2018 级《高等数学 I(2)》期中考试卷参考答案

班级__________ 学号____________ 姓名_________________

1.（本题 10 分）求过点 $(2,1,3)$ 且与两平面 $3x-y+z+6$, $x+2y-3z-7=0$ 都平行的直线的方程。

解: 所求直线的方向向量为

$$s=(3,-1,1)\times(1,2,-3)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}=(1,10,7).$$

故所求的直线为 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{10}=\dfrac{z-3}{7}$.

2.（本题 10 分）求球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $x+z=1$ 的交线在 xOy 面上的投影曲线的方程。

解：消去 z 得到母线平行于 z 轴的投影柱面的方程

$$x^2+y^2+(1-x)^2=9$$

即 $2x^2-2x+y^2=8$，从而所求的投影曲线的方程为 $\begin{cases} 2x^2-2x+y^2=8, \\ z=0. \end{cases}$

3.（本题 10 分）已知函数 $f(x,y)=\dfrac{e^x}{x-y}$，求 f_x+f_y.

解:

$$f_x'=\frac{e^x(x-y)-e^x}{(x-y)^2}, f_y'=\frac{0+e^x}{(x-y)^2}=\frac{e^x}{(x-y)^2}$$

$$\therefore f_x'+f_y'=\frac{e^x(x-y)-e^x+e^x}{(x-y)^2}=\frac{e^x}{x-y}=f$$

4.（本题 10 分）设 $w=f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且 $u=x-cy, v=x+cy$，其中 c 为非零常数。求 $w_{xx}-\dfrac{1}{c^2}w_{yy}$.

解：$w_x=f_1+f_2$，$w_{xx}=f_{11}+2f_{12}+f_{22}$，

$w_y=c(f_2-f_1)$，

$$w_{yy}=c\frac{\partial}{\partial y}(f_2-f_1)=c(cf_{11}-cf_{12}-cf_{21}+cf_{22})=c^2(f_{11}-2f_{12}+f_{22}).$$

所以 $w_{xx}-\dfrac{1}{c^2}w_{yy}=4f_{12}$.

考试形式开卷（ ）、闭卷（√），在选项上打（√）

开课教研室 大学数学部 命题教师________ 命题时间 2019-3-20 使用学期 18-19-2 总张数 3 教研室主任审核签字

5.（本题 10 分）求函数 $f(x,y,z)=x+y^2+z^3$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=3$ 上点 $(1,-1,1)$ 处沿内法线方向的方向导数。

解：$\nabla f\big|_{(1,-1,1)}=(1,2y,3z)\big|_{(1,-1,1)}=(1,-2,3)$

$$n=\frac{(-1,1,-1)}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial n}\Big|_{(1,-1,1)}=(1,-2,3)\cdot\frac{(-1,1,-1)}{\sqrt{3}}=-2\sqrt{3}$$

6（本题 10 分）求过点 $A(1,0,0)$ 和 $B(0,1,0)$ 且与 $z=x^2+y^2$ 相切的平面方程。

解：显然 $z=0$ 是一个，设切点为 $(x,y,z)=(x,y,x^2+y^2)$，该点处的切平面的法向量为 $n=(2x,2y,-1)$，于是

$n\perp AB\Rightarrow n\cdot AB=0\Rightarrow(2x,2y,-1)\cdot(-1,1,0)=0\Rightarrow -2x+2y=0\Rightarrow x=y.$

因此切点可设为 $(x_0,x_0,2x_0^2)$，故切平面方程为

$$2x_0(x-x_0)+2x_0(y-x_0)-(z-2x_0{}^2)=0$$

平面经过点 $A(1,0,0)$，故

$$2x_0(1-x_0)+2x_0(0-x_0)-(0-2x_0{}^2)=0\Rightarrow x_0=0,\ \ x_0=1\text{。}$$

于是再代入平面方程可得所求的平面为 $z=0$ 和

$$2(x-1)+2(y-1)-(z-2)=0\Rightarrow 2x+2y-z=2$$

7.（本题 10 分）设函数 $f(u,v)$ 可微，$z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 确定，求 $dz|_{(0,1)}$

解：将 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 两边分别关于 x,y 求导可得：

$z+(x+1)z_x'=2xf(x-z,y)+x^2f_1'(x-z,y)(1-z_x')$，

$(x+1)z_y'-2y=x^2[f_1'(x-z,y)(-z_y')+f_2'(x-z,y)\cdot 1]$。

将 $x=0,y=1$ 代入原式可得 $z=1$，因此将 $x=0,y=1,z=1$ 代入关于 x 求导的式子可得：$1+z_x'=0$，因此 $z_x'=-1$，代入关于 y 求导的式子可得：$z_y'-2=0$，因此有 $z_y'=2$，故可得 $dz|_{(0,1)}=-dx+2dy$.

8.（本题 10 分）求函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值。

解：令 $\begin{cases} f_x=2x(2+y^2)=0 \\ f_y=2x^2y+\ln y+1=0 \end{cases}$，得驻点 $(0,e^{-1})$。

又 $\begin{bmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{xy}(P_0) & f_{yy}(P_0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2+e^{-2} & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix}$,

由定理可知，$(0,e^{-1})$是函数的极小值点，$f(0,e^{-1})=-e^{-1}$。

9.（本题 12 分）已知函数 $f(x,y)=x+y+xy$，曲线 C：$x^2+y^2+xy=3$，求 $f(x,y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数.

解： 因为 $f(x,y)$ 沿着梯度的方向的方向导数最大，且最大值为梯度的模.

$$f_x'(x,y)=1+y, f_y'(x,y)=1+x,$$

故 $gradf(x,y)=\{1+y,1+x\}$，模为 $\sqrt{(1+y)^2+(1+x)^2}$，

此题目转化为对函数 $g(x,y)=\sqrt{(1+y)^2+(1+x)^2}$ 在约束条件 $C:x^2+y^2+xy=3$ 下的最大值.即为条件极值问题.

为了计算简单，可以转化为对 $d(x,y)=(1+y)^2+(1+x)^2$ 在约束条件 $C:x^2+y^2+xy=3$ 下的最大值.

构造函数：$F(x,y,l)=(1+y)^2+(1+x)^2+l\left(x^2+y^2+xy-3\right)$

$$\begin{cases} F_x'=2(1+x)+l(2x+y)=0 \\ F_y'=2(1+y)+l(2y+x)=0 \\ F_l'=x^2+y^2+xy-3=0 \end{cases}，得到 M_1(1,1),M_2(-1,-1),M_3(2,-1),M_4(-1,2).$$

$d(M_1)=8,d(M_2)=0,d(M_3)=9,d(M_4)=9$

所以最大值为 $\sqrt{9}=3$.

10.（本题 8 分）讨论设函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$，则在 (0, 0) 点的连续性和偏导数的存在性。

解：取 $y=x^2$，$\because \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x^2\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4}{x^4+x^4}=\dfrac{1}{2}\neq f(0,0)=0$，

$\therefore f(0,0)$ 在 (0, 0) 点处不连续，而 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$。