《线性代数 I》 期末考试卷（A）

班级__________ 学号____________ 姓名_________________

题 数	一	二	三	四	总 分
得 分					

本题得分	

一、选择题〖每小题 4 分,共 20 分〗

1. 设 A, B, C 为 n 阶方阵, 则下列不一定正确的是（ **D** ）
（A） $B(A+B)^T A = [A^T(A+B)B^T]^T$ （B） $(AB)C = A(BC)$
（C） 若 A, B 均可逆，则 AB 可逆 （D）若 $A+B$ 可逆，则 $A-B$ 可逆

2. 设线性方程组 $Ax=b$ 有 n 个未知量、m 个方程，且 $R(A)=r$ ，则此方程组（**A** ）
（A）当 $r=m$ 时，有解 （B）当 $r=n$ 时，有唯一解
（C）当 $m=n$ 时，有唯一解 (D) 当 $r<n$ 时，有无穷多个解

3. 设 A 是 n 阶矩阵, 则下列命题正确的是（ **B** ）
(A) 若 α 是 A^T 的特征向量，则 α 是 A 的特征向量
(B) 若 α 是 A^{-1} 的特征向量，则 α 是 A 的特征向量
(C) 若 α 是 A^* 的特征向量，则 α 是 A 的特征向量
(D) 若 α 是 A^2 的特征向量，则 α 是 A 的特征向量

4. 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix}, \alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$,其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的是 （ **C** ）
(A) α_1，α_2，α_3 (B) α_1，α_2，α_4
(C) α_1，α_3，α_4 (D) α_2，α_3，α_4

5. 若 n 阶矩阵 A 相似于对角矩阵,则下列说法中正确的是（**C** ）
（A） A 有 n 个不同的特征值 （B） A 为实对称矩阵
（C） A 有 n 个线性无关的特征向量 （D） A 的秩为 n

本题得分	

二、填空题 〖每题 4 分,共 20 分〗

1. 设向量 $x=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，正交矩阵 $Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt6}\\ 0 & \frac{-1}{\sqrt3} & \frac{2}{\sqrt6}\\ \frac{-1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}$，则向量 $y=Qx$ 的长度为 $\underline{\sqrt3}$

2. 设 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$,则 $\alpha^T\beta=$ $\underline{\mathbf{0}}$，$(\alpha\beta^T)^{2018}=\underline{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}}$.

3. 已知三阶方阵 A 的特征值为 $-1,-4,6$, 若方阵 B 与 A 相似, 则 $|-2B^{-1}|=$ $\underline{\;-1/3\;}$.

4. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&3\\0&1&1\end{pmatrix}$, 则 $A^{-1}=\underline{\begin{pmatrix}\frac12&0&0\\0&1&-3\\0&-1&4\end{pmatrix}}$

5. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$, 正定,则 a 的取值范围是 $\underline{(-1,1)}$.

更多考试真题

请扫码获取

本题得分	

三、解答题 （共 50 分）

1.（10 分）设 $A=\begin{pmatrix}0&3&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $AX=A+2X$，求矩阵 X.

解：$AX=A+2X\Rightarrow(A-2E)X=A.$ ……………………………4分

又 $A-2E=\begin{pmatrix}-2&3&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$ 可逆 ……………………………2分

所以 $X=(A-E)^{-1}A=\begin{pmatrix}0&3&3\\-1&2&3\\1&1&0\end{pmatrix}$ ……………………………4分

2.（10 分）设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$，求满足 $A^2x=b$ 的所有向量 x.

解：$A^2=\begin{pmatrix}2&2&0\\-2&-2&0\\4&4&0\end{pmatrix}$. ……………3分

由

$$(A^2,b)=\begin{pmatrix}2&2&0&-1\\-2&-2&0&1\\4&4&0&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&2&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ ……………3分

得两个基础解系 $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ ……………………………2分

和一个特解 $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$ …… …… …… 1 分

所以 $x=c_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$ 其中 c_1,c_2 是任意常数。

……………………………1分

3.（15 分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为三维向量空间 V 的一个基，而 β_1,β_2,β_3 与 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 为 V 中的两个向量组，且

$$\begin{cases}\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\\ \beta_2=\alpha_1\qquad\ -\alpha_3\\ \beta_3=\alpha_1\qquad\ +\alpha_3\end{cases}\qquad\begin{cases}\gamma_1=\ \alpha_1+2\alpha_2+\ \alpha_3\\ \gamma_2=2\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3\\ \gamma_3=3\alpha_1+4\alpha_2+4\alpha_3\end{cases}$$

（1） 验证 β_1,β_2,β_3 及 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 都是 V 的基；

（2） 求由 β_1,β_2,β_3 到 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 的过度矩阵 P；

（3） 求坐标变换公式.

(1)证明：由矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&4&4\end{pmatrix}$ 可逆，可验证 β_1,β_2,β_3 及 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 线性无关，从而都是 V 的基。

……………………………6分

（2）$P=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&-1&-\frac{1}{2}\\-1&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ ……………………………6分

（3）设向量 a 在 β_1,β_2,β_3 下的坐标为 y，在 β_1,β_2,β_3 下的坐标为 z，则 $y=Pz$。

……………………………3分

4.（15 分）用正交变换法化二次型 $f = x_1^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3$ 为标准型.

解：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$f = 2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

注：本题特征值互不相等，所以计算上准确性要求高。酌情给分。

本题得分	

四、证明题 〖10 分〗

证明范德蒙行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(a_j - a_i),$$ 其中 $\prod$ 表示全体同类因子的乘积,即

$$\prod_{1\le i<j\le n}(a_j - a_i) = (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)\cdots\cdots(a_n-a_1)$$

$$(a_3-a_2)(a_4-a_2)\cdots\cdots(a_n-a_2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(a_n-a_{n-1}).$$

证明方法，数学归纳法。酌情给分。