关系，a∈A， 由a确定的集合$[a]_R$：

$$[a]_R=\{x \mid x\in A \wedge \langle a,x\rangle \in R\}$$

称集合$[a]_R$为由a形成的R等价类。简称a等价类。

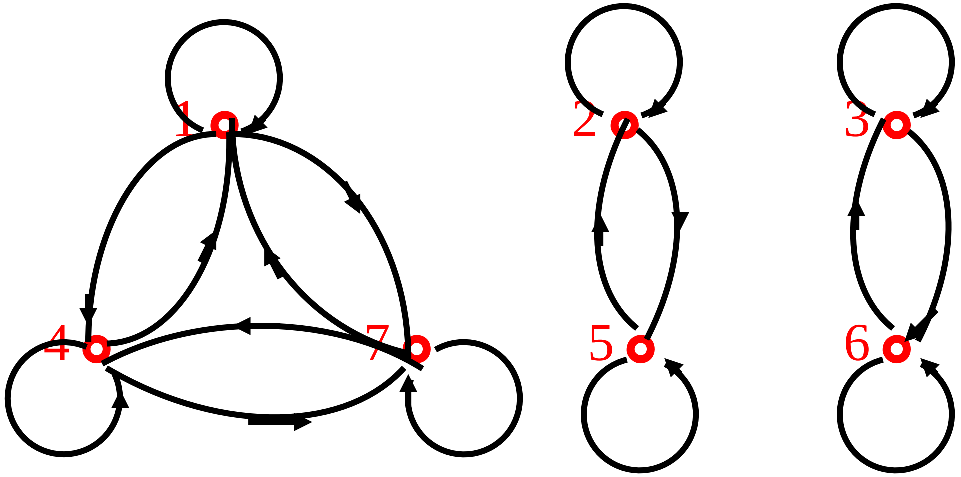
$$x\in [a]_R \Leftrightarrow \langle a,x\rangle \in R$$

显然，

$$[a]_R \subseteq A$$

等价类

例：A={1,2,3,4,5,6,7}，R是A上的模3同余关系，



$[1]_R=\{1,4,7\}=[4]_R=[7]_R$ ----余数为1的等价类

$[2]_R=\{2,5\}=[5]_R$ ----余数为2的等价类

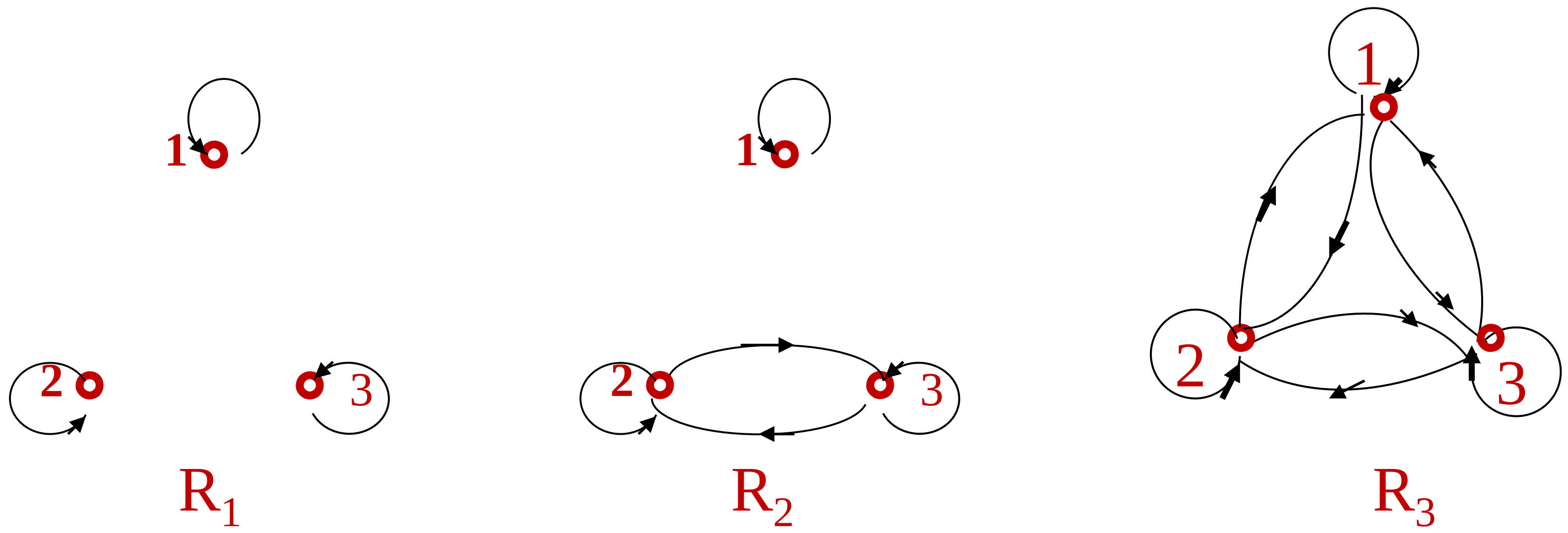
$[3]_R=\{3,6\}=[6]_R$ ----余数为0的等价类

思考题：此例为什么只有三个等价类?

等价类

2. 由等价关系图求等价类：R关系图中每个独立的完全子图中的所有的结点，构成一个等价类。

不同等价类的个数 = 孤立完全子图的个数



练习：上述三个等价关系各有几个等价类？说出对应的各个等价类。

等价类

3.等价类性质

R是集合A上的等价关系，任意 a,b,c∈A

性质(1) 同一个等价类中的元素，彼此有等价关系R。

即对任意x,y∈$[a]_R$，必有<x,y>∈R

证明：任取x,y∈$[a]_R$，由等价类定义得，<a,x>∈R, <a,y>∈R ，

由R对称得<x,a>∈R，又由R传递得<x,y>∈R。

性质(1)说明： 每个等价类的关系图是一个完全图。

等价类

性质(2) $[a]_R \cap [b]_R = \Phi$， 当且仅当 $<a,b> \notin R$。

证明：充分性：设$<a,b> \notin R$，假设$[a]_R \cap [b]_R \neq \Phi$，则存在 $x \in [a]_R \cap [b]_R$，使得 $x \in [a]_R \wedge x \in [b]_R$，于是有$<a,x> \in R$,$<b,x> \in R$，由R对称得 $<x,b> \in R$，又由R传递得$<a,b> \in R$，这与$<a,b> \notin R$矛盾。于是有$[a]_R \cap [b]_R = \Phi$

必要性：若$[a]_R \cap [b]_R = \Phi$，假设$<a,b> \in R$，由等价类定义得$b \in [a]_R$，又因为bRb，所以$b \in [b]_R$，于是$b \in [a]_R \cap [b]_R$，与$[a]_R \cap [b]_R = \Phi$矛盾，于是有$<a,b> \notin R$ 。

等价类

性质(2)说明：　不同的等价类之间是孤立的，

没有交集的。

等价类

性质(3) $[a]_R = [b]_R$ 当且仅当 $<a,b>\in R$。

证明：充分性　若$<a,b>\in R$，

则对任何 $x\in[a]_R$，有$<a,x>\in R$，由R对称有

$<b,a>\in R$，再由R传递有 $<b,x>\in R$，于是

$x\in[b]_R$，所以 $[a]_R\subseteq[b]_R$。

类似可证 $[b]_R\subseteq[a]_R$。因此 $[a]_R=[b]_R$。

必要性　如果 $[a]_R = [b]_R$，由于R自反，所以$<a,a>\in R$，

即 $a\in[a]_R$，于是 $a\in[b]_R$，

即有$<b,a>\in R$，由R对称 有 $<a,b>\in R$。

等价类

性质(3)说明： 若 a,b 有R关系，则 a等价类与b等价类相等。

等价类

从上述等价关系的性质可看出：

任何两个等价类要么相等，要么不相交；

思考：

两个等价类在什么情况下相等？

在什么情况下不相交？

等价类

性质(4) A中任何元素都必属于且仅属于一个等价类。

证明：对A中任何元素a，由于R自反，所以

$\langle a,a\rangle \in R$，于是 $a \in [a]_R$ 。

如果还有 $a \in [b]_R$ ，则有$\langle b,a\rangle \in R$，由R对称知

$\langle a,b\rangle \in R$，再由性质(3)有 $[a]_R = [b]_R$ 。

性质(5) R的所有不同等价类构成的集合是A的一个划分。

商集

三. 商集

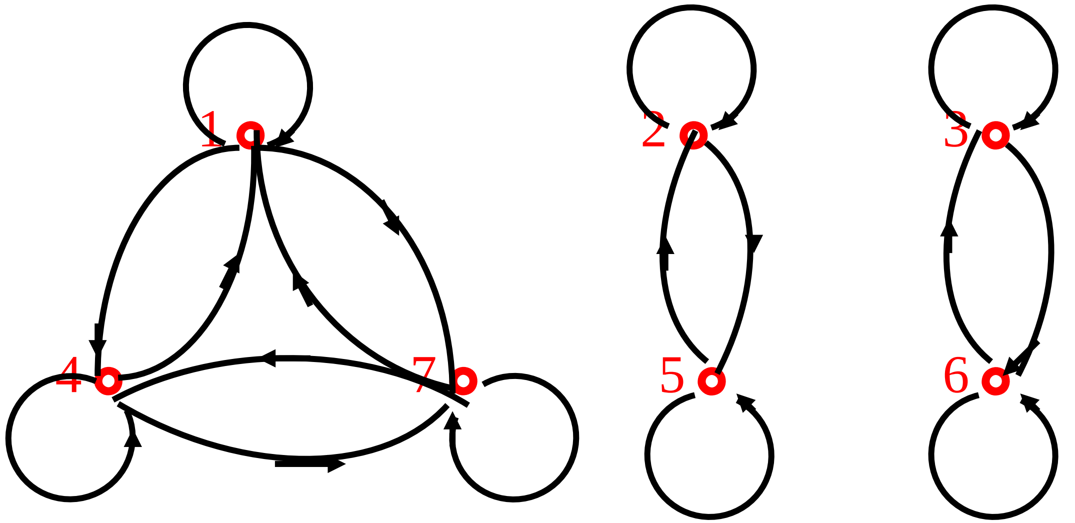
定义：R是A上的等价关系，由R的所有等价类构成的集合称之为A关于R的商集，记作 A/R。

即 $A/R = \{[a]_R \mid a \in A\}$

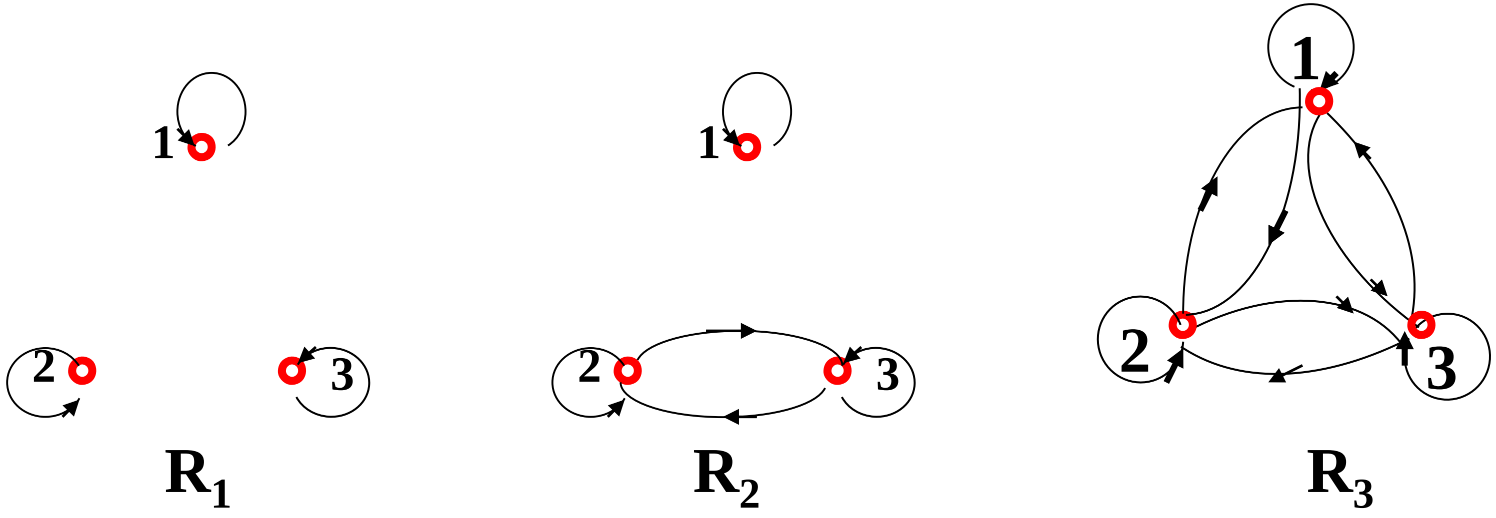
“商”和除法有关，相当于用R把A分成几份。

商集

例：集合A={1,2,3,4,5,6,7}用模3同余关系R划分集合A，得到三个等价类，所以$A/R=\{\{1,4,7\},\{2,5\},\{3,6\}\}=\{[1]_R,[2]_R,[3]_R\}$



商集



练习 X={1,2,3},X上关系R_1、R_2 、R_3，如上图所示，求商集。

$X/R_1=\{[1]_{R1},[2]_{R1},[3]_{R1}\}=\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$

$X/R_2=\{[1]_{R2} ,[2]_{R2}\}=\{\{1\},\{2,3\}\}$

$X/R_3=\{[1]_{R3}\}=\{\{1,2,3\}\}$

商集

定理　集合A上的等价关系R，决定了A的一个划分，这个划分就是商集 A/R。

证明：由等价类性质可得：

1) A/R中任意元素$[a]_R$，有$[a]_R \subseteq A$;

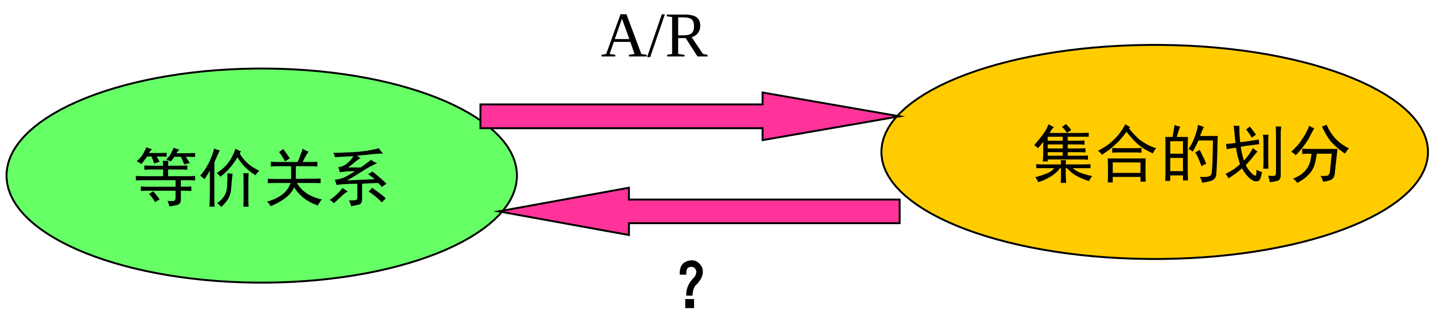
2) 设$[a]_R$，$[b]_R$是A/R 的两个不同元素，有 $[a]_R \cap [b]_R = \Phi$;

3) 因为A中每个元素都属于一个等价类，所以所有等价类的并集必等于A。

所以商集 A/R 是 A 的一个划分。

商集

四． 由划分确定等价关系

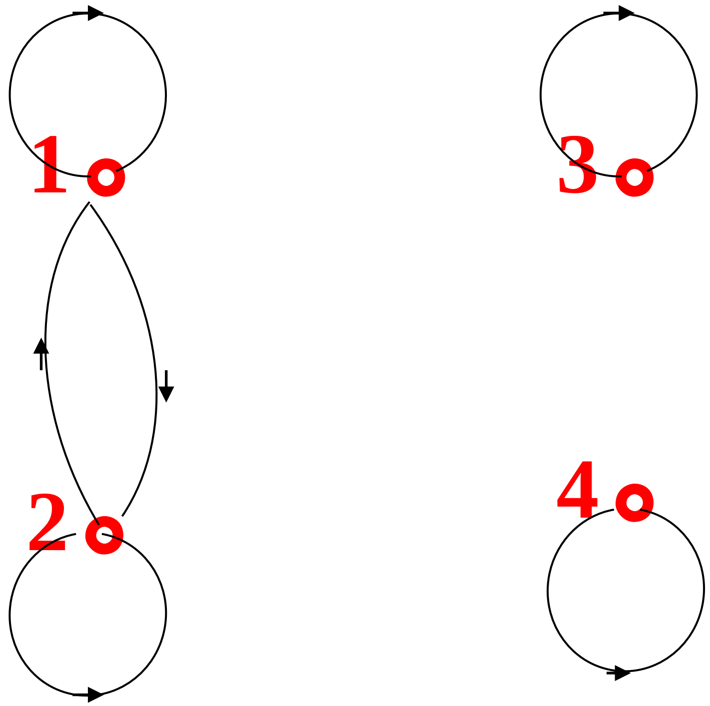


商集

例如，X={1,2,3,4}， A={{1,2},{3},{4}} 是 X的一个划分，求X上的一个等价关系R，使得 X/R=A。

R关系图如右图所示：

$R=\{1,2\}^2 \cup \{3\}^2 \cup \{4\}^2$ 。



商集

一般地，$A=\{A_1,A_2,\ldots,A_n\}$ 是集合 X 的一个划分，构造一个 X 上的等价关系 R，使得 $X/R = A$。

如何构造?

$$R= A_1^2 \cup A_2^2 \cup \ldots \cup A_n^2$$

其中 $A_i^2= A_i \times A_i$，　$(i =1,2,\ldots,n)$

商集

定理 给定集合 X 上的一个划分 $A=\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$，由它确定的关系

$R = A_1^2 \cup A_2^2 \cup \ldots \cup A_n^2$，其中$A_i^2 = A_i \times A_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ 是 X上的一个等价关系。

证明：1) 证R自反：任取 $a \in X$，因为A是X的划分，

必存在整数 $n \geq i > 0$，使得 $a \in A_i$，

于是 $\langle a,a\rangle \in A_i \times A_i$，又 $A_i \times A_i \subseteq R$，于是

$\langle a,a\rangle \in R$，即R是自反的。

2) 证R对称：任取 $a,b \in X$，设$\langle a,b\rangle \in R$，必存在

整数 $n \geq i > 0$，使得 $\langle a,b\rangle \in A_i \times A_i$，于是

$\langle b,a\rangle \in A_i \times A_i$，又 $A_i \times A_i \subseteq R$，所以有

$\langle b,a\rangle \in R$，即R是对称的。

商集

3) 证R传递：

任取 $a,b,c\in X$，设有$<a,b>\in R$且$<b,c>\in R$，

则必存在整数 $n\geq i , j > 0$ 使得

$<a,b>\in A_i\times A_i$, $<b,c>\in A_j \times A_j$ ， 于是有

$a,b \in A_i$ ， $b,c \in A_j$ ， 于是 $b\in A_i\cap A_j$ 。

这与A_i , A_j 是划分块，当 $i\neq j$ 时其交集为空矛盾，

因此 $i=j$ ， 于是 $a,b,c\in A_i$ ， 即有 $<a,c>\in A_i\times A_i$ ，

又 $A_i\times A_i \subseteq R$，所以 $<a,c>\in R$ ， 即R传递。

商集

定理： 设R_1和R_2是非空集合A上的等价关系，

则$A/R_1=A/R_2$ 当且仅当 $R_1=R_2$

(自行证明)

谢 谢