1-8 推理理论

推理

推理就是根据一个或几个已知的判断得出一个新的判断的思维过程。称这些已知的判断为前提。得到的新判断为前提的有效结论。

推理

推理的过程就是证明蕴含式的过程。令 $H_1,H_2,\ldots,H_n$ 是已知的命题公式(前提)，若

有 $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots\ldots \wedge H_n \Rightarrow C$

则称 C 是 $H_1,H_2,\ldots,H_n$ 的有效结论，简称结论。

推理

定义1-8.1 设A和C是两个命题公式，当且仅当A→C为一重言式，即A⇒C，称C是A的有效结论。或C可由A逻辑地推出。

定义1-8.2 设H_1，H_2，…，H_m和C为命题公式，若$H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_m \Rightarrow C$，则称C为一组前提$H_1$，$H_2$，…，$H_m$的有效结论。

推理

推理方法：

- 真值表法（分析法）
- 公式推导：
  - 直接推理
  - 间接推理
    - 条件论证
    - 反证法

真值表法

真值表法（分析法）

要证$H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_m \rightarrow C$是重言式

设P_1，P_2，…，P_n是出现在H_1，H_2，…，H_m和C中的所有命题变元。

真值表：

P_1，P_2，…，P_n，H_1，H_2，…，H_m，C

共有n+m+1列

真值表法

如果有n个命题变元，则真值表n+m+1列，使得H_1，H_2，…，H_m均为T的真值指派，C也为T；

或者看使得C为F的真值指派的行，在每一个这样的行中H_1，H_2，…，H_m中至少有一个为F也可。

真值表法

例：P47 (2) a) 证明：$A\to\neg C$是前提 $\neg A\vee B$，$C\to\neg B$的有效结论。

A	B	C	$\neg A\vee B$	$C\to\neg B$	$A\to\neg C$
T	T	T	T	F	F
T	T	F	T	T	T
T	F	T	F	T	F
T	F	F	F	T	T
F	T	T	T	F	T
F	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T

公式推导

先引入两个推理规则：

- **P规则(引入前提规则)**：在推理过程中，可以随时引入前提。
- **T规则(引入结论规则)**：在推理过程中，如果前面有一个或几个公式蕴涵公式 **S**，则可将 **S** 纳入推理过程中。

公式推导

基础重言蕴涵式（I类公式）

I: Implication

I_1 $P\wedge Q\Rightarrow P$

I_2 $P\wedge Q\Rightarrow Q$

I_3 $P\Rightarrow P\vee Q$

I_4 $Q\Rightarrow P\vee Q$

I_5 $\neg P\Rightarrow P\rightarrow Q$

I_6 $Q\Rightarrow P\rightarrow Q$

I_7 $\neg(P\rightarrow Q)\Rightarrow P$

I_8 $\neg(P\rightarrow Q)\Rightarrow\neg Q$

I_9 $P, Q\Rightarrow P\wedge Q$

I_{10} $\neg P, (P\vee Q)\Rightarrow Q$

I_{11} $P, (P\rightarrow Q)\Rightarrow Q$

I_{12} $\neg Q, (P\rightarrow Q)\Rightarrow\neg P$

I_{13} $P\rightarrow Q, Q\rightarrow R\Rightarrow P\rightarrow R$

I_{14} $P\vee Q, P\rightarrow R, Q\rightarrow R\Rightarrow R$

I_{15} $A\rightarrow B\Rightarrow(A\vee C)\rightarrow(B\vee C)$

I_{16} $A\rightarrow B\Rightarrow(A\wedge C)\rightarrow(B\wedge C)$

公式推导

E: Equivalent

基础等价公式（E类公式）：

对合律	$\neg\neg P \Leftrightarrow P$	
交换律	$P\wedge Q \Leftrightarrow Q\wedge P$	$P\vee Q \Leftrightarrow Q\vee P$
结合律	$P\wedge(Q\wedge R) \Leftrightarrow (P\wedge Q)\wedge R$	$P\vee(Q\vee R) \Leftrightarrow (P\vee Q)\vee R$
分配律	$P\wedge(Q\vee R) \Leftrightarrow (P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$	
	$P\vee(Q\wedge R) \Leftrightarrow (P\vee Q)\wedge(P\vee R)$	
吸收律	$P\vee(P\wedge Q) \Leftrightarrow P$	$P\wedge(P\vee Q) \Leftrightarrow P$
底-摩根定律	$\neg(P\wedge Q) \Leftrightarrow \neg P\vee\neg Q$	$\neg(P\vee Q) \Leftrightarrow \neg P\wedge\neg Q$
幂等律	$P\vee P \Leftrightarrow P$	$P\wedge P \Leftrightarrow P$
同一律	$P\vee F \Leftrightarrow P$	$P\wedge T \Leftrightarrow P$
零律	$P\vee T \Leftrightarrow T$	$P\wedge F \Leftrightarrow F$
互补律	$P\vee\neg P \Leftrightarrow T$	$P\wedge\neg P \Leftrightarrow F$

公式推导

E: Equivalent

$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$，

$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$

$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R$

$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$

$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

$\neg (P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P \leftrightarrow \neg Q$

直接推理

直接推理是由一组前提，利用 P 规则、T 规则直接推演得到有效结论的方法。

推理实际上就是证明永真蕴含的过程。为了使推理过程更加简单、明确，推理会采用另外一种书写格式。

直接推理

例1　求证 $P\rightarrow Q$，$Q\rightarrow R$，$P \Rightarrow R$

证明：

序号	前提或结论	注释列
(1)	P	P
(2)	$P\rightarrow Q$	P
(3)	Q	T(1)(2)I
(4)	$Q\rightarrow R$	P
(5)	R	T(3)(4)I

（公式：P，$P\rightarrow Q \Rightarrow Q$）

直接推理

推理格式：

- 第一列为步骤号；
- 第二列为给定前提或得出的结论；
- 第三列为注释列，标明是前提还是得到的结论，以及此结论是从哪几步得到的，所用公式得类型。

直接推理

例2 求证：

$$\neg(P \wedge Q) \wedge (Q \vee R) \wedge \neg R \Rightarrow \neg P$$

(1) $\neg R$	P
(2) $Q \vee R$	P
(3) Q	T(1)(2)I
(4) $\neg(P \wedge Q)$	P
(5) $\neg P \vee \neg Q$	T(4)E
(6) $\neg P$	T(3)(5)I

注：公式：$\neg P, P \vee Q \Rightarrow Q$,

$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$

假设$\neg(P \wedge Q) \wedge (Q \vee R) \wedge \neg R$ 为 T，

则$\neg(P \wedge Q)$，$(Q \vee R)$，$\neg R$ 均为 T，

由$\neg R$，$(Q \vee R)$ 为 T，知 Q 为 T；由$\neg(P \wedge Q)$ 为 T

而$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$，

于是$\neg P \vee \neg Q$ 为 T，

再由 Q 为 T，

知 $\neg P$ 为 T。

直接推理

例3　求证：$P\rightarrow(Q\rightarrow S)$，$\neg R\vee P$，$Q \Rightarrow R\rightarrow S$

证明：

(1)	Q	P
(2)	$P\rightarrow(Q\rightarrow S)$	P
(3)	$\neg P\vee(\neg Q\vee S)$	T(2)E
(4)	$\neg P\vee(S\vee\neg Q)$	T(3)E
(5)	$(\neg P\vee S)\vee\neg Q$	T(4)E
(6)	$\neg P\vee S$	T(1)(5)I
(7)	$P\rightarrow S$	T(6)E
(8)	$\neg R\vee P$	P
(9)	$R\rightarrow P$	T(8)E
(10)	$R\rightarrow S$	T(7)(9)I

间接推理-条件论证

如果要证明的结论是 $R \to S$ 的形式，则可以把结论中 $R \to S$ 的前件 R 作为附加前提，与给定的前提一起推出后件 S 即可。

间接推理-条件论证

定理 如果 $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge R \Rightarrow S$，

则 $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \Rightarrow R \to S$

证明：因为 $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge R \Rightarrow S$， 则

$(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge R) \to S$ 是永真式。 而

$$(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge R) \to S$$

$$\Leftrightarrow \neg(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge R) \vee S$$

$$\Leftrightarrow (\neg(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \vee \neg R) \vee S$$

$$\Leftrightarrow \neg(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \vee (\neg R \vee S)$$

$$\Leftrightarrow (H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \to (R \to S)$$

所以 $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \to (R \to S)$ 是永真式。

即 $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \Rightarrow R \to S$， 定理得证。

条件论证

我们把上述定理写成如下规则：

CP规则 (Conditional Proof)：

如果 $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge R \Rightarrow S$，

则 $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \Rightarrow R \rightarrow S$

条件论证

例4　$P \to (Q \to S)$，$\neg R \vee P$，$Q \Rightarrow R \to S$

证明：

(1) R	P(附加前提)
(2) $\neg R \vee P$	P
(3) P	T(1)(2)I
(4) $P \to (Q \to S)$	P
(5) $Q \to S$	T(3)(4)I
(6) Q	P
(7) S	T(5)(6)I
(8) $R \to S$	CP

条件论证

例6 用命题逻辑的推理方法证明下面推理的有效性：

如果小张和小王去看电影，则小李也去看电影；小赵不去看电影或小张去看电影；小王去看电影；所以，当小赵去看电影时，小李也去。

解： **设 P：小张去看电影。 Q：小王去看电影。**

R：小李去看电影。 S：小赵去看电影。

前提：$(P \wedge Q) \rightarrow R$，$\neg S \vee P$，$Q$

结论： $S \rightarrow R$

条件论证

$(P\wedge Q)\rightarrow R$，$\neg S\vee P$，$Q \Rightarrow S\rightarrow R$

证明：		
	(1) S	P(附加前提)
	(2) $\neg S\vee P$	P
	(3) P	T(1) (2) I
	(4) Q	P
	(5) $P\wedge Q$	T(3)(4)I
	(6) $(P\wedge Q)\rightarrow R$	P
	(7) R	T(5)(6)I
	(8) $S\rightarrow R$	CP

不相容/相容

不相容定义：

设 $H_1,H_2,\ldots,H_n$ 是命题公式，$P_1,P_2,\ldots,P_m$ 是公式中的命题变元。如果对 $P_1,P_2,\ldots,P_m$，至少有一组赋值使得 $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n$ 的真值为 T，则称公式集合 $\{H_1,H_2,\ldots,H_n\}$ 是相容的(也称是一致的)；

如果对 $P_1,P_2,\ldots,P_m$ 的每一组赋值，都使得 $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n$ 的真值为 F，则称公式集合 $\{H_1,H_2,\ldots,H_n\}$ 是不相容的 (也称是不一致的)。

间接推理-反证法

若要证明 $H_1,H_2,\ldots,H_n \Rightarrow C$，只要证明 $\{ H_1,H_2,\ldots,H_n,\neg C \}$ 是不相容的即可。

即 若要证明 $H_1,H_2,\ldots,H_n \Rightarrow C$，只要证明 $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C$ 是个矛盾式即可。

间接推理-反证法

反证法的根据如下：

要证 $H_1 \land H_2 \land \ldots \land H_m \Rightarrow C$

记$A=H_1 \land H_2 \land \ldots \land H_m$，

即是要证 $A \Rightarrow C$，$A \rightarrow C$是重言式，

$\neg A \lor C$是重言式，$A \land \neg C$是矛盾式，

即是要证$H_1 \land H_2 \land \ldots \land H_m \land \neg C$是矛盾式

等于多了一个前提$\neg C$，用直接证明方法证得矛盾即可

间接推理-反证法

定理 若 $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C$ 是个矛盾式，则

$H_1, H_2, \ldots, H_n \Rightarrow C$ 成立。

证明：设 $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C$ 是矛盾式，则

$\neg(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C)$ 是个永真式。而

$$\neg(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C)$$

$$\Leftrightarrow \neg(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \vee C$$

$$\Leftrightarrow (H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \rightarrow C$$

于是 $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \rightarrow C$ 是一个永真式，所以

$H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \Rightarrow C$ 。 证毕

反证法

例　证明 $A \rightarrow B, \neg(B \vee C) \Rightarrow \neg A$

证明

(1) $A \rightarrow B$	P
(2) A	P(附加前提)
(3) $\neg(B \vee C)$	P
(4) $\neg B \wedge \neg C$	T(3)E
(5) B	T(1),(2)I
(6) $\neg B$	T(4) I
(7) $B \wedge \neg B$ (矛盾)	T(5),(6) I

反证法

例 $P\rightarrow Q$，$(\neg Q\vee R)\wedge\neg R$，$\neg(\neg P\wedge S)\Rightarrow\neg S$

(1) $\neg\neg S$	P(假设前提)	(8) $(\neg Q\vee R)\wedge\neg R$	P
(2) S	T(1)E	(9) $\neg Q\vee R$	T(8)I
(3) $\neg(\neg P\wedge S)$	P	(10) $\neg R$	T(8)I
(4) $P\vee\neg S$	T(3)E	(11) R	T(7)(9)I
(5) P	T(2)(4)I	(12) $R\wedge\neg R$	T(10)(11)I
(6) $P\rightarrow Q$	P		
(7) Q	T(5)(6)I		

推理

例：请根据下面事实，找出凶手：

1. 清洁工或者秘书谋害了经理。
2. 如果清洁工谋害了经理，则谋害不会发生在午夜前。
3. 如果秘书的证词是正确的，则谋害发生在午夜前。
4. 如果秘书的证词不正确，则午夜时屋里灯光未灭。
5. 如果清洁工富裕，则他不会谋害经理。
6. 经理有钱且清洁工不富裕。
7. 午夜时屋里灯灭了。

令 A：清洁工谋害了经理。 B：秘书谋害了经理。 C：谋害发生在午夜前。D：秘书的证词是正确的。 E：午夜时屋里灯光灭了。 H：清洁工富裕。 G：经理有钱。

令 A：清洁工谋害了经理。 B：秘书谋害了经理。 C：谋害发生在午夜前。D：秘书的证词是正确的。 E：午夜时屋里灯光灭了。 H：清洁工富裕。 G：经理有钱。

1、 清洁工或者秘书谋害了经理。 $A \lor B$

令 A：清洁工谋害了经理。 B：秘书谋害了经理。 C：谋害发生在午夜前。D：秘书的证词是正确的。 E：午夜时屋里灯光灭了。 H：清洁工富裕。 G：经理有钱。

A∨B,

令 A：清洁工谋害了经理。 B：秘书谋害了经理。 C：谋害发生在午夜前。D：秘书的证词是正确的。 E：午夜时屋里灯光灭了。 H：清洁工富裕。 G：经理有钱。

2、如果清洁工谋害了经理，则谋害不会发生在午夜前。 $A \rightarrow \neg C$

$A \vee B$,

令 A：清洁工谋害了经理。 B：秘书谋害了经理。 C：谋害发生在午夜前。D：秘书的证词是正确的。 E：午夜时屋里灯光灭了。 H：清洁工富裕。 G：经理有钱。

$A \vee B$，$A \rightarrow \neg C$

令 A：清洁工谋害了经理。 B：秘书谋害了经理。 C：谋害发生在午夜前。D：秘书的证词是正确的。 E：午夜时屋里灯光灭了。 H：清洁工富裕。 G：经理有钱。

3、如果秘书的证词是正确的，则谋害发生在午夜前。 $D \rightarrow C$

$A \vee B$，$A \rightarrow \neg C$，

令 A：清洁工谋害了经理。 B：秘书谋害了经理。 C：谋害发生在午夜前。D：秘书的证词是正确的。 E：午夜时屋里灯光灭了。 H：清洁工富裕。 G：经理有钱。

$A \vee B$，$A \to \neg C$，$D \to C$

令 A：清洁工谋害了经理。 B：秘书谋害了经理。 C：谋害发生在午夜前。D：秘书的证词是正确的。 E：午夜时屋里灯光灭了。 H：清洁工富裕。 G：经理有钱。

4、如果秘书的证词不正确，则午夜时屋里灯光未灭。$\neg D \rightarrow \neg E$

$A \vee B$，$A \rightarrow \neg C$，$D \rightarrow C$，

令 A：清洁工谋害了经理。 B：秘书谋害了经理。 C：谋害发生在午夜前。D：秘书的证词是正确的。 E：午夜时屋里灯光灭了。 H：清洁工富裕。 G：经理有钱。

$A \vee B$, $A \to \neg C$, $D \to C$, $\neg D \to \neg E$

令 A：清洁工谋害了经理。 B：秘书谋害了经理。 C：谋害发生在午夜前。D：秘书的证词是正确的。 E：午夜时屋里灯光灭了。 H：清洁工富裕。 G：经理有钱。

5、如果清洁工富裕，则他不会谋害经理。 $H\to\neg A$

$A\vee B$, $A\to\neg C$, $D\to C$, $\neg D\to\neg E$,

令 A：清洁工谋害了经理。 B：秘书谋害了经理。 C：谋害发生在午夜前。D：秘书的证词是正确的。 E：午夜时屋里灯光灭了。 H：清洁工富裕。 G：经理有钱。

$A \vee B$， $A \to \neg C$， $D \to C$， $\neg D \to \neg E$， $H \to \neg A$

令 A：清洁工谋害了经理。 B：秘书谋害了经理。 C：谋害发生在午夜前。D：秘书的证词是正确的。 E：午夜时屋里灯光灭了。 H：清洁工富裕。 G：经理有钱。

6、经理有钱且清洁工不富裕。 $G \land \neg H$

$A \lor B$, $A \to \neg C$, $D \to C$, $\neg D \to \neg E$, $H \to \neg A$,

令 A：清洁工谋害了经理。 B：秘书谋害了经理。 C：谋害发生在午夜前。D：秘书的证词是正确的。 E：午夜时屋里灯光灭了。 H：清洁工富裕。 G：经理有钱。

$A \vee B$， $A \to \neg C$， $D \to C$， $\neg D \to \neg E$， $H \to \neg A$， $G \wedge \neg H$

令 A：清洁工谋害了经理。 B：秘书谋害了经理。 C：谋害发生在午夜前。D：秘书的证词是正确的。 E：午夜时屋里灯光灭了。 H：清洁工富裕。 G：经理有钱。

7、午夜时屋里灯灭了。 E

$A \lor B$，$A \to \neg C$，$D \to C$，$\neg D \to \neg E$，$H \to \neg A$，$G \land \neg H$，

令 A：清洁工谋害了经理。 B：秘书谋害了经理。 C：谋害发生在午夜前。D：秘书的证词是正确的。 E：午夜时屋里灯光灭了。 H：清洁工富裕。 G：经理有钱。

$A \vee B$，$A \to \neg C$，$D \to C$，$\neg D \to \neg E$，$H \to \neg A$，$G \wedge \neg H$，E

令 A：清洁工谋害了经理。 B：秘书谋害了经理。 C：谋害发生在午夜前。D：秘书的证词是正确的。 E：午夜时屋里灯光灭了。 H：清洁工富裕。 G：经理有钱。

$$A \vee B,\ A \to \neg C,\ D \to C,\ \neg D \to \neg E,\ H \to \neg A,\ G \wedge \neg H,\ E \quad \Rightarrow ?$$

$A \vee B,\ A \to \neg C,\ D \to C,\ \neg D \to \neg E,\ H \to \neg A,\ G \wedge \neg H, E \Rightarrow ?$

(1) E	P
(2) $\neg D \to \neg E$	P
(3) D	T(1)(2)I
(4) $D \to C$	P
(5) C	T(3) (4) I
(6) $A \to \neg C$	P
(7) $\neg A$	T (5) (6) I
(8) $A \vee B$	P
(9) B	T(7) (8) I

(10) $B \wedge \neg A$ T (7) (9) I

结果是秘书谋害了经理。

谢 谢