2018级《线性代数II》期末考试卷(B)

使用专业、班级__________ 学号__________ 姓名______________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

本题得分	

一、填空题(每小题4分, 共24分)

(1) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&0&2\\2&1&0\\7&4&0\end{pmatrix}$,则 $A^{-1}=$ $\underline{\begin{pmatrix}0&4&-1\\0&-7&2\\1/2&0&0\end{pmatrix}}$.

(2) 设三阶方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $|A|=2$, 令 $B=(\alpha_3-2\alpha_1,3\alpha_2,\alpha_1)$, 则 $|B|=$ $\underline{\quad -6 \quad}$.

(3) 设 η_1,η_2,η_3 为四元非齐次线性方程组 $AX=b$ 的三个解向量, $R(A)=3$, 又 $\eta_1+\eta_2=(0,1,2,3)^T$, $2\eta_2-\eta_3=(1,2,3,4)^T$, 则 $AX=b$ 的通解为 $\underline{X=k(2,3,4,5)^T+(1,2,3,4)^T}$.

(4) 设 A 为 n 阶方阵,齐次线性方程组 $AX=O$ 有非零解,则 A 必有一个特征值为 $\underline{\ 0\ }$.

(5) 已知向量 $\beta=(1,\lambda,5)^T$ 能由 $\alpha_1=(1,-3,2)^T$, $\alpha_2=(2,-1,1)^T$ 线性表示,则 $\lambda=\underline{-8}$

(6) 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+tx_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3$ 正定, 则 t 的取值范围为 $\underline{\quad t>1/2 \quad}$.

本题得分	

二、选择题(每小题4分, 共16分)

(1) 设 A 为 n 阶可逆方阵, 则下列结论成立的是 [B]

(A) $(AB)^T=A^TB^T$; (B) $(AB)^T=B^TA^T$

(C) $(AB^T)^{-1}=A^{-1}(B^T)^{-1}$ (D) $(AB^T)^{-1}=A^{-1}(B^{-1})^T$.

(2) 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关的充要条件是 [C]

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 至少有一个零向量; (B) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 至少有两个向量成比例;

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中至少有一个向量能由其余向量线性表示;

(D) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中至少有一个部分组线性相关.

(3) 设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵,且 $m<n$, 则下列一定成立的是 [D]

(A) $R(A)=m$; (B) $R(A)=n$; (C) $m\le R(A)\le n$; (D) $R(A)\le m$.

(4) 设 A, B, X 为 n 阶方阵,且 A, B 可逆,若 $A(X-E)B=B$, 则矩阵 $X=$ [A]

(A) $E+A^{-1}$; (B) $E+A$; (C) $E+B$; (D) $E+B^{-1}$.

本题得分	

三、解答题(每小题8分, 共16分)

(1) 设 $A=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$, 且 $AB=A+2B$, 求矩阵 B .

解: $(A-2E)B=A\cdots\cdots(2')$

$$(A-2E\vdots A)=\begin{pmatrix}2&2&3&4&2&3\\1&-1&0&1&1&0\\-1&2&1&-1&2&3\end{pmatrix}\overset{\substack{r_1\leftrightarrow r_2\\ r_2-2r_1\\ r_3+r_1}}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&0&1&1&0\\0&4&3&2&0&3\\0&1&1&0&3&3\end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_2\leftrightarrow r_3\\ r_3-4r_2}}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&0&1&1&0\\0&1&1&0&3&3\\0&0&-1&2&-12&-9\end{pmatrix}\overset{\substack{r_2+r_3\\ r_1+r_2\\ r_3\times(-1)}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&3&-8&-6\\0&1&0&2&-9&-6\\0&0&1&-2&12&9\end{pmatrix}\cdots\cdots(6')$$

$$\therefore B=\begin{pmatrix}3&-8&-6\\2&-9&-6\\-2&12&9\end{pmatrix}\cdots\cdots(8')$$

考试形式开卷( )、闭卷(√),在选项上打(√)

开课教研室 大学数学部 命题教师______ 命题时间 2019-5-28 使用学期 18-19-2 总张数 3 教研室主任审核签字__________

(2) 已知 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -4\\ -2 & x & -2\\ -4 & -2 & 1\end{pmatrix}$ 与 $\Lambda=\begin{pmatrix}5 & & \\ & -4 & \\ & & y\end{pmatrix}$ 相似， 求 x, y.

解：$\begin{cases}1+x+1=5+(-4)+y\\ \begin{vmatrix}1 & -2 & -4\\ -2 & x & -2\\ -4 & -2 & 1\end{vmatrix}=5\times(-4)\times y\end{cases}$ ……(4′)

$\begin{cases}x+1=y\\ 3x+8=-20y\end{cases}$ ……(6′)

$\therefore x=4$, $y=5$……(8′)

本题得分	

四、(本题12分) 设向量组 $\alpha_1=(1,2,1,3)^T$, $\alpha_2=(2,1,-1,0)^T$, $\alpha_3=(1,8,7,15)^T$, $\alpha_4=(4,-1,-5,-6)^T$，求该向量组的秩以及一个最大无关组，并将其余向量用该最大无关组线性表示.

解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 4\\ 2 & 1 & 8 & -1\\ 1 & -1 & 7 & -5\\ 3 & 0 & 15 & -6\end{pmatrix}\overset{\substack{r_2-2r_1\\ r_3-r_1\\ r_4-3r_1}}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 4\\ 0 & -3 & 6 & -9\\ 0 & -3 & 6 & -9\\ 0 & -6 & 12 & -18\end{pmatrix}\overset{\substack{r_3-r_2\\ r_4-2r_2\\ r_2\times\left(-\frac{1}{3}\right)}}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 4\\ 0 & 1 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$\overset{r_1-2r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 5 & -2\\ 0 & 1 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$……(6′)

$\therefore R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$……(8′)

α_1,α_2 为最大无关组……(10′)

$\alpha_3=5\alpha_1-2\alpha_2$

$\alpha_4=-2\alpha_1+3\alpha_2$……(12′)

本题得分	

五、(本题12分) 问 a , b 为何值时，线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+3x_4=1\\ x_1+3x_2+6x_3+x_4=3\\ 3x_1-x_2-ax_3+15x_4=3\\ x_1-5x_2-10x_3+12x_4=b\end{cases}$ 有唯一解，无解，有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解.

解；$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 6 & 1 & 3\\ 3 & -1 & -a & 15 & 3\\ 1 & -5 & -10 & 12 & b\end{pmatrix}\overset{\substack{r_2-r_1\\ r_3-3r_1\\ r_4-r_1}}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 4 & -2 & 2\\ 0 & -4 & -a-6 & 6 & 0\\ 0 & -6 & -12 & 9 & b-1\end{pmatrix}\overset{\substack{r_3+2r_2\\ r_4+3r_2}}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 4 & -2 & 2\\ 0 & 0 & -a+2 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 3 & b+5\end{pmatrix}$……(4′)

(1) $a\neq 2$时, $R(A)=R(B)=4$,方程组有惟一解；……(5)

$a=2$时, $B\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & -8\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1\end{pmatrix}$ ……(7)

(2) $a=2,b\neq 1$时, $R(A)=3,R(B)=4$,方程组无解；……(9)

(3) $a=2,b=1$时, $R(A)=R(B)=3<4$,方程组有无穷多解

通解 $X=c\begin{pmatrix}0\\ -2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-8\\ 3\\ 0\\ 2\end{pmatrix}$ 其中 c为任意常数. ……(12′)

本题得分	

六、（本题14分） 已知 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，求正交阵 P 和对角阵 Λ，使得 $P^T AP=\Lambda$.

解：$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&1\\0&1-\lambda&1\\1&1&2-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)$

$\therefore \lambda_1=0, \lambda_2=1, \lambda_3=3$ ……(6′)

当 $\lambda_1=0$ 时，解 $AX=O$ 得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$，单位化得 $p_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$……(8′)

当 $\lambda_2=1$ 时，解 $(A-E)X=O$ 得基础解系 $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$，单位化得 $p_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$……(10′)

当 $\lambda_3=3$ 时，解 $(A-3E)X=O$ 得基础解系 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，单位化得 $p_3=\begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$……(12′)

令 $P=(p_1,\ p_2,\ p_3)=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{3}&0&2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&3\end{pmatrix}$

则 P 为正交阵，Λ 为对角阵，使得 $P^T AP=\Lambda$. ……(14′)

本题得分	

七、（本题6分） 设 n 阶方阵 A 的伴随矩阵为 A^*，若 $|A|=0$，证明：$|A^*|=0$.

证明：(反证法) 假设 $|A^*|\neq 0$，则 A^* 可逆

又 $|A|=0$，得 $AA^*=O$

由 A^* 可逆可得 $A=O$

因此 $A^*=O$，与 $|A^*|\neq 0$ 矛盾.

因此 $|A^*|=0$.