知识点一：求矩阵的秩，做法是“消消乐”

消消乐的目标：将矩阵化为行阶梯形矩阵【行阶梯形矩阵即越往下开头的 0 越多的矩阵】

【比如 $\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&6&7&8\\0&0&11&12\\0&0&0&16\end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix}1&3&1&4\\0&5&2&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ 是行阶梯形矩阵】

【比如 $\begin{bmatrix}8&8&4&8\\0&1&2&0\\0&1&1&9\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ 不是行阶梯形矩阵(阶梯太高了)】

消消乐的方式：①某行=本身−k·其他行【k可以是任何数】

②互换行与行

③某行·k【k可以是任何数】

消消乐之后：化成的行阶梯矩阵里有几行含有不是零的数，矩阵的秩就是几

练习1. 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-2&-1&0&2\\-2&4&2&6&-6\\2&-1&0&2&3\\3&3&3&3&4\end{bmatrix}$，求$r(\boldsymbol{A})$。

解：$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-2&-1&0&2\\-2&4&2&6&-6\\2&-1&0&2&3\\3&3&3&3&4\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{行}_3-3\cdot\text{行}_1]{\substack{\text{行}_2+2\cdot\text{行}_1\\\text{行}_2-2\cdot\text{行}_1}}\begin{bmatrix}1&-2&-1&0&2\\0&0&0&6&-2\\0&3&2&2&-1\\0&9&6&3&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}_2\text{与行}_4\text{互换}}\begin{bmatrix}1&-2&-1&0&2\\0&9&6&3&-2\\0&3&2&2&-1\\0&0&0&6&-2\end{bmatrix}$

$\xrightarrow{\text{行}_3-\frac{1}{3}\cdot\text{行}_2}\begin{bmatrix}1&-2&-1&0&2\\0&9&6&3&-2\\0&0&0&1&-\frac{1}{3}\\0&0&0&6&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}_4-6\cdot\text{行}_3}\begin{bmatrix}1&-2&-1&0&2\\0&9&6&3&-2\\0&0&0&1&-\frac{1}{3}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$

$\therefore r(\boldsymbol{A})=3$

练习2. 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&-2&3\\4&a&3&12\\3&-1&1&9\end{bmatrix}$，则a=____时$r(\boldsymbol{A})<3$。

解：$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&-2&3\\4&a&3&12\\3&-1&1&9\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{行}_3-3\cdot\text{行}_1]{\text{行}_2-4\cdot\text{行}_1}\begin{bmatrix}1&2&-2&3\\0&a-8&11&0\\0&-7&7&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}_2\text{与行}_3\text{互换}}\begin{bmatrix}1&2&-2&3\\0&-7&7&0\\0&a-8&11&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}_3+\frac{a-8}{7}\cdot\text{行}_2}\begin{bmatrix}1&2&-2&3\\0&-7&7&0\\0&0&a+3&0\end{bmatrix}$

当a+3=0时即a=−3时，$r(\boldsymbol{A})=2$，此时满足$r(\boldsymbol{A})<3$

知识点二：求向量组的秩

将待求向量组里的各个向量按列填成一个矩阵，这个矩阵的秩就是向量组的秩

练习1. 已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}2\\0\\0\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}-2\\3\\1\\-2\end{bmatrix}$，则该向量组的秩为___。

另一种问法. 已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}2\\0\\0\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}-2\\3\\1\\-2\end{bmatrix}$，则$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=$___。

解：$\begin{bmatrix}2&0&0&-2\\0&-1&1&3\\0&1&-1&1\\2&0&0&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{行_4-行_1}\begin{bmatrix}2&0&0&-2\\0&-1&1&3\\0&1&-1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{行_3+行_2}\begin{bmatrix}2&0&0&-2\\0&-1&1&3\\0&0&0&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

∴该向量组的秩为3

$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$

练习2. 已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,3,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,-4,5,-2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(3,-2,7,-1)^{\mathrm{T}}$，则该向量组的秩为___。

另一种问法. 已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,3,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,-4,5,-2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(3,-2,7,-1)^{\mathrm{T}}$，则$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=$___。

解：$\begin{bmatrix}1&2&0&3\\2&0&-4&-2\\-1&3&5&7\\1&0&-2&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{行_3+行_1\\行_4-行_1}]{行_2-2\cdot行_1}\begin{bmatrix}1&2&0&3\\0&-4&-4&-8\\0&5&5&10\\0&-2&-2&-4\end{bmatrix}\xrightarrow[行_4-\frac{1}{2}\cdot行_2]{行_3+\frac{5}{4}\cdot行_2}\begin{bmatrix}1&2&0&3\\0&-4&-4&-8\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

∴该向量组的秩为2

$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=2$

知识点三：判断向量组的线性相关性【什么时候是线性相关：有“大哥”可以由“小弟”组成】
【什么时候是线性无关：全是“小弟”，没有“大哥”】

“小弟”数=向量组的秩

练习1. 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}-1\\-1\\2\end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}-1\\-3\\t\end{bmatrix}$，当t=___时$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性相关。

解：该向量组线性相关，∴有“大哥” $\left(\begin{matrix}\text{这是草稿}\\\text{不写到卷面上}\end{matrix}\right)$

总共有3个向量，其中有“大哥”

∴“小弟”数<3

∴向量组的秩<3

$$\begin{bmatrix}1&-1&-1\\2&-1&-3\\3&2&t\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{行}_2-2\cdot\text{行}_1\\\text{行}_3-3\cdot\text{行}_1}}\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&5&t+3\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}_3-5\cdot\text{行}_2}\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&t+8\end{bmatrix}$$

当 t+8≠0时，秩=3

当 t+8=0时，秩=2

∵向量组的秩＜3

∴t+8=0 ⟹ t=−8

练习2. 已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,1)^T, \boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,t,0)^T, \boldsymbol{\alpha}_3=(0,-4,5,-2)^T$线性相关，则t=___。

解：该向量组线性相关，∴有“大哥” $\left(\begin{matrix}\text{这是草稿}\\\text{不写到卷面上}\end{matrix}\right)$

总共有3个向量，其中有“大哥”

∴“小弟”数<3

∴向量组的秩<3

$$\begin{bmatrix}1&2&0\\2&0&-4\\-1&t&5\\1&0&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{行}_2-2\cdot\text{行}_1\\\text{行}_3+\text{行}_1\\\text{行}_4-\text{行}_1}}\begin{bmatrix}1&2&0\\0&-4&-4\\0&t+2&5\\0&-2&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{行}_3+\frac{t+2}{4}\cdot\text{行}_2\\\text{行}_4-\frac{1}{2}\cdot\text{行}_2}}\begin{bmatrix}1&2&0\\0&-4&-4\\0&0&3-t\\0&0&0\end{bmatrix}$$

当 $3-t$≠0时，秩=3

当 $3-t$=0时，秩=2

∵向量组的秩＜3

∴3−t=0 ⟹ t=3

知识点四：判断一个向量能否由其他向量线性表示 / 是否是其他向量的线性组合

【若向量为“大哥”，则可以由其他向量线性表示】

“小弟”数=向量组的秩

练习1. 给定向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\3\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\-3\\2\\4\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}3\\0\\2\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}0\\-1\\4\\9\end{bmatrix}$，试判断$\boldsymbol{\alpha}_4$是否为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的线性组合。

解：

$$\begin{bmatrix}-2&1&3\\1&-3&0\\0&2&2\\3&4&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{行}_1\text{与行}_2\text{互换}\\\text{行}_2\text{与行}_3\text{互换}}}\begin{bmatrix}1&-3&0\\0&2&2\\-2&1&3\\3&4&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{行}_3+2\cdot\text{行}_1\\\text{行}_4-3\cdot\text{行}_1}}\begin{bmatrix}1&-3&0\\0&2&2\\0&-5&3\\0&13&-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{行}_3+\frac{5}{2}\cdot\text{行}_2\\\text{行}_4-\frac{13}{2}\cdot\text{行}_2}}\begin{bmatrix}1&-3&0\\0&2&2\\0&0&8\\0&0&-14\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}_4+\frac{7}{4}\text{行}_3}\begin{bmatrix}1&-3&0\\0&2&2\\0&0&8\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\text{向量组的秩为}3\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\text{里有}3\text{个小弟}$$

$$\begin{bmatrix}-2&1&3&0\\1&-3&0&-1\\0&2&2&4\\3&4&-1&9\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{行}_1\text{与行}_2\text{互换}\\\text{行}_2\text{与行}_3\text{互换}}}\begin{bmatrix}1&-3&0&-1\\0&2&2&4\\-2&1&3&0\\3&4&-1&9\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{行}_3+2\cdot\text{行}_1\\\text{行}_4-3\cdot\text{行}_1}}\begin{bmatrix}1&-3&0&-1\\0&2&2&4\\0&-5&3&-2\\0&13&-1&12\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{行}_3+\frac{5}{2}\cdot\text{行}_2\\\text{行}_4-\frac{13}{2}\cdot\text{行}_2}}\begin{bmatrix}1&-3&0&-1\\0&2&2&4\\0&0&8&8\\0&0&-14&-14\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}_4+\frac{7}{4}\text{行}_3}\begin{bmatrix}1&-3&0&-1\\0&2&2&4\\0&0&8&8\\0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\text{秩为}3\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\text{里有}3\text{个小弟}$$

$\because\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$里有3个小弟， $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$里有3个小弟$\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}_4$ 是大哥

$\therefore\boldsymbol{\alpha}_4$能被$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示

综上，秩相等 $\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}_4$是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的线性组合

练习2. 已知向量$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\1\\a\end{bmatrix}$，当a=___时$\boldsymbol{\beta}$可被$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示。

解：$\boldsymbol{\beta}$可被$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示 $\Rightarrow\boldsymbol{\beta}$是大哥

$$\begin{bmatrix}1&1\\2&3\\1&4\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{行}_2-2\cdot\text{行}_1\\\text{行}_3-\text{行}_1}}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\\0&3\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}_3-3\cdot\text{行}_1}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\text{秩为}2\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\text{里有}2\text{个小弟}$$

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\2&3&1\\1&4&a\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{行}_2-2\cdot\text{行}_1\\\text{行}_3-\text{行}_1}}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&3&a-1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}_3-3\cdot\text{行}_1}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&0&a+2\end{bmatrix}$$

当 a+2≠0时，秩=3 $\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}$ 里有3个小弟，$\because\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$里有2个小弟$\therefore\boldsymbol{\beta}$ 是小弟（不符合要求）

当 a+2=0时，秩=2$\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}$ 里有2个小弟，$\because\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$里有2个小弟$\therefore\boldsymbol{\beta}$ 是大哥（符合要求）

$\therefore$a+2=0 $\Rightarrow$ a=−2

知识点五：找出向量组的极(最)大无关组

求完秩后，每行第一个非零数所在列对应的向量就是一个极(最)大无关组

练习1. 设有向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\3\\2\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}7\\0\\14\\3\end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}5\\1\\6\\2\end{bmatrix}$。

(1)求该向量组的秩；(2)求该向量组的一个最大无关组。

解：

$$\begin{bmatrix}1&7&2&5\\3&0&-1&1\\2&14&0&6\\0&3&1&2\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{行}_3-2\cdot\text{行}_1]{\text{行}_2-3\cdot\text{行}_1}\begin{bmatrix}1&7&2&5\\0&-21&-7&-14\\0&0&-4&-4\\0&3&1&2\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}_4+\frac{1}{7}\cdot\text{行}_2}\begin{array}{c}\begin{matrix}\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_2&\boldsymbol{\alpha}_3&\boldsymbol{\alpha}_4\end{matrix}\\\begin{bmatrix}1&7&2&5\\0&-21&-7&-14\\0&0&-4&-4\\0&0&0&0\end{bmatrix}\end{array}$$

∴该向量组的秩为3，一个最大无关组是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$

练习2. 已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,3,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,7,2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3=(-1,2,0,-1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_4=(1,4,5,a)^{\mathrm{T}}$，请问a为何值时该向量组线性相关？

此时求该向量组的一个极大无关组。

解：该向量组线性相关，∴有“大哥”（这是草稿 不写到卷面上）

总共有4个向量，其中有“大哥”

∴“小弟”数<4

∴向量组的秩<4

$$\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\0&1&2&4\\3&7&0&5\\1&2&-1&a\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{行}_4-\text{行}_1]{\text{行}_3-3\cdot\text{行}_1}\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\0&1&2&4\\0&1&3&2\\0&0&0&a-1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}_3-\text{行}_2}\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\0&1&2&4\\0&0&1&-2\\0&0&0&a-1\end{bmatrix}$$

当 a−1≠0时，秩=4 （不符合要求）

当 a−1=0时，秩=3 （符合要求）

∴ a−1=0 ⟹ a=1

a=1时行阶梯矩阵为$\begin{array}{c}\begin{matrix}\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_2&\boldsymbol{\alpha}_3&\boldsymbol{\alpha}_4\end{matrix}\\\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\0&1&2&4\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\end{array}$

∴一个极大线性无关组是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$

知识点六：判断方程组解的情况

(1)求秩

(2)判断是否有反常规情况 $\begin{cases} \text{若有} \Rightarrow \text{无解} \\ \text{若没有，则有效式子} = \text{秩、且} \begin{cases} \text{有效式子} = \text{未知数个数} \Rightarrow \text{有一组解} \\ \text{有效式子} < \text{未知数个数} \Rightarrow \text{有无穷多组解} \end{cases} \end{cases}$

$\uparrow$

【某行虚线左侧全是0，虚线右侧不是0】

练习1. 已知方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + (a+2)x_3 = 3 \\ x_1 + ax_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ 无解，则a=___。

解：$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + (a+2)x_3 = 3 \\ x_1 + ax_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + \quad 1x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + (a+2)x_3 = 3 \\ 1x_1 + ax_2 \quad - 2x_3 = 0 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 3 \\ 1 & a & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{行}_3-\text{行}_1]{\text{行}_2-2\cdot\text{行}_1} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & a-2 & -3 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{行}_3+(a-2)\cdot\text{行}_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & 0 & a^2-2a-3 & a-3 \end{array}\right]$$

∵ 该方程组无解

∴ 存在反常规情况

∴ $a^2-2a-3=0$ 且 $a-3\neq0 \Rightarrow a=-1$

练习2. 已知线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -7 \\ -x_1 + 4x_2 + mx_3 = k \end{cases}$，问m、k各取何值时，方程组无解？有唯一解？有无穷多组解？

解：$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -7 \\ -x_1 + 4x_2 + mx_3 = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1x_1 + 3x_2 + 1x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -7 \\ -1x_1 + 4x_2 + mx_3 = k \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & -7 \\ -1 & 4 & m & k \end{array}\right] \xrightarrow[\text{行}_3+\text{行}_1]{\text{行}_2-3\cdot\text{行}_1} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & -7 \\ 0 & 7 & m+1 & k \end{array}\right] \xrightarrow{\text{行}_3+\text{行}_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & m+1 & k-7 \end{array}\right]$$

当m+1≠0时，即当m≠−1时，行阶梯矩阵为 $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & \text{不为}0 & k-7 \end{array}\right]$，矩阵的秩为3，有效式子=3=未知数个数，有一组解

当m+1=0且k−7=0时，即当m=−1且k=7时，行阶梯矩阵为 $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$，矩阵的秩为2，有效式子=2＜未知数个数，有无穷多组解

当m+1=0且k−7≠0时，即当m=−1且k≠7时，行阶梯矩阵为 $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & \text{不为}0 \end{array}\right]$，有反常规情况，方程组无解

知识点七：化矩阵为行最简形矩阵

处理矩阵的方式：①某行=本身−k·其他行【k可以是任何数】

②互换行与行

③某行·k【k可以是任何数】

处理矩阵的顺序：(1)得到行阶梯形矩阵

(2)使每行首个非零数为 1

(3)使每行首个非零数所在的列里其余数都是0

练习1. 设有向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\3\\2\\0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}7\\0\\14\\3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\\1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}5\\1\\6\\2\end{bmatrix}$，试将向量组化为行最简型矩阵。

解：

$$\begin{bmatrix}1&7&2&5\\3&0&-1&1\\2&14&0&6\\0&3&1&2\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{行}_3-2\cdot\text{行}_1]{\text{行}_2-3\cdot\text{行}_1}\begin{bmatrix}1&7&2&5\\0&-21&-7&-14\\0&0&-4&-4\\0&3&1&2\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}_4+\frac{1}{7}\cdot\text{行}_2}\begin{bmatrix}1&7&2&5\\0&-21&-7&-14\\0&0&-4&-4\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{行}_3\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)]{\text{行}_2\cdot\left(-\frac{1}{21}\right)}\begin{bmatrix}1&7&2&5\\0&1&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}_1-7\cdot\text{行}_2}\begin{bmatrix}1&0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&1&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{行}_2-\frac{1}{3}\cdot\text{行}_3]{\text{行}_1+\frac{1}{3}\cdot\text{行}_3}\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{2}{3}\\0&1&0&\frac{1}{3}\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

练习2. 已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,3,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,7,2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,2,0,-1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(1,4,5,1)^{\mathrm{T}}$，试将向量组化为行最简型矩阵。

解：

$$\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\0&1&2&4\\3&7&0&5\\1&2&-1&1\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{行}_4-\text{行}_1]{\text{行}_3-3\cdot\text{行}_1}\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\0&1&2&4\\0&1&3&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}_3-\text{行}_2}\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\0&1&2&4\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}_1-2\cdot\text{行}_1}\begin{bmatrix}1&0&-5&-7\\0&1&2&4\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{行}_2-2\cdot\text{行}_3]{\text{行}_1+5\cdot\text{行}_3}\begin{bmatrix}1&0&0&-17\\0&1&0&8\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

知识点八：用极大无关组表示其余向量

(1)将向量组构成一个矩阵，再化成行最简形矩阵

(2)找出极大无关组：每行第一个非零数所在列对应的向量

(3)其余向量= 该向量对应列的 $数_1$ · 极大无关组里第一个向量

$+数_2$ · 极大无关组里第二个向量

$+\cdots\cdots$

练习1. 设有向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\3\\2\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}7\\0\\14\\3\end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}5\\1\\6\\2\end{bmatrix}$。

(1)求该向量组的秩；(2)求该向量组的一个最大无关组，并把其余向量分别用求得的最大无关组表示出来

解：
$$\begin{bmatrix}1&7&2&5\\3&0&-1&1\\2&14&0&6\\0&3&1&2\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{行}_3-2\cdot\text{行}_1]{\text{行}_2-3\cdot\text{行}_1}\begin{bmatrix}1&7&2&5\\0&-21&-7&-14\\0&0&-4&-4\\0&3&1&2\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}_4+\frac{1}{7}\cdot\text{行}_2}\begin{bmatrix}1&7&2&5\\0&-21&-7&-14\\0&0&-4&-4\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{行}_3\cdot(-\frac{1}{4})]{\text{行}_2\cdot(-\frac{1}{21})}\begin{bmatrix}1&7&2&5\\0&1&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}_1-7\cdot\text{行}_2}\begin{bmatrix}1&0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&1&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{行}_2-\frac{1}{3}\cdot\text{行}_3]{\text{行}_1+\frac{1}{3}\cdot\text{行}_3}\begin{array}{c}\begin{matrix}\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_2&\boldsymbol{\alpha}_3&\boldsymbol{\alpha}_4\end{matrix}\\\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{2}{3}\\0&1&0&\frac{1}{3}\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\end{array}$$

∴该向量组的秩为3，一个最大无关组是$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$

$$\boldsymbol{\alpha}_4=\frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_2+1\boldsymbol{\alpha}_3+0=\frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$$

练习2. 已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,3,1)^T, \boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,7,2)^T, \boldsymbol{\alpha}_3=(-1,2,0,-1)^T, \boldsymbol{\alpha}_4=(1,4,5,a)^T$，请问a为何值时该向量组线性相关？

此时求该向量组的一个极大无关组，并将其余向量用此极大无关组表出

解：该向量组线性相关，∴有"大哥" （这是草稿 不写到卷面上）

总共有4个向量，其中有"大哥"

∴"小弟"数<4

∴向量组的秩<4

$$\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\0&1&2&4\\3&7&0&5\\1&2&-1&a\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{行}_4-\text{行}_1]{\text{行}_3-3\cdot\text{行}_1}\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\0&1&2&4\\0&1&3&2\\0&0&0&a-1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}_3-\text{行}_2}\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\0&1&2&4\\0&0&1&-2\\0&0&0&a-1\end{bmatrix}$$

当 a−1≠0时，秩=4 （不符合要求）

当 a−1=0时，秩=3 （符合要求）

∴ a−1=0 ⟹ a=1

$$\text{a=1时矩阵}=\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\0&1&2&4\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}_1-2\cdot\text{行}_2}\begin{bmatrix}1&0&-5&-7\\0&1&2&4\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{行}_2-2\cdot\text{行}_3]{\text{行}_1+5\cdot\text{行}_3}\begin{array}{c}\begin{matrix}\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_2&\boldsymbol{\alpha}_3&\boldsymbol{\alpha}_4\end{matrix}\\\begin{bmatrix}1&0&0&-17\\0&1&0&8\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\end{array}$$

∴一个极大线性无关组是$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$

$$\boldsymbol{\alpha}_4=-17\boldsymbol{\alpha}_1+8\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3+0=-17\boldsymbol{\alpha}_1+8\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$$

知识点九：求方程组的通解

(1)写出方程组的矩阵，将矩阵化成行最简形矩阵

(2)将行最简形矩阵还原成大括号的形式

(3)化简大括号，然后将各个式子的等号左边只保留第一项，其余内容都移到等号右边

(4)补上缺的未知数式子，将各个式子等号右边写成规范的格式，调整各个式子的顺序

(5)写出通解

练习1. 求线性方程组$\begin{cases}2x_1-x_2+4x_3-3x_4=-4\\x_1\quad\ \ +x_3-\ x_4=-3\\3x_1+x_2+\ x_3\qquad\ =1\\7x_1\qquad+7x_3-3x_4=3\end{cases}$的通解

解：

$$\left[\begin{array}{cccc:c}2&-1&4&-3&-4\\1&0&1&-1&-3\\3&1&1&0&1\\7&0&7&-3&3\end{array}\right]\xrightarrow{\text{行}_1\text{与行}_2\text{交换}}\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&1&-1&-3\\2&-1&4&-3&-4\\3&1&1&0&1\\7&0&7&-3&3\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{行}_2-2\cdot\text{行}_1\\\text{行}_3-3\cdot\text{行}_1\\\text{行}_4-7\cdot\text{行}_1}}\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&1&-1&-3\\0&-1&2&-1&2\\0&1&-2&3&10\\0&0&0&4&24\end{array}\right]\xrightarrow{\text{行}_3+\text{行}_2}\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&1&-1&-3\\0&-1&2&-1&2\\0&0&0&2&12\\0&0&0&4&24\end{array}\right]\xrightarrow{\text{行}_4-2\cdot\text{行}_3}\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&1&-1&-3\\0&-1&2&-1&2\\0&0&0&2&12\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{行}_2\cdot(-1)\\\text{行}_3\cdot\frac{1}{2}}}\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&1&-1&-3\\0&1&-2&1&-2\\0&0&0&1&6\\0&0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\text{行}_1+\text{行}_3\\\text{行}_2-\text{行}_3}}\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&1&0&3\\0&1&-2&0&-8\\0&0&0&1&6\\0&0&0&0&0\end{array}\right]\Rightarrow\begin{cases}1x_1+0x_2+1x_3+0x_4=3\\0x_1+1x_2-2x_3+0x_4=-8\\0x_1+0x_2+0x_3+1x_4=6\\0x_1+0x_2+0x_3+0x_4=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_3=3\\x_2-2x_3=-8\\x_4=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=3-x_3\\x_2=-8+2x_3\\x_4=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=3-x_3\\x_2=-8+2x_3\\x_3=x_3\\x_4=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=3+(-1)\cdot x_3\\x_2=-8+\ \ 2\cdot x_3\\x_3=0+\ \ 1\cdot x_3\\x_4=6+\ \ 0\cdot x_3\end{cases}$$

$\Rightarrow$ 通解为$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-8\\0\\6\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}-1\\2\\1\\0\end{bmatrix}$，其中k为任意常数

练习2. 已知线性方程组$\begin{cases}x_1+3x_2+x_3=0\\3x_1+2x_2+3x_3=-7\\-x_1+4x_2+mx_3=k\end{cases}$，问m、k各取何值时，方程组无解？有唯一解？有无穷多组解？

并求有无穷多组解时的通解。

解：

$$\left[\begin{array}{ccc:c}1&3&1&0\\3&2&3&-7\\-1&4&m&k\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\text{行}_2-3\cdot\text{行}_1\\\text{行}_3+\text{行}_1}}\left[\begin{array}{ccc:c}1&3&1&0\\0&-7&0&-7\\0&7&m+1&k\end{array}\right]\xrightarrow{\text{行}_3+\text{行}_2}\left[\begin{array}{ccc:c}1&3&1&0\\0&-7&0&-7\\0&0&m+1&k-7\end{array}\right]$$

当$m+1\neq0$时，即当$m\neq-1$时，行阶梯矩阵为$\left[\begin{array}{ccc:c}1&3&1&0\\0&-7&0&-7\\0&0&\text{不为0}&k-7\end{array}\right]$，矩阵的秩为3，有效式子=3=未知数个数，有一组解

当$m+1=0$且$k-7=0$时，即当$m=-1$且$k=7$时，行阶梯矩阵为$\left[\begin{array}{ccc:c}1&3&1&0\\0&-7&0&-7\\0&0&0&0\end{array}\right]$，矩阵的秩为2，有效式子=2＜未知数个数，有无穷多组解

当$m+1=0$且$k-7\neq0$时，即当$m=-1$且$k\neq7$时，行阶梯矩阵为$\left[\begin{array}{ccc:c}1&3&1&0\\0&-7&0&-7\\0&0&0&\text{不为0}\end{array}\right]$，有反常规情况，方程组无解

当$m=-1$且$k=7$时，矩阵为$\left[\begin{array}{ccc:c}1&3&1&0\\0&-7&0&-7\\0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{\text{行}_2\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)}\left[\begin{array}{ccc:c}1&3&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{\text{行}_1-3\cdot\text{行}_2}\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&1&-3\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{array}\right]$

$$\Rightarrow\begin{cases}1x_1+0x_2+1x_3=-3\\0x_1+1x_2+0x_3=1\\0x_1+0x_2+0x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_3=-3\\x_2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-3-x_3\\x_2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-3-x_3\\x_2=1\\x_3=x_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-3+(-1)\cdot x_3\\x_2=1+\ \ 0\cdot x_3\\x_3=0+\ \ 1\cdot x_3\end{cases}$$

$\Rightarrow$ 通解为$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\1\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$，其中k为任意常数

知识点十：求矩阵的逆矩阵

(1)待求矩阵填到大矩阵的左半部分，画上虚线，再在虚线右侧填1、0（对角线为1，其余为0）

(2)化大矩阵为行最简形矩阵

(3)结果里虚线右侧的矩阵就是逆矩阵

练习1. 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}$，求$\boldsymbol{A}$的逆矩阵

另一种问法. 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}$，求$\boldsymbol{A}^{-1}$

解：$\left[\begin{array}{ccc:ccc}2&2&3&1&0&0\\1&-1&0&0&1&0\\-1&2&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\text{行}_2\text{与行}_3\text{互换}]{\text{行}_1\text{与行}_2\text{互换}}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&0&0&1&0\\-1&2&1&0&0&1\\2&2&3&1&0&0\end{array}\right]$

$\xrightarrow[\text{行}_3-2\cdot\text{行}_1]{\text{行}_2+\text{行}_1}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&0&0&1&0\\0&1&1&0&1&1\\0&4&3&1&-2&0\end{array}\right]\xrightarrow{\text{行}_3-4\cdot\text{行}_2}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&0&0&1&0\\0&1&1&0&1&1\\0&0&-1&1&-6&-4\end{array}\right]$

$\xrightarrow{\text{行}_3\cdot(-1)}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&0&0&1&0\\0&1&1&0&1&1\\0&0&1&-1&6&4\end{array}\right]\xrightarrow{\text{行}_1+\text{行}_2}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&0&2&1\\0&1&1&0&1&1\\0&0&1&-1&6&4\end{array}\right]\xrightarrow[\text{行}_2-\text{行}_3]{\text{行}_1-\text{行}_3}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&-4&-3\\0&1&0&1&-5&-3\\0&0&1&-1&6&4\end{array}\right]$

$\therefore\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{bmatrix}$

练习2. 设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&3&3\\2&3&3\\1&3&4\end{bmatrix}$，求$\boldsymbol{A}$的逆矩阵

另一种问法. 设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&3&3\\2&3&3\\1&3&4\end{bmatrix}$，求$\boldsymbol{A}^{-1}$

解：$\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&3&3&1&0&0\\2&3&3&0&1&0\\1&3&4&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\text{行}_3-\text{行}_1]{\text{行}_2-2\cdot\text{行}_1}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&3&3&1&0&0\\0&-3&-3&-2&1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right]$

$\xrightarrow{\text{行}_2\cdot(-\frac{1}{3})}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&3&3&1&0&0\\0&1&1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\text{行}_1-3\cdot\text{行}_2}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-1&1&0\\0&1&1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\text{行}_2-\text{行}_3}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-1&1&0\\0&1&0&\frac{5}{3}&-\frac{1}{3}&-1\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right]$

$\therefore\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\\frac{5}{3}&-\frac{1}{3}&-1\\-1&0&1\end{bmatrix}$

知识点11：求行列式

二阶行列式：$\begin{vmatrix}A&B\\C&D\end{vmatrix}=AD-BC$【比如$\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=1\times4-2\times3=-2$】

【比如$\begin{vmatrix}5&7\\6&9\end{vmatrix}=5\times9-7\times6=3$】

多阶行列式：通过方式①、②、③将其化成$\begin{vmatrix}?&?&?\\0&?&?\\0&0&?\end{vmatrix}$的格式后，对角线上各个元素的乘积就是行列式的值

方式①某行(列)的公因子可以提到$|\quad|$外

方式②某行(列)=本身$-k\cdot$其他行(列)

方式③互换行(列)与行(列)，$|\quad|$前乘 -1

练习1. 计算$D=\begin{vmatrix}2&1&4&1\\3&-1&2&1\\1&2&3&2\\6&0&7&2\end{vmatrix}$

解：$D\xlongequal{\text{行}_1\text{与行}_3\text{互换}}-\begin{vmatrix}1&2&3&2\\3&-1&2&1\\2&1&4&1\\6&0&7&2\end{vmatrix}$【注：此时第一行就变得比较简单了】

$$\xlongequal[\text{行}_4-6\cdot\text{行}_1]{\substack{\text{行}_2-3\cdot\text{行}_1\\ \text{行}_3-2\cdot\text{行}_1}}-\begin{vmatrix}1&2&3&2\\0&-7&-7&-5\\0&-3&-2&-3\\0&-12&-11&-10\end{vmatrix}\xlongequal[\text{行}_4-\frac{12}{7}\cdot\text{行}_2]{\text{行}_3-\frac{3}{7}\cdot\text{行}_2}-\begin{vmatrix}1&2&3&2\\0&-7&-7&-5\\0&0&1&-\frac{6}{7}\\0&0&1&-\frac{10}{7}\end{vmatrix}\xlongequal{\text{行}_4-\text{行}_3}-\begin{vmatrix}1&2&3&2\\0&-7&-7&-5\\0&0&1&-\frac{6}{7}\\0&0&0&-\frac{4}{7}\end{vmatrix}$$

$$=-\left[1\times(-7)\times1\times\left(-\frac{4}{7}\right)\right]=-4$$

练习2. 计算行列式$\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\1&2&1&\cdots&1&1\\1&1&3&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\1&1&1&\cdots&n-1&1\\1&1&1&\cdots&1&n\end{vmatrix}$

解：$$\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\1&2&1&\cdots&1&1\\1&1&3&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\1&1&1&\cdots&n-1&1\\1&1&1&\cdots&1&n\end{vmatrix}\xlongequal[\text{行}_n-\text{行}_1]{\substack{\text{行}_2-\text{行}_1\\ \text{行}_3-\text{行}_1\\ \vdots}}\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-2&0\\0&0&0&\cdots&0&n-1\end{vmatrix}=1\times1\times2\times\cdots(n-2)\cdot(n-1)=(n-1)!$$

知识点12：判断一个矩阵可不可逆 / 是不是可逆矩阵

求 | 矩阵里的元素 |，$\begin{cases}\text{若结果} = 0\text{，则 不可逆 / 不是可逆矩阵}\\ \text{若结果} \neq 0\text{，则 可逆 / 是可逆矩阵}\end{cases}$

练习1. 设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&3&3\\2&3&3\\1&3&4\end{bmatrix}$，证明矩阵$\boldsymbol{A}$可逆并求$\boldsymbol{A}^{-1}$

解：$\because\begin{vmatrix}1&3&3\\2&3&3\\1&3&4\end{vmatrix}\xlongequal[\text{行}_3-\text{行}_1]{\text{行}_2-2\cdot\text{行}_1}\begin{vmatrix}1&3&3\\0&-3&-3\\0&0&1\end{vmatrix}=1\times(-3)\times1=-3\neq0$，$\therefore$矩阵$\boldsymbol{A}$可逆

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&3&3&1&0&0\\2&3&3&0&1&0\\1&3&4&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\text{行}_3-\text{行}_1]{\text{行}_2-2\cdot\text{行}_1}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&3&3&1&0&0\\0&-3&-3&-2&1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{行}_2\cdot(-\frac{1}{3})}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&3&3&1&0&0\\0&1&1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\text{行}_1-3\cdot\text{行}_2}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-1&1&0\\0&1&1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\text{行}_2-\text{行}_3}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-1&1&0\\0&1&0&\frac{5}{3}&-\frac{1}{3}&-1\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right]$$

$$\therefore\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\\frac{5}{3}&-\frac{1}{3}&-1\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

知识点13：求矩阵的特征值

(1)把矩阵里的元素拿出来，对角线减去λ，构成行列式

(2)求行列式的值

(3)令行列式的值=0 $\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = ? \\ \lambda_2 = ? \\ \lambda_3 = ? \end{cases}$【λ个数等于矩阵的行数或列数 (要关注行列式结果里的指数)】

练习1. 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$，求矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值

解：$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \xlongequal{\text{行}_1\text{与行}_2\text{互换}} -\begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda & 0 \\ 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \xlongequal{\text{行}_2-(2-\lambda)\cdot\text{行}_1} -\begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & (3-\lambda)(\lambda-1) & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$

$=-[1\cdot(3-\lambda)(\lambda-1)\cdot(3-\lambda)]$

$=-(3-\lambda)\cdot(3-\lambda)\cdot(\lambda-1)$

令$-(3-\lambda)\cdot(3-\lambda)\cdot(\lambda-1)=0$

$\Rightarrow \lambda_1=3, \lambda_2=3, \lambda_3=1 \Rightarrow$ 特征值：$\lambda_1=\lambda_2=3, \lambda_3=1$

练习2. 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$，求矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值

解：$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \xlongequal{\text{行}_1\text{与行}_2\text{互换}} -\begin{vmatrix} -1 & 3-\lambda & -1 \\ 3-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \xlongequal{\substack{\text{行}_2+(3-\lambda)\cdot\text{行}_1 \\ \text{行}_3-\text{行}_1}} -\begin{vmatrix} -1 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & (\lambda-4)(\lambda-2) & \lambda-4 \\ 0 & \lambda-4 & 4-\lambda \end{vmatrix}$

$\xlongequal{\text{行}_2\text{与行}_3\text{互换}} \begin{vmatrix} -1 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & \lambda-4 & 4-\lambda \\ 0 & (\lambda-4)(\lambda-2) & \lambda-4 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{行}_3-(\lambda-2)\cdot\text{行}_2} \begin{vmatrix} -1 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & \lambda-4 & 4-\lambda \\ 0 & 0 & (\lambda-4)(\lambda-1) \end{vmatrix}$

$= -1\cdot(\lambda-4)\cdot(\lambda-4)(\lambda-1)$

$= -(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda-4)$

令$-(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda-4)=0$

$\Rightarrow \lambda_1=1, \lambda_2=4, \lambda_3=4 \Rightarrow$ 特征值：$\lambda_1=1, \lambda_2=\lambda_3=4$

知识点14：求特征向量

(1)求特征值

(2)对每一个不同的特征值都进行下面的操作：

a、将矩阵对角线的每个元素均减λ，再在右侧画虚线、加上一列0，构成新矩阵

b、将新矩阵化为行最简形矩阵

c、将行最简形矩阵变为方程，求通解

d、通解即为该λ对应的特征向量【k不能全取0】

练习1. 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$，求矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值与特征向量

解：$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}2-\lambda&1&0\\1&2-\lambda&0\\0&0&3-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{\text{行}_1\text{与行}_2\text{互换}}-\begin{vmatrix}1&2-\lambda&0\\2-\lambda&1&0\\0&0&3-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{\text{行}_2-(2-\lambda)\cdot\text{行}_1}-\begin{vmatrix}1&2-\lambda&0\\0&(3-\lambda)(\lambda-1)&0\\0&0&3-\lambda\end{vmatrix}$

$=-[1\cdot(3-\lambda)(\lambda-1)\cdot(3-\lambda)]$

$=-(3-\lambda)\cdot(3-\lambda)\cdot(\lambda-1)$

令$-(3-\lambda)\cdot(3-\lambda)\cdot(\lambda-1)=0$

$\Rightarrow\lambda_1=3,\lambda_2=3,\lambda_3=1\ \Rightarrow$ 特征值：$\lambda_1=\lambda_2=3,\lambda_3=1$

对于$\lambda_1=\lambda_2=3$：$\left[\begin{array}{ccc:c}2-3&1&0&0\\1&2-3&0&0\\0&0&3-3&0\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc:c}-1&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\Rightarrow\begin{cases}-x_1+x_2+0\cdot x_3=0\\x_1-x_2+0\cdot x_3=0\\0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3=0\end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc:c}-1&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{\text{行}_2+\text{行}_1}\left[\begin{array}{ccc:c}-1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{\text{行}_1\cdot(-1)}\left[\begin{array}{ccc:c}1&-1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\{1x_1-1x_2+0x_3=0\Rightarrow\{x_1=x_2\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\x_2=x_2\\x_3=x_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=1\cdot x_2+0\cdot x_3\\x_2=1\cdot x_2+0\cdot x_3\\x_3=0\cdot x_2+1\cdot x_3\end{cases}$$

$\Rightarrow$ 通解为$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$，其中$k_1,k_2$为任意常数

$\Rightarrow$ 特征向量为$k_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ $(k_1,k_2$不同时为零$)$

对于$\lambda_3=1$：$\left[\begin{array}{ccc:c}2-1&1&0&0\\1&2-1&0&0\\0&0&3-1&0\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&2&0\end{array}\right]\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2+0\cdot x_3=0\\x_1+x_2+0\cdot x_3=0\\0\cdot x_1+0\cdot x_2+2x_3=0\end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&2&0\end{array}\right]\xrightarrow{\text{行}_2-\text{行}_1}\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&2&0\end{array}\right]\xrightarrow{\text{行}_2\text{与行}_3\text{互换}}\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{\text{行}_2\cdot\frac{1}{2}}\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\begin{cases}1x_1+1x_2+0x_3=0\\0x_1+0x_2+1x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-x_2\\x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-x_2\\x_2=x_2\\x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-1\cdot x_2\\x_2=1\cdot x_2\\x_3=0\cdot x_2\end{cases}$$

$\Rightarrow$ 通解为$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=k_3\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$，其中$k_3$为任意常数

$\Rightarrow$ 特征向量为$k_3\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$ $(k_3\neq0)$

知识点14：求特征向量

(1)求特征值

(2)对每一个不同的特征值都进行下面的操作：

a、将矩阵对角线的每个元素均减λ，再在右侧画虚线、加上一列0，构成新矩阵

b、将新矩阵化为行最简形矩阵

c、将行最简形矩阵变为方程，求通解

d、通解即为该λ对应的特征向量【k不能全取0】

练习2. 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{bmatrix}$，求矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值与特征向量

解：$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}3-\lambda&-1&-1\\-1&3-\lambda&-1\\-1&-1&3-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{行_1与行_2互换}-\begin{vmatrix}-1&3-\lambda&-1\\3-\lambda&-1&-1\\-1&-1&3-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal[行_3-行_1]{行_2+(3-\lambda)\cdot行_1}-\begin{vmatrix}-1&3-\lambda&-1\\0&(\lambda-4)(\lambda-2)&\lambda-4\\0&\lambda-4&4-\lambda\end{vmatrix}$

$\xlongequal{行_2与行_3互换}\begin{vmatrix}-1&3-\lambda&-1\\0&\lambda-4&4-\lambda\\0&(\lambda-4)(\lambda-2)&\lambda-4\end{vmatrix}\xlongequal{行_3-(\lambda-2)\cdot行_2}\begin{vmatrix}-1&3-\lambda&-1\\0&\lambda-4&4-\lambda\\0&0&(\lambda-4)(\lambda-1)\end{vmatrix}$

$=-1\cdot(\lambda-4)\cdot(\lambda-4)(\lambda-1)$

$=-(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda-4)$

令$-(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda-4)=0$

$\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=4,\lambda_3=4\Rightarrow$ 特征值：$\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=4$

对于$\lambda_1=1$：$\left[\begin{array}{ccc:c}3-1&-1&-1&0\\-1&3-1&-1&0\\-1&-1&3-1&0\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc:c}2&-1&-1&0\\-1&2&-1&0\\-1&-1&2&0\end{array}\right]\Rightarrow\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=0\\-x_1+2x_2-x_3=0\\-x_1-x_2-2x_3=0\end{cases}$

$\left[\begin{array}{ccc:c}2&-1&-1&0\\-1&2&-1&0\\-1&-1&2&0\end{array}\right]\xrightarrow[行_3+\frac{1}{2}\cdot行_1]{行_2+\frac{1}{2}\cdot行_1}\left[\begin{array}{ccc:c}2&-1&-1&0\\0&\frac{3}{2}&-\frac{3}{2}&0\\0&-\frac{3}{2}&\frac{3}{2}&0\end{array}\right]\xrightarrow{行_3+行_2}\left[\begin{array}{ccc:c}2&-1&-1&0\\0&\frac{3}{2}&-\frac{3}{2}&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$

$\xrightarrow[行_2\cdot\frac{2}{3}]{行_1\cdot\frac{1}{2}}\left[\begin{array}{ccc:c}1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{行_1+\frac{1}{2}\cdot行_2}\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$

$\Rightarrow\begin{cases}x_1-x_3=0\\x_2-x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=x_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=x_3\\x_3=x_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=1\cdot x_3\\x_2=1\cdot x_3\\x_3=1\cdot x_3\end{cases}$

$\Rightarrow$ 通解为$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，其中$k_1$为任意常数

$\Rightarrow$ 特征向量为$k_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}(k_1\neq0)$

对于$\lambda_2=\lambda_3=4$：$\left[\begin{array}{ccc:c}3-4&-1&-1&0\\-1&3-4&-1&0\\-1&-1&3-4&0\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc:c}-1&-1&-1&0\\-1&-1&-1&0\\-1&-1&-1&0\end{array}\right]\Rightarrow\begin{cases}-x_1-x_2-x_3=0\\-x_1-x_2-x_3=0\\-x_1-x_2-x_3=0\end{cases}$

$\left[\begin{array}{ccc:c}-1&-1&-1&0\\-1&-1&-1&0\\-1&-1&-1&0\end{array}\right]\xrightarrow[行_3-行_1]{行_2-行_1}\left[\begin{array}{ccc:c}-1&-1&-1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{行_1\cdot(-1)}\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$

$\Rightarrow\{1x_1+1x_2+1x_3=0\Rightarrow\{x_1=-x_2-x_3\Rightarrow\begin{cases}x_1=-x_2-x_3\\x_2=x_2\\x_3=x_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-1\cdot x_2-1\cdot x_3\\x_2=\ \ 1\cdot x_2+0\cdot x_3\\x_3=\ \ 0\cdot x_2+1\cdot x_3\end{cases}$

$\Rightarrow$ 通解为$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=k_2\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$，其中$k_2,k_3$为任意常数

$\Rightarrow$ 特征向量为$k_2\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$ (k_2,k_3不同时为零)

知识点15：求对角矩阵和可逆矩阵

(1)求出特征值与特征向量

(2)写出$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}$

(3)令$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}k_1\text{后面的向量} & k_2\text{后面的向量} & k_3\text{后面的向量}\end{bmatrix}$

练习1. 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$，求可逆变换矩阵$\boldsymbol{P}$使$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$为对角矩阵

解：$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & 0\\ 1 & 2-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 3-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{\text{行}_1\text{与行}_2\text{互换}}-\begin{vmatrix}1 & 2-\lambda & 0\\ 2-\lambda & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{\text{行}_2-(2-\lambda)\cdot\text{行}_1}-\begin{vmatrix}1 & 2-\lambda & 0\\ 0 & (3-\lambda)(\lambda-1) & 0\\ 0 & 0 & 3-\lambda\end{vmatrix}$

$=-[1\cdot(3-\lambda)(\lambda-1)\cdot(3-\lambda)]$

$=-(3-\lambda)\cdot(3-\lambda)\cdot(\lambda-1)$

令$-(3-\lambda)\cdot(3-\lambda)\cdot(\lambda-1)=0$

$\Rightarrow\lambda_1=3,\lambda_2=3,\lambda_3=1\quad\Rightarrow$ 特征值：$\lambda_1=\lambda_2=3,\lambda_3=1$

对于$\lambda_1=\lambda_2=3$：$\left[\begin{array}{ccc|c}2-3 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2-3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3-3 & 0\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\Rightarrow\begin{cases}-x_1+x_2+0\cdot x_3=0\\ x_1-x_2+0\cdot x_3=0\\ 0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3=0\end{cases}$

$\left[\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\xrightarrow{\text{行}_2+\text{行}_1}\left[\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\xrightarrow{\text{行}_1\cdot(-1)}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$

$\Rightarrow\{1x_1-1x_2+0x_3=0\Rightarrow\{x_1=x_2\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\ x_2=x_2\\ x_3=x_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=1\cdot x_2+0\cdot x_3\\ x_2=1\cdot x_2+0\cdot x_3\\ x_3=0\cdot x_2+1\cdot x_3\end{cases}$

$\Rightarrow$ 通解为$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$，其中$k_1,k_2$为任意常数

$\Rightarrow$ 特征向量为$k_1\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$ $(k_1,k_2$不同时为零$)$

对于$\lambda_3=1$：$\left[\begin{array}{ccc|c}2-1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3-1 & 0\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\end{array}\right]\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2+0\cdot x_3=0\\ x_1+x_2+0\cdot x_3=0\\ 0\cdot x_1+0\cdot x_2+2x_3=0\end{cases}$

$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\end{array}\right]\xrightarrow{\text{行}_2-\text{行}_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\end{array}\right]\xrightarrow{\text{行}_2\text{与行}_3\text{互换}}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\xrightarrow{\text{行}_2\cdot\frac{1}{2}}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$

$\Rightarrow\begin{cases}1x_1+1x_2+0x_3=0\\ 0x_1+0x_2+1x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-x_2\\ x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-x_2\\ x_2=x_2\\ x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-1\cdot x_2\\ x_2=1\cdot x_2\\ x_3=0\cdot x_2\end{cases}$

$\Rightarrow$ 通解为$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=k_3\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$，其中$k_3$为任意常数

$\Rightarrow$ 特征向量为$k_3\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$ $(k_3\neq 0)$

$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$、$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

知识点15：求对角矩阵和可逆矩阵

(1)求出特征值与特征向量

(2)写出$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}$

(3)令$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}k_1\text{后面的向量} & k_2\text{后面的向量} & k_3\text{后面的向量}\end{bmatrix}$

练习2. 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & -1 & -1\\ -1 & 3 & -1\\ -1 & -1 & 3\end{bmatrix}$，求可逆变换矩阵$\boldsymbol{P}$使$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$为对角矩阵

解：$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & -1 & -1\\ -1 & 3 & -1\\ -1 & -1 & 3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}3-\lambda & -1 & -1\\ -1 & 3-\lambda & -1\\ -1 & -1 & 3-\lambda\end{vmatrix}\underline{\underline{\text{行}_1\text{与行}_2\text{互换}}}-\begin{vmatrix}-1 & 3-\lambda & -1\\ 3-\lambda & -1 & -1\\ -1 & -1 & 3-\lambda\end{vmatrix}\underline{\underline{\substack{\text{行}_2+(3-\lambda)\cdot\text{行}_1\\ \text{行}_3-\text{行}_1}}}-\begin{vmatrix}-1 & 3-\lambda & -1\\ 0 & (\lambda-4)(\lambda-2) & \lambda-4\\ 0 & \lambda-4 & 4-\lambda\end{vmatrix}$

$\underline{\underline{\text{行}_2\text{与行}_3\text{互换}}}\begin{vmatrix}-1 & 3-\lambda & -1\\ 0 & \lambda-4 & 4-\lambda\\ 0 & (\lambda-4)(\lambda-2) & \lambda-4\end{vmatrix}\underline{\underline{\text{行}_3-(\lambda-2)\cdot\text{行}_2}}\begin{vmatrix}-1 & 3-\lambda & -1\\ 0 & \lambda-4 & 4-\lambda\\ 0 & 0 & (\lambda-4)(\lambda-1)\end{vmatrix}$

$=-1\cdot(\lambda-4)\cdot(\lambda-4)(\lambda-1)$

$=-(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda-4)$

令$-(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda-4)=0$

$\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=4,\lambda_3=4\Rightarrow$ 特征值：$\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=4$

对于$\lambda_1=1$：$\left[\begin{array}{ccc:c}3-1 & -1 & -1 & 0\\ -1 & 3-1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 3-1 & 0\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc:c}2 & -1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 2 & 0\end{array}\right]\Rightarrow\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=0\\ -x_1+2x_2-x_3=0\\ -x_1-x_2-2x_3=0\end{cases}$

$\left[\begin{array}{ccc:c}2 & -1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 2 & 0\end{array}\right]\xrightarrow[\text{行}_3+\frac{1}{2}\cdot\text{行}_1]{\text{行}_2+\frac{1}{2}\cdot\text{行}_1}\left[\begin{array}{ccc:c}2 & -1 & -1 & 0\\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0\\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0\end{array}\right]\xrightarrow{\text{行}_3+\text{行}_2}\left[\begin{array}{ccc:c}2 & -1 & -1 & 0\\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$

$\xrightarrow[\text{行}_2\cdot\frac{2}{3}]{\text{行}_1\cdot\frac{1}{2}}\left[\begin{array}{ccc:c}1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\xrightarrow{\text{行}_1+\frac{1}{2}\cdot\text{行}_2}\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$

$\Rightarrow\begin{cases}x_1-x_3=0\\ x_2-x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_3\\ x_2=x_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_3\\ x_2=x_3\\ x_3=x_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=1\cdot x_3\\ x_2=1\cdot x_3\\ x_3=1\cdot x_3\end{cases}$

$\Rightarrow$ 通解为$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$，其中$k_1$为任意常数 $\Rightarrow$ 特征向量为$k_1\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}(k_1\neq 0)$

对于$\lambda_2=\lambda_3=4$：$\left[\begin{array}{ccc:c}3-4 & -1 & -1 & 0\\ -1 & 3-4 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 3-4 & 0\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc:c}-1 & -1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & -1 & 0\end{array}\right]\Rightarrow\begin{cases}-x_1-x_2-x_3=0\\ -x_1-x_2-x_3=0\\ -x_1-x_2-x_3=0\end{cases}$

$\left[\begin{array}{ccc:c}-1 & -1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & -1 & 0\end{array}\right]\xrightarrow[\text{行}_3-\text{行}_1]{\text{行}_2-\text{行}_1}\left[\begin{array}{ccc:c}-1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\xrightarrow{\text{行}_1\cdot(-1)}\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$

$\Rightarrow\{1x_1+1x_2+1x_3=0\Rightarrow\{x_1=-x_2-x_3\Rightarrow\begin{cases}x_1=-x_2-x_3\\ x_2=x_2\\ x_3=x_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-1\cdot x_2-1\cdot x_3\\ x_2=\ \ 1\cdot x_2+0\cdot x_3\\ x_3=\ \ 0\cdot x_2+1\cdot x_3\end{cases}$

$\Rightarrow$ 通解为$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=k_2\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$，其中$k_2,k_3$为任意常数 $\Rightarrow$ 特征向量为$k_2\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$($k_2,k_3$不同时为零)

$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$、$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

知识点16：求二次型 f 的矩阵$\boldsymbol{A}$

B站：猴博士爱讲课
有相关的免费视频

(1)求出三行三列的矩阵

(2)将x_1^2的系数分配给1行1列

将x_2^2的系数分配给2行2列

将x_3^2的系数分配给3行3列

将x_1x_2的系数对半分，一半给1行2列

一半给2行1列

将x_1x_3的系数对半分，一半给1行3列

一半给3行1列

将x_2x_3的系数对半分，一半给2行3列

一半给3行2列

练习1. 设$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2$，写出该二次型的矩阵$\boldsymbol{A}$

解：$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2=2x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2+0x_1x_3+0x_2x_3 \Rightarrow \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & \frac{2}{2} & \frac{0}{2} \\ \frac{2}{2} & 2 & \frac{0}{2} \\ \frac{0}{2} & \frac{0}{2} & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

练习题2. 求化二次型$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+3x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$的矩阵$\boldsymbol{A}$

解：$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+3x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3 \Rightarrow \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & \frac{-2}{2} & \frac{-2}{2} \\ \frac{-2}{2} & 3 & \frac{-2}{2} \\ \frac{-2}{2} & \frac{-2}{2} & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

知识点17：求二次型 f 的标准型和正交变换

(1)写出二次型 f 的矩阵$\boldsymbol{A}$

(2)求出矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值与特征向量

(3)求出矩阵$\boldsymbol{A}$的正交矩阵$\boldsymbol{Q}$

(4)标准形：$f=\lambda_1 y_1{}^2+\lambda_2 y_2{}^2+\lambda_3 y_3{}^2$

正交变换：$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=$正交矩阵$\boldsymbol{Q}\cdot\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$

练习1. 设$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1{}^2+2x_2{}^2+3x_3{}^2+2x_1x_2$。

(1) 写出该二次型的矩阵$\boldsymbol{A}$；

(2) 求正交矩阵$\boldsymbol{Q}$使得$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$为对角矩阵；

(3) 给出正交变换，化该二次型为标准形。

解：(1)$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1{}^2+2x_2{}^2+3x_3{}^2+2x_1x_2=2x_1{}^2+2x_2{}^2+3x_3{}^2+2x_1x_2+0x_1x_3+0x_2x_3 \Rightarrow \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&\frac{2}{2}&\frac{0}{2}\\\frac{2}{2}&2&\frac{0}{2}\\\frac{0}{2}&\frac{0}{2}&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$

$$(2)\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}2-\lambda&1&0\\1&2-\lambda&0\\0&0&3-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{行_1与行_2互换}-\begin{vmatrix}1&2-\lambda&0\\2-\lambda&1&0\\0&0&3-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{行_2-(2-\lambda)\cdot行_1}-\begin{vmatrix}1&2-\lambda&0\\0&(3-\lambda)(\lambda-1)&0\\0&0&3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-[1\cdot(3-\lambda)(\lambda-1)\cdot(3-\lambda)]$$

$$=-(3-\lambda)\cdot(3-\lambda)\cdot(\lambda-1)$$

令$-(3-\lambda)\cdot(3-\lambda)\cdot(\lambda-1)=0$

$\Rightarrow \lambda_1=3,\lambda_2=3,\lambda_3=1 \quad\Rightarrow$ 特征值：$\lambda_1=\lambda_2=3,\lambda_3=1$

对于$\lambda_1=\lambda_2=3$：$\left[\begin{array}{ccc|c}2-3&1&0&0\\1&2-3&0&0\\0&0&3-3&0\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}-1&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\Rightarrow\begin{cases}-x_1+\ \ x_2+0\cdot x_3=0\\ \ \ x_1-\ \ x_2+0\cdot x_3=0\\0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3=0\end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}-1&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{行_2+行_1}\left[\begin{array}{ccc|c}-1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{行_1\cdot(-1)}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\{1x_1-1x_2+0x_3=0\Rightarrow\{x_1=x_2\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\x_2=x_2\\x_3=x_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=1\cdot x_2+0\cdot x_3\\x_2=1\cdot x_2+0\cdot x_3\\x_3=0\cdot x_2+1\cdot x_3\end{cases}$$

$\Rightarrow$ 通解为$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$，其中$k_1,k_2$为任意常数

$\Rightarrow$ 特征向量为$k_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_1\\k_1\\k_2\end{bmatrix}$ $(k_1,k_2$不同时为零$)$

对于$\lambda_3=1$：$\left[\begin{array}{ccc|c}2-1&1&0&0\\1&2-1&0&0\\0&0&3-1&0\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&2&0\end{array}\right]\Rightarrow\begin{cases}x_1+\ \ x_2+0\cdot x_3=0\\x_1+\ \ x_2+0\cdot x_3=0\\0\cdot x_1+0\cdot x_2+\ 2x_3=0\end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&2&0\end{array}\right]\xrightarrow{行_2-行_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&2&0\end{array}\right]\xrightarrow{行_2与行_3互换}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{行_2\cdot\frac{1}{2}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\begin{cases}1x_1+1x_2+0x_3=0\\0x_1+0x_2+1x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-x_2\\x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-x_2\\x_2=x_2\\x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-1\cdot x_2\\x_2=\ \ 1\cdot x_2\\x_3=\ \ 0\cdot x_2\end{cases}$$

$\Rightarrow$ 通解为$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=k_3\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$，其中$k_3$为任意常数

$\Rightarrow$ 特征向量为$k_3\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-k_3\\k_3\\0\end{bmatrix}$ $(k_3\neq 0)$

知识点17：求二次型 f 的标准型和正交变换

(1)写出二次型 f 的矩阵$\boldsymbol{A}$

(2)求出矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值与特征向量

(3)求出矩阵$\boldsymbol{A}$的正交矩阵$\boldsymbol{Q}$

(4)标准形：$f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\lambda_3 y_3^2$

正交变换：$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=$正交矩阵$\boldsymbol{Q}\cdot\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$

练习1. 设$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2$。

(1) 写出该二次型的矩阵$\boldsymbol{A}$；

(2) 求正交矩阵$\boldsymbol{Q}$使得$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$为对角矩阵；

(3) 给出正交变换，化该二次型为标准形。

解：(1)$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$

(2)$\boldsymbol{A}$的特征值：$\lambda_1=\lambda_2=3,\lambda_3=1$

对于$\lambda_1=\lambda_2=3$：特征向量为$k_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_1\\k_1\\k_2\end{bmatrix}$ (k_1,k_2不同时为零)

对于$\lambda_3=1$：特征向量为$k_3\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-k_3\\k_3\\0\end{bmatrix}$ ($k_3\neq 0$)

对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$\boldsymbol{Q}_{\text{半成品}}=\begin{bmatrix}k_1&k_1&-k_3\\k_1&k_1&k_3\\k_2&k_2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&k_1&-1\\1&k_1&1\\0&1&0\end{bmatrix}$ 【∵任意两列都正交 ∴第一列与第二列正交，即$1\cdot k_1+1\cdot k_1+0\cdot 1=0\Rightarrow k_1=0$】

【$k_1=1$，其他$=0$】

【$k_2=1$，其他不动】

【$k_3=1$，其他$=0$】

$=\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$

(这是草稿不写到卷面上)

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}}&\frac{0}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}}&\frac{-1}{\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}}\\\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}}&\frac{0}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}}&\frac{1}{\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}}\\\frac{0}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}}&\frac{1}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}}&\frac{0}{\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&0&-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\\0&1&0\end{bmatrix}$$

(3)正交变换为$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&0&-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$，二次型的标准形是$f=3y_1^2+3y_2^2+1y_3^2=3y_1^2+3y_2^2+y_3^2$

B站：猴博士爱讲课
有相关的免费视频

知识点17：求二次型 f 的标准型和正交变换

(1)写出二次型 f 的矩阵$\boldsymbol{A}$

(2)求出矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值与特征向量

(3)求出矩阵$\boldsymbol{A}$的正交矩阵$\boldsymbol{Q}$

(4)标准形：$f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\lambda_3 y_3^2$

正交变换：$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$=正交矩阵$\boldsymbol{Q}\cdot\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$

练习题2. 用正交变换化二次型$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+3x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$为标准形，并写出相应的正交变换。

解：$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+3x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3 \Rightarrow \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&\frac{-2}{2}&\frac{-2}{2}\\\frac{-2}{2}&3&\frac{-2}{2}\\\frac{-2}{2}&\frac{-2}{2}&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}3-\lambda&-1&-1\\-1&3-\lambda&-1\\-1&-1&3-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{\text{行}_1\text{与行}_2\text{互换}}-\begin{vmatrix}-1&3-\lambda&-1\\3-\lambda&-1&-1\\-1&-1&3-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal[\text{行}_3-\text{行}_1]{\text{行}_2+(3-\lambda)\cdot\text{行}_1}-\begin{vmatrix}-1&3-\lambda&-1\\0&(\lambda-4)(\lambda-2)&\lambda-4\\0&\lambda-4&4-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{行}_2\text{与行}_3\text{互换}}\begin{vmatrix}-1&3-\lambda&-1\\0&\lambda-4&4-\lambda\\0&(\lambda-4)(\lambda-2)&\lambda-4\end{vmatrix}\xlongequal{\text{行}_3-(\lambda-2)\cdot\text{行}_2}\begin{vmatrix}-1&3-\lambda&-1\\0&\lambda-4&4-\lambda\\0&0&(\lambda-4)(\lambda-1)\end{vmatrix}$$

$=-1\cdot(\lambda-4)\cdot(\lambda-4)(\lambda-1)$

$=-(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda-4)$

令$-(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda-4)=0$

$\Rightarrow \lambda_1=1,\lambda_2=4,\lambda_3=4 \Rightarrow$ 特征值：$\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=4$

对于$\lambda_1=1$：$\left[\begin{array}{ccc:c}3-1&-1&-1&0\\-1&3-1&-1&0\\-1&-1&3-1&0\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc:c}2&-1&-1&0\\-1&2&-1&0\\-1&-1&2&0\end{array}\right]\Rightarrow\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=0\\-x_1+2x_2-x_3=0\\-x_1-x_2-2x_3=0\end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc:c}2&-1&-1&0\\-1&2&-1&0\\-1&-1&2&0\end{array}\right]\xrightarrow[\text{行}_3+\frac{1}{2}\cdot\text{行}_1]{\text{行}_2+\frac{1}{2}\cdot\text{行}_1}\left[\begin{array}{ccc:c}2&-1&-1&0\\0&\frac{3}{2}&-\frac{3}{2}&0\\0&-\frac{3}{2}&\frac{3}{2}&0\end{array}\right]\xrightarrow{\text{行}_3+\text{行}_2}\left[\begin{array}{ccc:c}2&-1&-1&0\\0&\frac{3}{2}&-\frac{3}{2}&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{行}_2\cdot\frac{2}{3}]{\text{行}_1\cdot\frac{1}{2}}\left[\begin{array}{ccc:c}1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{\text{行}_1+\frac{1}{2}\cdot\text{行}_2}\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1-x_3=0\\x_2-x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=x_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=x_3\\x_3=x_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=1\cdot x_3\\x_2=1\cdot x_3\\x_3=1\cdot x_3\end{cases}$$

$\Rightarrow$ 通解为$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，其中$k_1$为任意常数 $\Rightarrow$ 特征向量为$k_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_1\\k_1\\k_1\end{bmatrix}(k_1\neq 0)$

对于$\lambda_2=\lambda_3=4$：$\left[\begin{array}{ccc:c}3-4&-1&-1&0\\-1&3-4&-1&0\\-1&-1&3-4&0\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc:c}-1&-1&-1&0\\-1&-1&-1&0\\-1&-1&-1&0\end{array}\right]\Rightarrow\begin{cases}-x_1-x_2-x_3=0\\-x_1-x_2-x_3=0\\-x_1-x_2-x_3=0\end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc:c}-1&-1&-1&0\\-1&-1&-1&0\\-1&-1&-1&0\end{array}\right]\xrightarrow[\text{行}_3-\text{行}_1]{\text{行}_2-\text{行}_1}\left[\begin{array}{ccc:c}-1&-1&-1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{\text{行}_1\cdot(-1)}\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\{1x_1+1x_2+1x_3=0\Rightarrow\{x_1=-x_2-x_3\Rightarrow\begin{cases}x_1=-x_2-x_3\\x_2=x_2\\x_3=x_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-1\cdot x_2-1\cdot x_3\\x_2=\ \ 1\cdot x_2+0\cdot x_3\\x_3=\ \ 0\cdot x_2+1\cdot x_3\end{cases}$$

$\Rightarrow$ 通解为$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=k_2\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$，其中$k_2,k_3$为任意常数$\Rightarrow$特征向量为$k_2\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-k_2-k_3\\k_2\\k_3\end{bmatrix}$($k_2,k_3$不同时为零)

知识点17：求二次型 f 的标准型和正交变换

(1)写出二次型 f 的矩阵$\boldsymbol{A}$

(2)求出矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值与特征向量

(3)求出矩阵$\boldsymbol{A}$的正交矩阵$\boldsymbol{Q}$

(4)标准形：$f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\lambda_3 y_3^2$

正交变换：$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=$正交矩阵$\boldsymbol{Q}\cdot\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$

练习题2. 用正交变换化二次型$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+3x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$为标准形，并写出相应的正交变换。

解：$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{A}$的特征值：$\lambda_1=1, \lambda_2=\lambda_3=4$

对于$\lambda_1=1$： 特征向量为$k_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k_1 \\ k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}$ $(k_1 \neq 0)$

对于$\lambda_2=\lambda_3=4$：特征向量为$k_2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -k_2-k_3 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$ $(k_2, k_3$不同时为零$)$

对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{Q}_{半成品}=\begin{bmatrix} k_1 & -k_2-k_3 & -k_2-k_3 \\ k_1 & k_2 & k_2 \\ k_1 & k_3 & k_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1-k_3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & k_3 & 1 \end{bmatrix}$

【$k_1=1$，其他=0】

【$k_2=1$，其他不动】

【$k_3=1$，其他=0】

【∵任意两列都正交】

【∴第二列与第三列正交】

【即$(-1-k_3)\cdot(-1)+1\cdot 0+k_3\cdot 1=0 \Rightarrow k_3=-\frac{1}{2}$】

$=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

（这是草稿
不写到卷面上）

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} & \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}} & \frac{-1}{\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} & \frac{1}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}} & \frac{0}{\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} & \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}} & \frac{1}{\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

正交变换为$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$，二次型的标准形是$f=1y_1^2+4y_2^2+4y_3^2=y_1^2+4y_2^2+4y_3^2$