3-12 序关系

次序关系

次序关系是另一类常遇到的重要关系，

例如：

数值的≤、＜、≥、＞关系；

集合的⊆、⊂关系；

图书馆的图书按书名的字母次序排序；

词典中的字(词)的排序；

计算机中文件按文件名排序；

程序按语句次序执行；……

偏序关系

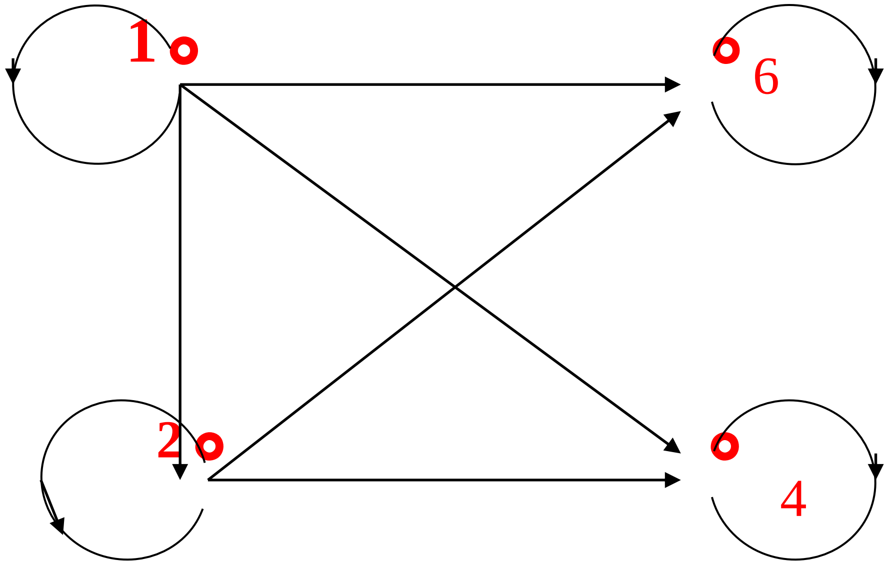
一、偏序关系(partial order relation)

1. 定义：若R是A上的**自反**、**反对称**和**传递**的关系，则称 R 是A上的**偏序关系**。并称<A,R>是**偏序集**。

因为数值≤是熟知的偏序关系，所以用符号“≼”表示任意偏序关系。

偏序关系

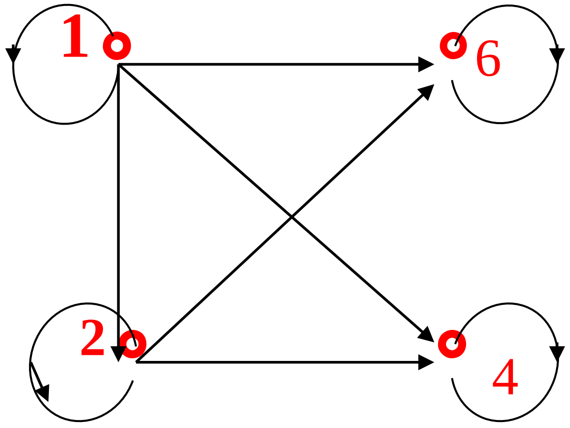
例1 A={1,2,4,6}，≼是A上的整除关系，其关系图如右图，则≼是自反、反对称和传递的，即它是个偏序关系。



偏序关系

2. x与y是可比较的：<A, ≼>是偏序集，x,y∈A,

如果要么 **x≼y**，要么 **y≼x**， 则称 **x** 与 **y** 是可比较的。



上例中 **1,2,4** 或 **1,2,6** 之间是可比较的，

而 **4** 与 **6** 之间是不可比较的。

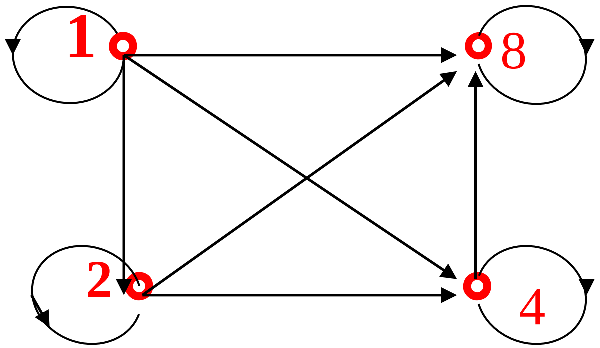
全序关系

二、全序(线序、链)

定义：<A, ≼ >是偏序集，对任何x,y∈A，如果x与y都是可比较的，则称≼是全序关系(线序、链)。

例2　A={1,2,4,8},

≼表示整除关系，如图：



则≼是全序关系，

全序关系一定是偏序关系，但是偏序不一定是全序。

哈斯图

偏序关系的有向图，不能直观地反映出元素之间的次序，

所以下面介绍另外一种图--- **Hasse**图。

通过**Hasse**图，就能够清晰地反映出元素间的次序。

偏序集的哈斯图

三、偏序集的哈斯图(Hasse图)

$<A, \preccurlyeq>$是偏序集，$x,y\in A$

1.元素y盖住元素x:

如果$x \preccurlyeq y$，且$x\neq y$，且不存在$z\in A$，使得

$$z\neq x \wedge z\neq y \wedge x \preccurlyeq z \wedge z \preccurlyeq y,$$

则称元素y盖住元素x。

元素y盖住x $\Leftrightarrow x \preccurlyeq y \wedge x\neq y \wedge \neg\exists z(z\in A \wedge z\neq x \wedge z\neq y \wedge x \preccurlyeq z \wedge z \preccurlyeq y)$

即元素y盖住元素x⇔不存在$z\in A$，使得z介于x与y之间。

偏序集的哈斯图

记 Cov A={<x,y>/ x∈A∧y∈A∧y**盖住**x}

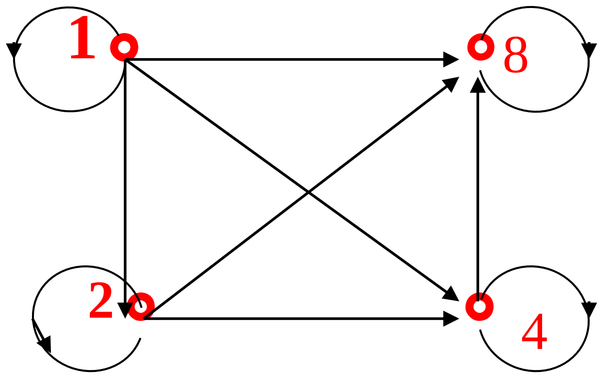
A={1,2,4,8},

≼ 表示整除关系，如图：

2 盖住1，

4 没有盖住1，

因为中间有个2， 1≼2≼4。



Cov A={<1,2>,<2,4>,<4,8>}

偏序集的哈斯图

2.偏序集Hasse图的画法： 令<A, ≼ >是偏序集，

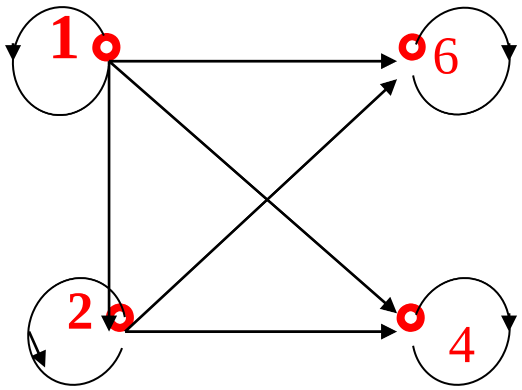
- 用“ ∘ ”表示A中元素。
- 如果x ≼ y，且x≠y，则结点y要画在结点x的上方。
- 如果x ≼ y，且y盖住x，x与y之间连一直线。
- 一般先从最下层结点，逐层向上画，直到最上层结点 。

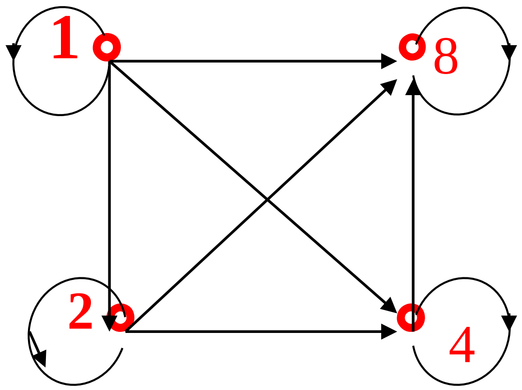
思考：哈斯图边的方向？

只能向上。

偏序集的哈斯图

例如，前边两个例子：



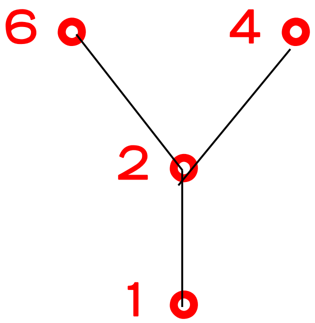


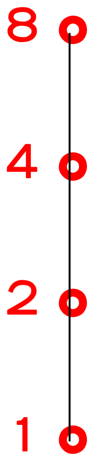
Cov A= {<1,2>,<2,4>,<2,6>}

Cov A= {<1,2>,<2,4>,<4,8>}

偏序集的哈斯图

它们的Hasse图分别如下：





可见右图，是**全序**，它的Hasse图是一条**直线**，所以全序也叫**线序**，或**链**。

偏序集的哈斯图

练习：

1、 C={1,2,3,6,12,24,36},

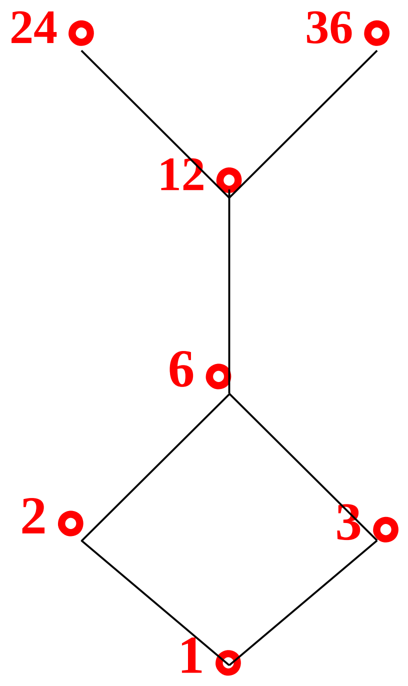
≼ 是C、D上整除关系，

画< C, ≼ >的Hasse图。

Cov A=

{<1,2>,<1,3>,<2,6>,<3,6>,

<6,12>,<12,24>,<12,36>}



偏序集中的重要元素

四、偏序集中的重要元素

设<A, $\preccurlyeq$ >是偏序集，B是A的非空子集。

1、极小元与极大元

y是B的极小元

$\Leftrightarrow \exists y(y \in B \wedge \neg \exists x(x \in B \wedge x \neq y \wedge x \preccurlyeq y))$

(在B中没有比y更小的元素了，y就是极小元)

y是B的极大元

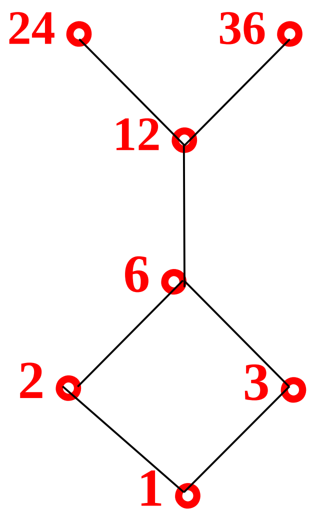
$\Leftrightarrow \exists y(y \in B \wedge \neg \exists x(x \in B \wedge x \neq y \wedge y \preccurlyeq x))$

(在B中没有比y更大的元素了，y就是极大元)

极小元与极大元

例：给定<A, ≼ >的Hasse图如图所示：

子集B	极小元	极大元
{2,3}	2, 3	2, 3
{1,2,3}	1	2, 3
{6,12,24}	6	24
A	1	24,36



从Hasse图找极小(大)元：

子集B中处在最下层的元素是极小元。

子集B中处在最上层的元素是极大元。

最小元与最大元

2、最小元与最大元

y是B的最小元⇔

$$\exists y(y\in B\wedge\forall x(x\in B\rightarrow y\preccurlyeq x))$$

(最小元y是B中元素，该元素比B中所有元素都小)

y是B的最大元⇔

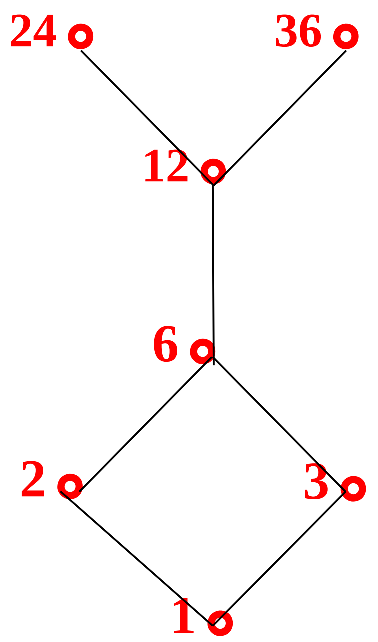
$$\exists y(y\in B\wedge\forall x(x\in B\rightarrow x\preccurlyeq y))$$

(最大元y是B中元素，该元素比B中所有元素都大)

举例

例：给定<A, ≼ >的Hasse图如图所示：

子集B	最小元	最大元
{2,3}	无	无
{1,2,3}	1	无
{6,12,24}	6	24
A	1	无



定理

定理1 <A, ≼ >是偏序集，B是A的非空子集，如果B有最小元(最大元)，则最小元(最大元)是唯一的。

证明：假设B有两个最小元**a**、**b**，则

因为**a**是最小元，**b**∈**B**，根据最小元定义，有**a**≼**b**;

类似地，因为**b**是最小元，**a**∈**B**，根据最小元定义，

有**b**≼**a**。

因为≼有反对称性，所以有 **a=b**。

同理可证最大元的唯一性。

定理

小结：<A, ≼ >是偏序集，B是A的非空子集，则

⑴ B的极小(大)元总是存在的，就是子集B中处在最下(上)层的元素是极小(大)元。

⑵ B的最小元(最大元)有时可能不存在，若存在一定唯一。

上界与下界

3、上界与下界 (Upper Bound and Lower Bound)

y是B的上界⇔

$$\exists y(y\in A\wedge\forall x(x\in B\rightarrow x\preccurlyeq y))$$

(上界y是A中元素，该元素比B中所有元素都大)

y是B的下界⇔

$$\exists y(y\in A\wedge\forall x(x\in B\rightarrow y\preccurlyeq x))$$

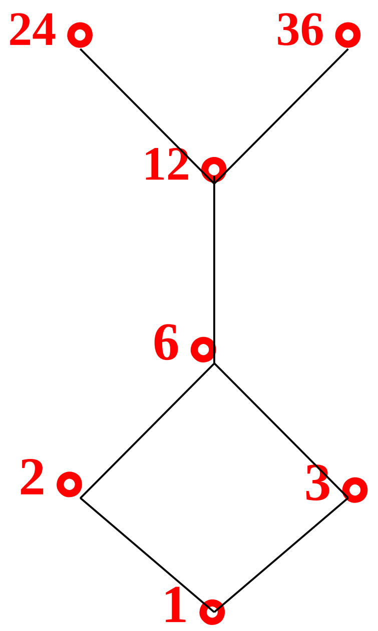
(下界y是A中元素，该元素比B中所有元素都小)

上界与下界

例：给定<A, ≼ >的Hasse图如图所示：

从Hasse图找上(下)界：注意是在A中找！

子集B	上界	下界
{2,3}	6,12,24,36	1
{1,2,3}	6,12,24,36	1
{6,12,24}	24	6,2,3,1
A	无	1



上确界与下确界

4、最小上界(上确界)和最大下界(下确界)

(Least Upper Bound and Greatest Lower Bound)

上确界：y是B的上界，并且对B的所有上界x，都有y≼x，则称y是B的最小上界(上确界)。

记作　LUB B=y 。

(即y是上界中的最小元。如果B有上确界，则是唯一的)

下确界：y是B的下界，并且对B的所有下界x，都有x≼y，则称y是B的最大下界(下确界)。

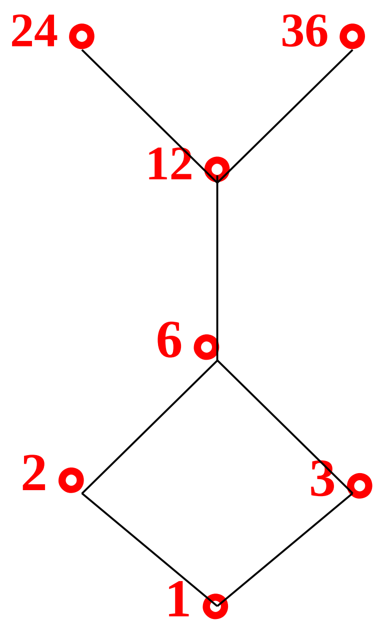
记作　GLB B=y 。

(即y是下界中的最大元。如果B有下确界，则是唯一的)

上确界与下确界

例：给定<A, ≼ >的Hasse图如图所示：

子集B	上界	上确界	下界	下确界
{2,3}	6,12,24,36	6	1	1
{1,2,3}	6,12,24,36	6	1	1
{6,12,24}	24	24	1,2,3,6	6
A	无	无	1	1



良序

五. 良序

良序集定义：$<A, \preccurlyeq>$是偏序集，如果对A的任何非空子集B，都有最小元，则称 $\preccurlyeq$ 是A 上的良序关系，并称 $<A, \preccurlyeq>$为良序集。

例如：

N是自然数集合， $<N, \leq>$就是良序集

良序

定理2 所有良序集，一定是全序集。

证明：设<A, ≼ >为良序集，任取 x,y∈A，构造子集 {x,y}，它有最小元，该最小元或是x或是y，于是有x ≼ y 或 y ≼ x，即x与y可比较，

所以<A, ≼ >是全序集。

所有全序集是不是良序集？

反例：I是整数集合，≤ 是小于等于关系，

< I, ≤> 是全序集 但不是良序集。

良序

定理3　有限的全序集，一定是良序集。

证明：设有限集合 $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$，$<A,\preccurlyeq>$是全序集，

假设它不是良序集，则必存在非空子集

$B\subseteq A$，使得在B中无最小元，

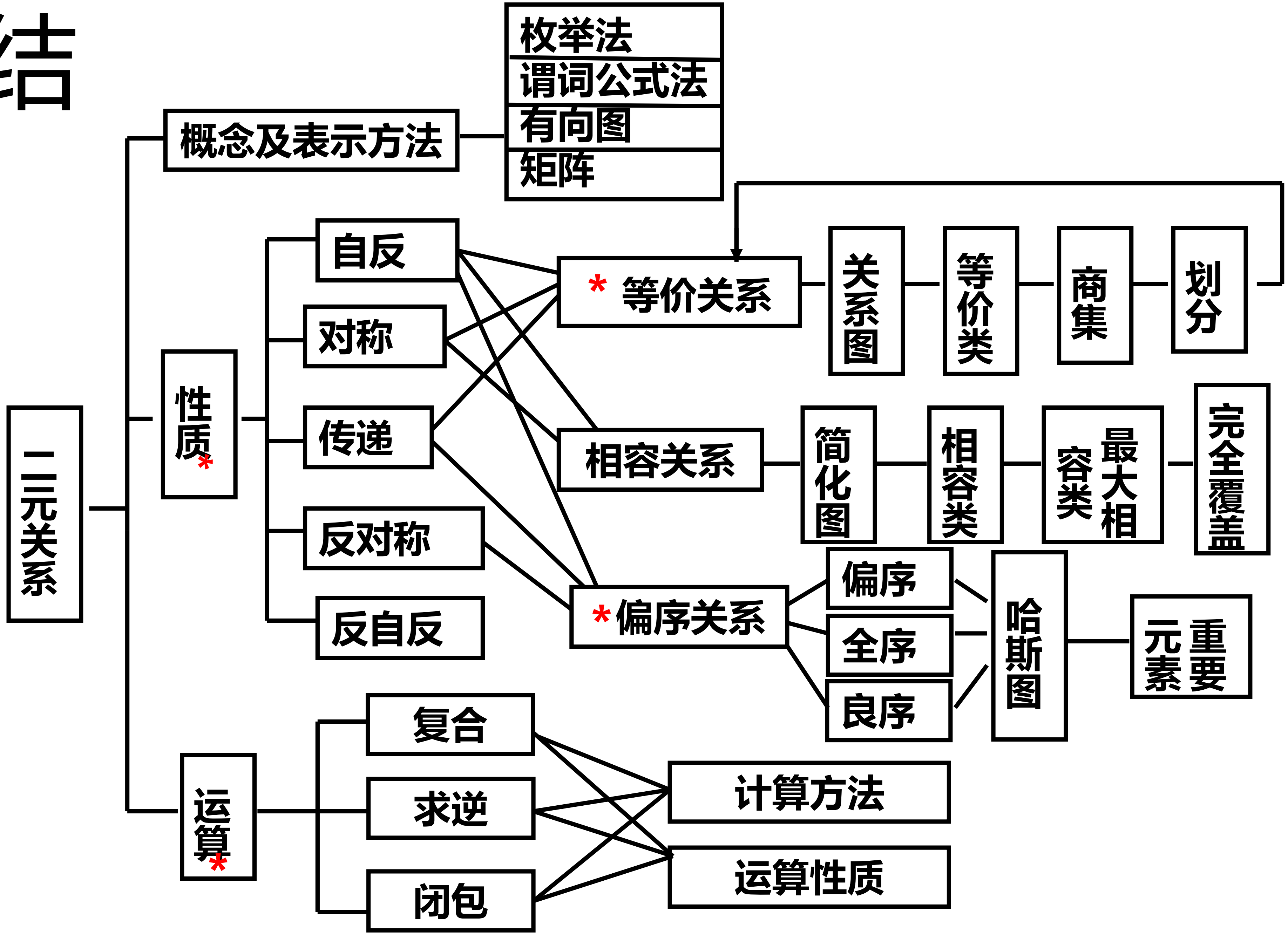
因B是有限集合，所以必存在元素 $x,y\in B$，

使得 x 与 y 不可比较，

这与 $\preccurlyeq$ 是全序关系矛盾，所以

$<A,\preccurlyeq>$是良序集。

关系总结



二元关系
概念及表示方法
枚举法
谓词公式法
有向图
矩阵
性质*
自反
对称
传递
反对称
反自反
* 等价关系
关系图
等价类
商集
划分
相容关系
简化图
相容类
最大相容类
完全覆盖
*偏序关系
偏序
全序
良序
哈斯图
重要元素
运算*
复合
求逆
闭包
计算方法
运算性质

第三章总结

主要知识点：

(1) 集合和元素的概念，集合与元素之间的关系（属于和不属于），集合及元素的表示。

(2) 子集的概念，集合间相等、包含、真包含，集合的幂集的概念。

(3) 集合的基本运算，如并、交，补（绝对补）、差（相对补）、对称差的概念及性质。

第三章总结

(4) 序偶（二元组）、n元组，笛卡尔积（直积）的概念及性质。

(5) 二元关系、n元关系的概念，表示方法（集合表达式、关系矩阵和关系图），关系的定义域和值域的概念。

(6) 二元关系的性质：自反性、反自反性、对称性、反对称性和传递性；掌握利用关系的不同表示获得关系所具有性质的方法。

第三章总结

(7) 特殊的二元关系：空关系、恒等关系、全域关系、等价关系、相容关系、序关系（偏序关系、全序关系、良序关系）

(8) 等价类、商集的概念。

(9) 等价关系对应一个划分，相容关系对应一个覆盖。

(10) 关系的运算及其性质。关系的基本运算就是集合的基本运算，即并、交、补、差、对称差；关系的复合（合成）运算及逆运算、闭包运算（自反闭包、对称闭包、传递闭包）。闭包的有关性质。

第三章总结

(11)偏序关系是一种具备自反性、反对称性和传递性的二元关系，而（A，≤）称为偏序集。

(12)偏序关系的关系图用哈斯图表示，哈斯图中一定没有三角形那样的子图。一般地，哈斯图中没有水平方向的边。

(13)重点掌握利用哈斯图判断成员关系的方法，如：最大元、最小元、极大元、极小元、上界、下界、最小上界（上确界）、最大下界（下确界）的概念及判定。

第三章总结

(14) 全序关系要求偏序集中的任意两个元素都要可以比较；良序关系要求偏序集的任意一个子集均有最小元。

谢 谢