2-7 谓词演算的推理理论

推理理论

前面已经讲过命题演算的推理理论，现在我们来研究一下在谓词演算中如何进行推理?

谓词逻辑与命题逻辑的最大区别就在于对命题表达的不同，实际上也就是多了量词的处理问题。

对谓词演算的推理增加了量词的处理。

即增加了四个规则： **US、ES、EG、UG**，用于脱掉和添加量词。

推理理论

在谓词演算的推理中，我们采用的推理方法：

直接推理、条件论证、反证法

所用公式：基础等价公式，基础蕴含公式。

推理规则：P、T、US、ES、EG、UG、CP、

反证法以及其它一些规则。

四种规则

US、ES、EG、UG 规则用于处理量词。

利用US、ES 规则消去量词；

如果结论中有量词，需要再把量词添上，

利用EG、UG 规则添加量词。

全称特指规则US

一. 全称特指规则 US (Universal Specialization)

形式：　$\forall x A(x) \Rightarrow A(c)$

(其中 c 是个体域内任意指定个体)

含义：如果 $\forall x A(x)$ 为真，则对个体域内任意指定个体 c，有 A(c) 为真。

作用：去掉全称量词。

存在特指规则ES

二. 存在特指规则**ES (Existential Specialization)**

形式： $\exists x A(x) \Rightarrow A(c)$

(其中 c 是个体域内使A(c)为T的某个体)

含义：如果 $\exists x A(x)$ 为真，则在个体域内一定有某个体 c，使得 A(c) 为真。

作用：去掉存在量词。

要求：用ES指定的个体c，不应该是在此之前用US规则或者用ES规则指定过的个体。

错误示例

错误推理示例1：

令 A(x)：x是自然数。B(x)：x是整数。

论域：实数集合。

两个前提：$\forall x(A(x)\rightarrow B(x))$，$\exists xA(x)$

(1) $\forall x(A(x)\rightarrow B(x))$ P

(2) $A(c)\rightarrow B(c)$ US(1) 指定c=0.1

(3) $\exists xA(x)$ P

(4) $A(c)$ × ES(3) A(0.1)为F

错误示例

错误推理示例2：

令A(x)：x是自然数。B(x)：x是整数。

论域：实数集合。

两个前提： $\exists xA(x)$， $\exists xB(x)$

(1) $\exists xB(x)$　　P

(2) $B(c)$　　ES(1)　指定c=-1

(3) $\exists xA(x)$　　P

(4) $A(c)$ ×　　ES(3)　A(-1)为F

存在推广规则 EG

三. 存在推广规则 **EG(Existential Generalization)**

形式： $A(c) \Rightarrow \exists x A(x)$

(其中 c 是个体域内某个体)

含义：如果在个体域内某个体 c 使得A(c) 为真，

则$\exists x A(x)$ 为真。

作用：添加存在量词。

全称推广规则 UG

四. 全称推广规则 **UG (Universal Generalization)**

形式： **$A(c) \Rightarrow \forall x A(x)$**

(其中**c**是个体域内任意某个个体**)**

含义：如果个体域内任意个体 **c** 均使得**$A(c)$**为真，则**$\forall x A(x)$**为真。

作用：添加全称量词。

要求：**c**是个体域内任意的某个个体，否则不可全称推广。

举例

例1. 所有金属都导电；铜是金属；故铜导电。

解： 令 M(x)：x是金属。C(x)：x导电。a：铜。

符号化为：

$$\forall x(M(x)\rightarrow C(x)),\quad M(a) \quad \Rightarrow \quad C(a)$$

(1)	$M(a)$	P
(2)	$\forall x(M(x)\rightarrow C(x))$	P
(3)	$M(a)\rightarrow C(a)$	US(2)
(4)	$C(a)$	T(1)(3)I

举例

例2、所有自然数都是整数。有些数是自然数。因此，有些数是整数。

解：令A(x)：x是自然数，B(x): x是整数。个体域：实数集合。

符号化为：$\forall x(A(x)\rightarrow B(x))$，$\exists xA(x) \Rightarrow \exists xB(x)$

(1) $\exists xA(x)$	P
(2) $A(c)$	ES(1)
(3) $\forall x(A(x)\rightarrow B(x))$	P
(4) $A(c)\rightarrow B(c)$	US(3)
(5) $B(c)$	T(2)(4)I
(6) $\exists xB(x)$	EG(5)

举例

例2如果按下面方法推理，是否正确？

$\forall x(A(x)\rightarrow B(x))$，$\exists xA(x) \Rightarrow \exists xB(x)$

(1) $\forall x(A(x)\rightarrow B(x))$　　P

(2) $A(c)\rightarrow B(c)$　　US(1)

(3) $\exists xA(x)$　　P

(4) $A(c)$　　ES(3)

(5) $B(c)$　　T(2)(4)I

(6) $\exists xB(x)$　　EG(5)

问题在哪里？

举例

例3. $\exists x(P(x) \to Q(x)) \Rightarrow \forall x P(x) \to \exists x Q(x)$

用条件论证证明：

(1) $\forall x P(x)$	P(附加前提)
(2) $\exists x(P(x) \to Q(x))$	P
(3) $P(a) \to Q(a)$	ES(2)
(4) $P(a)$	US(1)
(5) $Q(a)$	T(3)(4)I
(6) $\exists x Q(x)$	EG(5)
(7) $\forall x P(x) \to \exists x Q(x)$	CP

举例

例4. $\exists x(P(x)\rightarrow Q(x)) \Rightarrow \forall xP(x)\rightarrow\exists xQ(x)$

用反证法证明：

(1)	$\neg(\forall xP(x)\rightarrow\exists xQ(x))$	P(假设前提)
(2)	$\neg(\neg\forall xP(x)\vee\exists xQ(x))$	T(1) E
(3)	$\forall xP(x)\wedge\neg\exists xQ(x)$	T(2) E
(4)	$\forall xP(x)$	T(3) I
(5)	$\neg\exists xQ(x)$	T(3) I
(6)	$\exists x(P(x)\rightarrow Q(x))$	P
(7)	$P(a)\rightarrow Q(a)$	ES(6)
(8)	$P(a)$	US(4)
(9)	$Q(a)$	T(7)(8) I
(10)	$\exists xQ(x)$	EG(9)
(11)	$\neg\exists xQ(x)\wedge\exists xQ(x)$	T(5)(10) I

例5. 不存在能表示成分数的无理数；有理数都能表示成分数；因此，有理数都不是无理数。

解：令 $F(x)$：x是无理数，$G(x)$：x是有理数，

$H(x)$：x能表示成分数。

前提：

$\neg\exists x(F(x)\wedge H(x))$，$\forall x(G(x)\rightarrow H(x))$，

结论：

$\forall x(G(x)\rightarrow\neg F(x))$

$\neg\exists x(F(x)\wedge H(x))$， $\forall x(G(x)\rightarrow H(x))\Rightarrow\forall x(G(x)\rightarrow\neg F(x))$

(1)	$\neg\exists x(F(x)\wedge H(x))$	P
(2)	$\forall x\neg(F(x)\wedge H(x))$	T(1)E
(3)	$\forall x(\neg F(x)\vee\neg H(x))$	T(2)E
(4)	$\forall x(F(x)\rightarrow\neg H(x))$	T(3)E
(5)	$F(c)\rightarrow\neg H(c)$	US(4)
(6)	$\forall x(G(x)\rightarrow H(x))$	P
(7)	$G(c)\rightarrow H(c)$	US(6)
(8)	$H(c)\rightarrow\neg F(c)$	T(5)E
(9)	$G(c)\rightarrow\neg F(c)$	T(7) (8) I
(10)	$\forall x(G(x)\rightarrow\neg F(x))$	UG(9)

注意：

置换定律：A 是一个命题公式，X 是 A 的子公式，如果 $X\Leftrightarrow Y$，用 Y 代替 A 中的 X 得到公式 B，则 $A\Leftrightarrow B$。

置换定律对等价成立，但是对蕴含是否成立？即

A 是一个命题公式，X 是 A 的子公式，如果 $X\Rightarrow Y$，用 Y 代替 A 中的 X 得到公式 B，是否$A\Rightarrow B$?

例：$A \Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R$

$P \wedge Q \Rightarrow P$， $B \Leftrightarrow P \rightarrow R$ 是否有 $A \Rightarrow B$？

解：若 $A \Rightarrow B$，则 $A \rightarrow B \Leftrightarrow T$。

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg(P \wedge Q) \vee R) \vee (\neg P \vee R)$$

$$\Leftrightarrow ((P \wedge Q) \wedge \neg R) \vee (\neg P \vee R)$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \vee R)$$

$$\Leftrightarrow Q \vee (\neg P \vee R)$$

$$\Leftrightarrow \neg P \vee Q \vee R \Leftrightarrow T$$

置换定律对等价成立，对蕴含是否成立?

(未必成立)

由于 US 、ES、UG、EG 规则都是蕴涵式，所以必须对整个公式用这些规则，绝不可以对一个子公式用这些规则。

- 去量词时，该量词必须是公式最左边的量词，即该量词的前边无任何符号，并且它的辖域作用到公式末尾。
- 添加量词时，也要加在公式的最左边，即新加的量词前无任何符号，并且其辖域也要作用到公式的末尾。

例1. 错误的推理：

(1) $\neg\forall xP(x)$　P

(2) $\neg P(c)$　US(1)

(1)式中不是 $\forall x$ 而是 $\exists x$。

正确推理：

(1) $\neg\forall xP(x)$　P

(2) $\exists x\neg P(x)$　T(1)E

(3) $\neg P(c)$　ES (2)

例2. 错误的推理：

(1) $\forall x\exists yP(x,y)$　P

(2) $\forall xP(x,c)$　ES(1)

令 P(x,y)：y是x的生母，

显然(2)是个为假的命题。

正确推理：

(1) $\forall x\exists yP(x,y)$　P

(2) $\exists yP(a,y)$　US(1)

例3. 错误的推理：

(1) $\forall xP(x) \rightarrow \exists yQ(y)$　P

(2) $\forall xP(x) \rightarrow Q(b)$　×　ES(1)

(3)　$P(a) \rightarrow Q(b)$　×　US(2)

实际上$\forall x$的辖域扩充后量词改成为$\exists x$。

正确的推理：

(1) $\forall xP(x) \rightarrow \exists yQ(y)$　P

(2) $\neg\forall xP(x) \vee \exists yQ(y)$　T(1)E

(3) $\exists x\neg P(x) \vee \exists yQ(y)$　T(2)E

(4) $\exists x\exists y(\neg P(x) \vee Q(y))$　T(3)E

(5) $\exists y(\neg P(a) \vee Q(y))$　ES(4)

(6) $\neg P(a) \vee Q(b)$　ES(4)

(7) $P(a) \rightarrow Q(b)$　T(5)E

小杨、小刘和小林为高山俱乐部成员。该俱乐部的每个成员都是滑雪者或登山者。没有一个登山者喜欢雨。所有的滑雪者都喜欢雪。凡是小杨喜欢的，小刘都不喜欢。小杨喜欢雨和雪。问：该俱乐部是否有个成员是登山者而不是滑雪者。如果有，他是谁？

设：M(x)：x 是高山俱乐部成员。H(x)：x 是滑雪者。

D(x)：x 是登山者。L(x,y)：x 喜欢 y。

a：小杨；b：小刘；c：小林；

d：雨；e：雪。

设：M(x)：x是高山俱乐部成员。H(x)：x是滑雪者。D(x)：x是登山者。L(x,y)：x喜欢y。

a：小杨；b：小刘；c：小林；d：雨；e：雪。

该俱乐部的每个成员是滑雪者或登山者。

$\forall x(M(x)\rightarrow(H(x)\vee D(x)))$

$M(a)$, $M(b)$, $M(c)$, $\forall x(M(x)\rightarrow(H(x)\vee D(x)))$,

$\neg\exists x(D(x)\wedge L(x,d))$, $\forall x(H(x)\rightarrow L(x,e))$,

$\forall x(L(a,x)\rightarrow\neg L(b,x))$, $L(a,d)\wedge L(a,e)$

问：该俱乐部是否有个成员是登山者而不是滑雪者。如果有，他是谁？

$\exists x(M(x) \wedge D(x) \wedge \neg H(x))$

$M(a)$, $M(b)$, $M(c)$, $\forall x(M(x) \rightarrow (H(x) \vee D(x)))$, $\neg \exists x(D(x) \wedge L(x,d))$, $\forall x(H(x) \rightarrow L(x,e))$, $\forall x(L(a,x) \rightarrow \neg L(b,x))$, $L(a,d) \wedge L(a,e)$

(1)	$L(a,d) \wedge L(a,e)$	P
(2)	$L(a,e)$	T(1)I
(3)	$\forall x(L(a,x) \rightarrow \neg L(b,x))$	P
(4)	$L(a,e) \rightarrow \neg L(b,e)$	US(3)
(5)	$\neg L(b,e)$	T(2)(4)I
(6)	$\forall x(H(x) \rightarrow L(x,e))$	P
(7)	$H(b) \rightarrow L(b,e)$	US(6)
(8)	$\neg H(b)$	T(5)(7)I
(9)	$\forall x(M(x) \rightarrow (H(x) \vee D(x)))$	P
(10)	$M(b) \rightarrow (H(b) \vee D(b))$	US(9)
(11)	$M(b)$	P
(12)	$H(b) \vee D(b)$	T(10)(11)I
(13)	$D(b)$	T(8)(12)I
(14)	$D(b) \wedge \neg H(b)$	T(8)(13)I

小刘是登山者而不是滑雪者

用推理证明公式：

$\exists y \forall x A(x,y) \Rightarrow \forall x \exists y A(x,y)$

(1) $\exists y \forall x A(x,y)$ P

(2) $\forall x A(x,b)$ ES (1)

(3) $A(a,b)$ US (2)

(4) $\exists y A(a,y)$ EG (3)

(5) $\forall x \exists y A(x,y)$ UG (4)

令 A(x,y)：x与y是朋友，论域：{人}

$\exists y \forall x A(x,y)$：存在着一个人他同所有人都是朋友。

$\forall x \exists y A(x,y)$：每个人都有朋友。

为什么没有公式：

$\forall x \exists y A(x,y) \Rightarrow \exists y \forall x A(x,y)$ ？

(1) $\forall x \exists y A(x,y)$ P

(2) $\exists y A(a,y)$ US (1)

(3) $A(a,b)$ ES (2)

(4) $\forall x A(x,b)$ UG (3)

(5) $\exists y \forall x A(x,y)$ EG (4)

令 A(x,y)：x与y是朋友，论域：{人}

A(a,b)：b是任意指定的a的朋友。

b仅对a成立，并不对任意 x 成立。

所以第（4）步，用UG规则错误。

数理逻辑总结

- **命题逻辑**
  - 命题和联结词
  - 命题公式与翻译
  - 真值表和等价公式
  - 范式
  - 命题逻辑的推理
- **谓词逻辑**
  - 谓词和量词
  - 谓词公式与翻译
  - 变元的约束
  - 谓词永真公式
  - 谓词逻辑的推理

谢 谢