2018级《高等数学Ⅰ(2)》期末考试卷（A） 参考答案

使用专业、班级__________ 学号___________ 姓名_________________

题 数	一	二	三	四	五	总 分
得 分						

本题得分	

一、填空题(1 ~5 小题，每小题 4 分，共 20 分)

1. 点$(2,1,-2)$到平面$3x-4y+12z=4$的距离$d=$ __2__.

2. 函数$f(x,y,z)=\sqrt{2-x^2-y^2-z^2}$在点（$-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{6}}{4},-\frac{\sqrt{6}}{4}$）处的方向导数最小值为 __-1__.

3. 某均匀物体由曲面$z=x^2+y^2$与平面$z=4$所围成，则该物体质心坐标为 __(0,0,8/3)__.

4. 设L为椭圆$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$，记其周长为a，则$\oint_L(4x^2+3y^2+2xy)ds=$ __12a__

5. 已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^p}$绝对收敛，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2-p}}$条件收敛，则$p$的取值范围是 __$3/2<p<2$__.

本题得分	

二、单选题（6 ~ 10 小题，每小题 4 分，共 20 分)

6. 二次积分$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^{\sin x}f(x,y)dy$交换积分次序后，得 【 A 】

(A) $\int_0^{-1}dy\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arcsin y}f(x,y)dx+\int_0^1dy\int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}}f(x,y)dx$

(B) $\int_0^{-1}dy\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arcsin y}f(x,y)dx-\int_0^1dy\int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}}f(x,y)dx$

(C) $-\int_0^{-1}dy\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arcsin y}f(x,y)dx+\int_0^1dy\int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}}f(x,y)dx$

(D) $-\int_0^{-1}dy\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arcsin y}f(x,y)dx-\int_0^1dy\int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}}f(x,y)dx$

7. xoy平面内的曲线$x^2+\frac{y^2}{2}=1$绕x轴旋转一周所生成的曲面与平面$x=z$的交线在xoy平面上的投影曲线的方程是 【 D 】

(A) $2x^2+\frac{y^2}{2}=1$　(B) $\frac{3x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=1$　(C) $\begin{cases}2x^2+\frac{y^2}{2}=1\\ z=0\end{cases}$　(D) $\begin{cases}\frac{3x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=1\\ z=0\end{cases}$

8. 设函数$Q(x,y)=\frac{x}{y^2}$，如果对上半平面$(y>0)$内的任意有向光滑封闭曲线C都有$\oint_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$，那么函数$P(x,y)$可取为 【 A 】

(A) $x-\frac{1}{y}$　(B) $x+\frac{1}{y}$　(C) $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$　(D) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

9. Σ为球面$x^2+y^2+z^2=1$的外侧，则$\oiint_\Sigma x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$等于 【 B 】

(A) 0　(B) $\frac{12}{5}\pi$　(C) 4π　(D) $-\frac{12}{5}\pi$

10. 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\cos(n+k)$（$k$为常数）为 【 C 】

(A) 发散　(B)条件收敛　(C)绝对收敛　(D)收敛性与k有关

本题得分	

三、计算题(11~ 14 小题，每小题 6 分, 共 24 分)

11. 求与两平面$2x-3z=4$和$3x-2y+z=7$的交线平行，且过点$(-1,2,3)$的直线方程.

解：所求直线的方向向量可取为

$$\vec{S}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 0 & -3\\ 3 & -2 & 1\end{vmatrix}=(-6,-11,-4)$$

4 分

利用点向式，可得方程

$$\frac{x+1}{6}=\frac{y-2}{11}=\frac{z-3}{4}$$

2 分

考试形式开卷（ ）、闭卷（√），在选项上打（√）

开课教研室 大学数学部　命题教师 命题组　命题时间 2019.5　使用学期 2018-2019-2　总张数 3　教研室主任审核签字

12. 已知曲面Σ：$z=2-x^2-y^2\ (z\geq 0)$，计算$\iint_\Sigma (x^2+y^2+z)\,dS$.

解: $\iint_\Sigma (x^2+y^2+z)\,dS$

$=2\iint_\Sigma dS$ 2 分

$=2\iint_{x^2+y^2\leq 2}\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy$ 2 分

$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}rdr$

$=\frac{26}{3}\pi$ 2 分

13. 计算$\int_\Gamma xyzdz$, 其中Γ由平面$y=z$截球面$x^2+y^2+z^2=1$所得，从z轴正向看沿顺时针方向.

解: Γ的参数方程为

$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\frac{\sin t}{\sqrt{2}} \\ z=\frac{\sin t}{\sqrt{2}} \end{cases}\quad t:2\pi\to 0$ 2 分

$\int_\Gamma xyzdz=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{2\pi}^{0}\cos^2 t\sin^2 t\mathrm{d}t$ 2 分

$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot 4\cdot\int_0^{\pi/2}\cos^2 t(1-\cos^2 t)\mathrm{d}t$

$=-\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

$=\frac{-\sqrt{2}\pi}{16}$ 2 分

14. 将函数$f(x)=\frac{1}{x^2-4x+3}$展开成$x+1$的幂级数

解：$f(x)=\frac{1}{x^2-4x+3}=\frac{1}{2\ (x-3)}-\frac{1}{2(x-1)}$

$=\frac{1}{4\left(1-\frac{x+1}{2}\right)}-\frac{1}{8\left(1-\frac{x+1}{4}\right)}$ 2 分

$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+1}{2}\right)^n-\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+1}{4}\right)^n\quad(|x+1|<2)$ 2 分

$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}}\right)(x+1)^n\quad(-3<x<1)$ 2 分

本题得分	

四、解答题(15~17 小题，每小题 10 分，共 30 分)

15. 求平面$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$和柱面$x^2+y^2=1$的交线上与$xoy$平面距离最长和最短的点.

解：设交线上的点为$M(x,y,z)$, 它到xoy面上距离的平方为z^2. 问题转化为求函数z^2在约束条件

$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$和$x^2+y^2=1$下的最值问题. 作拉格朗日函数 2 分

$L=z^2+\lambda\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}-1\right)+\mu(x^2+y^2-1)$ 2 分

令$\begin{cases} L_x=\frac{\lambda}{3}+2\mu x=0 \\ L_y=\frac{\lambda}{4}+2\mu y=0 \\ L_z=2z+\frac{\lambda}{5}=0 \end{cases}$ 2 分

又由约束条件，有$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$, $x^2+y^2=1$

解此方程组, 得$x=\frac{4}{5}$, $y=\frac{3}{5}$, $z=\frac{35}{12}$ 或$x=-\frac{4}{5}$, $y=-\frac{3}{5}$, $z=\frac{85}{12}$

于是, 得可能极值点 $M_1(\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{35}{12})$, $M_2(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5},\frac{85}{12})$ 2 分

由问题本身可知距离最长和最短的点必定存在，因此M_1就是所求的最短点, M_2就是所求的最长点。 2 分

16 求$I=\iint_{\Sigma}(x^3z+x)dydz-(x^2yz+y)dzdx-x^2z^2dxdy$, 其中Σ为曲面 $z=2-x^2-y^2, 1\le z\le 2$, 取上侧,

解:作取下侧的辅助面

$\Sigma_1: z=1 \quad (x,y)\epsilon D_{xy}: x^2+y^2\le 1$ 2 分

由高斯公式

$$I=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}(x^3z+x)dydz-(x^2yz+y)dzdx-x^2z^2dxdy$$
$$-\iint_{\Sigma_1}(x^3z+x)dydz-(x^2yz+y)dzdx-x^2z^2dxdy$$

$$=\iiint_{\Omega}0dxdydz-(-1)\iint_{D_{xy}}-x^2dxdy$$ 4 分

$$=-\int_0^{2\pi}cos^2d\theta\int_0^1 r^3dr$$ 3 分

$$=-\frac{\pi}{4}$$ 1 分

17. 设银行存款的年利率为$r>0$，并依年复利计算. 某基金会希望通过年初存款 A 万元实现第一年底提取 1 万元，第二年底提取 2 万元，⋯，第n年底提取n万元，并能按此规律一直提取下去，问 A 至少应为多少万元？

解：由题意

$$\mathrm{A}\ge\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(1+r)^n}$$ 2 分

设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n \qquad x\in(-1,1)$ 2 分

$$=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'$$ 2 分

$$=x\left(\frac{1}{1-x}-1\right)'$$

$$=\frac{x}{(1-x)^2}$$ 2 分

故 $\mathrm{A}\ge S\left(\frac{1}{1+r}\right)=\frac{(1+r)}{r^2}$ 2 分

本题得分	

五、证明题 (18 小题，6 分)

18. 证明:如果函数$z=f(x,y)$在点(x,y)可微分，那么函数在该点的一阶偏导数必存在.

证明: 设函数$z=f(x,y)$在点$P(x,y)$可微分. 则对于 P 的某个邻域内任意一点 $P'(x+\Delta_x, y+\Delta_y)$，总有

$$\Delta_z=f(x+\Delta_x,y+\Delta_y)-f(x,y)=A\Delta_x+B\Delta_y+o(\rho),$$

其中A,B不依赖于Δ_x和Δ_y, $\rho=\sqrt{(\Delta x_x)^2+(\Delta_y)^2}$.

特别当$\Delta_y=0$时，上式变为

$$f(x+\Delta_x,y)-f(x,y)=A\Delta_x+o(|\Delta_x|)$$ 3 分

上式两边同除以Δ_x， 再令$\Delta_x\to 0$而取极限，就得

$$\lim_{\Delta_x\to 0}\frac{f(x+\Delta_x,y)-f(x,y)}{\Delta_x}=A$$ 3 分

从而偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$存在, 且等于$A$. 同理可证偏导数$\frac{\partial z}{\partial y}$存在, 且等于$B$.