2023 级 线性代数 IIA 参考答案

一、填空题（1-7 小题，每小题 4 分，共 28 分）

1. 行列式 $\begin{vmatrix} 2019 & 2020 & 2021 \\ 2022 & 2023 & 2024 \\ 2025 & 2026 & 2027 \end{vmatrix} =$ ______________. 0

2. 矩阵乘积 $\begin{pmatrix} 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} =$ ______________. 0

3. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵 $A^{-1} =$ ______________. $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

4. 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$A^5 =$ ______________. $16\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. 已知三阶方阵 A 的特征值为 $1, 2, 3$．若方阵 B 与 A 相似，$\left|(2B)^{-1}\right|$=______________ $\frac{1}{48}$

6. 设三元非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的系数矩阵的秩为 2，η_1, η_2 是方程组的解．若

$3\eta_1 + 2\eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$，$2\eta_1 + 3\eta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$，则该方程组的通解为 ________。 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

7. 已知 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 + A - 3E = O$，则 $(A-E)^{-1} =$ ________。 $A + 2E$

二、选择题（8-12 小题，每小题 4 分，共 20 分）

8. 设 A, B, C 为 n 阶方阵，则下列运算一定正确的是【 】 B

（A） $AB = BA$　　（B）$(AB)C = A(BC)$

（C） $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$　　（D）$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

9. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，则下列向量组中线性相关的是【 】 C

（A）$\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$，　　（B）$\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$，

（C）$\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$，　　（D）$\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_2 + \alpha_3, 3\alpha_3 + \alpha_1$ 。

10. 设 A 为 n 阶方阵，A 经过若干次初等变换得到矩阵 B，则【 】 D

（A）$|A|=|B|$ （B）$|A|\neq|B|$

（C）若 $|A|>0$，则 $|B|>0$ （D）若 $|A|=0$，则 $|B|=0$

11. 设 A 是 4 阶矩阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，若线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系只有 2 个向量，则伴随矩阵 A^* 的秩 $r(A^*)=$【 】 A

（A）0 （B） 1 （C）2 （D）3

12. 下列矩阵中不能相似于对角矩阵的是【 】D

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 0 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

三、计算题（13-15 小题，每小题 12 分，共 36 分）

13. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a^2-1 \end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$，讨论线性方程组 $Ax=b$ 解的情况，若有无穷多个解求出方程组的结构式通解。

解：$(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a^2-1 & a \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-1 & a-1 \end{array}\right)$ —— 4' (化成亦可)

当 $a\neq1$ 且 $a\neq-1$ 时，方程组有唯一解。 ----2'

当 $a=-1$ 时，$rank(A)=2<3=rank(A|b)$，方程组无解。 --2'

当 $a=1$ 时，$rank(A)=rank(A|b)=2<3$，方程组有无穷多个解，

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-1 & a-1 \end{array}\right)\overset{a=1}{=\!=\!=\!=\!=\!=}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

通解为 $x=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ -----4'

14. 求向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\3\\4\\6\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}4\\4\\5\\8\end{pmatrix}$，$\alpha_5=\begin{pmatrix}1\\1\\3\\2\end{pmatrix}$的秩和极大线性无关组，并将其余向量用此极大线性无关组表示。

解：$\begin{pmatrix}1&1&3&4&1\\1&1&3&4&1\\1&2&4&5&3\\2&2&6&8&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&3&4&1\\0&0&0&0&0\\0&1&1&1&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&3&-1\\0&1&1&1&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ ---5'

2'

所以秩为 2，极大无关组为α_1,α_2 2'

$\alpha_3=2\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_4=3\alpha_1+\alpha_2$， $\alpha_5=-\alpha_1+2\alpha_2$， 3'

15. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2024&0&0\\2024&0&0\\2024&0&0\end{pmatrix}$，求可逆矩阵 P 及对角矩阵 Λ，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$.

解：特征值为 $\lambda_1=2024$，$\lambda_2=\lambda_3=0$. ---3'

解线性方程组 $(A-\lambda_1)x=0$,得

$$A-\lambda_1E=\begin{pmatrix}0&0&0\\2024&-2024&0\\2024&0&-2024\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow p_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$ ---2'

解线性方程组 $(A-\lambda_2)x=0$，得

$$A-\lambda_2E=A=\begin{pmatrix}2024&0&0\\2024&0&0\\2024&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow p_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},p_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$ ---4'

令 $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}2024&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\Lambda$。 ---3'

四、证明题（16-17 小题，每小题 8 分，共 16 分）

16. 设 λ_1,λ_2 是方阵 A 的特征值，且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，若 α 是 A 对应 λ_1 的特征向量，β 是 A 对应 λ_2 的特征向量，证明：向量 $2\alpha+3\beta$ 不是 A 的特征向量。

证明：如若不然，存在 λ_0，使得 $A(2\alpha+3\beta)=\lambda_0(2\alpha+3\beta)$ ---3'

由条件 $A(2\alpha+3\beta)=2A\alpha+3A\beta=2\lambda_1\alpha+3\lambda_2\beta$

所以 $2\lambda_1\alpha+3\lambda_2\beta=\lambda_0(2\alpha+3\beta)\Rightarrow 2(\lambda_1-\lambda_0)\alpha+3(\lambda_2-\lambda_0)\beta=0$ ---2'

因为 α,β 是不同特征值对应的特征向量，故它们线性无关，所以

$\lambda_1-\lambda_0=0,\ \ \lambda_2-\lambda_0=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2$

与题设矛盾，故 $2\alpha+3\beta$ 不是 A 的特征向量 ---3'

17. 设 A,B 是同阶方阵，证明：若 A 与 B 相似，则 A^5+2A 与 B^5+2B 相似。

证明：$A\sim B\Rightarrow$ 存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$。 ---4'

$$B^5+2B=\left(P^{-1}AP\right)^5+2\left(P^{-1}AP\right)=P^{-1}A^5P+P^{-1}AP=P^{-1}(A^5+2A)P$$

所以 A^5+2A 与 B^5+2B 相似。 ----4'