

2016《线性代数 II》期末考试卷(A)

使用专业、班级_____ 学号_____ 姓名_____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

本题得分	
------	--

一、填空题(每小题 4 分,共 20 分)

1. 三阶行列式 $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = \underline{(x+2)(x-1)^2}.$

2. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, 则 $(A-2E)^{-1} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}.$

3. 设 $\vec{\alpha_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{\alpha_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$, $\vec{\alpha_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 线性相关, 则 $a = \underline{\frac{5}{3}}.$

4. 设 A 为三阶矩阵, 且存在非零矩阵 B , 满足 $AB=O$, 则 $R(A) \leq \underline{3}.$

5. 设 A 为三阶矩阵, 其三个特征值分别为 $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$, A^* 为 A 伴随矩阵, 则 A^* 的所有特征值的绝对值之和为 $\underline{\frac{5}{4}}.$

本题得分	
------	--

二、选择题(每小题 4 分,共 16 分)

1. 设 A 为 n 阶可逆矩阵, 则下面各式恒正确的是 (D).

- (A) $|2A| = 2|A^T|$ (B) $(2A)^{-1} = 2A^{-1}$
 (C) $[(A^{-1})^{-1}]^T = [(A^T)^T]^{-1}$ (D) $[(A^T)^T]^{-1} = [(A^{-1})^T]^T$

2. 如果 $P \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}-3a_{31} & a_{12}-3a_{32} & a_{13}-3a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, 则 $P =$ (B).

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

3. A, B 都是 n 阶方阵, 则 “ $|A|=|B|$ ” 是 “ A 与 B 相似” 的 (C).

- (A) 充要条件 (B) 充分而非必要条件
 (C) 必要而非充分条件 (D) 既不充分也不必要条件

4. 已知 β_1, β_2 是非齐次线性方程组 $AX=b$ 的两个不同的解, α_1, α_2 是导出组 $AX=0$ 的基础解系, k_1, k_2 为任意常数, 则 $AX=b$ 的通解是 (B).

(A) $k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$ (B) $k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1 - \alpha_2) + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$
 (C) $k_1\alpha_1 + k_2(\beta_1 + \beta_2) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$ (D) $k_1\alpha_1 + k_2(\beta_1 - \beta_2) + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$

本题得分	
------	--

三、(本题 10 分)

设 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A = \alpha\beta^T$, 求 A^5 .

解: $A^5 = \alpha(\beta^T\alpha)^4\beta^T \dots\dots\dots(4') = \alpha\beta^T \dots\dots\dots(6') = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(10')$

考试形式开卷 ()、闭卷 (✓), 在选项上打 (✓)

开课教研室 大学数学部 命题教师 命题组 命题时间 2017-5-1 使用学期 16-17-2 总张数 3 教研室主任审核签字 _____

本题 得分	
----------	--

四、(本题 12 分) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 满足 $AX = A + X$,

X .

解: $\because (A - E)X = A \dots\dots\dots(2')$

由 $|A - E| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow A - E$ 可逆 $\Rightarrow X = (A - E)^{-1}A \dots\dots\dots(5')$

$(A - E : A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(11')$

$\therefore X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(12')$

本题 得分	
----------	--

五、(本题 12 分) 当 λ 为何值时, 非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + (\lambda + 2)x_3 = 3 \\ x_1 + \lambda x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

有唯一解、无解、无穷多解? 并求出无穷解时的通解.

解: 系数行列式 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & \lambda + 2 \\ 1 & \lambda & -2 \end{vmatrix} = -(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = -(\lambda - 3)(\lambda + 1) \dots\dots\dots(3')$

(1) 当 $|A| \neq 0$ 即 $\lambda \neq 3$ 且 $\lambda \neq -1$ 时, 方程组有唯一解; $\dots\dots\dots(5')$

(2) 当 $\lambda = -1$ 时, $B = (A : b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow R(A) \neq R(B) \Rightarrow$ 方程组无解; $\dots\dots\dots(8'')$

(3) 当 $\lambda = 3$ 时, $B = (A : b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow R(A) = R(B) = 2 < 3 \Rightarrow$ 方程组有无穷解; 且通解为 $c \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c \in R. \dots\dots\dots(12')$

本题 得分	
----------	--

六、(本题 12 分)

已知 5 个向量分别为 $\vec{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{\alpha}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\alpha}_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}$, 求:

(1) 该向量组的秩; (2) 该向量组的一个最大无关组, 并将其余向量用该最大无关组线性表示.

解: $(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_4, \vec{\alpha}_5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -2 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 0 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(4')$

$\xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(6')$

\Rightarrow 该向量组的秩为 3 $\dots\dots\dots(8')$

\Rightarrow 最大无关组为 $(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_4) \dots\dots\dots(10')$

$\Rightarrow \vec{\alpha}_3 = -\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_5 = 2\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 - \vec{\alpha}_4 \dots\dots\dots(12')$

本题 得分	七、(本题 12 分)
----------	-------------

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求正交矩阵 P 和对角阵 Λ , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$.

$$\text{解: } |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+1) = 0 \Rightarrow \text{特征值为 } 2, 3, -1 \dots (3')$$

$$\text{当 } \lambda = 2 \text{ 时, } (A - \lambda E) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \dots (5')$$

$$\text{当 } \lambda = 3 \text{ 时, } (A - \lambda E) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \dots (7')$$

$$\text{当 } \lambda = -1 \text{ 时, } (A - \lambda E) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \xi_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \dots (9')$$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \dots (11'); \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \Lambda \dots (12')$$

本题 得分	八、(本题 6 分)
----------	------------

已知向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 线性无关, 证明:

$\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_1 + 2\vec{\alpha}_2 + 3\vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_1 + 4\vec{\alpha}_2 + 9\vec{\alpha}_3$ 线性无关.

证明: 设 $k_1(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_3) + k_2(\vec{\alpha}_1 + 2\vec{\alpha}_2 + 3\vec{\alpha}_3) + k_3(\vec{\alpha}_1 + 4\vec{\alpha}_2 + 9\vec{\alpha}_3) = \vec{0}$

$$\Rightarrow (k_1 + k_2 + k_3)\vec{\alpha}_1 + (k_1 + 2k_2 + 4k_3)\vec{\alpha}_2 + (k_1 + 3k_2 + 9k_3)\vec{\alpha}_3 = \vec{0} \dots (2')$$

$$\text{因为 } \vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3 \text{ 线性无关} \Rightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 + 2k_2 + 4k_3 = 0 \dots (3') \\ k_1 + 3k_2 + 9k_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{而 } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 0 \dots (5')$$

所以 $\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_1 + 2\vec{\alpha}_2 + 3\vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_1 + 4\vec{\alpha}_2 + 9\vec{\alpha}_3$ 线性无关. $\dots (6')$