请检查后使用！

A

一、选择题（**1-5** 小题，每小题 **4** 分，共 **20** 分）

1. 设 A 为 n 阶矩阵，$A^2=A$，则下列成立的是【D】

(A) $A=O$ **(B)** $A=E$ **(C)** 若 A 不可逆，则 $A=O$ **(D)** 若 A 可逆，则 $A=E$

2. 若 n 阶矩阵 A 经过若干次初等变换化为矩阵 B,则【C】

(A) $|A|=|B|$ **(B)** $|A|\neq|B|$

(C) 若 $|A|=0$，则 $|B|=0$ **(D)** 若 $|A|>0$，则 $|B|>0$

3. 下列矩阵中不能相似于对角矩阵的是【D】

(A) $\begin{pmatrix}1&1&a\\0&2&2\\0&0&3\end{pmatrix}$ **(B)** $\begin{pmatrix}1&1&a\\1&2&0\\a&0&3\end{pmatrix}$ **(C)** $\begin{pmatrix}1&1&a\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ **(D)** $\begin{pmatrix}1&1&a\\0&2&2\\0&0&2\end{pmatrix}$

4. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，则【A】

(A) α_1 可由 α_2,α_3 线性表示 **(B)** α_4 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示

(C) α_4 可由 α_1,α_3 线性表示 **(D)** α_4 可由 α_1,α_2 线性表示

5. 设 α_1,α_2 是齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系，β_1,β_2 是非齐次方程组 $Ax=b$ 的两个不同解，则方程组 $Ax=b$ 的通解为【D】

(A) $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1-\alpha_2)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$ **(B)** $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$

(C) $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1+\beta_2)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$ **(D)** $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$

二、填空题（**6-11** 小题，每小题 **5** 分，共 **30** 分）

6. 行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$

解： $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 48$

7. 设 $\alpha = (1,-1,2)^T$， $\beta = (2,1,1)^T$, $A = \alpha\beta^T$，则 $A^n =$

解： $A^n = 3^{n-1}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

8. 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ， $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 和 $\beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$， $\beta_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 是向量空间 V 的两组基，则从 α_1, α_2 到 β_1, β_2 的过渡矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

9. 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$， $\alpha = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$， 则向量 $A^2\alpha$ 的模 $\| A^2\alpha \| =$ 125

10. 设 A , B 都是三阶矩阵， A 相似于 B， 且 $|E-A|=|E-2A|=|E-3A|=0$， 则 $|B^{-1}+2E|=$ 60

11. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2-x_3)^2 + (x_2+x_3)^2$ 是否正定（填“是”或“否”）否

三、解答题（12-14 小题，每小题 12 分，共 36 分）

12. 讨论含参数 a 的线性方程组 $\begin{cases} ax_1+(a+3)x_2+x_3=-2 \\ x_1+ax_2+x_3=a \\ x_1+x_2+ax_3=a^2 \end{cases}$ 解的情况，在有无穷多解时求出结构式通解。

解：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & a+3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 3 & 1-a^2 \end{vmatrix} = (a-1)(2-a)(2+a)$……….2’

（1）当 $a \neq 1, \neq 2, \neq -2$ 时，方程组有唯一解。………2’

（2）当 $a=1$ 时，

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

此时方程组有无穷多解，通解为 $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ………3’

（3）当 $a=2$ 时

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -16 \end{array}\right)$$

此时方程组无解。……….2’

（4）当 $a=-2$ 时

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

此时方程组有无穷多解，通解为 $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ……………………………….3’

13. 求向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1\\5\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\0\\3\\-1\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\3\\3\\7\end{pmatrix}$的秩和一个极大线性无关组，并将其余向量用此极大线性无关组表示。

解：$\begin{pmatrix}1&0&2&1\\1&2&0&3\\2&1&3&3\\2&5&-1&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&2&-2&2\\0&1&-1&1\\0&5&-5&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&-1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ ....4'

向量组的秩为 2，极大线性无关组为 α_1,α_2 ....4'

$\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2$

$\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2$ ....4'

14. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&2&2\\2&4&-2\\2&-2&4\end{pmatrix}$，求正交矩阵$Q$使得$Q^TAQ$为对角矩阵。

解：特征值为$\lambda_1=\lambda_2=6,\lambda_3=0$， ....4'

当$\lambda_1=\lambda_2=6$时，特征向量为$e_1=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},e_2=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$， ....4'

当$\lambda_3=0$时，特征向量为$e_3=\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$， ....2'

取$Q=(e_1,e_2,e_3)$为正交矩阵，可,使$\boldsymbol{Q^{-1}AQ=diag(6,6,0)}$ ....2'

四、证明题（**15-16** 小题，每小题 **7** 分，共 **14** 分）

15. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 A 的三个不同的特征值，对应的特征向量为 α_1，α_2，α_3，令 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$.证明：向量组 $\beta, A\beta, A^2\beta$ 线性无关.

证明：设 $k_1\beta+k_2A\beta+k_3A^2\beta=0\cdots\cdots(*)$. ....2'

根据特征值特征向量的定义可得

$$A\beta=A(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3,$$

$$A^2\beta=A^2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=\lambda_1^2\alpha_1+\lambda_2^2\alpha_2+\lambda_3^2\alpha_.$$

代入（*）并整理得

$$(k_1+k_2\lambda_1+k_3\lambda_1^2)\alpha_1+(k_1+k_2\lambda_2+k_3\lambda_2^2)\alpha_2+(k_1+k_2\lambda_3+k_3\lambda_3^2)\alpha_3=0$$

$\because$ α_1，α_2，α_3线性无关，

$\therefore$ $k_1+k_2\lambda_1+k_3\lambda_1^2=0$，$k_1+k_2\lambda_2+k_3\lambda_2^2=0$， $k_1+k_2\lambda_3+k_3\lambda_3^2=0$ ....3'

$\because$ $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$互不相同，$\therefore$ $k_1=k_2=k_3=0$.(Vandermonde 行列式) ....2'

16. 设 A,B 为 n 阶正定矩阵，证明： $A+B$ 为正定矩阵。

证明：因为 A,B 为 n 阶正定矩阵，故对任意 $x\in\mathbb{R}^n$，

$$x^TAx\geq 0\text{，}\quad x^TBx\geq 0 \text{ ....3'}$$

且 $x^TAx=0\Rightarrow x=0$，$x^TBx=0\Rightarrow x=0$

于是任意 $x\in\mathbb{R}^n$，

$x^T(A+B)x=x^TAx+x^TBx\geq 0$ ....2'

又 $x^T(A+B)x=0\Rightarrow x=0$ ....2'

故 $A+B$ 为正定矩阵。