《复变函数与积分变换》期末考试卷（A）参考答案

一、求解下列各题 〖每小题 6 分，共计 18 分〗

1、求函数 $w=\dfrac{1}{z}$ 把 Z 平面上曲线 $(x+1)^2+(y-1)^2=9$ 所映射成 W 平面上的曲线方程。

解: 由 $w=\dfrac{1}{z}$ 可得: $z=\dfrac{1}{w}$. 又由 $(x+1)^2+(y-1)^2=9$ 可写成 $z\overline{z}+(z+\overline{z})+i(z-\overline{z})=7$，于是有

$$\frac{1}{w\overline{w}}+(\frac{1}{w}+\frac{1}{\overline{w}})+i(\frac{1}{w}-\frac{1}{\overline{w}})=7\Rightarrow(u-\frac{1}{7})^2+(v-\frac{1}{7})^2=\frac{9}{49}$$

即为 W 平面上以 $\left(\dfrac{1}{7},\dfrac{1}{7}\right)$ 为圆心、$\dfrac{3}{7}$ 为半径的圆周。

2、已知 $L[f(t)]=F(s)$，求其 Laplace 逆变换 $L^{-1}\left[\dfrac{s+2}{s^2+4s+29}\cdot F(s)\right]$。

解： 由 $L^{-1}\left[\dfrac{s+2}{s^2+4s+29}\right]=L^{-1}\left[\dfrac{s+2}{(s+2)^2+25}\right]=e^{-2t}\cos 5t$，因此

$$L^{-1}\left[\frac{s+2}{s^2+4s+29}\cdot F(s)\right]=L^{-1}\left[\frac{s+2}{s^2+4s+29}\right]*L^{-1}\left[F(s)\right]$$
$$=(e^{-2t}\cos 5t)*f(t)\text{。}$$

3、已知函数 $f(z)=\dfrac{z}{(1+z^2)\cdot(z-3)}$，试求 $f(z)$ 展开成以 $z_0=1$ 为中心的 Taylor 级数的收敛半径和收敛域的内部。

解： 由函数 $f(z)=\dfrac{z}{(1+z^2)\cdot(z-3)}$ 的奇点为 $z_{1,2}=\pm i$，$z_3=3$。于是，$R=\min\{|z_1-z_0|,|z_2-z_0|,|z_3-z_0|\}=\sqrt{2}$。因此，函数 $f(z)$ 在 $z_0=1$ 点展开成 Taylor 级数的收敛半径 $R=\sqrt{2}$，且收敛域的内部是 $\left\{z\,|\,|z-1|<\sqrt{2}\right\}$。

二、计算下列各题 〖每小题 8 分，共计 24 分〗

1、利用 Laplace 变换的性质计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}\sin^2 t}{t}dt$。

解: 由 $L[\sin^2 t]=\dfrac{1}{2}L[1-\cos 2t]=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{s}-\dfrac{s}{4+s^2}\right]$ 及像函数的积分性质知:

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}\sin^2 t}{t}dt=\int_1^{+\infty}L[\sin^2 t]ds=\int_1^{+\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s}-\frac{s}{4+s^2}\right]ds=\frac{1}{4}\ln 5\text{。}$$

2、计算留数 $\mathrm{Res}\left(\dfrac{z+2}{z\cdot(z+1)^4\cdot(z-4)},\infty\right)$**。**

解： $\mathrm{Res}\left(\dfrac{z+2}{z\cdot(z+1)^4\cdot(z-4)},\infty\right)$

$$=-\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z}),0\right)=-\mathrm{Res}\left(\frac{z^3(1+2z)}{(z+1)^4\cdot(1-4z)},0\right)=0$$

3、将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)^2(z-2)}$ **展开成圆环域为** $0<|z-1|<1$ **内的 Laurent 级数。**

解： 由 $0<|z-1|<1$，则

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{(z-1)-1}$$
$$=\frac{-1}{(z-1)^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n=-\sum_{n=-2}^{\infty}(z-1)^n\text{。}$$

三、〖12 分〗求函数 $f(z)=\dfrac{z\cdot e^{\frac{1}{z}}}{z^4+1}$ **在复平面上的孤立奇点及分类。如果是极点，请指出它的级数，并说明理由。**

解： 因为 $f(z)$ 在复平面内有奇点 $z_k=e^{\frac{2k+1}{4}\pi i}$（$k=0,1,2,3$）和 $z_4=0$ 点，易见它们均为孤立奇点。

因 z_k 是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 1 级零点，所以 z_k 是 $f(z)$ 的 1 级极点（$k=0,1,2,3$）。

对 $z_4=0$，当 $0<|z|<1$ 时，$f(z)$ 的 Laurent 展开式为：

$$f(z)=z\cdot\frac{1}{1+z^4}\cdot e^{\frac{1}{z}}=z\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{4n}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}$$

其含有无穷多个负幂项，所以 $z_4=0$ 为 $f(z)$ 的本性奇点。

四、〖12 分〗验证 $u(x,y)=e^x(x\cos y-y\sin y)$ **为调和函数。进一步求解析函数** $f(z)=u+iv$**，并满足** $f(0)=i$ **。**

证明： 由 $u(x,y)=e^x(x\cos y-y\sin y)$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x(x\cos y+\cos y-y\sin y)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-e^x(x\sin y+\sin y+y\cos y)$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=e^x(x\cos y+2\cos y-y\sin y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^x(x\cos y + 2\cos y - y\sin y)$$

因为$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv 0$，所以$u(x,y)$为调和函数。

由解析函数的微分性质知：

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} \\ &= e^x(x\cos y + \cos y - y\sin y) + ie^x(x\sin y + \sin y + y\cos y) \\ &= (z+1)\cdot e^z \end{aligned}$$

因此$f(z) = ze^z + C$。再由$f(0) = i$，可得$C = i$，即$f(z) = ze^z + i$。

五、〖12 分〗计算积分$\int_0^{+\infty} \frac{x\cdot\sin(2x)}{16+x^2}dx$。

解: 由于$\int_0^{+\infty} \frac{x\cdot\sin(2x)}{16+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cdot\sin(2x)}{16+x^2}dx$，作辅助函数

$$f(z) = \frac{z}{16+z^2}e^{2iz}$$

易知$f(z)$满足: (1) $m-n=1\geq 1$; (2) 在实轴上无奇点。$f(z)$在上半平面的奇点为$z_0 = 4i$，且为 1 级极点。于是 原积分$= \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\right)$。

而$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \,\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \pi e^{-8} i$。

因此，原积分$= \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\right) = \frac{\pi}{2}e^{-8}$。

六、〖12 分〗利用 Laplace 变换求解微分方程组：

$$\begin{cases} y'' - x'' + x' - y = e^t - 2 \\ 2y'' - x'' - 2y' + x = -t \end{cases}$$

满足初始条件$y'(0) = y(0) = x'(0) = x(0) = 0$的解。

解： 记$Y(s) = L[y(t)]$，$X(s) = L[x(t)]$，对方程两边施行 Laplace 变换可得：

$$\begin{cases} s^2Y(s) - s^2X(s) + sX(s) - Y(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{2}{s} \\ 2s^2Y(s) - s^2X(s) - 2sY(s) + X(s) = -\frac{1}{s^2} \end{cases}$$

整理化简可得：

$$\begin{cases}(s+1)Y(s)-sX(s)=\dfrac{2-s}{s(s-1)^2}\\ 2sY(s)-(s+1)X(s)=-\dfrac{1}{s^2(s-1)}\end{cases}$$

解这个代数方程组，即得

$$\begin{cases}Y(s)=\dfrac{1}{s(s-1)^2}\\ X(s)=\dfrac{2s-1}{s^2(s-1)^2}\end{cases}$$

对上式施行 Laplace 逆变换可得：

$$\begin{cases}y(t)=L^{-1}[Y(s)]=1+(t-1)e^t\\ x(t)=L^{-1}[X(s)]=-t+te^t\end{cases}。$$

七、〖10 分〗求函数 $f(t)=e^{-|t|}\cdot\sin 2t$ 的 Fourier 变换及相应的积分表达式。

解： 由 $F[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|t|}\cdot\sin 2t\cdot e^{-iwt}dt$

$$=\int_{-\infty}^{0}e^{(1-iw)t}\frac{e^{2it}-e^{-2it}}{2i}dt+\int_{0}^{+\infty}e^{-(1+iw)t}\frac{e^{2it}-e^{-2it}}{2i}dt$$

$$=\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{0}\{e^{[1+i(2-w)]t}-e^{[1-i(2+w)]t}\}dt+\frac{1}{2i}\int_{0}^{+\infty}\{e^{-[1-i(2-w)]t}-e^{-[1+i(2+w)]t}\}dt$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{1+i(2-w)}-\frac{1}{1-i(2+w)}+\frac{1}{1-i(2-w)}-\frac{1}{1+i(2+w)}\right]$$

$$=\frac{8w}{i(w^4-6w^2+25)}$$

因为 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，所以相应地积分表达式为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{8w}{i(w^4-6w^2+25)}\cdot e^{iwt}dw=\frac{8}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{w\sin wt}{w^4-6w^2+25}dw，即$$

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{w\sin wt}{w^4-6w^2+25}dw=\frac{\pi}{8}e^{-|t|}\cdot\sin 2t。$$