《高等数学 I(2)》期中考试卷

使用专业、班级__________ 学号____________ 姓名_________________

题 数	一	二	三	四	五	六	七	总 分
得 分								

本题得分	

一. 计算下列各题:

1. 设$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2$, 求$[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$. (9 分)

解 $[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})=[\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$ (3 分)

$=[\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$ (3 分)

$=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}+(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=4.$ (3 分)

2.设$f(u.v)$可微，$z=z(x,y)$由方程$(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$确定，求全微分$dz|_{(0,1)}$. (8 分)

解 方程两边微分，得

$(x+1)dz+zdx-2ydy=2xdxf(x-z,y)+x^2(f_1'(dx-dz)+f_2'dy)$ (3 分)

则$dz=\frac{2xf-z+x^2f_1'}{x+1+x^2f_1'}dx+\frac{2y+x^2f_2'}{x+1+x^2f_1'}dy$ (3 分)

当$x=0,y=1$时, $z=1$, 故$dz=-dx+2dy$. (2 分)

3.计算积分 $I=\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}}e^{-y^2}dy\int_0^y e^{-x^2}dx+\int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^{R}e^{-y^2}dy\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}}e^{-x^2}dx$. (6 分)

解 设积分区域为 D， 则 D 用极坐标可表示为$\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le\rho\le R$, (2 分)
故

$$I=\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^R e^{-\rho^2}\rho d\rho=\frac{\pi}{8}(1-e^{-R^2}).$$ (4 分)

本题得分	

二. 求函数$f(x,y)=x^2+\sqrt{2}xy+2y^2$在区域$x^2+2y^2\le 4$上的最大值与最小值. (10 分)

解 在$x^2+2y^2<4$内，由$\begin{cases}f_x(x,y)=2x+\sqrt{2}y=0,\\ f_y(x,y)=\sqrt{2}x+4y=0\end{cases}$得驻点$P_1(0,0)$. (3 分)

在$x^2+2y^2=4$上，作拉格朗日函数 $F(x,y)=x^2+\sqrt{2}xy+2y^2+\lambda(x^2+2y^2-4)$,则

$$\begin{cases}F_x=2x+\sqrt{2}y+2x\lambda=0,\\ F_y=\sqrt{2}x+4y+4y\lambda=0,\\ x^2+2y^2=4\end{cases}$$

解方程得$x^2=2y^2$. (4 分)

将$x^2=2y^2$ 带入$x^2+2y^2=4$得 $y=\pm1$. 从而驻点为
$P_2(\sqrt{2},-1), P_3(-\sqrt{2},1), P_4(\sqrt{2},1), P_5(-\sqrt{2},-1)$.

因为$f(P_1)=0, f(P_2)=2, f(P_3)=2, f(P_4)=6, f(P_5)=6$,故函数$f(x,y)$的最大值为 6，最小值为 0. (3 分)

考试形式开卷（ ）、闭卷（ ），在选项上打（√）
开课教研室_________ 命题教师_________ 命题时间_________ 使用学期_________ 总张数_________ 教研室主任审核签字 _________

本题得分	

三. 求过直线$\begin{cases} x+5y+z=0, \\ x-z+4=0 \end{cases}$且与平面$x-4y-8z+12=0$夹成$\frac{\pi}{4}$角的平面方程. (9 分)

解. 过直线$\begin{cases} x+5y+z=0, \\ x-z+4=0 \end{cases}$的平面束方程为

$$x+5y+z+\lambda(x-z+4)=0,$$

即$(1+\lambda)x+5y+(1-\lambda)z+4\lambda=0$,其法向量为$\overrightarrow{n_1}=(1+\lambda,5,1-\lambda)$. (3 分)

平面$x-4y-8z+12=0$的法向量为$\overrightarrow{n_2}=(1,-4,-8)$.由两平面夹角为$\frac{\pi}{4}$知

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}$$

得$\lambda=-\frac{3}{4}$. (3 分)

将$\lambda=-\frac{3}{4}$带入平面束方程中得平面方程

$$x+20y+7z-12=0.$$

又因为平面$x-z+4=0$与平面$x-4y-8z+12=0$也夹成$\frac{\pi}{4}$角，所以所求平面方程为

$$x+20y+7z-12=0\text{和}x-z+4=0.$$ (3 分)

本题得分	

四. 设f连续可导，$z(x,y)=\int_0^y e^y f(x-t)dt$， 求$z_{xy}$. (9 分)

解 令$u=x-t$,则$dt=-du$. 当$t=0$时，$u=x$; 当$t=y$时，$u=x-y$. (2 分)
于是

$$z(x,y)=\int_0^y e^y f(x-t)dt=\int_{x-y}^x e^y f(u)du=e^y\int_{x-y}^x f(u)du$$ (3 分)

故 $z_x=e^y\big(f(x)-f(x-y)\big)$, $z_{xy}=e^y\big(f(x)-f(x-y)\big)+e^y f'(x-y)$. (4 分)

本题得分	

五. 计算$I=\iiint_\Omega(x^2+5xy^2\cos\sqrt{x^2+y^2})dxdydz$，其中$\Omega$是由$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2),z=1,z=4$围成. (9 分)

解 $I=\iiint_\Omega x^2dxdydz+\iiint_\Omega 5xy^2\cos\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$ (2 分)

$=\iiint_\Omega x^2dxdydz=\int_1^4 dz\iint_{D_z}x^2dxdy=\int_1^4 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2z}}\rho^3(\cos\theta)^2d\rho=21\pi$ (7 分)

本题得分	

六. 求异面直线L_1:$\begin{cases} 3x+4y=19 \\ y+3z=-2 \end{cases}$和$L_2$: $\frac{x}{2}=\frac{y+7}{-9}=\frac{z-2}{-2}$之间的距离. (10 分)

解 直线L_1的方向向量为

$$S_1=(3,4,0)\times(0,1,3)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}=(12,-9,3)=3(4,-3,1)$$ (3 分)

直线L_2的方向向量为$S_2=(2,-9,-2)$.因此，直线L_1,L_2的公垂线的方向向量为

$$S=S_1\times S_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 12 & -9 & 3 \\ 2 & -9 & -2 \end{vmatrix}=(45,30,-90)$$ (3 分)

在直线L_1和L_2上各取一点$M_1(9,-2,0),M_2=(0,-7,2)$,得$\overrightarrow{M_1M_2}=(-9,-5,2)$,于是直线$L_1$和$L_2$之间的距离为向量$\overrightarrow{M_1M_2}$在$\vec{S}$上的投影的绝对值，即

$$d=\left|Prj_{\vec{S}}^{\overrightarrow{M_1M_2}}\right|=\frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\vec{S}|}{|\vec{S}|}=7.$$ (4 分)

本题得分	

七. 求函数$z=1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$在点$(\frac{a}{\sqrt2},\frac{b}{\sqrt2})$处沿曲线$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$在这点的内法线方向的方向导数. (9 分)

解 曲线$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$在点$(\frac{a}{\sqrt2},\frac{b}{\sqrt2})$ 处内法线的方向向量为

$\vec{S}\big|_{(\frac{a}{\sqrt2},\frac{b}{\sqrt2})}=-(\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{b^2})\Big|_{(\frac{a}{\sqrt2},\frac{b}{\sqrt2})}=-(\frac{\sqrt2}{a},\frac{\sqrt2}{b})$ (3 分)

$grad\ z\big|_{(\frac{a}{\sqrt2},\frac{b}{\sqrt2})}=(\frac{-2x}{a^2},\frac{-2y}{b^2})\Big|_{(\frac{a}{\sqrt2},\frac{b}{\sqrt2})}=(\frac{-\sqrt2}{a},\frac{-\sqrt2}{b})$ (3 分)

$\vec{S}$的方向余弦为 $\cos\alpha=\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}},\cos\beta=\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

所以方向导数为

$\frac{\partial z}{\partial \vec{S}}\Big|_{(\frac{a}{\sqrt2},\frac{b}{\sqrt2})}=\frac{\sqrt{2(a^2+b^2)}}{ab}$. (3 分)

本题得分	

八. 设$f(x,y)$在闭区域$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le y,x\ge 0\}$上连续且

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}\iint_D f(x,y)dxdy,$$

求$f(x,y)$. (9 分)

解 令 $I=\iint_D f(x,y)dxdy$, 则 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}I$. (2 分)

于是

$I=\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D\left(\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}I\right)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sin\theta}(\sqrt{1-\rho^2}-\frac{8}{\pi}I)\rho d\rho=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\frac{1}{3}(\cos\theta)^3+\frac{1}{3}-\frac{4}{\pi}I(\sin\theta)^2\,d\theta=-\frac{2}{9}+\frac{\pi}{6}-I$

故 $I=-\frac{1}{9}+\frac{\pi}{12}$ (6 分)

从而 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}+\frac{8}{9\pi}-\frac{2}{3}$ (1 分)

本题得分	

九. 设平面薄片由$\begin{cases}x=a(t-sint)\\y=a(1-cost)\end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$与x轴围成，它的面密度为 1，求它的形心. (12 分)

解 设平面薄片占有xoy平面上的闭区域 D, 则 $\bar{x}=\frac{\iint_D xdxdy}{\iint_D dxdy},\bar{y}=\frac{\iint_D ydxdy}{\iint_D dxdy}$.

区域关于直线$x=\pi a$对称，故$\bar{x}=\pi a$. (3 分)

因为

$\iint_D dxdy=\int_0^{2\pi a}dx\int_0^{y(x)}dy=\int_0^{2\pi a}y(x)dx=\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2dt=3\pi a^2$. (4 分)

$\iint_D ydxdy=\int_0^{2\pi a}dx\int_0^{y(x)}ydy=\int_0^{2\pi a}\frac{1}{2}(y(x))^2dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}a^3(1-\cos t)^3dt=\frac{5}{2}\pi a^3$ (4 分)

所以 $\bar{y}=\frac{5a}{6}$, 且形心为$(\pi a,\frac{5a}{6})$. (1 分)