2017 级《高等数学 I(2)》期末考试卷(A)参考答案

班级________________ 学号________________ 姓名____________________

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						

本题得分	

一、填空题(1～5小题，每小题4分，共20分)

1. 二次积分 $\int_0^1 dy\int_y^1 e^{x^2}dx =$ $\underline{\dfrac{e-1}{2}}$.

2. 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $x+y-e^z=z$ 所确定，则全微分 $dz\big|_{(1,0,0)}=$ $\underline{\dfrac{1}{2}(dx+dy)}$.

3. 设曲线 L 为 $x^2+y^2=1$，则曲线积分 $\oint_L\left[(x+1)^2+y^2\right]ds=$ $\underline{4p}$.

4. 设 Σ 为曲面 $x^2+y^2=1$ 上的 $0\le z\le 1$ 部分，则 $\iint\limits_{\Sigma}\sin(x^2+y^2)dS=$ $\underline{2p\ \sin 1}$.

5. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ 在区间 $(-1,1)$ 内的和函数 $S(x)=$ $\underline{\dfrac{1}{(1-x)^2}}$.

本题得分	

二、单项选择题(6~10 小题，每小题 4 分，共 20 分)

6. 设 $z=f\left(xy,x^2-y^2\right)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ 【**D**】

（A）$f_1+xyf_{11}+2\left(x^2-y^2\right)f_{12}-xyf_{22}$；（B）$f_1+xyf_{11}+2x^2f_{12}-4xyf_{22}$；

（C）$f_1+xyf_{11}-2y^2f_{12}-4xyf_{22}$；（D）$f_1+xyf_{11}+2\left(x^2-y^2\right)f_{12}-4xyf_{22}$.

7. 设有空间区域 $V:x^2+y^2+z^2\le 1\ (z\ge 0)$，则以下结果错误的是【C】

(A) $\iiint\limits_V x dV=0$； (B) $\iiint\limits_V y dV=0$； (C) $\iiint\limits_V z dV=0$； (D) $\iiint\limits_V xy dV=0$.

8. 下列级数中发散的是【 C 】

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{5^n}$ (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\dfrac{1}{n})$ (C) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n+1}{\ln n}$ (D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}$

9. 若幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-2)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛，则此级数在 $x=4$ 处【 **B** 】

(A) 条件收敛 (B) 绝对收敛 (C) 发散 **(D)** 收敛性不能确定

10. 与直线 L_1：$x=1,\ y=-2+t,\ z=1+t$ 及 $L_2:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ 都平行且过原点的平面的方程是【 C 】

(A) $x+y+z=0.$ (B) $x+y-z=0.$ (C) $x-y+z=0.$ (D) $x-y+z=2.$

本题得分	

三、计算题(11~14小题，每小题 8 分，共 32 分)

11. 求函数 $u=x^2+y^2+z$ 在椭球面 $x^2+y^2+2z^2=4$ 上点 $(1,1,1)$ 处沿椭球面在该点的外法线方向的方向导数.

解：$grad\ u\big|_{(1,1,1)}=(u_x,u_y,u_z)\big|_{(1,1,1)}=(2x,2y,1)\big|_{(1,1,1)}=(2,2,1)$ ....2'

椭球面 $x^2+y^2+2z^2=4$ 上点 $(1,1,1)$ 处的外法线方向为

$$n=(F_x,F_y,F_z)=(2x,2y,4z)=(2,2,4)$$

其中 $F(x,y,z)=x^2+y^2+2z^2-4$.

单位化可得

$$e_n=\frac{n}{\|n\|}=\frac{(2,2,4)}{\|(2,2,4)\|}=\frac{(1,1,2)}{\sqrt{6}}\text{..........................4'}$$

于是 $\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{(1,1,1)}=grad\ u\cdot e_n=(2,2,1)\cdot\dfrac{(1,1,2)}{\sqrt{6}}.=\sqrt{6}.$............................2'

考试形式开卷（ ）、闭卷（√），在选项上打（√）

开课教研室__大学数学部__ 命题教师__命题组__ 命题时间__2018-5-10__ 使用学期__17-18-2__ 总张数__3__ 教研室主任审核签字 ______________

12. 记曲面 $z^2=x^2+y^2$ 和 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 所围空间区域为 V，求三重积分 $\iiint\limits_V z\,dxdydz$.

解法 1：（球面坐标法）

$$I=\iiint\limits_V zdxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/4}d\varphi\int_0^2 r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\,dr\ \cdots\cdots 5'$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{2}\sin^2\varphi\Big|_0^{\pi/4}\cdot\frac{1}{4}r^4\Big|_0^2=2\pi\ \cdots\cdots 3'$$

解法 2：（柱面坐标法）

空间区域的投影区域为 $D=\{(x,y):x^2+y^2\le 2\}$.

$$I=\iiint\limits_V zdxdydz=\iint_D rdrd\theta\int_r^{\sqrt{4-r^2}}zdz\ \cdots\cdots 3'$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}rdr\cdot\frac{1}{2}\left(4-r^2-r^2\right)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r\cdot\left(2-r^2\right)dr$$

$$=2\pi\cdot\left(r^2\Big|_0^{\sqrt{2}}-\frac{1}{4}r^4\Big|_0^{\sqrt{2}}\right)=2\pi.\ \cdots\cdots 5'$$

解法 3：（截面法）

$$\iiint\limits_V zdxdydz=\int_0^2dz\iint\limits_{D_z}zdxdy=\int_0^2 z\cdot A(D_z)dz$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}}z\cdot A(D_z)dz+\int_{\sqrt{2}}^2 z\cdot A(D_z)dz\ \cdots\cdots\cdots\cdots 4'$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}}z\cdot\pi z^2dz+\int_{\sqrt{2}}^2 z\cdot\pi(4-z^2)dz$$

$$=\pi(1+4-3)=2\pi.\ \cdots\cdots\cdots\cdots 4'$$

13. 求第二类曲线积分 $\int_L(e^x\sin y-2y)dx+(e^x\cos y-2)dy$，其中 L 为上半圆周 $(x-1)^2+y^2=1,y\ge 0$ 沿逆时针方向.

解：添加从 $O(0,0)$ 到 $A(2,0)$ 的有向线段，构成封闭曲线。

$$\int_L(e^x\sin y-2y)dx+(e^x\cos y-2)dy=\oint_{L+\overrightarrow{OA}}-\int_{\overrightarrow{OA}}\ \ldots\ldots\ldots.2'$$

应用 Green 公式

$$\oint_{L+OA}(e^x\sin y-2y)dx+(e^x\cos y-2)dy$$

$$=\iint_D\left(e^x\cos y-e^x\cos y+2\right)dxdy=2A(D)=\pi.\ \cdots\cdots 4'$$

OA 的方程为 $y=0,0\le x\le 2$，将其代入积分表达式可得

$$\int_{OA}(e^x\sin y-2y)dx+(e^x\cos y-2)dy=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.2'$$

于是 $\int_L(e^x\sin y-2y)dx+(e^x\cos y-2)dy=\pi$

14. 求第二类曲面积分 $\iint_\Sigma xdydz+ydzdx+(z+1)dxdy$，其中 Σ 是半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧.

解：添加 xOy 面上由圆 $x^2+y^2=1$ 所围成的区域，记为 Σ_1，取下侧，则 $\Sigma+\Sigma_1$ 是封闭曲面，取外侧，记所围空间区域为 Ω，于是

$$\iint_\Sigma xdydz+ydzdx+(z+1)dxdy=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}\ \ldots\ldots\ldots.2'$$

应用 Gauss 公式可得

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}=\iiint_\Omega(1+1+1)dxdydz=3V(\Omega)=2\pi.\ \ldots\ldots\ldots.4'$$

$$\iint_{\Sigma_1}xdydz+ydzdx+(z+1)dxdy=-\iint_{(\Sigma_1)_{xoy}}(0+1)ds=-A((\Sigma_1)_{xoy})=-\pi\ \ldots\ldots\ldots.2'$$

于是 $\iint_\Sigma xdydz+ydzdx+(z+1)dxdy=2\pi-(-\pi)=3\pi$.

本题得分	

四、证明题（15 小题，8 分）

15. 设函数 $f(x)$ 可导，且 $0<f'(x)<k<1$. 任取 $x_0\in\mathbb{R}$，设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n)$ $(n=0,1,2,\cdots)$，**证明：**级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛.

证明：因

$$|x_{n+1}-x_n|=|f(x_n)-f(x_{n-1})|=|f'(\xi)(x_n-x_{n-1})|<k|x_n-x_{n-1}|$$
$$=k|f(x_{n-1})-f(x_{n-2})|<k\cdot k|x_{n-1}-x_{n-2}|=\cdots<k^{n-1}|x_2-x_1|\ \ldots\ldots.4'$$

由 $0<k<1$ 知，等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty}k^{n-1}|x_2-x_1|$ 收敛，………..2'

根据比较判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|x_{n+1}-x_n\right|$ 收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛……….2'

本题得分	

五、解答题(16~17 小题，每小题10 分，共20 分)

16. 一根绳长 2 米，截成两段，分别折成正三角形和正方形，这两段分别为多长时, 两个图形的面积总和最小，并求该最小值**.**

解：设正三角形的边长为 x, 正方形的边长为 y, 则有

$$3x+4y=2,\ x\ge 0,\ y\ge 0$$

题求即为 $\begin{cases}\min \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2+y^2 \\ 3x+4y=2,\ x\ge 0,\ y\ge 0.\end{cases}$ ....4'

作 Lagrange 函数 $L(x,y,z;l)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2+y^2+l(3x+4y-2)$.............2'

求其驻点得

$$\begin{cases}L_x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+3l=0\\ L_y=2y+4l=0\\ L_l=3x+4y-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-3l}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=-2\sqrt{3}l\\ y=-\dfrac{4l}{2}=-2l\\ L_l=3x+4y-2=0\end{cases}\Rightarrow l=-\dfrac{1}{4+3\sqrt{3}}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2\sqrt{3}}{4+3\sqrt{3}}\\ y=\dfrac{2}{4+3\sqrt{3}}\end{cases}$$

最小面积为 $S_{\min}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{4+3\sqrt{3}}\right)^2+\left(\dfrac{2}{4+3\sqrt{3}}\right)^2=\dfrac{1}{4+3\sqrt{3}}$............4'

17. 求原点到由平面曲线 $\begin{cases}3x^2+2y^2=12,\\ z=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周得到的旋转曲面在点 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处的切平面的距离**.**

解：旋转曲面的方程为 $3x^2+2y^2+3z^2=12$ ....3'

令 $F(x,y,z)=3x^2+2y^2+3z^2-12$.

则旋转曲面在点 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处的法向量为

$$n=(F_x,F_y,F_z)\Big|_{(0,\sqrt{3},\sqrt{2})}=(6x,4y,6z)=(0,4\sqrt{3},6\sqrt{2}).$$

于是切平面方程为

$$0(x-0)+4\sqrt{3}(y-\sqrt{3})+6\sqrt{2}(z-\sqrt{2})=0,$$

即 $2\sqrt{3}y+3\sqrt{2}z=12$ ....4'

由点到平面的距离公式得

$$d=\frac{\left|2\sqrt{3}\cdot 0+3\sqrt{2}\cdot 0-12\right|}{\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(3\sqrt{2})^2}}=\frac{2\sqrt{30}}{5}$$ ....3'