1-7 对偶与范式

对偶

1-7.1 对偶式

定义1-7.1 在给定的命题公式A中，将联结词∨换成∧，将∧换成∨，若有特殊变元F和T亦相互取代，所得公式A*称为A的对偶式。

显然，A也是A*的对偶式。

对偶

例：求对偶式

a) $(P \vee Q) \wedge R$ $\quad$ $(P \wedge Q) \vee R$

b) $(P \wedge Q) \vee T$ $\quad$ $(P \vee Q) \wedge F$

c) $P \uparrow Q$ $\quad$ $P \downarrow Q$

d) $P \downarrow Q$ $\quad$ $P \uparrow Q$

e) $\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee \neg(Q \wedge \neg S))$

$\neg(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg(Q \vee \neg S))$

f) $\neg P \vee Q \wedge R$ $\quad$ $\neg P \wedge (Q \vee R)$

对偶

定理 设A和A*是对偶式，P_1，P_2，Pn 是出现在A和A*中的原子变元，则

$$\neg A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$$

$$A(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \Leftrightarrow \neg A^*(P_1, P_2, \ldots, P_n)$$

证明：由德.摩根定律

$$\neg (P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$$

$$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$$

故 $\neg A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$

同理$A(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \Leftrightarrow \neg A^*(P_1, P_2, \ldots, P_n)$

对偶

例题：设A (S,W,R) $\Leftrightarrow \neg S \wedge (\neg W \vee R)$，

求它的等价式

解：由定理知：

$A^*(S,W,R) \Leftrightarrow \neg S \vee (\neg W \wedge R)$

$A^*(\neg S, \neg W, \neg R) \Leftrightarrow S \vee (W \wedge \neg R)$

$\neg A^*(\neg S, \neg W, \neg R) \Leftrightarrow \neg (S \vee (W \wedge \neg R))$

即为A的等价式

对偶

定理　**设P_1，P_2，Pn 是出现在公式A和B中的所有原子变元，如果A$\Leftrightarrow$B，则A* $\Leftrightarrow$ B*。**

证明：见P30

范式

- 同一命题有很多相互等价的表达形式
- 一些复杂的命题需要经过繁琐的推导才能确定其是否等价
- 期望公式规范化——范式
- 两种范式：合取范式与析取范式

析取范式

命题公式 A 如果可等价地写成如下形式：

$$A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n \quad (n \geq 1),$$

其中每个项 A_i $(i=1,2,\ldots,n)$ 是命题变元或其否定形式的合取式，称该公式为 A 的析取范式。

举例：

因为$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$，

则$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ 是 $P \leftrightarrow Q$ 的析取范式。

合取范式

命题公式 A 如果可等价地写成如下形式：

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \quad (n \geq 1),$$

其中每个项 A_i $(i=1,2,\ldots,n)$是命题变元或其否定形式的析取式，称该公式为 A 的合取范式。

举例：

因为 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$

$(\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$ 是 $P \leftrightarrow Q$ 的合取范式。

从定义可以看出：

- 在析取范式与合取范式中只含有联结词 “¬，∧，∨”。
- “¬”在命题变元之前。

注：$P \wedge Q$ 既是合取范式，也是析取范式

注：任何公式都存在与之等价的析取范式和合取范式

析取范式与合取范式的写法：

(1)去掉“→”和“↔”。

(2)将“ ¬” 移到命题变元前。

用公式 $\neg A(P_1,P_2,\ldots,P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1,\neg P_2,\ldots,\neg P_n)$

(3)用分配律、幂等律等公式进行整理，使之成为所要求的形式。

例：求$(P\leftrightarrow Q)\rightarrow R$ 的析取范式与合取范式。

先求析取范式：

$(P\leftrightarrow Q)\rightarrow R$

$\Leftrightarrow\neg((\neg P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q))\vee R$ ---去掉其它连结词

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee R$ --- “$\neg$” 移到命题变元前面

再求合取范式：

$(P\leftrightarrow Q)\rightarrow R$

$\Leftrightarrow\neg((P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q))\vee R$ ---去掉其它连结词

$\Leftrightarrow((\neg P\vee\neg Q)\wedge(P\vee Q))\vee R$ --- “$\neg$” 移到命题变元前面

$\Leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q\vee R)\wedge(P\vee Q\vee R)$ --- 整理

例

例： A，B，C，D 四个人中要派两个人出差，按下述三个条件有几种派法？ ① 若 A 去则 C 和 D 中要去一个人。② B 和 C 不能都去。③ C 去则 D 要留下。

解：令 A，B，C，D 分别表示 A去，B去，C去，D去。

① $A \rightarrow (C \overline{\vee} D) \Leftrightarrow A \rightarrow ((C \wedge \neg D) \vee (\neg C \wedge D))$

$\Leftrightarrow \neg A \vee (C \wedge \neg D) \vee (\neg C \wedge D)$

② $\neg(B \wedge C) \Leftrightarrow \neg B \vee \neg C$

③ $C \rightarrow \neg D \Leftrightarrow \neg C \vee \neg D$

总的条件为：

$(\neg A \vee (C \wedge \neg D) \vee (\neg C \wedge D)) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (\neg C \vee \neg D)$

例

将几个条件的合取式化成析取范式：

$(\neg A \lor (C \land \neg D) \lor (\neg C \land D)) \land (\neg B \lor \neg C) \land (\neg C \lor \neg D)$

$\Leftrightarrow (\neg A \lor (C \land \neg D) \lor (\neg C \land D)) \land (\neg C \lor (\neg B \land \neg D))$

$\Leftrightarrow (\neg A \land \neg C) \lor (C \land \neg D \land \neg C) \lor (\neg C \land D \land \neg C) \lor$

$(\neg A \land \neg B \land \neg D) \lor (C \land \neg D \land \neg B \land \neg D) \lor (\neg C \land D \land \neg B \land \neg D)$

$\Leftrightarrow (\neg A \land \neg C) \lor (\neg C \land D) \lor (\neg A \land \neg B \land \neg D) \lor (C \land \neg D \land \neg B)$

例

最后的派法要使得
$(\neg A\wedge\neg C)\vee(\neg C\wedge D)\vee(\neg A\wedge\neg B\wedge\neg D)\vee(C\wedge\neg D\wedge\neg B)$ 为T。

可以取 $\neg A\wedge\neg C$为 T，得 B 和 D 去。
可以取 $\neg C\wedge D$ 为 T，得 A 和 D 去，或者 B 和 D 去。
可以取 $C\wedge\neg D\wedge\neg B$ 为 T，得 A 和 C 去 。

综上，最后得到三种派法：

A和C去、A和D去、B和D去。

思考

一个公式的析取范式
或合取范式是否唯一？

主析取范式

- 小项：是 n 个命题变元的合取式，其中每个变元必出现且仅出现一次(以本身或否定形式)，称这个合取式为小项。

例如，含有两个变元的小项：

$P\wedge Q$、$P\wedge\neg Q$、 $\neg P\wedge Q$、 $\neg P\wedge\neg Q$

- 若有n个变元，则有2^n个小项。

主析取范式

小项编码：

- 含有 n 个变元的小项的角标用 n 位二进制码表示。
- 变元按字母次序排列。
- **用 1 表示变元本身，0 表示变元的否定形式。**

例： $m_{00} \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$， $m_{01} \Leftrightarrow \neg P \wedge Q$，

$m_{10} \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$， $m_{11} \Leftrightarrow P \wedge Q$

$m_{101} \Leftrightarrow P \wedge \neg Q \wedge R$， $m_{100} \Leftrightarrow P \wedge \neg Q \wedge \neg R$

主析取范式

考察含有两个变元的所有小项的真值表：

		m_{00}	m_{01}	m_{10}	m_{11}
	P Q	$\neg P\wedge\neg Q$	$\neg P\wedge Q$	$P\wedge\neg Q$	$P\wedge Q$
00	F F	T	F	F	F
01	F T	F	T	F	F
10	T F	F	F	T	F
11	T T	F	F	F	T

1. 每个小项当且仅当其赋值与编码相同时，其真值为 T；
   而其余 2^n-1 组赋值均使该小项的真值为 F。
2. 全体小项的析取式为永真式，记为：
   $\sum m_i \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee \ldots \vee m_{2^n-1} \Leftrightarrow T$

主析取范式

主析取范式定义：若一个命题公式的析取范式为 $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n (n \geq 1)$，其中每个 A_i（$i=1,2,\ldots,n$）都是小项，则称之为该命题公式的主析取范式。

主析取范式

主析取范式的求法：

(1) 先写出给定公式的析取范式

$A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$ 。

(2) 为使每个 A_i 都变成小项，对缺少变元的项 A_i 要补全变元，比如缺变元 R，就用 “$\wedge(R \vee \neg R)$” 的形式补 R。

(3) 用分配律等公式加以整理。

主析取范式

例：求 P→Q 的主析取范式。

解：$P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$ ---去掉其它连结词

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge (Q \vee \neg Q)) \vee ((P \vee \neg P) \wedge Q)$ ---补变元

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

--- 用分配律展开

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$

主析取范式

练习：求（P∧Q）∨R的主析取范式。

主析取范式

求主析取范式的真值表法：

(1) 列出给定公式的真值表。

(2) 找出该公式真值表中每个为“T”行的赋值所对应的小项。

(3) 用“∨”联结上述小项，即可。

主析取范式

例：求 P→Q 和 P↔Q 的主析取范式

P	Q	P→Q	P↔Q
0	0	T	T
0	1	T	F
1	0	F	F
1	1	T	T

$$P\rightarrow Q \Leftrightarrow m_{00} \vee m_{01} \vee m_{11}$$
$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$$
$$P\leftrightarrow Q \Leftrightarrow m_{00} \vee m_{11} \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$$

主析取范式

定理　在真值表中，一个使公式的真值为T的赋值所对应的小项的析取，即为此公式的主析取范式。

主析取范式

思考题：永真公式的主析取范式是什么样的?

主合取范式

- 大项定义：是n个命题变元的析取式，其中每个变元必出现且仅出现一次(以本身或否定形式)，称该析取式为大项。
- 有n个变元，则有 2^n 个大项。

主合取范式

- 大项的编码：大项的编码正好与小项相反，用0表示变元本身，1表示变元的否定形式。

如 ： $M_{00} \Leftrightarrow P \vee Q$ $M_{01} \Leftrightarrow P \vee \neg Q$

$M_{10} \Leftrightarrow \neg P \vee Q$ $M_{11} \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$

显然，$M_i \Leftrightarrow \neg m_i$

例： $M_{011} \Leftrightarrow P \vee \neg Q \vee \neg R \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge Q \wedge R)$

$\Leftrightarrow \neg m_{011}$

主合取范式

考察含有两个变元的所有大项的真值表：

			M_{00}	M_{01}	M_{10}	M_{11}
	P	Q	$P\vee Q$	$P\vee\neg Q$	$\neg P\vee Q$	$\neg P\vee\neg Q$
00	F	F	F	T	T	T
01	F	T	T	F	T	T
10	T	F	T	T	F	T
11	T	T	T	T	T	F

1. 每个大项当且仅当其赋值与编码相同时，其真值为 F；其余 2^n-1 组赋值均使该大项的真值为 T。
2. 全体大项的合取式必为永假式

$$\prod_{i=0}^{2^n-1} M_i \Leftrightarrow M_0 \wedge M_1 \wedge \ldots \wedge M_{2^n-1} \Leftrightarrow F$$

主合取范式

主合取范式定义：若一个命题公式的合取范式为 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n (n \geq 1)$，其中每个 A_i $(i=1,2,\ldots,n)$ 都是大项，则称之为该命题公式的主合取范式。

求主合取范式的步骤：

(1) 先写出给定公式的合取范式 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$。

(2) 为使每个 A_i 变成大项，对缺少变元的项 A_i 补全变元，比如缺变元 R，用"$\vee (R \wedge \neg R)$"的形式补R。

(3) 用分配律等公式加以整理。

主合取范式

例：求(P→Q)→R的主合取范式

$(P\to Q)\to R$

$\Leftrightarrow\neg(\neg P\vee Q)\vee R$ ------去掉其它连结词

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee R$ ------ “¬”移到命题变元前面

$\Leftrightarrow(P\vee R)\wedge(\neg Q\vee R)$ ------ 化成合取范式

$\Leftrightarrow(P\vee(Q\wedge\neg Q)\vee R)\wedge((P\wedge\neg P)\vee\neg Q\vee R)$ ---补变元

$\Leftrightarrow (P\vee Q\vee R)\wedge (P\vee\neg Q\vee R)\wedge$

$(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$ ---用分配率整理

$\Leftrightarrow(P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$

主合取范式

主合取范式的真值表求法：

(1) 列出给定公式的真值表。

(2) 找出该公式真值表中的每个为“F”行的赋值所对应的大项。

(3) 用“∧”联结上述大项，即可。

主合取范式

定理　在真值表中，一个使公式的真值为F的赋值所对应的大项的合取，即为此公式的主合取范式。

主合取范式

例：求 P→Q 和 P↔Q 的主合取范式

P	Q	P→Q	P↔Q
0	0	T	T
0	1	T	F
1	0	F	F
1	1	T	T

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow M_{10} \Leftrightarrow \neg P \vee Q$$

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow M_{01} \wedge M_{10}$$

$$\Leftrightarrow (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$$

主合取范式

思考:

1. 永真公式的主析取范式是什么样？是否有主合取范式?
2. 永假公式的主合取范式是什么样？是否有主析取范式?
3. 若已知主合取范式，能否直接写出主析取范式？或者已知主析取范式，能否直接写出主合取范式?

主合取范式

例：已知A(P,Q,R) 的主析取范式中含有下面小项 m_1，m_3，m_5，m_7，求它的和主合取范式。

解： 在真值表中，除了使命题公式A为真的赋值，其余的就是使A为假的赋值。而主析取范式中包含的小项的编码，就是使命题公式 A 为真的赋值

主合取范式

例：已知A(P,Q,R) 的主析取范式中含有下面小项 m_1，m_3，m_5，m_7，求它的和主合取范式。

解： 所以赋值1，3，5，7，即001，011，101，111就是使A为真的赋值。0，2，4，6即 000，010，100，110 是使A 为假的赋值。

$$A(P,Q,R) \Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_7 \Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \wedge M_6$$

$$\Leftrightarrow M_{000} \wedge M_{010} \wedge M_{100} \wedge M_{110}$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$$

谢 谢