2012-2013（1）《复变函数与积分变换》期末考试卷 A 参考答案

一、求解下列各题 〖每小题 8 分，共计 24 分〗

1. 求复变函数 $f(z)=\ln(1+z^2)$ 展开成中心为 $z_0=2$ 的幂级数的收敛半径。

解：由 $f(z)=\ln(1+z^2)$ 的奇点集合为 $D=\{z\,|\,z=i,-i,ki,k\in R,|k|>1\}$，于是复变函数 $f(z)=\ln(1+z^2)$ 展开成中心为 $z_0=2$ 的幂级数的收敛半径为

$$r=\min\{d(z,z_0)\,|\,z\in D\}=\sqrt{2^2+1}=\sqrt{5}$$

2. 利用 Laplace 变换的性质计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}\sin t}{t}dt$。

解: 由 $L[\sin t]=\frac{1}{1+s^2}$ 及像函数的积分性质知:

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}\sin t}{t}dt=\int_1^{+\infty}L[\sin t]ds=\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+s^2}ds=\frac{\pi}{4}$$

3. 求函数 $w=\frac{1}{z}$ 把 Z 平面上曲线 $x^2+(y-2)^2=4$ 所映射成 W 平面上的曲线方程。

解: 由 $w=\frac{1}{z}$ 可得: $z=\frac{1}{w}$. 又由 $x^2+(y-2)^2=4$ 可写成 $z\bar{z}-2i(z-\bar{z})=0$，于是有

$$\frac{1}{w\bar{w}}+2i(\frac{1}{w}-\frac{1}{\bar{w}})=0\Rightarrow i(w-\bar{w})=\frac{1}{2},\text{即}\ v=\mathrm{Im}(w)=-\frac{1}{4}$$

二、计算下列各题 〖每小题 9 分，共计 18 分〗

1.计算积分 $\oint_{|z|=4}\frac{z\cdot e^{\frac{1}{z}}}{z+1}dz$。

解: 由 $f(z)=\frac{z\cdot e^{\frac{1}{z}}}{z+1}$ 有奇点 $z_1=0,z_2=-1$,且都在 $C:|z|=4$ 的内部, 于是 ∞ 点为孤立奇点. 由留数定理及 ∞ 点的留数性质与计算知:

$$\text{原式}=2\pi i\sum_{k=1}^{2}\mathrm{Res}[f(z),z_k]=-2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),\infty]=2\pi i\,\mathrm{Res}[\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z}),0]$$

$$=2\pi i\,\mathrm{Res}[\frac{e^z}{z^2(1+z)},0]=2\pi i\lim_{z\to0}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z}{1+z}\right)=0$$

2. 将函数 $f(z)=\frac{z}{(z+1)(z-2)^2}$ 展开成圆环域为 $3<|z-1|<+\infty$ 内的洛朗级数。

解: 由 $f(z)=\frac{z}{(z+1)(z-2)^2}=\frac{2}{3}\frac{1}{(z-2)^2}+\frac{1}{9}\frac{1}{z-2}-\frac{1}{9}\frac{1}{z+1}$

当 $z:3<|z-1|<+\infty$ 时, $\frac{1}{z+1}=\frac{1}{2+(z-1)}=\frac{1}{z-1}\frac{1}{1+\frac{2}{z-1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{(z-1)^{n+1}}$

同理 $\frac{1}{z-2}=\frac{1}{(z-1)-1}=\frac{1}{z-1}\frac{1}{1-\frac{1}{z-1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^{n+1}}$

进一步 $\frac{1}{(z-2)^2}=\frac{d}{dz}\left(-\frac{1}{z-2}\right)=\frac{d}{dz}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^{n+1}}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{(z-1)^{n+2}}$

因此 $f(z)=\frac{z}{(z+1)(z-2)^2}=f(z)=\frac{2}{3}\frac{1}{(z-2)^2}+\frac{1}{9}\frac{1}{z-2}-\frac{1}{9}\frac{1}{z+1}$

$$=\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{(z-1)^{n+2}}+\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^{n+1}}-\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{(z-1)^{n+1}}=\frac{1}{9}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{6n-5-(-2)^{n-1}}{(z-1)^n}$$

三、〖10 分〗求函数 $f(z)=\frac{\sin(\pi\cdot z)}{(z-2)(z^2+1)^3}$ 在复平面内的孤立奇点及分类。如果是极点，请指出它的级数，并说明理由。

解： $f(z)$ 在复平面内有孤立奇点 $z_{1,2}=\pm i$，$z_3=2$. 因 $z_{1,2}=\pm i$ 是 $\frac{1}{f(z)}$ 的 3 级零点, 从而 $z_{1,2}=\pm i$ 是 $f(z)$ 的 3 级极点.

因为 $\lim_{z\to2}\frac{\sin(\pi\cdot z)}{(z-2)(z^2+1)^3}=\frac{\pi}{5^3}$，所以 $z_3=2$ 是 $f(z)$ 的可去奇点.

四、〖10 分〗计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{16+x^4}\cos 2x dx$。

解: 作辅助函数 $f(z)=\dfrac{z^2}{16+z^4}e^{2iz}$, 易知 $f(z)$ 满足: (1) $m-n=2$; (2) 在实轴上无奇点. $f(z)$ 在上半平面的奇点为 $z_k=2e^{\frac{2k-1}{4}\pi i}\,(k=1,2)$, 且都是 1 级极点. 于是

$$\text{原积分}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{16+x^4}\cos 2x dx=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx\right)$$

而 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=2\pi i\sum_{k=1}^{2}\mathrm{Res}[f(z),z_k]=-\frac{\pi}{2}\sin(2\sqrt{2}-\frac{\pi}{4})$, 因此

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{x^2}{16+x^4}\cos 2x dx=-\frac{\pi}{4}\sin(2\sqrt{2}-\frac{\pi}{4})\text{。}$$

五、〖12 分〗已知 $u(x,y)=\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$ 为调和函数，试求解析函数 $f(z)=u+iv$。

解: 令 $t=\dfrac{x}{y}$, 则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{y}\varphi'(t)$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{x}{y^2}\varphi'(t)$;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{y^2}\varphi''(t),\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{x^2}{y^4}\varphi''(t)+\frac{2x}{y^3}\varphi'(t)$$

于是由 $u(x,y)$ 为为调和函数知: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{1}{y^2}\varphi''(t)+\dfrac{x^2}{y^4}\varphi''(t)+\dfrac{2x}{y^3}\varphi'(t)=0$,

可得: $\dfrac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)}=-\dfrac{2t}{1+t^2}$. 解得 $\varphi(t)=c_1\arctan t+c_2$ (c_1 和 c_2 为任意常数)。从而

$u(x,y)=c_1\arctan\left(\dfrac{x}{y}\right)+c_2$。再由解析函数的微分性质可得:

$f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}-i\dfrac{\partial u}{\partial y}=ic_1\dfrac{x-iy}{x^2+y^2}=\dfrac{ic_1}{z}$，因此 $f(z)=\alpha\ln z+\beta$ （其中 $\alpha=ic_1$，β 为任意复常数）。

六、〖13 分〗求函数 $f(t)=e^{-|t|}\cdot\sin t$ 的 Fourier 变换及相应地积分表达式。

解：由 $F[f(t)]$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|t|}\cdot\sin t\cdot e^{-iwt}dt=\int_{-\infty}^{0}e^{(1-iw)t}\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}dt+\int_{0}^{+\infty}e^{-(1+iw)t}\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}dt$$

$$=\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{0}\{e^{[1+i(1-w)]t}-e^{[1-i(1+w)]t}\}dt+\frac{1}{2i}\int_{0}^{+\infty}\{e^{-[1-i(1-w)]t}-e^{-[1+i(1+w)]t}\}dt$$

$$=\frac{1}{2i}[\frac{1}{1+i(1-w)}-\frac{1}{1-i(1+w)}+\frac{1}{1-i(1-w)}-\frac{1}{1+i(1+w)}]=\frac{4w}{i(w^4+4)}$$

因为 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，所以相应地积分表达式为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{4w}{i(w^4+4)}\cdot e^{iwt}dw=\frac{4}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{w\sin wt}{w^4+4}dw\text{，即}$$

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{w\sin wt}{w^4+4}dw=\frac{\pi}{4}e^{-|t|}\cdot\sin t\text{。}$$

七、〖13 分〗求解初值问题: $\begin{cases}y''+2y'+5y=e^{-t}\cos t\\ y(0)=0,y'(0)=1\end{cases}$。

解：记 $Y(s)=L[y(t)]$，对方程两边施行 Laplace 变换可得:

$$[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)]+2[sY(s)-y(0)]+5Y(s)=\frac{s+1}{(s+1)^2+1}$$

整理可得: $Y(s)=\dfrac{1}{3}\dfrac{s+1}{(s+1)^2+1}-\dfrac{1}{3}\dfrac{s+1}{(s+1)^2+4}+\dfrac{1}{(s+1)^2+4}$

因此 $y(t)=L^{-1}[Y(s)]=L^{-1}[\dfrac{1}{3}\dfrac{s+1}{(s+1)^2+1}-\dfrac{1}{3}\dfrac{s+1}{(s+1)^2+4}+\dfrac{1}{(s+1)^2+4}]$

$$=\frac{1}{6}e^{-t}(2\cos t-2\cos 2t+3\sin 2t)\text{。}$$