2023 级《线性代数 I》期末考试试题(A)参考答案

一、填空题（1-10 小题，每小题 5 分，共 50 分）

1、 $16a^2b^2$

2、 -8

3、 $16\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4、 $B-E$

5、 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

6、 3

7、 $\dfrac{5}{2}$

8、 -2

9、 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}(k_1,k_2\in R)$

10、 $(1,+\infty)$

二、计算题（11-13 小题，每小题 12 分，共 36 分）

11、解：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ -1 & k & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & k+1 & k+1 \\ 0 & -2 & 2-k \end{vmatrix}=(k+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2-k \end{vmatrix}=(k+1)(4-k)$

(1) 当 $k\neq -1$且$k\neq 4$时，系数矩阵 A 的行列式非零，方程组有唯一解.

(2) 当 $k=-1$时，$(A\mid b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & -8 \end{array}\right)$,

$r(A)=2<r(A\mid b)=3$，方程组无解.

(3) 当 $k=4$时，$(A\mid b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & 4 & 1 & 16 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$,

$r(A)=r(A\mid b)=2<3$，方程组有无穷多解，

通解为$k\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}(k\in R)$

12、解：记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$，有

$$A=\begin{pmatrix}1&0&3&1&1\\-1&3&0&-2&3\\2&1&7&2&3\\4&2&14&0&10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&1&1\\0&3&3&-1&4\\0&1&1&0&1\\0&2&2&-4&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&1&1\\0&1&1&3&-2\\0&1&1&0&1\\0&1&1&-2&3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&3&1&1\\0&1&1&3&-2\\0&0&0&-3&3\\0&0&0&-5&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&1&1\\0&1&1&3&-2\\0&0&0&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&0&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

可得向量组的秩为 3，

可取极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$，

$\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2$， $\alpha_5=2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_4$.

13、解：该二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&4&0\\0&0&5\end{pmatrix}$，有

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&0\\2&4-\lambda&0\\0&0&5-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)(\lambda^2-5\lambda)=-\lambda(\lambda-5)^2$$

所以，A 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=5$.

(1) 当 $\lambda_1=0$ 时，求解 $AX=0$，

$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&4&0\\0&0&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，解得特征向量 $p_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$，于是 $q_1=\begin{pmatrix}\frac{-2}{\sqrt5}\\\frac{1}{\sqrt5}\\0\end{pmatrix}$；

(2) 当 $\lambda_2=\lambda_3=5$ 时，求解 $(A-5E)X=0$，因为

$A-5E=\begin{pmatrix}-4&2&0\\2&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，得到特征向量 $p_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},p_3=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$,

于是 $q_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}\\\frac{2}{\sqrt5}\\0\end{pmatrix},q_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

令 $Q=(q_1\quad q_2\quad q_3)$，则 Q 为正交矩阵，

令在正交变换 $x=Qy$ 下，有 $f(x_1,x_2,x_3)=5{y_2}^2+5{y_3}^2$.

三、证明题（14-15 小题，每小题 7 分，共 14 分）

14、证明：因为$(A^{\mathrm{T}}A)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}A$，所以$A^{\mathrm{T}}A$是对称矩阵.

对任意向量x，有$f = x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)x = (Ax)^{\mathrm{T}}Ax = \|Ax\|^2 \geq 0$，

当且仅当$Ax = 0$时，等号成立.
对于任意$x \neq 0$，因为A可逆，所以$Ax \neq 0$，

此时$f = x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)x > 0$恒成立，所以$A^{\mathrm{T}}A$正定.

15、证明：由$A^2 = E$，得$(A-E)(A+E) = 0$，所以$r(A-E)+r(A+E) \leq n$.

又因为$r(A+E)+r(A-E) \geq r((A+E)-(A-E)) = r(2E) = n,$

综上有$r(A+E)+r(A-E) = n$.