2023级《线性代数 II》期末考试试题(A)

班级____________ 学号____________ 姓名____________

请将答案写在题纸上！

一、填空题（1-7 小题，每小题 4 分，共 28 分）

1. 行列式 $\begin{vmatrix} 2019 & 2020 & 2021 \\ 2022 & 2023 & 2024 \\ 2025 & 2026 & 2027 \end{vmatrix} =$ ____________.

2. 矩阵乘积 $(5\quad 7)\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} =$ ____________.

3. 矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵 $A^{-1}=$____________.

4. 若 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$A^5=$____________.

5. 已知三阶方阵 A 的特征值为 $1,2,3$. 若方阵 B 与 A 相似，$\left|(2B)^{-1}\right|=$________.

6. 设三元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵的秩为 2，η_1,η_2 是方程组的解. 若 $3\eta_1+2\eta_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$，$2\eta_1+3\eta_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$，则该方程组的通解为 ________.

7. 已知 n 阶矩阵 A 满足 $A^2+A-3E=O$，则 $(A-E)^{-1}=$________.

二、选择题（8-12 小题，每小题 4 分，共 20 分）

8. 设 A,B,C 为 n 阶方阵，则下列矩阵运算一定正确的是【 】

（A） $AB=BA$　　（B）$(AB)C=A(BC)$

（C） $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$　　（D）$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

9. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则下列向量组中线性相关的是【 】

（A） $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$，　　（B） $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，

（C） $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$，　　（D） $\alpha_1+\alpha_2,2\alpha_2+\alpha_3,3\alpha_3+\alpha_1$

10. 设 A 为 n 阶方阵，A 经过若干次初等变换得到矩阵 B，则【 】

（A）$|A|=|B|$　　（B） $|A|\neq|B|$

（C）若 $|A|>0$，则 $|B|>0$　　（D）若 $|A|=0$，则 $|B|=0$

11. 设 A 是 4 阶矩阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，若线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系只有 2 个向量，则伴随矩阵 A^* 的秩 $r(A^*)=$【 】

（A）0　　（B） 1　　（C）2　　（D）3

12. 下列矩阵中不能相似于对角矩阵的是【 】

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 0 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

三、计算题（13-15 小题，每小题 12 分，共 36 分）

13. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a^2-1 \end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$，讨论线性方程组 $Ax=b$ 解的情况，若有无穷多个解求出方程组的结构式通解。

14. 求向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$，$\alpha_5=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ 的秩和极大线性无关组，并将其余向量用此极大线性无关组表示。

15. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2024 & 0 & 0 \\ 2024 & 0 & 0 \\ 2024 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，求可逆矩阵 P 及对角矩阵 Λ，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$.

四、证明题（16-17 小题，每小题 8 分，共 16 分）

16. 设 λ_1,λ_2 是方阵 A 的特征值，且 $\lambda_1\neq\lambda_2$，若 α 是 A 对应 λ_1 的特征向量，β 是 A 对应 λ_2 的特征向量，证明：向量 $2\alpha+3\beta$ 不是 A 的特征向量。

17. 设 A,B 是同阶方阵，证明：若 A 与 B 相似，则 A^5+2A 与 B^5+2B 相似。

考试形式开卷（ ）、闭卷（√），在选项上打（√）

开课教研室__大学数学部__ 命题教师________ 命题时间__2024.5.20__ 使用学期__2023-2024-2__ 总张数__1__ 教研室主任审核签字