2013 级高等数学 I(2)考试卷(A)

使用专业、班级______________ 学号______________ 姓名____________________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

本题得分	

一、填空题(每小题 4 分, 共 20 分)

(1) 已知 $|\boldsymbol{a}|=3, |\boldsymbol{b}|=2$, $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$, 则 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=$ $\underline{\quad -1 \quad}$

(2) 设 $\mathrm{e}^z - xyz = 0$, 则 $\mathrm{d}z=$ $\underline{\dfrac{yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y}{\mathrm{e}^z-xy}}$

(3) 交换积分次序, 有 $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x,y)\mathrm{d}x=$ $\underline{\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y}$

(4) 设 L 是圆周 $x^2+y^2=2x$, 则曲线积分 $\oint_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s=$ $\underline{\quad 4\pi \quad}$

(5) 函数 $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ 展开成 x 的幂级数, $f(x)=$ $\underline{\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}}$, $x\in$ $\underline{(-1,1)}$

本题得分	

二、单项选择题(每小题 4 分, 共 16 分)

(1) 曲线 $\begin{cases} y^2+z^2-2x=0 \\ z=3 \end{cases}$ 在 xOy 平面上的投影曲线方程是

(A) $\begin{cases} y^2=2x \\ z=0 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} y^2=2x-9 \\ z=0 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} y^2=2x \\ z=3 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} y^2=2x-9 \\ z=3 \end{cases}$ 【 B 】

(2) 函数 $z=xy^2z$ 在点 $(1,-1,2)$ 处方向导数最大的方向是

(A) $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$. (B) $-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$. (C) $-2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$. (D) $2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$. 【 D 】

(3) 设 Σ 是分片光滑的闭曲面的外侧, 则其所围立体的体积为

(A) $\dfrac{1}{3}\oiint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ (B) $\dfrac{1}{3}\oiint_{\Sigma} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}z\mathrm{d}x$

(C) $\dfrac{1}{3}\oiint_{\Sigma} x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+y\mathrm{d}x\mathrm{d}y+z\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ (D) $\dfrac{1}{3}\oiint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 【 A 】

(4) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都发散, 则

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 必发散. (B) $\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 必发散.

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n^2+v_n^2)$ 必发散. (D) $\sum_{n=1}^{\infty}(|u_n|+|v_n|)$ 必发散. 【 D 】

本题得分	

三、计算下列各题(每小题 8 分, 共 32 分)

(1) 设 $z=x^3 f\left(xy,\dfrac{y}{x}\right)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial z}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2 f+x^3yf_1'-xyf_2'$, ……③

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^4 f_1'+x^2 f_2'$, ……⑥

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4x^3 f_1'+2xf_2'+x^4yf_{11}''-yf_{22}''$, ……⑧

(2) 求过点 $(2,1,3)$, 且与两平面 $3x-y+z+6=0$, $x+2y-3z-7=0$ 都平行的直线的方程.

解 所求直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \quad \cdots\cdots ④$$

$$=(1,10,7), \quad \cdots\cdots ⑥$$

故所求直线方程为 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{10}=\dfrac{z-3}{7}$. ……⑧

考试形式开卷（ ）、闭卷（√）开课教研室 大学数学部 命题教师 命题组 命题时间 2013-5-28 使用学期 2013-2014-2 总张数 3 教研室主任审核签字 ______________

(3) 计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 是由直线 $x=2,\ y=x$ 及曲线 $xy=1$ 所围成的闭区域.

解 $D=\left\{(x,y)\middle|\frac{1}{x}\le y\le x, 1\le x\le 2\right\}$ (或图示)……②

$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}\sigma=\int_1^2 x^2\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{\mathrm{d}y}{y^2}$ ……④

$=\int_1^2 x^2\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ ……⑥

$=\frac{9}{4}$. ……⑧

(4) 计算三重积分 $\iiint\limits_\Omega z\mathrm{d}v$, 其中 Ω 是由曲面 $z=1-x^2-y^2$ 与平面 $z=0$ 所围成的闭区域.

解一 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|0\le z\le 1-\rho^2, 0\le\rho\le 1, 0\le\theta\le 2\pi\right\}$ (或图示)……②

$\iiint\limits_\Omega z\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{1-\rho^2}z\mathrm{d}z$ ……④

$=\pi\int_0^1\rho(1-\rho^2)^2\mathrm{d}\rho$ ……⑥

$=\frac{\pi}{6}$. ……⑧

解二 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2\le 1-z,\ 0\le z\le 1\right\}$ (或图示) ……②

$\iiint\limits_\Omega z\mathrm{d}v=\int_0^1 z\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\le 1-z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ……④

$=\pi\int_0^1 z(1-z)\mathrm{d}z$ ……⑥

$=\frac{\pi}{6}$. ……⑧

本题得分	

四、(本题 9 分) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

解 因 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2n+3}{(n+1)!}x^{2n+2}}{\frac{2n+1}{n!}x^{2n}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\cdot\frac{x^2}{n+1}\right)=0$, ……②

故对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 级数均绝对收敛, 从而收敛域为 $(-\infty,+\infty)$. ……④

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!}\right)'$ ……⑥

$=\left(x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}\right)'=\left[x\left(\mathrm{e}^{x^2}-1\right)\right]'$ ……⑧

$=(2x^2+1)\mathrm{e}^{x^2}-1$. ……⑨

本题得分	

五、(本题 9 分) 在椭球面 $2x^2+y^2+z^2=1$ 上求距离平面 $2x+y-z-6=0$ 最近和最远的点, 并求出最近距离和最远距离.

解一 问题归结为在条件 $2x^2+y^2+z^2=1$ 下求函数 $d(x,y,z)=\frac{|2x+y-z-6|}{\sqrt{6}}$ 的最值, ……②

此问题等价于在条件 $2x^2+y^2+z^2=1$ 下求函数 $f(x,y,z)=(2x+y-z-6)^2$ 的最值. ……③

设 $L(x,y,z,\lambda)=6d^2(x,y,z)+\lambda(2x^2+y^2+z^2-1)=(2x+y-z-6)^2+\lambda(2x^2+y^2+z^2-6)$, ·⑤

令 $\begin{cases}L_x=4(2x+y-z-6)+4x\lambda=0\\ L_y=2(2x+y-z-6)+2y\lambda=0\\ L_z=2(2x+y-z-6)+2z\lambda=0\\ 2x^2+y^2+z^2-1=0\end{cases}$, ……⑦

解得驻点 $\pm\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$. ……⑧

因 $d\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}\sqrt{6}$, $d\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{3}\sqrt{6}$,

故最近点为 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, 最近距离为 $\frac{2}{3}\sqrt{6}$；最远点为 $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, 最远距离为 $\frac{4}{3}\sqrt{6}$. ……⑨

解二 椭球面上离已知平面最近点及最远点处的切平面应平行于已知平面. ……②

设切点为 $P_0(x_0,y_0,z_0)$, 则切平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(4x_0,2y_0,2z_0)$, ……③

由 $\begin{cases}\frac{4x_0}{2}=\frac{2y_0}{1}=\frac{2z_0}{-1}\\ 2x_0^2+y_0^2+z_0^2=1\end{cases}$ ……⑤

得 P_0 的坐标为 $\pm\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$. ……⑥

因 $d\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=\frac{\left|2\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)-6\right|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{2}{3}\sqrt{6}$,

$d\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\left|2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}-6\right|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{4}{3}\sqrt{6}$, ……⑧

故最近点为 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, 最近距离为 $\frac{2}{3}\sqrt{6}$；最远点为 $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, 最远距离为 $\frac{4}{3}\sqrt{6}$. ……⑨

本题得分	

六、(本题 9 分) 计算曲线积分 $\int_L (2xy^3 - y^2\cos x + 2y)\mathrm{d}x + (x - 2y\sin x + 3x^2y^2)\mathrm{d}y$,
其中 L 是曲线 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 上从点 $O(0,0)$ 到点 $A(2,0)$ 的有向弧段.

解一 原式 $= \oint_{L+\overline{AO}} - \int_{\overline{AO}}$ ……②

$= -\iint_D \left[(1 - 2y\cos x + 6xy^2) - (6xy^2 - 2y\cos x + 2)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_2^0 0\mathrm{d}x$ ……⑦

$= \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ……⑧

$= \dfrac{\pi}{2}.$ ……⑨

解二 原式 $= \int_L \mathrm{d}(x^2y^3 - y^2\sin x + xy) + \int_L y\mathrm{d}x$ ……⑤

$= \left[x^2y^3 - y^2\sin x + xy\right]_{(0,0)}^{(2,0)} + \int_0^2 \sqrt{2x - x^2}\mathrm{d}x$ ……⑦

$= \dfrac{\pi}{2}.$ ……⑨

本题得分	

七、(本题 5 分) 证明调和级数 $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} + \cdots$ 发散.

解一 用反证法. 假设该级数收敛, 则其部分和数列 $\{s_n\}$ 收敛,

设 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = s$,

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}(s_{2n} - s_n) = 0$, ……②

但 $s_{2n} - s_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{1}{2}$, ……④

与 $\lim\limits_{n\to\infty}(s_{2n} - s_n) = 0$ 矛盾,

因此假设不成立, 即调和级数发散. ……⑤

解二 由于 $\dfrac{1}{n} = \int_n^{n+1} \dfrac{1}{n}\mathrm{d}x > \int_n^{n+1} \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln(n+1) - \ln n$, ……②

故部分和 $s_n > (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \cdots + (\ln(n+1) - \ln n) = \ln(n+1) \to +\infty \ (n \to \infty)$, ④

于是 $s_n \to +\infty \ (n \to \infty)$, 从而调和级数发散. ……⑤

解三 调和级数的前 2^{m+1} 项的和

$$s_{2^{m+1}} = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^m + 1} + \frac{1}{2^m + 2} + \cdots + \frac{1}{2^{m+1}}\right), \text{……①}$$

由于 $1 + \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} > \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{8} > \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{2}$, $\cdots$,

$\dfrac{1}{2^m + 1} + \dfrac{1}{2^m + 2} + \cdots + \dfrac{1}{2^{m+1}} > \dfrac{1}{2^{m+1}} + \dfrac{1}{2^{m+1}} + \cdots + \dfrac{1}{2^{m+1}} = \dfrac{1}{2}$, ……③

故 $s_{2^{m+1}} > (m+1) \cdot \dfrac{1}{2} \to +\infty \ (m \to \infty)$, ……④

即部分和数列 $\{s_n\}$ 中存在发散的子列, 因此 $\{s_n\}$ 发散,

从而调和级数发散. ……⑤