2016 级高等数学Ⅰ(2)考试卷(B)

解答及评分标准

使用专业、班级__________ 学号__________ 姓名______________

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得 分								
阅卷人								

本题得分	

一、填空题(每小题 4 分, 共 20 分)

(1) 已知三点 $A(2,0,1)$, $B(3,1,1)$ 和 $C(2,1,2)$, 则 $\angle BAC =$ $\underline{\dfrac{\pi}{3}}$

(2) 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $\mathrm{e}^{-xy}+z+\mathrm{e}^{z}=0$ 所确定的隐函数, 则 $\mathrm{d}z=$ $\underline{\dfrac{y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{\mathrm{e}^{xy}(\mathrm{e}^{z}+1)}}$

(3) 交换积分次序: $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y=$ $\underline{\int_0^1\mathrm{d}y\int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x}$

(4) 设 L 是圆周 $x^2+y^2=a^2$ 在第一象限内的部分, 则曲线积分 $\int_L \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=$ $\underline{2a}$

(5) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{2^n}(x-2)^n$ 的收敛区间是 $\underline{(0,4)}$

本题得分	

二、选择题(每小题 4 分, 共 20 分)

(1) xOy 面上的曲线 $4x^2-9y^2=36$ 绕 y 轴旋转一周所得曲面的方程是 【 A 】

(A) $4(x^2+z^2)-9y^2=36$. (B) $4(x^2+z^2)-9(y^2+z^2)=36$.
(C) $4x^2-9(y^2+z^2)=36$. (D) $4x^2-9y^2=36$.

(2) 设函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的偏导数存在, 则 $f_x(x_0,y_0)$ 等于 【 C 】

(A) $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(x_0+t,y_0+t)-f(x_0,y_0)}{t}$. (B) $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(x_0,y_0+t)-f(x_0,y_0)}{t}$.

(C) $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t}$. (D) $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(x_0+t,y_0)}{t}$.

(3) 函数 $z=x\mathrm{e}^{2y}$ 在点 $P(1,0)$ 处沿从点 P 到点 $Q(2,-1)$ 方向的方向导数为 【 C 】

(A) -1. (B) 1. (C) $-\dfrac{1}{\sqrt2}$. (D) $\dfrac{1}{\sqrt2}$.

(4) 设 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧, 则曲面积分 $\oiint_\Sigma x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}x\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z\mathrm{d}x$ 等于 【 D 】

(A) $\dfrac{2}{3}\pi a^3$. (B) $\dfrac{4}{3}\pi a^3$. (C) $2\pi a^3$. (D) $4\pi a^3$.

(5) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 均发散, 则下列级数必发散的是 【 B 】

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$. (B) $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$. (C) $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$. (D) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$.

本题得分	

三、计算题(每小题 8 分, 共 32 分)

(1) 求过直线 $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+3}{1}$ 且与平面 $2x-y+z-6=0$ 垂直的平面的方程.

解 已知直线上取点 $(2,0,-3)$, ……(1′)

所求平面的法向量取

$$\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&2&1\\2&-1&1\end{vmatrix}=(3,-1,-7), \qquad ……(3′)+(2′)$$

故所求平面方程为 $3(x-2)-y-7(z+3)=0$,

即 $3x-y-7z-27=0$. ……(2′)

(2) 设 $z=f(\mathrm{e}^x\sin y, x^2+y^2)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^x\sin y\, f_1'+2x\, f_2'$ ……(4′)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\mathrm{e}^x\sin y\, f_1'+\mathrm{e}^x\sin y\left(\mathrm{e}^x\sin y\, f_{11}''+2x\, f_{12}''\right)+2f_2'+2x\left(\mathrm{e}^x\sin y\, f_{21}''+2x\, f_{22}''\right)$$

$$=\mathrm{e}^{2x}\sin^2 y\, f_{11}''+4x\mathrm{e}^{2x}\sin y\, f_{12}''+4x^2 f_{22}''+\mathrm{e}^x\sin y\, f_1'+2f_2'. \qquad ……(4′)$$

考试形式开卷（ ）、闭卷（√），在选项上打（√）

开课教研室 大学数学部 命题教师 命题组 命题时间 2017-05-30 使用学期 2016-2017-2 总张数 3 教研室主任审核签字 ______________

(3) 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的闭区域.

解1 $\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\rho\mathrm{d}\rho\int_{\rho}^{\sqrt{1-\rho^2}}(\rho\cos\theta+z)\mathrm{d}z$ ……(4′)

$=\int_0^{2\pi}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\rho^2\left(\sqrt{1-\rho^2}-\rho\right)\mathrm{d}\rho+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\rho(1-2\rho^2)\mathrm{d}\rho$ ……(2′)

$=0+\frac{1}{2}\cdot2\pi\cdot\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4\right]=\frac{\pi}{8}.$ ……(2′)

解2 $\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r\cos\varphi\cdot r^2\mathrm{d}r$ ……(2′)+(4′)

$=2\pi\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi}{8}.$ ……(2′)

(4) 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2\ (0\le z\le1)$ 的面积.

解 $S=\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=\iint\limits_{x^2+y^2\le1}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ……(2′+3′)

$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho\mathrm{d}\rho$ ……(1′)

$=2\pi\cdot\frac{1}{12}\left(5\sqrt{5}-1\right)=\frac{5\sqrt{5}-1}{6}\pi.$ ……(2′)

本题得分	

四、(8分) 设 L 是曲线 $y=1-x^2$ 上从点 $A(1,0)$ 到点 $B(-1,0)$ 的有向弧段, 计算曲线积分

$$I=\int_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

解 因 $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right),\ (x,y)\ne(0,0),$

故在不含原点的单连通域内, 曲线积分 $\int_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ 与路径无关. ……(3′)

取路径 C 为上半圆 $\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}(t:0\to\pi)$, 则

$I=\int_C\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ ……(3′)

$=\int_0^{\pi}\frac{\cos t\cdot\cos t-\sin t\cdot(-\sin t)}{\cos^2t+\sin^2t}\mathrm{d}t=\pi.$ ……(2′)

本题得分	

五、(8分) 将函数 $f(x)=\arctan x$ 展开成 x 的幂级数, 并求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

解 因 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n},\ -1<x<1,$ ……(2′)+(2′)

故 $f(x)=f(0)+\int_0^xf'(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\ -1\le x\le1.$ ……(3′)

令 $x=1$ 得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}.$ ……(1′)

本题得分	

六、(7分) 求抛物线 $y=x^2$ 上到直线 $x-y-2=0$ 距离最近的点.

解 设 (x,y) 是抛物线上的任一点, 则问题归结为在约束条件 $y=x^2$ 下求

$$d^2(x,y)=\frac{(x-y-2)^2}{2}$$

的最小值. ……(3′)

作 Lagrange 函数 $L(x,y,\lambda)=(x-y-2)^2+\lambda(y-x^2)$, ……(1′)

令 $$\begin{cases} L_x=2(x-y-2)-2\lambda x=0 \\ L_y=-2(x-y-2)+\lambda=0 \\ L_\lambda=y-x^2=0 \end{cases}$$ ……(2′)

解得唯一驻点 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$.

由于抛物线 $y=x^2$ 上到直线 $x-y-2=0$ 距离最近的点一定存在, 所以该驻点就是所求的点. ……(1′)

本题得分	

七、(5 分) 叙述级数收敛的必要条件, 并证明之.

级数收敛的必要条件 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 则 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$. ……(2′)

证明 因级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 故其部分和数列 $\{s_n\}$ 收敛,

设 $\lim_{n\to\infty}s_n=s$, 则

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}(s_n-s_{n-1})=\lim_{n\to\infty}s_n-\lim_{n\to\infty}s_{n-1}=s-s=0.$$ ……(3′)