

---

# 第一篇 数理逻辑

# 逻辑学

---

- 逻辑学起源于2000多年前的古希腊，按其发展过程可分为传统逻辑与现代逻辑。许多著名人物都对逻辑学的发展做出过杰出贡献。

# 传统逻辑

---

亚里士多德和弗朗西斯·培根是传统逻辑的代表，分别创立了演绎推理和归纳推理。

❖ **演绎推理**：由一般规律推出个别事实。

如：所有的金属都导电。（一般规律，大前提）

铜是金属。（个别事实，小前提）

铜能导电。（个别结论，结论）

❖ **归纳推理**：由若干个个别事实推出一一般结论。

如：铜能导电，铁能导电，锡能导电，铅能导电，……

⇒ 一切金属都导电。

# 现代逻辑

---

现代逻辑的开创者是德国的莱布尼兹，在十八世纪初，他提出要把逻辑处理成演算，即数理逻辑。又过了二百多年，罗素与怀特海总结了现代逻辑的发展，建立了命题演算与谓词演算两个完整的体系。

# 什么是逻辑？

---

- “逻辑”是英语 Logic 的译音，源于古希腊文，原意主要指言语、思想、理性、规律性等。
- 逻辑学也称为形式逻辑，是关于思维形态的结构及其规律的科学。
- 也就是说，逻辑学研究人思维的形态结构和一般规律。

# 什么是思维的形态结构？

---

- 思维形态是人们在思维过程中用以反映客观现实的具体形式，即 **概念**、**判断**、**推理**。
- 人们思维的形态结构：

概念  $\Rightarrow$  判断  $\Rightarrow$  推理

人的思维形态主要表现为推理

# 推理

---

- 由若干个已知的判断(前提), 推出新的判断(结论)的**思维过程**。
- 如何能正确的思维?  
**概念**清楚, **判断**正确, **推理**合乎逻辑。

---

比如：王刚问李明：“学离散数学有用吗？”

李明说：“当然有用了，离散数学是计算机学科的理论基础嘛。”

李明的回答实际上包含了三句话的推理：

**计算机学科的理论基础是有用的，  
离散数学是计算机学科的理论基础，  
所以，离散数学是有用的。**

“计算机学科的理论基础是有用的”这句话对交际双方来说是不言而喻的，所以在表达中被省略。



# 数理逻辑

---

- 数理逻辑是用**数学的方法**研究思维规律的一门学科。
- 由于它使用了一套符号，简洁地表达出各种推理的逻辑关系，因此数理逻辑一般又称为**符号逻辑**。
- 数理逻辑和计算机的发展有着密切的关系，它为机器证明、自动程序设计、计算机辅助设计等计算机应用和理论提供必要的理论基础。
- 数理逻辑分为**命题逻辑**和**谓词逻辑**两部分。

---

# 第一章 命题逻辑

---

# 1-1 命题及其表示法

---

# 什么是命题？

---

命题是表达判断的陈述句。

一个判断只有两种可能：正确的判断 或者  
错误的判断。

把这种 “正确” 或者 “错误” 赋予命题，就得到命题的真值。

# 命题的真值

---

命题的真值只有两个：“真” 或 “假”。

命题的**真值为真**：一个命题所表达的判断与客观情况一致，记作 T (True)。

命题的**真值为假**：一个命题所表达的判断与客观情况不一致，记作 F (False)。

---

例如：“这面旗帜是红色的。”

是命题，并且与客观事实相符，所以该命题真值为 T。



# 命题的判断

---

判断一句话是否是命题有两个关键：

- (1) 是陈述句；
- (2) 有且只有一个真值。

# 举例

---

例：判定下面这些句子哪些是命题？

- (1) 2是个素数。                      是； T
- (2) 雪是黑色的。                    是； F
- (3) 2030年人类将移民火星。      是
- (4) 如果天不下雨并且我有时间，我就去看电影。      是，复合命题
- (5)  $2+1=21$                         是； F
- (6)  $x+y<5$                         否，是命题函数
- (7) 请打开书.                        否
- (8) 您去吗？                        否
- (9) 新校区真大啊。                否
- (10) 我学英语或法语。            是
- (11) 我正在说谎。                否，是悖论



# 几个经典的悖论

---

- 1、哲学家Epimenides（埃庇米尼得斯，克里特哲学家、预言家）：“所有克利特人都在说谎，他们中的一个诗人这么说。”
- 2、理发师悖论：“本人的理发技艺十分高超，誉满全城。我将为本城所有不给自己刮脸的人刮脸，我也只给这些人刮脸。我对各位表示热诚欢迎！”
- 3、苏格拉底悖论：“我只知道一件事，那就是什么都不知道。”

# 命题的种类

---

- 原子命题：不能再分解成更简单陈述句的命题。
- 复合命题：由若干个连结词、标点符号及原子命题复合构成的命题。

# 命题的表示

---

在数理逻辑中，我们使用大写字母  $A, B, \dots, P,$   
 $Q, \dots$ ，或用带下标的大写字母或用数字表示命题。

例如：  $P$ ：今天下雨。

$[12]$ ：今天下雨。

$A_1$ ：今天下雨。

$P$ 、 $[12]$ 和  $A_1$  称为命题标识符。

# 命题常元和命题变元

---

- 如果一个命题标识符表示确定的命题，就称为**命题常元**。
- 如果一个命题标识符只表示任意命题的位置标志，就称为**命题变元**。
- 命题变元可以表示任意命题，所以它不能确定真值，故**命题变元不是命题**。

---

# 1-2 逻辑联结词

---

---

简单命题可以用大写字母表示，复合命题如何表示？

复合命题由若干个连结词、标点符号及原子命题复合构成的命题

复合命题用“逻辑联结词”将原子命题联结起来表达。

---

归纳自然语言中的联结词，定义了六个逻辑联结词，分别是：

(1) 否定 “ $\neg$ ”

(2) 合取 “ $\wedge$ ”

(3) 析取 “ $\vee$ ”

(4) 异或 “ $\nabla$ ”

(5) 条件 “ $\rightarrow$ ”

(6) 双条件 “ $\leftrightarrow$ ”

# 否定

---

(1) 否定 “ $\neg$ ”

表示：“并非...”，“不...”等。

用于对一个命题  $P$  的否定，写成  $\neg P$ ，并读成“非 $P$ ”。

例：  $P$ ：2是素数。

$\neg P$ ：2不是素数。



# 否定

---

定义：设  $P$  为一命题， $P$  的否定是一个新命题，记作  $\neg P$ 。 $\neg P$  的真值与  $P$  的真值相反。

真值表：

$P$	$\neg P$
F	T
T	F

# 否定

---

举例：

P：这些书都是刚刚出版的。

$\neg P$ ： B

A 这些书都不是刚刚出版的。

B 这些书不都是刚刚出版的。

---

因为数理逻辑研究的是人的思维规律，所以在规定逻辑连结词的真值表的时候，一定要符合人的语言与思维的习惯。

# 合取

---

## (2) 合取 “ $\wedge$ ”

表示：“并且”、“不但...而且...”、“既...又...”、“尽管...还...”等。

例： **P**：小王能唱歌。 **Q**：小王能跳舞。

**$P \wedge Q$** ：小王能歌善舞。

# 合取

定义：两个命题  $P$  和  $Q$  的合取是一个复合命题，记作  $P \wedge Q$ 。当且仅当  $P$  和  $Q$  的**真值均为 T** 时， $P \wedge Q$  的真值为 **T**，其它情况下， $P \wedge Q$  的真值均为 F。

P	Q	$P \wedge Q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

# 析取

---

## (3) 析取 “ $\vee$ ”

例： **P**：小王能唱歌。 **Q**：小王能跳舞。

**$P \vee Q$** ：小王能唱歌或者能跳舞。

# 析取

---

定义：两个命题  $P$  和  $Q$  的析取是一个复合命题，记作  $P \vee Q$ 。当且仅当  $P$  和  $Q$  的真值均为  $F$  时， $P \vee Q$  的真值为  $F$ ，其它情况下， $P \vee Q$  的真值均为  $T$ 。

$P$	$Q$	$P \vee Q$
$F$	$F$	$F$
$F$	$T$	$T$
$T$	$F$	$T$
$T$	$T$	$T$

# 析取与“或”

---

连接词“或者”的表达分为两种情况：

可兼取的或，即两件事情可以同时发生。用析取“ $\vee$ ”表达。

不可兼取的或，即两件事情不能同时发生。用异或（也称排斥或）“ $\nabla$ ”表达。



# 异或

---

## (4) 异或 “ $\bar{\vee}$ ”

例：P：G11次列车早晨8:30开。

Q：G11次列车早晨9:00开。

$P\bar{\vee}Q$ ：G11次列车早晨8:30或者9:00开。

两件事不能同时发生，用“异或”。

# 异或

$P \vee Q$  与  $P \bar{\vee} Q$  的真值表应该有什么不同？

当且仅当  $P$  与  $Q$  的真值相同时， $P \bar{\vee} Q$  的真值为 **F**，真值不同时为 **T**。

P	Q	$P \bar{\vee} Q$
<b>F</b>	<b>F</b>	<b>F</b>
<b>F</b>	<b>T</b>	<b>T</b>
<b>T</b>	<b>F</b>	<b>T</b>
<b>T</b>	<b>T</b>	<b>F</b>

# 举例

---

例：那个是析取，异或？

我正在家学习或者在电影院看电影。 异或  
他可能是100米或400米冠军。 析取

# 条件

---

(5) 条件 “ $\rightarrow$ ”

表示 “如果... 那么 ...” , “若...则...” 等。

例：P：土壤缺少水分。Q：这颗植物会死亡。

$P \rightarrow Q$ ：如果土壤缺少水分，这颗植物就会死亡。

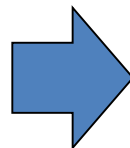
称 P 是  $P \rightarrow Q$  的前件，Q 是  $P \rightarrow Q$  的后件。也可以说 P 是 Q 的充分条件，Q 是 P 的必要条件。

# 条件

$P \rightarrow Q$  的真值应该如何定义？

P：土壤缺少水分。Q：这颗植物会死亡。

P	Q	$P \rightarrow Q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T



善意规定

# 条件

---

- ❖ 当且仅当  $P$  为 T,  $Q$  为 F 时,  $P \rightarrow Q$  的真值为 F; 而在其它情况下,  $P \rightarrow Q$  的真值均为 T。
- ❖ 注意 “善意规定”。

# 条件

---

**例1 如果某动物为哺乳动物，则它必胎生。**

**例2 如果我得到这本小说，那么我今夜就读完它。**

**例3 如果雪是黑的，那么太阳从西方出。**

**这三个例子都可以用条件命题 $P \rightarrow Q$ 表达。**

**条件联结词亦是二元运算。**

**下面对如此定义条件联结词运算规则的原因给出解释**

# 条件

---

**例：小刚的爸爸对小刚说：“如果我去商店，就给你买苹果。”**

**只有当爸爸去了商店，而没给小刚买苹果，才说明爸爸说了假话。**

**其余的情况都说明爸爸说了真话。**



# 条件

例： P：天气好。 Q：我去公园。

1.如果天气好,我就去公园。

$$P \rightarrow Q$$

2.只要天气好,我就去公园。

$$P \rightarrow Q$$

3.天气好,我就去公园。

$$P \rightarrow Q$$

4.仅当天气好,我才去公园。

$$Q \rightarrow P$$

5.只有天气好,我才去公园。

$$Q \rightarrow P$$

6.我去公园,仅当天气好。

$$Q \rightarrow P$$

# 条件

---

用“ $\rightarrow$ ”表达必须前件是后件的充分条件，即  
若前件成立，后件一定成立。

这一点要特别注意!!!它决定了哪个作为前件，哪个作为后件。

# 条件

---

例：

如果他是本科生，那么他会两门外语。

如果鸟会飞，那么 $2+2=4$ 。

# 双条件

---

## (6) 双条件 “ $\leftrightarrow$ ”

表示“当且仅当”、“充分必要”等。

例： **P**：  $\triangle ABC$  是等边三角形。

**Q**：  $\triangle ABC$  是等角三角形。

**$P \leftrightarrow Q$** ：  $\triangle ABC$  是等边三角形当且仅当它是等角三角形。

# 双条件

---

$P \leftrightarrow Q$ 的真值表：

按思维习惯， $P \rightarrow Q$ ，  
 $Q \rightarrow P$  应同时成立。

定义：当且仅当P与Q的  
真值相同时， $P \leftrightarrow Q$ 的  
真值为T，否则为F。

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

# 双条件

---

例：

燕子飞回南方当且仅当冬天来了。

雪是黑的当且仅当太阳从西边出来。

# 比较下面二表

---

P	Q	$P \bar{\vee} Q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

$$P \bar{\vee} Q \Leftrightarrow \neg(P \leftrightarrow Q)$$

---

可以把这6种逻辑联结词看成是6种运算，因为有运算结果；  
其运算的对象是命题；  
运算规则是每个连结词的真值表。



# 真值表

6种逻辑联结词的真值表:

P   Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \bar{\vee} Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
F   F	T	F	F	F	T	T
F   T	T	F	T	T	T	F
T   F	F	F	T	T	F	F
T   T	F	T	T	F	T	T

# 小结

---

“ $\neg$ ”为一元运算；

因为一个命题  $P$  可以确定  $\neg P$  的真值。

“ $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\bar{\vee}$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ ”均为二元运算。

因为它们的真值必须由两个运算对象确定。

# 小结

---

5个联结词： $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ ，组成一个联结词集合 $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ ，

联结词的优先顺序为： $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ ；

如果出现的联结词同级，又无括号时，则按从左到右的顺序运算；若遇有括号时，应该先进行括号中的运算。

# 小结

---

- 命题；真值
- 原子命题；复合命题
- 命题联结词及其真值表

---

谢谢