《概率论与数理统计 I》期末考试卷 (A)

参考答案及评分标准

题 数	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分
得 分									

本题得分	

一、选择题〖每小题 4 分，共计 20 分〗

1. 抛掷 3 枚均匀对称的硬币，恰好有一枚正面向上的概率是 (C)

(A) 0.125　　(B) 0.25　　(C) 0.375　　(D) 0.5

2. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}4x^3, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$，则使 $P(X>a)=P(X<a)$ 成立的常数 a 的值为 (A)

(A) $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$　　(B) $\sqrt[4]{2}$　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) $1-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

3. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，则 $Z=X-Y$ 仍服从正态分布，且有 (C)

(A) $Z\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$　　(B) $Z\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2-\sigma_2^2)$

(C) $Z\sim N(\mu_1-\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$　　(D) $Z\sim N(\mu_1-\mu_2,\sigma_1^2-\sigma_2^2)$

4. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 $X\sim N(0,1)$ 的一个简单随机样本，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，则正确的是 (C)

(A) $n\overline{X}\sim N(0,1)$　　(B) $\overline{X}\sim N(0,1)$　　(C) $\sum_{i=1}^{n}X_i^2\sim\chi^2(n)$　　(D) $\overline{X}/S\sim t(n-1)$

5. 设随机事件 A、B 满足 $P(A|B)=1$，则 (B)

(A) A 是必然事件　　(B) $P(B|\overline{A})=0$　　(C) $A\supset B$　　(D) $A\subset B$

本题得分	

二、填空题〖每小题 4 分，共计 20 分〗

1. 设事件 A、B 满足 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.3$，$P(B|A)=0.3$，则 $P(A\cup B)=$ <u>0.72</u>.

2. 设随机变量 $X\sim B(2,p)$ (二项分布)，$Y\sim B(3,p)$，若 $P(X\geq 1)=\frac{5}{9}$，则 $P(Y\geq 1)=$ <u>$\frac{19}{27}$</u>.

3. 设随机变量 X、Y 的方差 $D(X)=25$, $D(Y)=36$, 相关系数为 $\rho_{XY}=0.4$，则 $D(X-Y)=$ <u>37</u>.

4. 设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}e^{-x+\theta}, & x\geq\theta\\ 0, & x<\theta\end{cases}$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的样本，则参数 θ 的矩估计量为 <u>$\overline{X}-1$</u>.

5. 某工人用车床加工一种零件，如果零件长度服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，随机抽取 9 只，测得零件平均长度 $\overline{x}=120$ mm，样本方差 $S^2=9\ \text{mm}^2$，则总体期望 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为: <u>(117.694, 122.306)</u>. [$z_{0.025}=1.96$, $t_{0.025}(8)=2.3060$]

本题得分	

三、〖本题 10 分〗将信息分别编码为 A 与 B 传递出去，设发报台分别以概率 0.65 和 0.35 发出信号 A 与 B，由于干扰，当发出信号 A 时，收报台分别以 0.85 和 0.15 的概率收到 A 与 B，当发出信号 B 时，收报台分别以 0.9 和 0.1 的概率收到 B 与 A. 求：(1) 收报台收到信号 B 的概率；(2) 当收报台收到信号 B 时，发报台确实是发出信号 B 的概率.

考试形式开卷（ ）、闭卷（√），在选项上打（√）

开课教研室<u>应用数学系</u>　命题教师：<u>命题组</u>　命题时间<u>2017.12.12</u>　使用学期<u>2017-2018-01</u>　总张数<u>3</u>　教研室主任审核签字____________

解： X_i：分别表示发报台发出信号 A 与 B.（i=1, 2） (1 分)

Y_i：分别表示发报台收到信号 A 与 B.（i=1, 2） (1 分)

由题意可知：$P(X_1)=0.65,\ P(X_2)=0.35$，$P(Y_1|X_1)=0.85,\ P(Y_2|X_1)=0.15$，

$P(Y_1|X_2)=0.1, P(Y_2|X_2)=0.9$， (3 分)

(1) $P(Y_2)=P(X_1Y_2)+P(X_2Y_2)=P(Y_2|X_1)P(X_1)+P(Y_2|X_2)P(X_2)$ (1 分)

$=0.15\times0.65+0.9\times0.35=0.4125$， (2 分)

(2) $P(X_2|Y_2)=\dfrac{P(X_2Y_2)}{P(Y_2)}=\dfrac{P(Y_2|X_2)P(X_2)}{P(Y_2)}=0.7636$. (2 分)

本题得分	

四、〖本题 10 分〗设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}Ae^{-3x}, & x\ge 0\\ 0, & 其它\end{cases}$，

求：(1) 常数 A 的值；(2) $P(-1<X<2)$；(3) $Y=5X+4$ 的概率密度函数.

解： (1) 因为 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^{+\infty}Ae^{-3x}dx=1$， (2 分)

所以 $A=3$； (1 分)

(2) $P(-1<X<2)=\int_0^2 3e^{-3x}dx=1-e^{-6}$； (2 分)

(3) $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(5X+4\le y)=P(X\le \frac{y-4}{5})=F_X(\frac{y-4}{5})$， (2 分)

对上式两边求导，可得：

$f_Y(y)=f_X(\frac{y-4}{5})(\frac{y-4}{5})'$ (1 分)

$=\begin{cases}\dfrac{3}{5}e^{-\frac{3}{5}(y-4)}, & \dfrac{y-4}{5}\ge 0\\ 0, & 其它\end{cases}$， (1 分)

即 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{5}e^{-\frac{3}{5}(y-4)}, & y\ge 4\\ 0, & 其它\end{cases}$. (1 分)

本题得分	

五、〖本题 10 分〗设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}Ae^{-(x+2y)}, & x>0,\ y>0\\ 0, & 其它\end{cases},$$

求：(1) 常数 A 的值；(2) $P(0<X<1,\ 0<Y<1)$；(3) $Z=X+Y$ 的概率密度函数.

解： (1) 因为 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}Ae^{-(x+2y)}dxdy=\frac{A}{2}=1$， (2 分)

所以 $A=2$； (1 分)

(2) $P(0<X<1,\ 0<Y<1)=\int_0^1\int_0^1 2e^{-(x+2y)}dxdy=(1-e^{-1})(1-e^{-2})$； (3 分)

(3) $F_Z(z)=P(X+Y\le z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{z-x}f(x,y)dydx$ (1 分)

令 $u=x+y$，有 $F_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{z}f(x,u-x)dudx=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,u-x)dx\right]du$，

于是 $f_z(z)=F_Z'(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$， (1 分)

当 $z\le 0$ 时，$f_z(z)=0$，

当 $z>0$ 时，$f_z(z)=\int_0^z 2e^{-(x+2(z-x))}dx=2e^{-2z}\int_0^z e^x dx=2e^{-2z}(e^z-1)$， (1 分)

所以 $Z=X+Y$ 的概率密度为 $f_z(z)=\begin{cases}2e^{-2z}(e^z-1), & z>0\\ 0, & 其它\end{cases}$. (1 分)

本题得分	

六、〖本题 10 分〗设二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y)=\begin{cases}12y^2, & 0\le y\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases},$$

求：(1) 关于 X 和 Y 的边缘概率密度；(2) 数学期望 $E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$.

解：(1) 当 $0\le x\le 1$ 时，$f_X(x)=\int_0^x f(x, y)dy=\int_0^x 12y^2dy=4x^3$，

所以 $f_X(x)=\begin{cases}4x^3, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.　　(2 分)

当 $0\le y\le 1$ 时，$f_Y(y)=\int_y^1 f(x, y)dx=\int_y^1 12y^2dx=12y^2(1-y)$，

所以 $f_Y(y)=\begin{cases}12y^2(1-y), & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.　　(2 分)

(2) $E(X)=\int_0^1 x f_X(x)dx=\frac{4}{5}$，　　(2 分)

$E(Y)=\int_0^1 y f_Y(y)dy=\frac{3}{5}$，　　(2 分)

$E(XY)=\int_0^1 xy f(x, y)dxdy=\frac{1}{2}$.　　(2 分)

本题得分	

七、〖本题 10 分〗设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}(\theta+1)x^\theta, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，

其中 $\theta>-1$ 是未知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，求 θ 的最大似然估计量.

解：似然函数为 $L(\theta; x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^n(\theta+1)x_i^\theta=(\theta+1)^n\prod_{i=1}^n x_i^\theta$，$0\le x_i\le 1$，　　(2 分)

取对数，得 $\ln L=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^n(\ln x_i)$，　　(2 分)

令 $\frac{d\ln L}{d\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^n \ln x_i=0$，得 $\hat{\theta}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i}-1$，　　(3 分)

因此，θ 的极大似然估计量为 $\hat{\theta}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln X_i}-1$.　　(2 分)

本题得分	

八、〖本题 10 分〗某厂生产的一批钢索，其断裂强度 X 服从正态分布，现从该批钢索中选取一个容量为 9 的样本，算得样本均值 $\bar{x}=830$，样本标准差 $s=40$，在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，问能否认为这批钢索的断裂强度为 800 (单位：kg/cm^2)？

$[z_{0.025}=1.96,\ \ t_{0.025}(8)=2.3060,\ \ t_{0.025}(9)=2.2622]$

解：(1) 提出假设: $H_0:\mu=\mu_0=800;\ H_1:\mu\ne 800$；　　(2 分)

(2) 选择检验统计量 $T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$；　　(2 分)

(3) 由检验水平 $\alpha=0.05$，在 H_0 为真下，使

$P(|T|\ge t_{0.025}(8))=0.05$，查表找上 α 分位数 $t_{0.025}(8)=2.3060$，　　(1 分)

从而得拒绝域为 $(-\infty,-2.3060]\cup[2.3060,+\infty)$；　　(2 分)

(4) 由样本值计算可得 $T=\frac{830-800}{40/3}=2.25$；　　(2 分)

(5) 作出判断：由 $T=2.25\notin(-\infty,-2.3060]\cup[2.3060,+\infty)$ 可以接受 H_0，

即可以认为这批钢索的断裂强度为 800 (单位：kg/cm^2).　　(1 分)