7-5 平面图

平面图

在现实生活中，常常要画一些图形，希望边与边之间尽量减少相交的情况，例如印刷线路板的布线，交通道路的设计等。

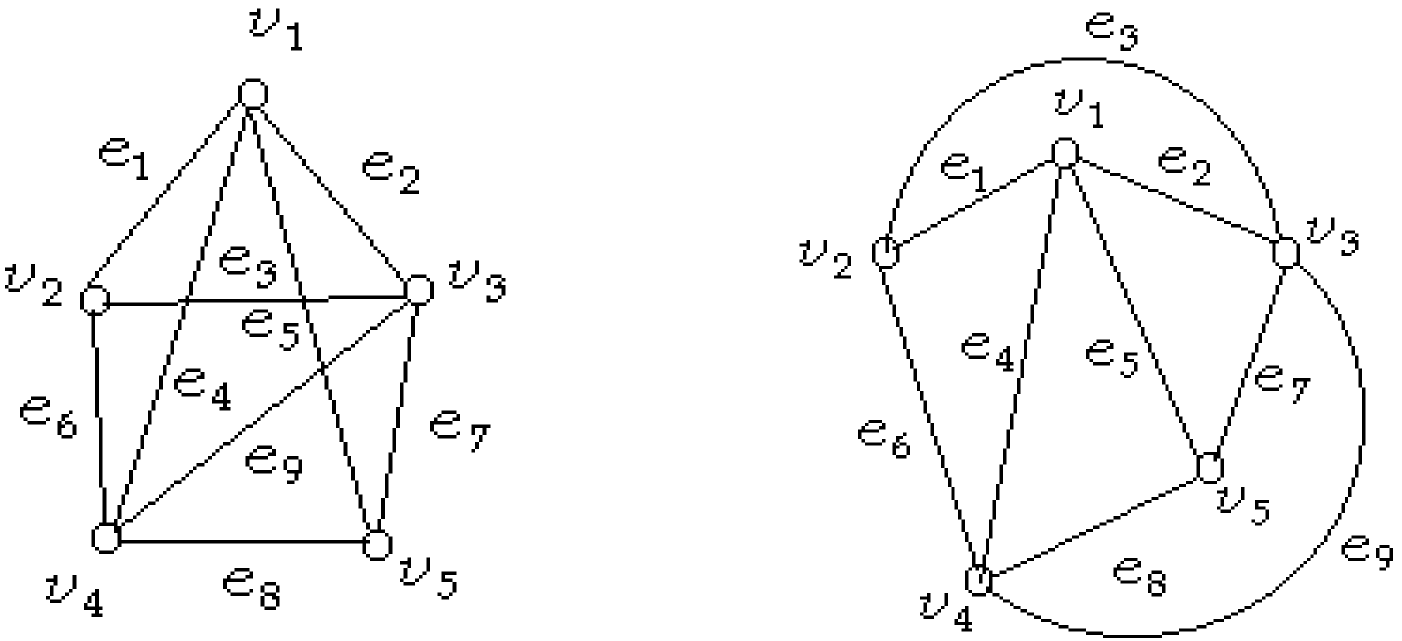
平面图

设G＝〈V，E〉是一个无向图，如果能够把G的所有结点和边画在平面上，且使任何两条边除了端点外没有其它的交点，就称G是一个平面图。

应该注意，有些图形从表面上看有几条边是相交的，但不能就此肯定它不是平面图。

平面图

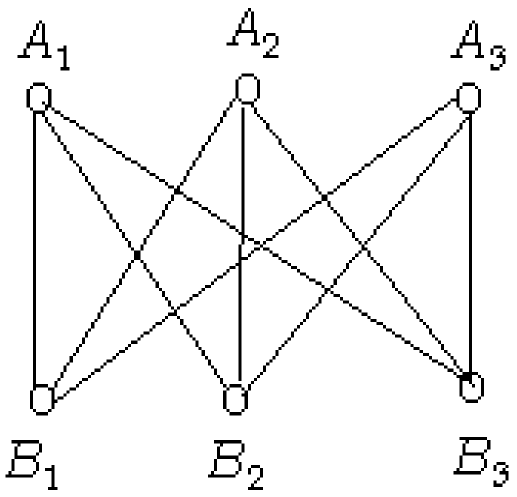
例如图7-5.1(a)，表面上看有几条边相交，但把它画成图7-5.1(b)，则可看出它是一个平面图。



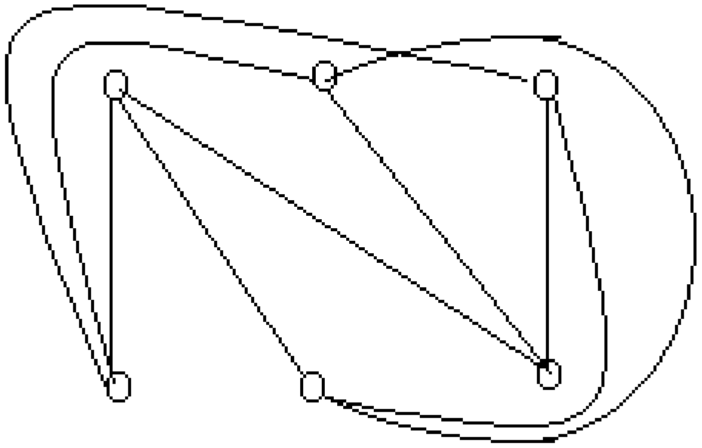
(a) (b)

平面图

有些图形不论怎样改画，除去结点外，总有边相交。如有三间房子A_1、A_2、A_3，拟分别连接水、煤气和电三个接口，如下图所示，这个图不论怎样改画，改画后至少有一条边与其它边在结点以外的地方相交如图**7-5.2(b)**所示，故它不是一个平面图。



(a)


(b)

图G的面和边界

[定义] 图*G*的面和边界

设*G*是一个连通平面图，由图中的边所包围的区域，在区域内既不包含图的结点，也不包含图的边，这样的区域称为图*G*的一个面，包围该面的诸边所构成的回路称为这个面的边界。

图G的面和边界

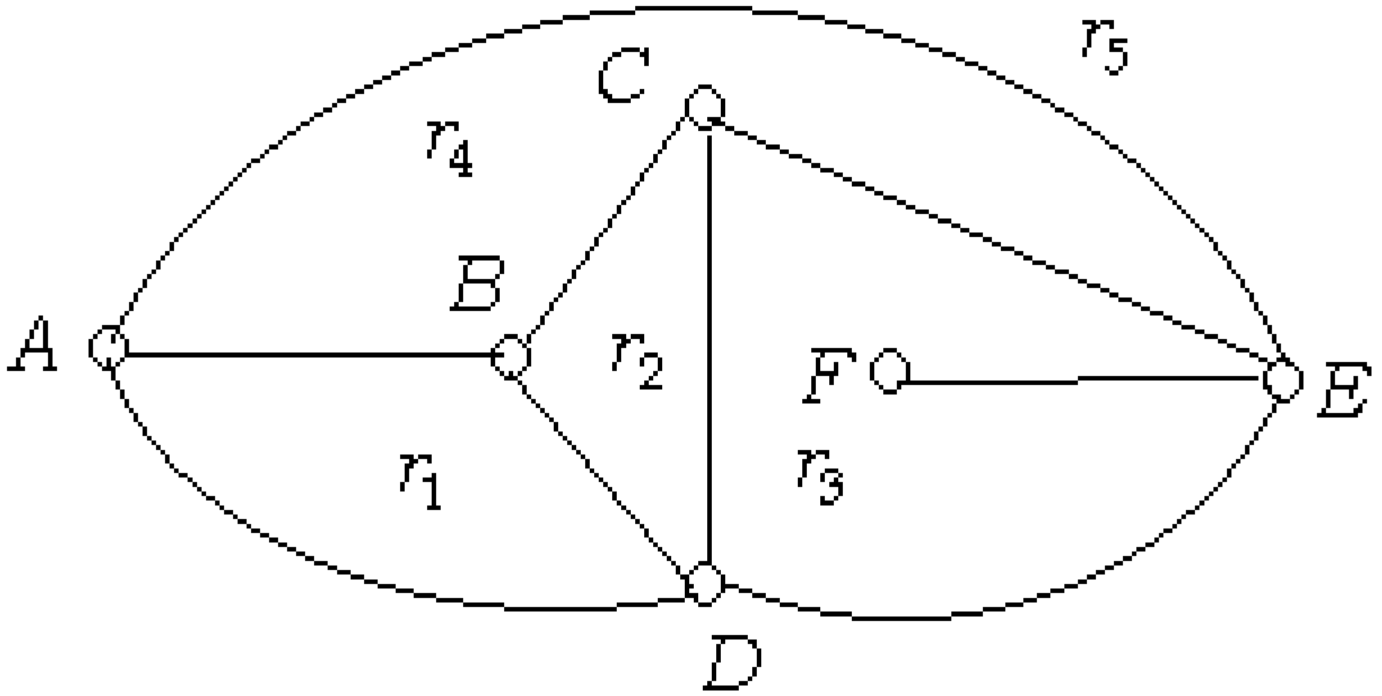
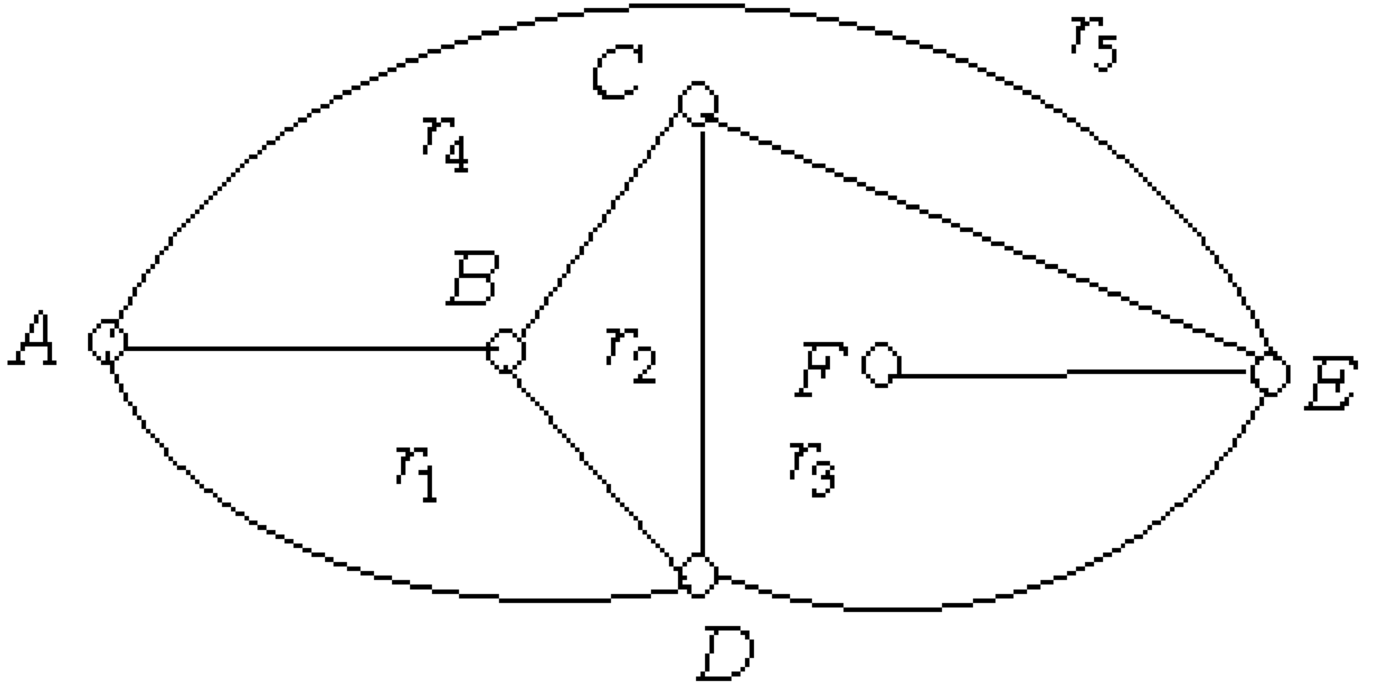


图7-5.3 面及其边界

面的次数

- 今后我们把面的边界的回路长度称作该面的次数，记为**deg(*r*)**，
- 在图7-5.3中$deg(r_1)=3$，$deg(r_2)=3$，$deg(r_3)=5$，$deg(r_4)=4$，$deg(r_5)=3$。



定理

定理7-5.1一个有限平面图，面的次数之和等于其边数的两倍。

证明 因为任何一条边，或者是两个面的公共边，或者在一个面中作为边界被重复计算两次，故面的次数之和等于其边数的两倍。

$$\sum_{i=1}^{k} \deg(r_i) = 2e$$

如图7-5.3中 $\sum_{i=1}^{5} \deg(r_i)$ ＝18，正好是边数9的两倍。

欧拉定理

- 在三维空间中，关于凸多面体有一个著名的欧拉定理，设凸多面体有v个顶点e条棱r块面，
- 则v-e+r＝2。
- 我们可以将这个定理推广到平面图上。

欧拉定理

定理7-5.2(欧拉定理)（平面图的必要条件，用于判定某个图不是平面图）

设有一个连通平面图G，共有v个结点e条边r块面，则欧拉公式 $v-e+r=2$ 成立。

证明

(1)若G为一个孤立结点，则$v=1$，$e=0$，$r=1$，故$v-e+r=2$成立。

(2)若G为一条边，则$v=2$，$e=1$，$r=1$，则$v-e+r=2$成立。

(3)设G为k条边时，欧拉公式成立。

即$v_k-e_k+r_k=2$。下面考察G为$k+1$条边时的情况。

欧拉定理

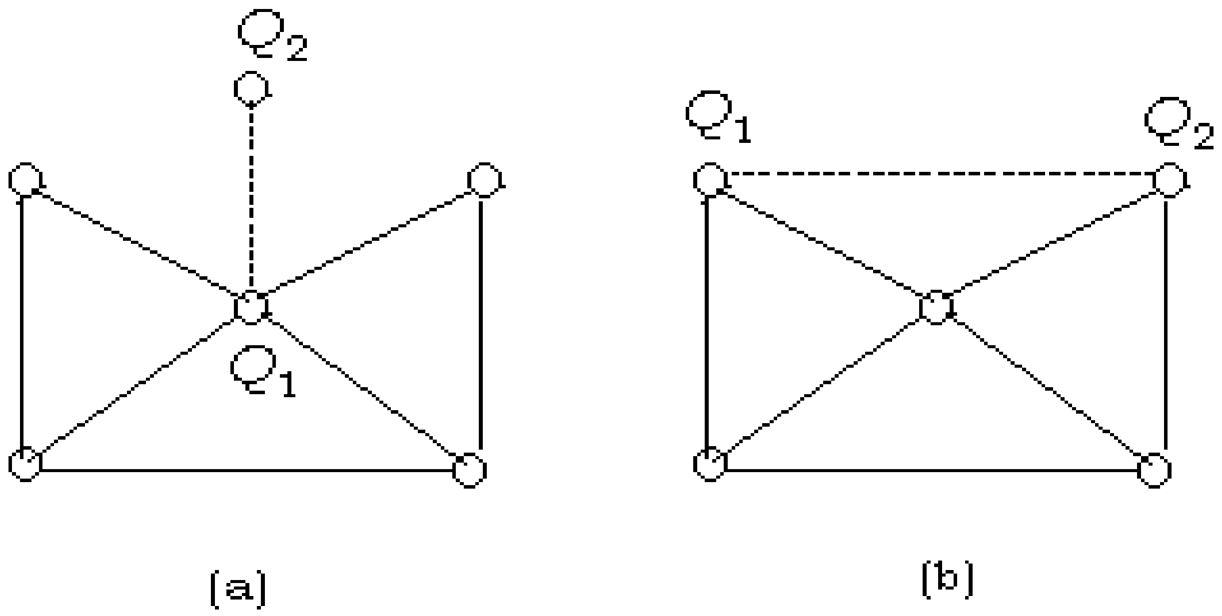


图7-5.4 欧拉定理证明的示意图

欧拉定理

因为在k条边的连通图上增加一条边，使它仍为连通图，只有下述两种情况：

①加上一个新的结点Q_2，Q_2与图上的一点Q_1相连(如图7-5.4(a)所示)，此时，v_k和e_k两者都增加1，而面数r_k未变，故

$$(v_k+1)-(e_k+1)+r_k=v_k-e_k+r_k=2$$

②用一条边连接图上的已知点Q_1和Q_2,如图7-5.4(b)所示，此时e_k和r_k都增加1，而结点数未变，故

$$v_k-(e_k+1)+(r_k+1)=v_k-e_k+r_k=2$$

连通平面图的必要条件

定理7-5.3 设G为有v个结点e条边的连通平面图，若$v≥3$，则$e≤3v-6$。

证明 设连通平面图G的面数为r，当$v=3$，$e=2$时上式显然成立，除此之外，若$e≥3$，则每一个面的次数不小于3，由定理1得知各面次数之和为2e，因此代入欧拉定理：

$$2e \geq 3r,\quad r \leq \frac{2}{3}e \qquad 2 = v - e + r \leq v - e + \frac{2}{3}e \qquad 2 \leq v - \frac{e}{3}$$

$6≤3v-e$，$e≤3v-6$

应用此定理可以判定某些图不是平面图。

连通平面图的必要条件

例1　设图*G*如图7-5.5所示，该图是K_5图。因为有5结点10条边，故3×5－6＜10，即$e \le 3v-6$对本图不成立，故K_5是非平面图。

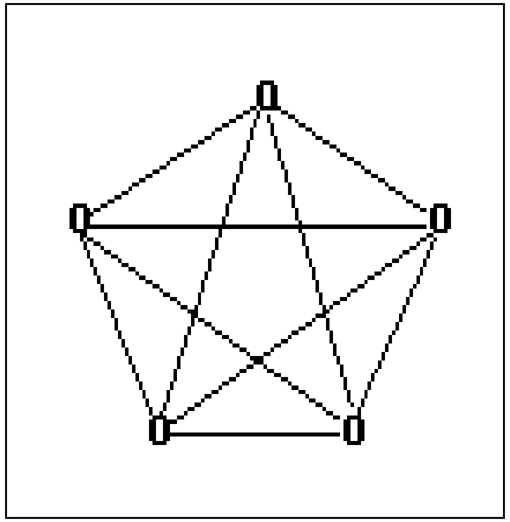


图7-5.5 K_5图

需要注意定理7-5.3的条件并不是充分的，如图7-5.2所示的图，常称作$K_{3,3}$图，由于有6个结点9条边，故3×6－6≥9，即满足$e \leqslant 3v-6$，但可以证明$K_{3,3}$也是非平面图。

连通平面图的必要条件

例2 证明$K_{3,3}$图不是平面图。

如果$K_{3,3}$是平面图，因为在$K_{3,3}$中任意取三个结点，其中必有两个结点不邻接，故每个面的次数都不小于4，

由于，$4r \le 2e$，$r \le \frac{e}{2}$

即$\mathrm{v}-\mathrm{e}+\frac{e}{2} \ge 2,\ 2\mathrm{v}-4 \ge e$

欧拉定理

图中有6个结点9条边，故2×6 - 4 < 9，即不是平面图。

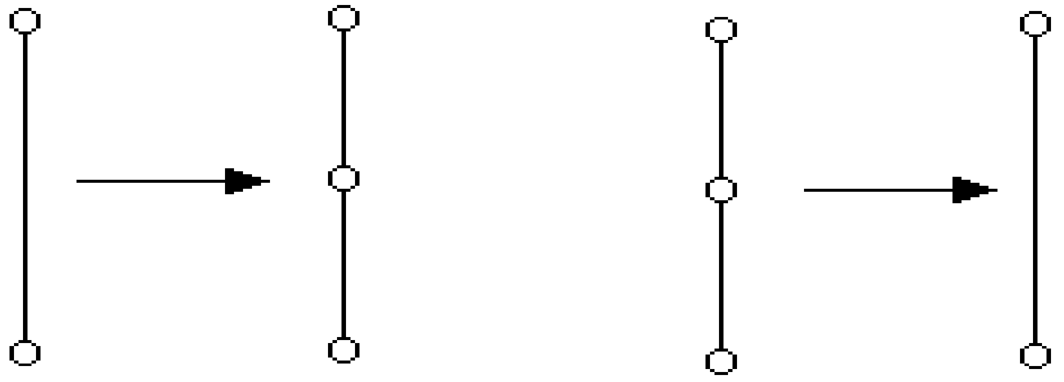
库拉托夫斯基定理

如前面所讲，有些图形看来有边相交，但可以改画为平面图，有些图不论怎样改画，总会有边相交的。如果图的结点数和边数较多，改画起来比较麻烦，能否根据图所包含的子图来判定原图是否是平面图？

虽然欧拉公式有时能用来判定某一个图是非平面图，但是还没有简便的方法可以确定某个图是平面图。下面介绍库拉托夫斯基定理。

2度结点

我们可以看到在给定的图*G*的边上，插入一个新的度数为**2**的结点，使一条边分成两条边，或者对于关联于一个度数为**2**的结点的两条边，去掉这个结点，使两条边化为一条边，这样不会影响图的平面性，如图**7-5.6(a)**和**(b)**。



(a)　　　　(b)

库拉托夫斯基定理

[定义]图是在2度结点内同构

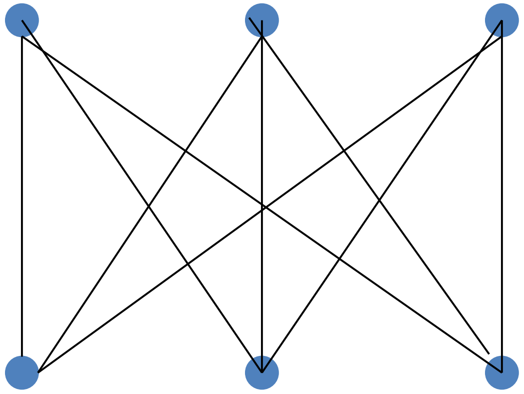
给定两个图G_1和G_2，如果它们是同构的，或通过反复插入或删去度数为2的结点后，使G_1和G_2同构，则称该图是在2度结点内同构。

定理7-5.4(Kuratowski库拉托夫斯基定理)

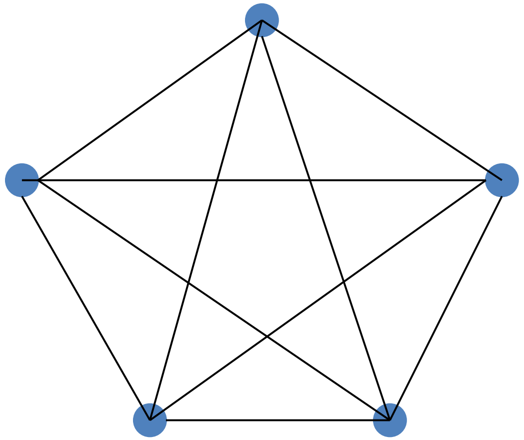
一个平面图，当且仅当它不包含与$K_{3,3}$或K_5在2度结点内同构的子图。

库拉托夫斯基图

库拉托夫斯基图(Kuratowski graph)



$K_{3,3}$



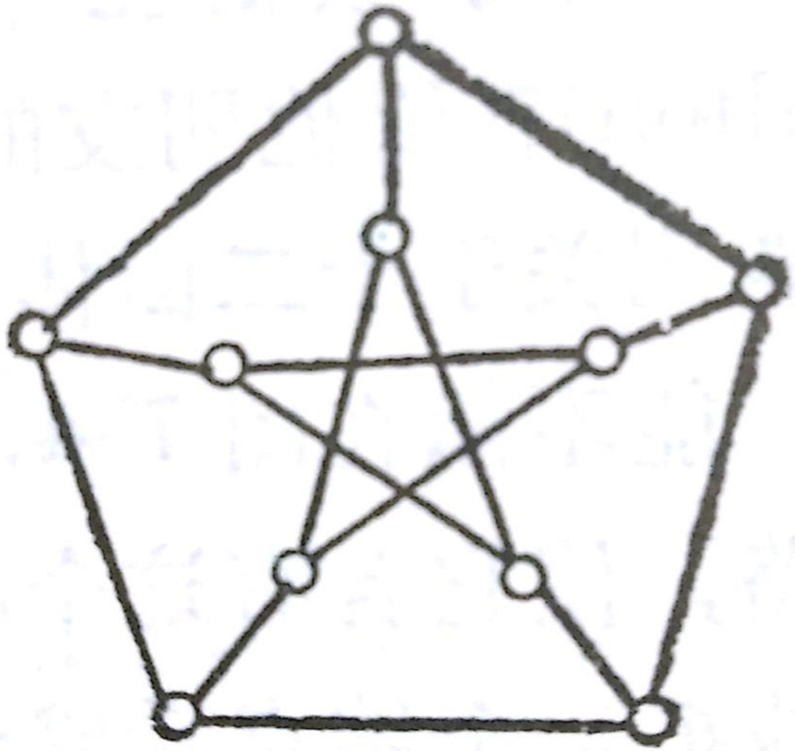
K_5

库拉托夫斯基图

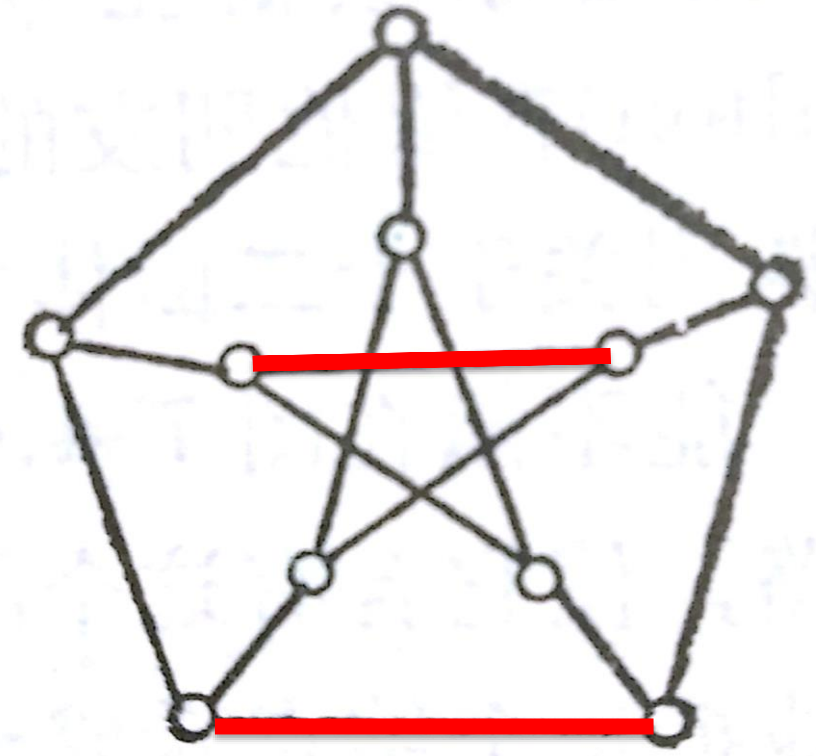
$K_{3,3}$和K_5(如图7-5.7所示)常称为库拉托夫斯基图，这个定理虽然很基本，但证明较长，故从略。

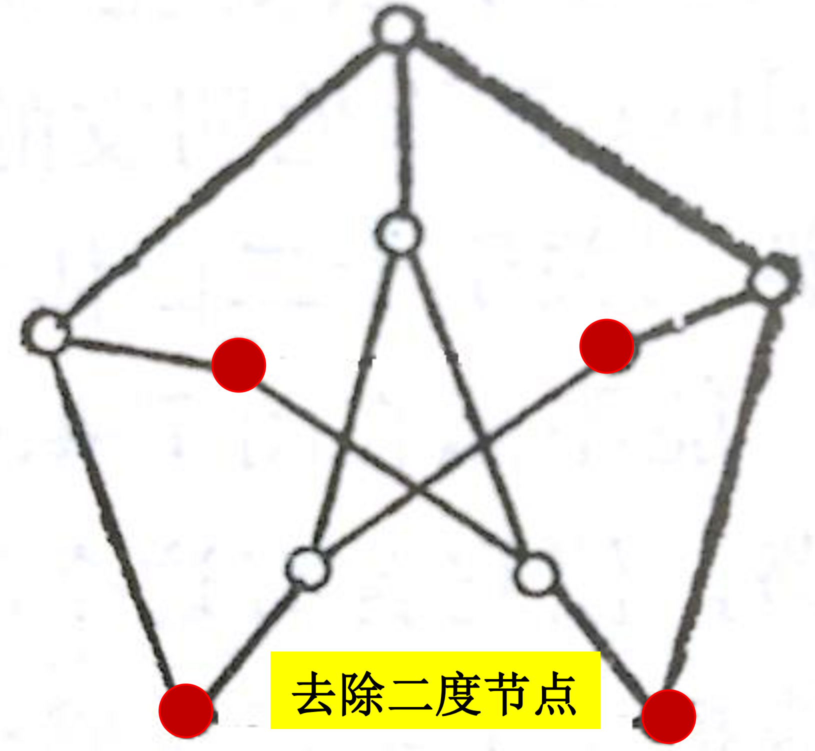
举例

例题：证明彼得森(Pertersen)图不是平面图



举例





与$K_{3,3}$同构

谢 谢