# 2020级秋线性代数1-A 参考答案

一、 **计算题**（1-8小题，每小题6分，共48分）

1. 设$\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}2&5\\0&3\end{pmatrix}=12\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$，求$X$.

解：
$$\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}2&5\\0&3\end{pmatrix}=12\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}X=12\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&5\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&7\\12&9\end{pmatrix}$$ 3'

$$\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}10&7\\12&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\4&3\end{pmatrix}$$ 3'

2. 计算四阶行列式$\begin{vmatrix}1+x&1&1&1\\1&1-x&1&1\\1&1&1+y&1\\1&1&1&1-y\end{vmatrix}$

解：
$$\begin{vmatrix}1+x&1&1&1\\1&1-x&1&1\\1&1&1+y&1\\1&1&1&1-y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x&x&0&0\\1&1-x&1&1\\0&0&y&y\\1&1&1&1-y\end{vmatrix}=xy\begin{vmatrix}1&1&0&0\\1&1-x&1&1\\0&0&1&1\\1&1&1&1-y\end{vmatrix}$$ 3'

$$=xy\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1-x&1&1\\0&0&1&1\\1&1&1&1-y\end{vmatrix}=xy\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-x&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&-y\end{vmatrix}=xy\begin{vmatrix}-x&0&0\\0&1&1\\0&0&-y\end{vmatrix}=x^2y^2.$$ 3'

3. 求$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^{2020}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^{2021}$。

解：
$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^{2020}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^{2021}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^{2021}=\begin{pmatrix}1&2+2021\\3&4+6063\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2023\\3&6067\end{pmatrix}$$
3' 3'

4. 设$A$是一个$3\times4$矩阵，其秩$rank(A)=2$，方程组$Ax=b$有三个特解

$\alpha=(1,2,-1,2)^T$, $\beta=(2,-1,1,3)^T$, $\gamma=(3,2,-2,1)^T$, 求其通解。

解：由题意可知, 方程组$Ax=0$的基础解系含有两个线性无关的解向量。

$\beta-\alpha=(1,-3,2,1)^T$，$\gamma-\alpha=(2,0,-1,-1)^T$为$Ax=0$的解，且线性无关，故可作为基础解系，于是通解为

4'

$$x = k_1\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\1\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\2\\-2\\1\end{pmatrix},\ k_1, k_2 \text{为任意实数。}$$ 2'

5. 求$\mathbb{R}^3$中向量$\alpha = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$在基 $\alpha_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$， $\alpha_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$， $\alpha_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$下的坐标。

解：设$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$，则 2'

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^{-1}\alpha = \begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$ 4'

6. 在$\mathbb{R}^2$中，求从基$\alpha_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$到另一组基$\beta_1 = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$， $\beta_2 = \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ 的过渡矩阵。

解：设 $\beta_1 = a\alpha_1 + b\alpha_2 = (\alpha_1, \alpha_2)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$， $\beta_2 = c\alpha_1 + d\alpha_2 = (\alpha_1, \alpha_2)\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$，即

$$(\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1, \alpha_2)\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\text{。}$$ 3'

过渡矩阵 $\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2)^{-1}(\beta_1, \beta_2) = \begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&3\\3&5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&4\\-1&-1\end{pmatrix}$ 3'

7. 设$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&a\\d&e&f\\b&\frac{1}{\sqrt{2}}&c\end{pmatrix}$为正交矩阵，$f>0$，求$a,b,c,d,e,f$ .

解：由第一行的平方和为 1 可得$a=0$,

第一行于第三行点乘为 0：$b\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 0\cdot c = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

第三行的平方和为 1 可得$c=0$， 3'

由最后一列的平方和是 1 及$f>0$得$f=1$.

由第二行的平方和为 1 可得$d=e=0$ 3'

即矩阵为 $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$

8. 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+tx_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$ 正定，求 $t$ 的取值范围。

**解**：二次型的矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix}$ 3'

它的三个顺序主子式为：$2$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=5$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & t \end{vmatrix}=5t-3$

由二次型正定可得 $t>\frac{3}{5}$. 3'

二、**解答题**（9-11 小题，每小题 12 分，共 36 分）

9. 当 $a,b$ 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1 \quad\ +2x_3+2x_4=1 \\ -x_1 \quad\ -2x_3+(a-3)x_4=b \\ 2x_1+3x_2+ax_3+x_4=-1 \end{cases}$ 无解，有唯一解，有无穷多解，并在有无穷多解时求出通解。

**解**：对方程组的增广矩阵进行初等行变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & a-3 & b \\ 2 & 3 & a & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a-2 & b \\ 0 & 1 & a-2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & a-2 & b \\ 0 & 1 & a-2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & b+1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & b+1 \end{pmatrix}$$ 3'

当$a \neq 1$时，$rank(A|b) = rank(A) = 4$，方程组有唯一解；　　2'

当$a = 1$，$b \neq -1$时，$rank(A) = 2 < rank(A|b) = 3$，方程组无解；2'

当$a = 1, b = -1$时，$rank(A) = 2 = rank(A|b) = 2$，方程组有无穷多解；继续初等行变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

此时方程组的特解和导出组的基础解系为

$$\xi^* = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

通解：$x = \xi^* + k_1\xi_1 + k_2\xi_2$，　　$k_1, k_2$为任意常数.　　5'

10. 求向量组$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$，$\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\alpha_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$的秩和极大无关组，并将其余向量用极大无关组表示。

**解**：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　3'

所以$rank(\alpha_1, \cdots, \alpha_5) = 2$，　　3'

极大无关组可取为$\alpha_1, \alpha_2$.

$$\alpha_3 = 3\alpha_1 - 5\alpha_2,$$

$$\alpha_4 = \alpha_1 - 2\alpha_2,$$

$$\alpha_5 = 2\alpha_1 - 3\alpha_2,$$　　6'

11. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$，求可逆矩阵 $P$，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

**解**：解特征方程 $|A-\lambda E|=0$ 得特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=5$. 3'

解线性方程组 $(A-E)x=0$ 得特征向量

$$\xi_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2=\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad 4'$$

解线性方程组 $(A-5E)x=0$ 得特征向量

$$\xi_3=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad 3'$$

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$. 2'

三、**证明题**（12-13 小题，每小题 8 分，共 16 分）

12. 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，证明：向量组 $\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_1$ 线性无关，而向量组 $\alpha_1-\alpha_2, \alpha_2-\alpha_3, \alpha_3-\alpha_1$ 线性相关。

证明：设 $k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)=0$,

于是 $(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0$。

由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关可得 $k_1+k_3=0, \quad k_1+k_2=0, \quad k_2+k_3=0$ 3'

而此方程组有唯一解 $k_1=k_2=k_3=0$, 故向量组 $\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_1$ 线性无关。2'

由 $(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3)+(\alpha_3-\alpha_1)=0$, 可知 $\alpha_1-\alpha_2, \alpha_2-\alpha_3, \alpha_3-\alpha_1$ 有一个非零的线性组合为零，组合系数为 1，1，1，故向量组 $\alpha_1-\alpha_2, \alpha_2-\alpha_3, \alpha_3-\alpha_1$ 线性相关。3'

13. 设三阶矩阵 $A$ 有三个不同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，对应的特征向量为 $\alpha_1$， $\alpha_2$，$\alpha_3$，令 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，证明：$\beta$，$A\beta$，$A^2\beta$ 线性无关.

证明：依题意 $A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i$，$i=1,2,3$． 因此

$$A\beta=A(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3,$$

$$A^2\beta=\lambda_1^2\alpha_1+\lambda_2^2\alpha_2+\lambda_3^2\alpha_3,$$ 3'

设 $k_1\beta+k_2A\beta+k_3A^2\beta=0$.

于是

$$(k_1+k_2\lambda_1+k_3\lambda_1^2)\alpha_1+(k_1+k_2\lambda_2+k_3\lambda_2^2)\alpha_2+(k_1+k_2\lambda_3+k_3\lambda_3^2)\alpha_3=0$$

由于不同特征值对应的特征向量是线性无关的，从而

$$\begin{cases} k_1+k_2\lambda_1+k_3\lambda_1^2=0, \\ k_1+k_2\lambda_2+k_3\lambda_2^2=0, \\ k_1+k_2\lambda_3+k_3\lambda_3^2=0. \end{cases}$$ 2'

此方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{vmatrix}=(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_1)\neq 0,$$

从而方程组只有零解，即 $k_1=k_2=k_3=0$，从而 $\beta$，$A\beta$，$A^2\beta$ 线性无关. 3'