2019 级《线性代数 II》期终试卷(A)评分标准

下列各题均为解答题，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤

1. 解: $\left|\frac{1}{4}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{*}\right| \left\{\begin{array}{l} =\frac{1}{4^3}\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|\left|\boldsymbol{A}^{*}\right|=\frac{1}{4^3}\cdot(-2)\cdot(-2)^{3-1} \\ =\left|\frac{|\boldsymbol{A}|}{4}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\right|=\left(-\frac{1}{2}\right)^3\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right| \end{array}\right\}=-\frac{1}{8}.$

2. 解: $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})+6\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}\Rightarrow(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\left[-\frac{1}{6}(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})\right]=\boldsymbol{E}$

$\Rightarrow(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}=-\frac{1}{6}(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}).$

3. 解: $(\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\ k\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&1&k\\k&2&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$

由题设得 $\begin{vmatrix}1&1&k\\k&2&0\\0&1&-1\end{vmatrix}=(k+2)(k-1)=0\Rightarrow k=-2$ 或 $1.$

4. 解: 由 $n-R(\boldsymbol{A})=1\Rightarrow\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含一个线性无关的解向量;

$\boldsymbol{\xi}=3(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)-2(2\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3)=(1,0,-1,-2)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,

$\boldsymbol{\eta}^{*}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)=\frac{1}{2}(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解向量,

$\Rightarrow\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解 $\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}^{*}=k(1,0,-1,-2)^{\mathrm{T}}+\frac{1}{2}(1,2,3,4)^{\mathrm{T}},k$ 为任意常数.

5. 解: $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似 $\Rightarrow\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 有相同的特征值 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\Rightarrow\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{E}$ 有特征值 $2,3,4$

$\Rightarrow\left|\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{E}\right|=2\cdot3\cdot4=24.$

6. 解: 二次型 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}t&3&0\\3&4&1\\0&1&t\end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A}$ 正定 $\Rightarrow t>0,\begin{vmatrix}t&3\\3&4\end{vmatrix}=4t-9>0,|\boldsymbol{A}|=t(4t-10)>0\Rightarrow t>\frac{5}{2}.$

7. 解:$\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5\right)=\begin{pmatrix}1&1&1&0&1\\3&2&1&1&-3\\0&1&2&2&0\\5&4&3&4&-7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&0&1\\0&-1&-2&1&-6\\0&0&0&3&-6\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0&-3\\0&1&2&0&4\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}(6分)$$

$\Rightarrow R\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5\right)=3\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为向量组的一个最大无关组 (2分)

$\Rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_5=-3\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_4\end{cases}$. (2分)

8. 解:方程组的系数行列式为

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&2-\lambda\\2-\lambda&2-\lambda&1\\3-2\lambda&2-\lambda&1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-3)\ (4分)$$

当 $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq3$ 时，方程组有唯一解; (2分)

当 $\lambda=3$ 时，增广矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\-1&-1&1&1\\-3&-1&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&2&-2&6\\0&0&0&2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow R(\boldsymbol{A})=2$，$R(\boldsymbol{B})=3$，方程组无解; (2分)

当 $\lambda=1$ 时，增广矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=1<3$, 方程组有无穷多解, (2分)

通解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$,其中 k_1,k_2 为任意常数. (2分)

或 增广矩阵 $\boldsymbol{B}\to\begin{pmatrix}1&1&2-\lambda&1\\0&\lambda-1&-(\lambda-1)(2\lambda-5)&3(\lambda-1)\\0&0&-(\lambda-1)(\lambda-3)&\lambda-1\end{pmatrix}$, (4分) 以下略.

9. 解:$|\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}4-\lambda&-6\\1&-1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)=0\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=2;$

当 $\lambda_1=1$ 时, $(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1)^{\mathrm{T}}$; 当 $\lambda_2=2$ 时, $(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得 $\boldsymbol{\alpha}_2=(3,1)^{\mathrm{T}}$.

记 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&3\\1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\Rightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$

$\Rightarrow\boldsymbol{B}^n=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}2&3\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&3\\1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot2^n-2&6-3\cdot2^{n+1}\\2^n-1&3-2^{n+1}\end{pmatrix}$.(6分)

因 $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}^n=\boldsymbol{O},n\geq2\Rightarrow\boldsymbol{C}^n=\left[2\boldsymbol{E}+\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right]^n=2^n\boldsymbol{E}+n2^{n-1}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^n&n2^n\\0&2^n\end{pmatrix}$;(3分)

$$\Rightarrow A^n=\begin{pmatrix} B^n & O \\ O & C^n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot 2^n-2 & 6-3\cdot 2^{n+1} & 0 & 0 \\ 2^n-1 & 3-2^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & n2^n \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.(1分)$$

10. 解 : $\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\Rightarrow(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}$

由 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=33\neq 0\Rightarrow \boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 可逆 $\Rightarrow(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$ (4分)

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \ (4分)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{A}-\boldsymbol{E} \text{ 可逆}, \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \ (2分)$$

11. 解 :

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-3)^2=0\Rightarrow \text{特征值为 } \lambda_1=0,\ \lambda_2=\lambda_3=3.(4分)$$

当 $\lambda_1=0$ 时, 解方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; (2分)

当 $\lambda_2=\lambda_3=3$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系 $\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \xi_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$ (4分)

对正交向量组 ξ_1,ξ_2,ξ_3 单位化得正交矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},\ \text{使 } \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\Lambda=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.(2分)$$

12. 证(1) 由 $\boldsymbol{A}^2=k\boldsymbol{A}, \boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}\Rightarrow\lambda^2\boldsymbol{x}=k\lambda\boldsymbol{x}\Rightarrow\lambda(\lambda-k)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\Rightarrow\lambda(\lambda-k)=0\Rightarrow\lambda=0$ 或 k;(3分)

(2) 由 $\boldsymbol{A}^2=k\boldsymbol{A}\Rightarrow\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-k\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}\Rightarrow R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}-k\boldsymbol{E})\leq n$;

由 $\boldsymbol{A}+(k\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=k\boldsymbol{E}\Rightarrow R(\boldsymbol{A})+R(k\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\geq R(k\boldsymbol{E})=n$,

因 $R(k\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}-k\boldsymbol{E})\Rightarrow R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}-k\boldsymbol{E})=n$;(3分)

(3) 由于 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{E}$ 是对角阵, 不妨设 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 和 $k\boldsymbol{E}$, 记 $R(\boldsymbol{A})=r(0<r<n)$

$\Rightarrow\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含 $n-r$ 个线性无关的解向量,即属于特征值 $\lambda_1=0$, $\boldsymbol{A}$ 有 $n-r$ 个线性无关的特征向量 ;

由 $R(\boldsymbol{A}-k\boldsymbol{E})=n-r\Rightarrow(\boldsymbol{A}-k\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含 r 个线性无关的解向量,即属于特征值 $\lambda_2=k$, $\boldsymbol{A}$ 有 r 个线性无关的特征向量.

$\Rightarrow\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量 $\Rightarrow\boldsymbol{A}$能相似对角化 .(4分)