2017级《高等数学 I (2)》期中考试卷参考答案

班级________ 学号________ 姓名____________

题 号	一	二	总分
得 分			

本题得分	

一、填空题(每小题4分, 共40分)

(1) 原点到 $A(1,1,1)$，$B(2,3,2)$ 和 $C(-1,0,2)$ 三点所确定的平面的距离 $d=\underline{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$.

(2) 设 $z=x\sin(x+y)$,则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\underline{\cos(x+y)-x\sin(x+y)}$

(3) $\int_0^1 dy\int_y^1\dfrac{\tan x}{x}dx=\underline{-\ln\cos 1}$.

(4) 设 $z=f(xy,x^2-y^2)$,其中 f 具有二阶连续偏导数，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\underline{f_1+xyf_{11}+2\left(x^2-y^2\right)f_{12}-4xyf_{22}}$.

(5) 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\ln z+e^{z-1}=xy$ 确定，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,\frac{1}{2})}=\underline{\dfrac{1}{4}}$.

(6) 设 $w=f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且 $u=x-cy, v=x+cy$，其中 c 为非零常数, 则 $w_{xx}-\dfrac{1}{c^2}w_{yy}=\underline{4f_{12}}$.

(7) 设 $z=x^2-xy+y^2$ 在点 $(-1,1)$ 处沿方向 $(2,1)$ 的方向导数 $\dfrac{\partial z}{\partial l}=\underline{-\dfrac{3}{\sqrt{5}}}$。

(8) 已知平面区域 $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 2y\right\}$, 计算二重积分 $\iint\limits_D (x+1)^2dxdy=\underline{\dfrac{5\pi}{4}}$.

(9) 设 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面平面所围成的空间区域，则 $\iiint\limits_\Omega (x+2y+3z)dxdydz=\underline{\dfrac{1}{4}}$.

(10) 记曲面 $z^2=x^2+y^2$ 和 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 围成空间区域为 V，则三重积分 $\iiint\limits_V zdxdydz=\underline{2\pi}$.

本题得分	

二、解答题(每小题12分, 共60分)

（1）设函数 $f(u,v)$ 具有 2 阶连续偏导数， $y=f(e^x,\cos x)$，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$，$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$.

解：

$$y=f(e^x,\cos x)\overset{x=0}{\Rightarrow}y(0)=f(1,1)$$

$$\Rightarrow\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\left.\left(f_1'e^x+f_2'(-\sin x)\right)\right|_{x=0}=f_1'(1,1)\cdot 1+f_2'(1,1)\cdot 0=f_1'(1,1)$$

$$\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=f_{11}''e^{2x}+f_{12}''e^x(-\sin x)+f_{21}''e^x(-\sin x)+f_{22}''\sin^2 x+f_1'e^x-f_2'\cos x$$

$$\Rightarrow\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=f_{11}''(1,1)+f_1'(1,1)-f_2'(1,1)$$

所以

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=f_1'(1,1)$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=f_{11}''(1,1)+f_1'(1,1)-f_2'(1,1)$$

考试形式开卷（ ）、闭卷（√），在选项上打（√）

开课教研室 大学数学部 命题教师______ 命题时间 2018-4-10 使用学期 17-18-1 总张数 3 教研室主任审核签字

2. 已知平面区域 $D=\{(r,\theta)\,|\,2\le r\le 2(1+\cos\theta),-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D xdxdy$.

【解】

$$\iint\limits_D xdxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_2^{2(1+\cos\theta)}r^2\cos\theta dr=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cdot\frac{r^3}{3}\Big|_2^{2(1+\cos\theta)}d\theta$$

$$=\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(3\cos^2\theta+3\cos^3\theta+\cos^4\theta)d\theta$$

$$=8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta+8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta+\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta$$

$$=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2\theta)d\theta+8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)d\sin\theta+\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\sin\theta$$

$$=4(\theta+\frac{\sin2\theta}{2})\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+8(\sin\theta-\frac{\sin^3\theta}{3})\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{8}{3}[(\cos^3\theta\sin\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}3\sin^2\theta\cos^2\theta d\theta)]$$

$$=4\pi+\frac{32}{3}+2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\theta d\theta$$

$$=4\pi+\frac{32}{3}+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos4\theta)d\theta$$

$$=4\pi+\frac{32}{3}+(\theta-\frac{\sin4\theta}{4})\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=5\pi+\frac{32}{3}$$

3. 求曲面 $z=x^2+y^2+1$ 在点 $M(1,-1,3)$ 的切平面与曲面 $z=x^2+y^2$ 所围区域的体积.

解：曲面 $z=x^2+y^2+1$ 在点 M(1,-1,3)的切平面：$2(x-1)-2(y+1)-(z-3)=0$，

即 $z=2x-2y-1$。联立 $\begin{cases}z=x^2+y^2\\ z=2x-2y-1\end{cases}$，

得到所围区域的投影 D 为：$(x-1)^2+(y+1)^2\le1$。

所求体积 $V=\iint\limits_D[(2x-2y-1)-(x^2+y^2)]dxdy=\iint\limits_D[1-(x-1)^2-(y+1)^2]dxdy$

令 $\begin{cases}x-1=r\cos t\\ y+1=r\sin t\end{cases}$，$V=\int_0^{2\pi}dt\int_0^1(1-r^2)rdr=\frac{\pi}{2}$。

4. 一根绳长 2 米，截成三段，分别折成圆、正三角形、正方形，这三段分别为多长时所得的面积总和最小，并求该最小值。

解：设圆的半径为x,正方形的边长为y,正三角形的边长为z,则有
$2\pi x+4y+3z=2, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$

题求即为$\begin{cases}\min \pi x^2+y^2+\dfrac{\sqrt{3}}{4}z^2\\ 2\pi x+4y+3z=2, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\end{cases}$

令$L(x,y,z;\lambda)=\pi x^2+y^2+\dfrac{\sqrt{3}}{4}z^2+\lambda(2\pi x+4y+3z-2)$

$$\begin{cases}L_x=2\pi x+2\pi\lambda=0\\ L_y=2y+4\lambda=0\\ L_z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}z+3\lambda=0\\ 2\pi x+4y+3z-2=0\end{cases}$$

解得驻点：$\dfrac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}(1,2,2\sqrt{3})$

最小面积为$S_{\min}=\pi\left(\dfrac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}\right)^2+\left(\dfrac{2}{\pi+4+3\sqrt{3}}\right)^2+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{\pi+4+3\sqrt{3}}\right)^2=\dfrac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}$.

5. 求点$A(3,-1,-1)$关于平面π：$6x+2y-9z+96=0$的对称点的坐标。

解：过点A垂直于平面π的直线方程为$\dfrac{x-3}{6}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+1}{-9}$，其参数方程为

$x=3+6t$ ，$y=-1+2t$ ，$z=-1-9t$ ，代入平面π的方程，得

$6(3+6t)+2(-1+2t)-9(-1-9t)+96=0$， $221t+221=0$， $t=-1$。

∴交点为$C(-3,-3,8)$。

设所求的对称点为$B(x,y,z)$，则点C为线段AB的中点，有

$\dfrac{x+3}{2}=-3$，$\dfrac{y-1}{2}=-3$，$\dfrac{z-1}{2}=8$，$x=-9$，$y=-5$，$z=17$。

∴所求的点为$B(-9,-5,17)$。