2022 级高等数学 I（2）A 卷参考答案

一、填空题（1-12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

1. $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{1}$；　**2.** $x-y+2z=\sqrt{\dfrac{11}{2}}$；　**3.** 3；　**4.** $\dfrac{1}{z^2-1}$

5. $3\sqrt{2}$；　**6.** π；　**7.** $\dfrac{16}{9}$；　**8.** 5π；

9. $\dfrac{\pi}{2}(1+\sqrt{2})$；　**10.** $y=\dfrac{\sin x+1}{x}$；　**11.** $y=e^{2x}$，

12. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+xe^{-x}+\sin x-3\cos x$

二、解答题（13-16 小题，每小题 7 分，共 28 分）

13. 求函数 $f(x,y)=2x^2+y^2-8x-2y$ 在闭区域 $D=\{(x,y)\,|\,2x^2+y^2\le 1\}$ 上的最大值和最小值。

解：根据连续函数的性质，此函数的最值存在。

令 $f_x=4x-8=0, f_y=2y-2=0$，得驻点 $M(2,1)$,但此点不在闭区域内，故最值只能在边界上取得。 ……………………………………………………………………2'

作 Lagrange 函数 $L(x,y;\lambda)=2x^2+y^2-8x-2y+\lambda(2x^2+y^2-1)$ ………………………1'

令 $\begin{cases} L_x=4x-8+4\lambda x=0 \\ L_y=2y-2+2\lambda y=0 \\ L_\lambda=2x^2+y^2-1=0 \end{cases}$

得可能的极值点 $M_2(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$，$M_3(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$ ……………………………3'

比较 $f(M_2)=-5, f(M_3)=7$，得 $f_{max}=f(M_3)=7$，$f_{min}=f(M_2)=-5$ ………………1'

解法二(参数方程结合三角函数极值)：令 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta, y=\sin\theta$， ……………………………2'

则有

$$f(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta,\sin\theta)=1-4\sqrt{2}\cos\theta-2\sin\theta=1-2(2\sqrt{2}\cos\theta+\sin\theta)=1-6\sin(\theta+\varphi)$$

……………………………3'

从而得知 $f_{max}=f(M_3)=7$，$f_{min}=f(M_2)=-5$. ……………………………2'

14. 设 Γ 是由起点(1,0)经 $y=1-x^2$ 到(-1,0)的一段，计算曲线积分 $\int_\Gamma \frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}$.

解：令 $P(x,y)=\frac{x-y}{x^2+y^2}$， $Q(x,y)=\frac{x+y}{x^2+y^2}$，则

$$P_y=\frac{-x^2-2xy+y^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad Q_x=\frac{-x^2-2xy+y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

故 $Q_x=P_y$，所以积分与路径无关。....................................3'

取 C 为连接(1,0)到(-1,0)的圆周，逆时针方向：

$$\begin{cases} x=\cos\theta, \\ y=\sin\theta, \end{cases} \quad 0\le\theta\le\pi$$

....2'

原积分= $\int_0^\pi \left[(\cos\theta-\sin\theta)(-\sin\theta)+(\cos\theta+\sin\theta)\cos\theta\right]d\theta=\pi$. ....2'

15. 设 Σ 是旋转抛物面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 介于 $z=0$ 和 $z=2$ 之间的部分，当 Σ 取上侧时，计算曲面积分 $\iint_\Sigma (z^2+x)dydz+ydzdx-zdxdy$.

解： 补充平面 Σ_1： $\begin{cases} x^2+y^2\le 4 \\ z=2 \end{cases}$，取下侧。......................................1'

应用 Gauss 公式，得

$$\iint_\Sigma + \iint_{\Sigma_1} = \oiint_{\Sigma+\Sigma_1}(z^2+x)dydz+ydzdx-zdxdy=-\iiint_V(1+1-1)dV$$
$$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho d\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^2 dz=-4\pi$$

....2'(Gausss)+2'(三重积分)=4'

又 $\iint_{\Sigma_1}(z^2+x)dydz+ydzdx-zdxdy=\iint_{\Sigma_1}-zdxdy=-\iint_{(\Sigma_1)_{xy}}-2dxdy=8\pi$

....2'

故 $\iint_\Sigma (z^2+x)dydz+ydzdx-zdxdy=-12\pi$.

16. 设函数 $f(u)$ 具有连续的二阶导数，且 $z=f(e^x\sin y)$ 满足方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{2x}z$，求函数 $f(u)$ 的表达式.

解： 设 $u=e^x\sin y$，则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)e^x\sin y,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)e^x\cos y$$ ....**2'**

所以，$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(u)e^{2x}\sin^2 y+f'(u)e^x\sin y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)e^{2x}\cos^2 y-f'(u)e^x\sin y$$ ....**2'**

代入方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{2x}z$，得

$$f''(u)e^{2x}\sin^2 y+f'(u)e^x\sin y+f''(u)e^{2x}\cos^2 y-f'(u)e^x\sin y=e^{2x}z$$

即 $f''(u)e^{2x}=f(u)e^{2x}$

由此得微分方程 $f''(u)-f(u)=0$ ....**1'**

解此二阶线性微分方程，得其通解为

$$f(u)=C_1e^u+C_2e^{-u}$$ （C_1 与 C_2 为任意常数）.....................................**2'**

此即为所求函数.

三、证明题（**17-18** 小题，每小题 **6** 分，共 **12** 分）

17. 用二元函数可微的定义证明函数 $f(x,y)=e^{xy}$ 在 $(0,0)$ 点处可微。

证明：$f_x(0,0)=0$，　$f_y(0,0)=0$，

$$\left|\frac{f(x,y)-0x-0y-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\cdots\cdots\cdots 2'$$

$$=\left|\frac{e^{xy}-1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\left|\frac{e^{xy}-1}{xy}\right|\cdot\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\cdots\cdots\cdots 2'$$

$$\le\left|\frac{e^{xy}-1}{xy}\right|\cdot\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2}\left|\frac{e^{xy}-1}{xy}\right|\sqrt{x^2+y^2}\to 1\cdot 0=0\qquad(\sqrt{x^2+y^2}\to 0\Rightarrow xy\to 0)\cdots\cdots\cdots 2'$$

所以 $f(x,y)=e^{xy}$ 在点 $(0,0)$ 处可微且 $df(0,0)=0$.

18. 已知平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le\pi,0\le y\le\pi\}$，记其正向边界为 L，证明

$$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx\ge\frac{5}{2}\pi^2$$

证明：

$$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx\overset{Green}{=\!=\!=\!=\!=}\iint_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})dxdy\cdots\cdots\cdots 1'$$

$$=\iint_D e^{\sin y}dxdy+\iint_D e^{-\sin x}dxdy$$

$$\overset{\text{轮换对称性}}{=\!=\!=\!=\!=}\iint_D e^{\sin x}dxdy+\iint_D e^{-\sin x}dxdy\cdots\cdots\cdots 2'$$

$$=\iint_D(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dxdy\qquad(\because e^x+e^{-x}>2+x^2)$$

$$\ge\iint_D(2+\sin^2 x)dxdy\cdots\cdots\cdots 2'$$

$$=\int_0^\pi dy\int_0^\pi(2+\sin^2 x)dx=\frac{5}{2}\pi^2\ \cdots\cdots\cdots 1'$$

1. 过点 $P\left(-1,\quad 2,\quad 3\right)$，且与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 都平行的直线的对称式方程为

____________________________.

解：所求直线 l 过点 $P\left(-1,\quad 2,\quad 3\right)$，设其方向向量为 s.

由于 l 平行于平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$，所以其方向向量 s 同时垂直于向量 $n_1=(1,0,2)$ 与 $n_2=(0,1,-3)$.

因此，方向向量 $\vec{\mathbf{s}}$ 可取为，$s=n_1\times n_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}=-2i+3j+k$.

从而所求直线方程为 $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{1}$.

2. 椭球面 $x^2+2y^2+z^2=1$ 的上半部分($z\geq 0$)上平行于平面 $x-y+2z=0$ 的切平面的一般方程为________________________.

解： 设切点为(x,y,z), 则曲面在该点处的法向量为 $n=(2x,4y,2z)$，依据题设 $n=(2x,4y,2z)$ 平行于平面的法向量 (1,-1,2) 且 $x^2+2y^2+z^2=1$，解得

$$(x,y,z)=\left(\sqrt{\frac{2}{11}},-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}},2\sqrt{\frac{2}{11}}\right).$$

切平面的方程为

$$\sqrt{\frac{2}{11}}\left(x-\sqrt{\frac{2}{11}}\right)-\sqrt{\frac{2}{11}}\left(y+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}\right)+2\sqrt{\frac{2}{11}}\left(z-2\sqrt{\frac{2}{11}}\right)=0$$

$$\Rightarrow\left(x-\sqrt{\frac{2}{11}}\right)-\left(y+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}\right)+2\left(z-2\sqrt{\frac{2}{11}}\right)=0$$

$$\Rightarrow x-y+2z=\sqrt{\frac{11}{2}}$$

3. 设 $f(x,y)$ 可微，且 $f(x,4x)=x^5$，$f_y(1,4)=\dfrac{1}{2}$，则 $f_x(1,4)=$________.

解 $f(x,4x)=x^5 \Rightarrow f_x(x,4x)+4f_y(x,4x)=5x^4 \Rightarrow f_x(1,4)+4f_y(1,4)=5$

因为 $f_y(1,4)=\dfrac{1}{2}$，所以 $f_x(1,4)=3$。

4. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x+2y+3z=z^3$ 所确定的隐函数，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$__________.

解： $x+2y+3z=z^3 \Rightarrow 1+3z_x=3z^2z_x \Rightarrow z_x=\dfrac{1}{3z^2-3}$

$$x+2y+3z=z^3 \Rightarrow 2+3z_y=3z^2z_y \Rightarrow z_y=\frac{2}{3z^2-3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{z^2-1}$$

5. 函数 $u=xy^2\sqrt{z}$ 在点 $P(2,-1,1)$ 处的方向导数的最大值为____________.

解： $gradu=(u_x,u_y,u_z)=(y^2\sqrt{z},2xy\sqrt{z},\dfrac{xy^2}{2\sqrt{z}})|_{(2,-1,1)}=(1,-4,1)$

其模为 $3\sqrt{2}$

6. 设 Ω 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1$ 所围立体，则三重积分 $\iiint_\Omega(2x+3y+4z)dxdydz$ 的值为 __________.

解： $\iiint_\Omega(2x+3y+4z)dxdydz=4\iiint_\Omega z\,dxdydz=4\int_0^1 dz\iint_{D_z} zdxdy=4\pi\int_0^1 z\cdot z^2dz=\pi$

7. 累次积分 $\int_0^2 dy\int_0^{\sqrt{2y-y^2}}\sqrt{x^2+y^2}dx$ 的值为______________.

解：

$$\int_0^2 dy\int_0^{\sqrt{2y-y^2}}\sqrt{x^2+y^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}\rho\cdot\rho d\rho=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\frac{1}{3}\rho^3\Big|_0^{2\sin\theta}=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta=\frac{16}{9}.$$

交换积分顺序，有 $\int_0^1 dy\int_{-y}^{\sqrt{2y-y^2}}f(x,y)dx=$______________________________.

解： $\int_0^1 dy \int_{-y}^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dx = \int_{-1}^0 dx \int_{-x}^0 f(x,y) + \int_0^1 dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^1 f(x,y)dy$

8. 设平面曲线 C 为圆 $x^2+y^2=1$，则曲线积分 $\oint_C \left(3x^2-xy+2y^2\right)ds =$________.

解： $\oint_c \left(3x^2-xy+2y^2\right)ds = \oint_c \left(3x^2+2y^2\right)ds = \frac{5}{2}\oint_c \left(x^2+y^2\right)ds = \frac{5}{2}\cdot 2\pi = 5\pi.$

9. 设 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1$ 所围立体的全表面，则曲面积分

$\oiint_\Sigma (x^2+y^2+x+y)dS =$_____.

解： $\Sigma_1 : z=\sqrt{x^2+y^2}$，$\Sigma_2 : z=1$,，则

$$\oiint_\Sigma (x^2+y^2+x+y)dS = \iint_{\Sigma_1} (x^2+y^2+x+y)dS + \iint_{\Sigma_2} (x^2+y^2+x+y)dS$$
$$= \iint_{\Sigma_1} (x^2+y^2)dS + \iint_{\Sigma_2} (x^2+y^2)dS$$
$$= \iint_{(\Sigma_1)_{xy}} (x^2+y^2)\sqrt{2}dxdy + \iint_{(\Sigma_2)_{xy}} (x^2+y^2)dxdy = (1+\sqrt{2})\iint_{x^2+y^2\le 1} (x^2+y^2)dxdy = \frac{\pi}{2}(1+\sqrt{2}).$$

10. 微分方程 $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\frac{\cos x}{x}$，满足初值 $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4}{\pi}$ 的解为__________________.

解：

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\frac{\cos x}{x} \Rightarrow xy'+y=\cos x \Rightarrow (xy)'=\cos x \Rightarrow xy=\sin x+C \Rightarrow y=\frac{\sin x+C}{x}$$

带入初值 $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4}{\pi}$，得 $y=\frac{\sin x+1}{x}$

一阶线性微分方程 $xy'+y-e^x=0$ 的通解为

11. 微分方程 $yy''-(y')^2=0$ 满足条件 $y(0)=1, y'(0)=2$ 的特解为________________

解： $yy''-(y')^2=0 \Rightarrow \frac{yy''-(y')^2}{y^2}=0 \Rightarrow \left(\frac{y'}{y}\right)'=0 \Rightarrow \frac{y'}{y}=C_1$

$\Rightarrow y'=C_1y \Rightarrow y=C_2e^{C_1x}$

代入条件 $y(0)=1, y'(0)=2$ 可得， $y=e^{2x}$.

微分方程 $yy''+(y')^2=0$ 的通解为____________________

解： $yy''+(y')^2=0 \Rightarrow (yy')'=0 \Rightarrow yy'=C \Rightarrow (y^2)'=C \Rightarrow y^2=C_1x+C_2$

12. 微分方程 $y''+3y'+2y=e^{-x}+10\sin x$ 的通解为____________________.

解： $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+xe^{-x}+\sin x-3\cos x$