2021 级高等数学 I(2)期末试题　B 卷参考答案

1.(6 分) 已知向量 $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(2,3,6)$, 求 $\vec{a}\bullet\vec{b}$ 与 $\vec{a}\times\vec{b}$.

解：$\vec{a}\bullet\vec{b}$=26，（3 分）　$\vec{a}\times\vec{b}=(3,0,-1)$.（6 分）

2.（6 分）设 $\vec{a}=(2,-1,2)$, 若 $\vec{x}$ 与 $\vec{a}$ 平行，且 $\vec{x}\bullet\vec{a}=-9$, 求 $\vec{x}$.

解：由平行条件，设 $\vec{x}=k(2,-1,2)$,　（2 分）又 $\vec{x}\bullet\vec{a}=k(2^2+1^2+2^2)=-9$,

从而 $k=-1$,　(4 分）　$\vec{x}=(-2,1,-2)$,　(6 分）

3.（6 分）求平行于 z 轴，且经过点 $P=(4,0,-2)$ 和点 $Q=(5,1,7)$ 的平面方程.

解：平面平行于 z 轴，可设平面的一般式方程为 $ax+by+d=0$,　（2 分）

将点 $P=(4,0,-2)$，$Q=(5,1,7)$ 的坐标代入平面方程，得

$$\begin{cases} 4a+d=0, \\ 5a+b+d=0, \end{cases}$$

从而得 $d=-4a$, $b=-a$.（5 分）所求平面方程为 $x-y-4=0$.（6 分）

4.（6 分）求曲线 $\begin{cases} z=2-x^2-y^2, \\ z=(x-1)^2+(y-1)^2 \end{cases}$ 在 xoy 面上的投影.

解：$\begin{cases} x^2+y^2=x+y, \\ z=0, \end{cases}$　（6 分）

5.（6 分）写出 yoz 面上的双曲线 $\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周所得曲面方程.

解：$\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2+z^2}{c^2}=1.$　（6 分）

6.（6 分）已知函数 $u(x,y,z)=3x^2y-2xy+4x+6z$，求函数 u 在原点处沿方向 $\overrightarrow{OA}=(1,2,1)$ 的方向导数．

解：$\left.\dfrac{\partial f}{\partial \overrightarrow{OA}}\right|_{(0,0,0)}=(6xy-2y+4,3x^2-2x,6)\big|_{(0,0,0)}\bullet\vec{e}_{OA}=(4,0,6)\bullet\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)=\dfrac{10}{\sqrt{6}}$.（6 分）

7.（6 分）已知 $z=f(x^2+y^2,xy)$, 且 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'+yf_2'$, （2 分）

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x(2yf_{11}''+xf_{12}'')+f_2'+y(2yf_{21}''+xf_{22}'')$$ （6 分）

$$=f_2'+4xy\,f_{11}''+2(x^2+y^2)f_{12}''+xyf_{22}''.$$

8．(6 分) 计算二重积分 $\iint\limits_D (x^2y+xy^2)dxdy$，其中 D 是由 $x=1, y=x$ 及 x 轴所围区域.

解：原式=$\int_0^1 x^2dx\int_0^x ydy+\int_0^1 xdx\int_0^x y^2dy=\int_0^1\frac{1}{2}x^4dx+\int_0^1\frac{1}{3}x^4dx=\frac{1}{6}$,（本题积分次序也可以先 x 后 y）（6 分）

9．(6 分) 计算三重积分 $\iiint\limits_\Omega (1+z)dxdydz$，其中 Ω 是由 $z=\frac{1}{4}(x^2+y^2)$ 与 $z=1$ 所围区域.

解：用截面法计算：原式=$\int_0^1(1+z)dz\iint\limits_{D_z}dxdy=\int_0^1 4\pi z(1+z)dz=\frac{10}{3}\pi$,（本题也可用投影法计算，利用柱坐标）（6 分）

10．(6 分) 已知正数 x,y,z 之和为 20，问 x,y,z 应怎样取值才能使 $u=xyz^2$ 取最大值.

解：$\begin{aligned}&\max\quad f=xyz^2,\\ &S.t.\quad x+y+z=20.\end{aligned}$

做拉格朗日函数：$L(x,y,z;\lambda)=xyz^2+\lambda(x+y+z-20)$， （2 分）

由 $\begin{cases}L_x=yz^2+\lambda=0,\\ L_y=xz^2+\lambda=0,\\ L_z=2xyz+\lambda=0,\\ L_\lambda=x+y+z-20=0,\end{cases}$ 得 $2x=2y=z=10$, （5 分）

由实际问题解的存在性知，当 $x=y=5$，$z=10$ 时，$u=xyz^2$ 取最大值为 2500. （6 分）

11．(6 分) 计算曲线积分 $\int\limits_L (x+y)dx+(y-x)dy$，其中 $L=\overline{OM}\bigcup\overline{MN}$ 为联结 $O(0,0), M(1,1), N(1,2)$ 的有向折线段.

解：$\int\limits_{\overline{OM}}(x+y)dx+(y-x)dy=\int_0^1 2xdx=1$, （2 分）

$$\int_{MN}(x+y)dx+(y-x)dy=\int_1^2(y-1)dy=\frac{1}{2}y^2\Big|_1^2-1=\frac{1}{2},$$ （5 分）

原式$=\frac{3}{2}$.　　　（6 分）

12．(6 分) 计算曲面积分$\oiint_{\Sigma}x^2dS$，其中Σ为球面$x^2+y^2+z^2=2$.

解：由对称性，

原式$=\oiint_{\Sigma}x^2dS=\frac{1}{3}\oiint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS=\frac{2}{3}\oiint_{\Sigma}1dS=\frac{16\pi}{3}$.　　（6 分）

13．(6 分) 计算$\oiint_{\Sigma}(x^2+y^3+z)dxdy$，其中$\Sigma$是由$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$与$z=0$所围立体的表面外侧.

解：由高斯公式，

原式$=\iiint_{\Omega}1dxdydz=\int_0^1dz\iint_{D_z}dxdy=\int_0^1\pi(1-z^2)dz$

$=\pi(1-\frac{1}{3})=\frac{2\pi}{3}$.　　（5 分）

其中$D_z:x^2+y^2\le(1-z^2)$.　　（6 分）

14．(6 分) 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$的敛散性，若收敛，是条件收敛还是绝对收敛.

解：原级数作为交错级数，满足：（1）$u_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$单调减；（2）

$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}=0$; 从而原级数收敛.（3 分）

对于$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$, 由$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\ge\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}n}$知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$发散，从而原级数条件收敛.（6 分）

15．(6 分) 将函数$f(x)=\frac{1}{2x}$展开成$(x-1)$的幂级数.

解：$f(x)=\frac{1}{2x}==\frac{1}{2(1+(x-1))}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$. $|x-1|<1$.（6 分）

16．(10 分) 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}n(x-1)^n$的和函数.

解：设 $t=x-1$，则

$$s(t)=\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n}=t\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}=t\sum_{n=1}^{\infty}(t^{n})'=t\left(\sum_{n=1}^{\infty}t^{n}\right)'=t\left(\frac{t}{1-t}\right)'=\frac{t}{(1-t)^{2}},\qquad \text{（8 分）}$$

从而原级数的和函数为

$$s(x)=\frac{x-1}{(1-x+1)^{2}}=\frac{x-1}{(2-x)^{2}},\qquad x\in(0,2).\qquad \text{（10 分）}$$