2021 秋线性代数 1A 参考答案

一、计算题（1-8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

1. 解含有未知数 x 的方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & x \\ 1 & 4 & 9 & x^2 \\ 1 & 8 & 27 & x^3 \end{vmatrix} = 0$.

解法一：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & x \\ 1 & 4 & 9 & x^2 \\ 1 & 8 & 27 & x^3 \end{vmatrix} = (2-1)(3-1)(x-1)(3-2)(x-2)(x-3) = 2(x-1)(x-2)(x-3).$$

所以 $x=1$ 或 $x=2$ 或 $x=3$.

解法二： 一方面行列式是一个关于 x 的三次多项式，另一方面，根据行列式的性质可得当 $x=1$ 或 $x=2$ 或 $x=3$ 时，行列式等于零.故方程有且仅有三个解 $x=1$ 或 $x=2$ 或 $x=3$.

2. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$， 求 $(AA^T)^{2022}$.

解：$(AA^T)^{2022} = 3^{2021}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. 设 $\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 31 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$， 求矩阵 A.

解：

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 31 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 42 & 31 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 42 & 31 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

4. 设 $A=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{pmatrix}$， 且满足 $AB=A+2B$， 求矩阵 B .

解： $AB=A+2B\Rightarrow AB-2B=A\Rightarrow(A-2E)B=A\Rightarrow B=(A-2E)^{-1}A$

$$(A-2E\mid A)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&3&0&1\\1&-1&0&1&1&0\\0&1&2&0&1&4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&3&0&1\\0&-1&-1&-2&1&-1\\0&1&2&0&1&4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&3&0&1\\0&1&1&2&-1&1\\0&1&2&0&1&4\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&3&0&1\\0&1&1&2&-1&1\\0&0&1&-2&2&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&5&-2&-2\\0&1&0&4&-3&-2\\0&0&1&-2&2&3\end{array}\right)$$

$$B=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\4&-3&-2\\-2&2&3\end{pmatrix}$$

5. 设三元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵 A 的秩为 2， β_1,β_2,β_3 是它的三个解且满足 $\beta_1+\beta_2=(3,1,-1)^T$， $\beta_1+\beta_3=(2,0,-2)^T$， 求 $Ax=b$ 的通解.

解：因为系数矩阵 A 的秩为 2，所以 $(\beta_1+\beta_2)-(\beta_1+\beta_3)=\beta_2-\beta_3=(1,1,1)^T$ 是齐次方程的基础解系.

又 $A(\beta_1+\beta_3)=2b$， 所以 $\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_3)=(1,0,-1)^T$ 是 $Ax=b$ 的特解.

故通解为 $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

6. 已知$\mathbb{R}^2$的两组基：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$和 $\beta_1=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$，求从基$\alpha_1,\alpha_2$到基$\beta_1,\beta_2$的过渡矩阵.

解： 设过渡矩阵为P，则$(\beta_1,\beta_2)=(\alpha_1,\alpha_2)P$.

$(\beta_1,\beta_2)=(\alpha_1,\alpha_2)P\Rightarrow(\alpha_1,\alpha_2)^{-1}(\beta_1,\beta_2)=P$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&-1&0&-1\\1&1&2&5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&-1&0&-1\\0&2&2&6\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&-1&0&-1\\0&1&1&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&2\\0&1&1&3\end{array}\right)$$

$\therefore\quad P=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$

7. 设$1,-1,2$是三阶矩阵A的特征值，求行列式$|A-5E|$.

解： 因为$1,-1,2$是三阶矩阵A的特征值，所以$-4,-6,-3$是矩阵$A-5E$的特征值，故

$|A-5E|=(-4)\times(-6)\times(-3)=-72$.

8. 判断二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$的正定性.

解： 二次型的矩阵为$A=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$， 各阶顺序主子式分部为1，$\frac{3}{4}$，$\frac{1}{2}$，因此矩阵正定，从而二次型正定.

二、解答题（9-11 小题，每小题 12 分，共 36 分）

9. 讨论含参数 λ 的方程组 $\begin{cases} x_1 \qquad\quad + x_3 = \lambda \\ 4x_1 + x_2 + 2\,x_3 = \lambda + 2 \\ 6x_1 + x_2 + 4\,x_3 = 2\lambda + 3 \end{cases}$ 解的情况，并在有解时求出解的一般形式.

解： $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \lambda \\ 4 & 1 & 2 & \lambda+2 \\ 6 & 1 & 4 & 2\lambda+3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -2 & -3\lambda+2 \\ 0 & 1 & -2 & -4\lambda+3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -2 & -3\lambda+2 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda+1 \end{array}\right)$

…………………………………………4 分

当 $\lambda \neq 1$ 时，$rank(A) = 2 < rank(A\,|\,b) = 3$， 此时方程组无解；

…………………………………………2 分

当 $\lambda = 1$ 时，$rank(A) = rank(A\,|\,b) = 2 < 3$， 此时方程组有无穷多个解.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -2 & -3\lambda+2 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda+1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

特解为 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$， 齐次方程组的基础解系为 $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，通解为 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ………………………6 分

10. 已知向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}2\\0\\2\\2\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\ \alpha_4=\begin{pmatrix}3\\3\\5\\3\end{pmatrix},\ \alpha_5=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\ \alpha_6=\begin{pmatrix}3\\2\\2\\2\end{pmatrix}$$

求此向量组的秩和极大线性无关组，并将其它向量用极大无关组线性表示.

解：

$$\begin{pmatrix}1&2&1&3&1&3\\0&0&1&3&1&2\\1&2&0&5&1&2\\1&2&1&3&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&3&1&3\\0&0&1&3&1&2\\0&0&-1&2&0&-1\\0&0&0&0&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&3&1&3\\0&0&1&3&1&2\\0&0&0&5&1&1\\0&0&0&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&1&3&0&2\\0&0&1&3&0&1\\0&0&0&5&0&0\\0&0&0&0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&3&0&2\\0&0&1&3&0&1\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&0&0&2\\0&0&1&0&0&1\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&0&0&1\\0&0&1&0&0&1\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&1\end{pmatrix}$$

……………………………4 分

向量组的秩为 4；

极大线性无关组可取 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$， ……………………………4 分

$\alpha_2=2\alpha_1$， $\alpha_6=\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5$ ……………………………4 分

11. 设 $A=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\2&0&2&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$， 求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

解：解特征方程 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda&0&0&0\\0&-\lambda&0&0\\2&0&2-\lambda&2\\0&0&0&-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3(2-\lambda)=0$，得特征值

$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$，$\lambda_4=2$. ………………………………………………4 分

解方程组 $(A-0E)x=0$，得特征值 $\lambda=0$ 所对应的特征向量

$$P_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ P_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ P_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$ ………………………………………………3 分

解方程组 $(A-2E)x=0$，

$$\begin{pmatrix}-2&0&0&0\\0&-2&0&0\\2&0&0&2\\0&0&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

得特征值 $\lambda=2$ 所对应的特征向量 $P_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ ………………………………………………3 分

令 $P=\begin{pmatrix}0&-1&-1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$， 则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&&&\\&0&&\\&&0&\\&&&2\end{pmatrix}$ ……………………2 分

三、证明题（12-15 小题，每小题 6 分，共 24）

12. 若 2 阶方阵 A 的行列式 $|A|<0$，证明 A 可以相似对角化。

证明： 设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，则特征方程为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix}=(a-\lambda)(d-\lambda)-bc=\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc=0$$

……………………………3 分

$\because |A|<0$， $\therefore$ $\Delta=(a+d)^2-4(ad-bc)=(a+d)^2-4|A|>0$

所以特征方程有两个不同的根，即矩阵有两个不同的特征值，所以 A 可以相似对角化。

……………………………3 分

13. 设 λ_1,λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值，向量 p_1,p_2 是分别对应于特征值 λ_1,λ_2 的特征向量，证明：向量 p_1+2p_2 不是 A 的特征向量.

证明：因为向量 p_1,p_2 是分别对应于特征 λ_1,λ_2 的特征向量，故 p_1,p_2 线性无关…………2 分

若向量 p_1+2p_2 是 A 的的特征向量，则存在 $\lambda\in\mathbb{R}$，使得

$$A(p_1+2p_2)=\lambda(p_1+2p_2)=\lambda p_1+2\lambda p_2$$

又

$$A(p_1+2p_2)=Ap_1+2Ap_2=\lambda_1 p_1+2\lambda_2 p_2$$

$\therefore \quad \lambda_1 p_1+2\lambda_2 p_2=\lambda p_1+2\lambda p_2$

$\therefore \quad (\lambda_1-\lambda)p_1+(2\lambda_2-2\lambda)p_2=0$

$\therefore \quad \lambda_1-\lambda=0,\quad 2\lambda_2-2\lambda=0 \quad \therefore \quad \lambda_1=\lambda=\lambda_2$

这与题设矛盾，故向量 p_1+2p_2 不是 A 的的特征向量……………………………4 分

14. 设 A 为三阶正交阵，证明：当 $|A|=1$ 时，$|A-E|=0$.

证明：$|A-E|=|A-AA^T|$ ………2分

$$=|A||E-A^T|=(-1)^3|A||A^T-E|=-|A-E|$$

$\therefore\ |A-E|=0$ ....**4** 分

15. 设 β 是非齐次方程组 $Ax=b$ 的解，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系，证明：向量组 $\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

证明：设 $k_0\beta+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$， 于是

$0=A(k_0\beta+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m)=k_0A\beta+k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+\cdots+k_mA\alpha_m=k_0b$

又 $b\neq 0$， 所以 $k_0=0$， 从而 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$..................................**3** 分

再由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，可得 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$. 故 向量组 $\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关..................................**3** 分