# 3-5 关系的概念及其表示法

# 六度分割理论

- 20世纪60年代，耶鲁大学的社会心理学家米尔格兰姆(Stanley Milgram)就设计了一个连锁信件实验。他将一套连锁信件随机发送给居住在内布拉斯加州奥马哈的160个人，信中放了一个波士顿股票经纪人的名字，信中要求每个收信人将这套信寄给自己认为是比较接近那个股票经纪人的朋友。朋友收信后照此办理。最终，大部分信在经过五、六个步骤后都抵达了该股票经纪人。

# 六度分割理论

- 数学领域的猜想，名为Six Degrees of Separation，中文翻译包括以下几种： 六度分割理论或小世界理论等。
- 理论指出： “你和任何一个陌生人之间所间隔的人不会超过五个，也就是说，最多通过五个人你就能够认识任何一个陌生人。” 根据这个理论，你和世界上的任何一个人之间只隔着五个人，不管对方在哪个国家，属哪类人种，是哪种肤色。这就是六度分割理论，也叫小世界理论。

# 六度分割理论

- 这个连锁实验，体现了一个似乎很普遍的客观规律：社会化的现代人类社会成员之间，都可能通过“六度分割” 而联系起来。整个社会其实是一个广泛链接的“关系网”。

# 世上万物均存在关系

- 兄弟关系、长幼关系、同学关系、邻居关系，上下级关系等。
- 在数学上有大于关系、小于关系，整除关系。

  例如：“3小于5”，“x大于y”，“点a在b与c之间”。
- 蝴蝶效应。

# 关系

- 序偶可以表达两个客体、三个客体或n个客体之间的联系，因此用序偶表达这个概念是非常自然的。

# 关系

例如：火车票与座位之间有对号关系。

设X表示火车票的集合，Y表示座位的集合，

则对于任意的 $x \in X$ 和 $y \in Y$，

必定有　x 与y有“对号”关系

　　　　x 与y没有“对号”关系。二者之一

令R表示“对号”关系，则上述问题可以表示为 $xRy$ 或 $x \not R y$ 。

　　　　　　　　亦可表示为 $\langle x,y \rangle \in R$ 或 $\langle x,y \rangle \notin R$，

因此我们看到对号关系是序偶的集合。

# 什么是关系

关系是一个非常**普遍**的概念，如数值的大于关系、整除关系，人类的父子关系、师生关系、同学关系等。

一. 例子

1. 集合A = {我们班},

   我们班上的同乡关系是 A×A的子集；

   我们班上的同姓关系是 A×A的子集；

   我们班上的朋友关系是 A×A的子集；

# 关系

**2. 令A={1,2,3,4}，**

**A中元素间的 ≤ 关系$R_1$:**

**$R_1$={ <1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<2,2>,**

**<2,3>,<2,4>,<3,3>,<3,4>,<4,4>} $\subseteq A \times A$**

**A中元素间的>关系$R_2$:**

**$R_2$={<2,1>,<3,1>,<4,1>, <3,2>,<4,2>,<4,3>}**

**$\subseteq A \times A$**

# 二元关系

## 二. 基本概念

二元关系(binary relation) 简称关系，任一序偶的集合即确定了一个二元关系R。

### 1.关系的定义

设A、B是集合，如果R $\subseteq A\times B$ ，则称R是一个从A到B的二元关系。如果 R$\subseteq A\times A$，则称R是A上的二元关系，简称为关系。

$<x,y>\in R \Leftrightarrow xRy$ 也称之为x与y有R关系。

$<x,y>\notin R \Leftrightarrow x\not R y$ 也称之为x与y没有R关系。

# 二元关系举例

例1: 在实数中关系“$\geq$”可记作

“$\geq$” $=\{<x,y>|x,y$是实数且$x \geq y\}$。

例2: $R_1=\{<1,2>,<\alpha,\beta>,<a,b>\}$

$R_1$是二元关系.

例3: $A=\{<a,b>,<1,2,3>,a,1\}$

$A$不是关系.

# A到B的二元关系

也可定义［关系］为：设有任意两个集合A和B，直积$A\times B$的子集R称为A到B的二元关系。

R是A到B的二元关系$\Leftrightarrow R\subseteq A\times B$

$\Leftrightarrow R\in \mathscr{P}(A\times B)$（幂集）

若$|A|=m$，$|B|=n$，则$|A\times B|= mn$

故$|\mathscr{P}(A\times B)|=2^{mn}$，即A到B不同的二元关系共有$2^{mn}$个

# A到B的二元关系（举例）

例: 设 $A=\{a_1,a_2\}$, $B=\{b\}$,

则A到B的二元关系共有$2^{2\times 1}=4$个:

$R_1=\varnothing$, $R_2=\{<a_1,b>\}$,

$R_3=\{<a_2,b>\}$, $R_4=\{<a_1,b>,<a_2,b>\}$

B到A的二元关系也有4个:

$R_5=\varnothing$, $R_6=\{<b,a_1>\}$,

$R_7=\{<b,a_2>\}$, $R_8=\{<b,a_1>,<b,a_2>\}$。

# A上的二元关系

定义［A上的二元关系］：

是$A\times A$的任意子集。

R是A上的二元关系

$\Leftrightarrow R\subseteq A\times A$

$\Leftrightarrow R\in \mathscr{P}(A\times A)$。

若$|A|=m$, 则$|A\times A|=m^2$, 故$|P(A\times A)|= 2^{m^2}$，即A上不同的二元关系共有$2^{m^2}$个。

# A上的二元关系（举例）

例1: 设 $A=\{a_1,a_2\}$, 则A上的二元关系共有( 16 )个:

$R_1 = \varnothing$, $R_2 = \{<a_1,a_1>\}$,

$R_3 = \{<a_1,a_2>\}$, $R_4 = \{<a_2,a_1>\}$,

$R_5 = \{<a_2,a_2>\}$,

$R_6 = \{ <a_1,a_1>, <a_1,a_2> \}$,

$R_7 = \{ <a_1,a_1>, <a_2,a_1> \}$,

$R_8 = \{ <a_1,a_1>, <a_2,a_2> \}$,

# A上的二元关系（举例）

$R_9 = \{ <a_1,a_2>, <a_2,a_1> \}$,

$R_{10} = \{ <a_1,a_2>, <a_2,a_2> \}$,

$R_{11} = \{ <a_2,a_1>, <a_2,a_2> \}$,

$R_{12} = \{ <a_1,a_1>,<a_1,a_2>,<a_2,a_1> \}$,

$R_{13} = \{ <a_1,a_1>,<a_1,a_2>, <a_2,a_2> \}$,

$R_{14} = \{ <a_1,a_1>, <a_2,a_1>,<a_2,a_2> \}$,

$R_{15} = \{ <a_2,a_1>,<a_2,a_1>,<a_2,a_2> \}$,

$R_{16} = \{<a_1,a_1>,<a_1,a_2>,<a_2,a_1>,<a_2,a_2>\}$。

# A上的二元关系（举例）

例2: 设 $B=\{b\}$,则B上的二元关系共有

2个: $R_1=\varnothing$, $R_2=\{<b,b>\}$.

例3: 设 $C=\{a,b,c\}$,则C上的二元关系共有

$2^9=512$个!

# 关系

2.关系的定义域、值域 和 域

前域/定义域(domain)：设$R \subseteq A \times B$，由所有$<x,y> \in R$ 的第一个元素构成的集合，称为R的定义域，记作 dom R，即

$$\mathrm{dom}\ R=\{x|\exists y(<x,y> \in R)\}$$

值域(range)：设 $R \subseteq A \times B$，由所有$<x,y> \in R$ 的第二个元素构成的集合，称为R的值域， 记作 ran R，即

$$\mathrm{ran}\ R=\{y|\exists x(<x,y> \in R)\}$$

域（field）：

$$\mathrm{FLD}\ R = \mathrm{dom}\ R \cup \mathrm{ran}\ R$$

# 定义域,值域,域(举例)

例:

$R_1=\{<c,d>,<e,f>\},R_2=\{<1,2>,<3,4>,<5,6>\}$.

- dom $R_1=\{c,e\}$, ran $R_1=\{d,f\}$, FLD$R_1=\{c,d,e,f\}$
- dom $R_2=\{1,3,5\}$, ran $R_2=\{2,4,6\}$,

  FLD $R_2=\{1,2,3,4,5,6\}$.

# 关系

例：A={1,2,3,4} , $R_2$为A上的关系，

$R_2$={ <1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<2,2>,<2,3>,

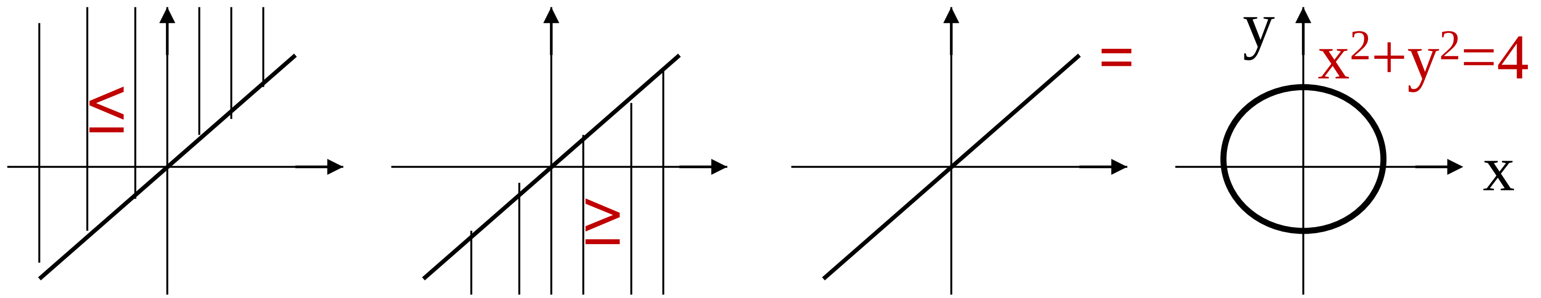
<2,4>, <3,3>, <3,4>}

dom $R_2$ ={1,2,3}

ran $R_2$ ={1,2,3,4}

# 关系

例： R是实数集合，R上的几个熟知的关系：




都是 R×R 的子集，所以都是R上的关系。

# 关系的运算

定理：若Z和S是从集合X到集合Y的两个关系，则Z和S的并、交、补、差仍是X到Y的关系。

证明见书108页。

# 关系的表示方法

## 三. 关系的表示方法

- 序偶集合的形式表达
- 关系图
- 关系矩阵

# 关系的表示方法

## 三. 关系的表示方法

1、序偶集合的形式表达

因为关系的本身是集合，所以可以用枚举法和描述法。即将关系中所有序偶一一列举出，写在大括号内，或者用谓词形式表示法。

# 关系的表示方法

2、有向图法：

　　$R \subseteq A \times B$，用两组小圆圈(称为结点)将A，B集合中的元素分别排成两列，当$<x,y> \in R$时，就从x到y引一条有向弧(边)。

　　$R \subseteq A \times A$，即R是集合A上的关系时，将A中元素分散排列，若$<x,y> \in R$，从x到y引一条有向弧(边)，若$<x,x> \in R$，则从x到x画一条有向环(自回路)。

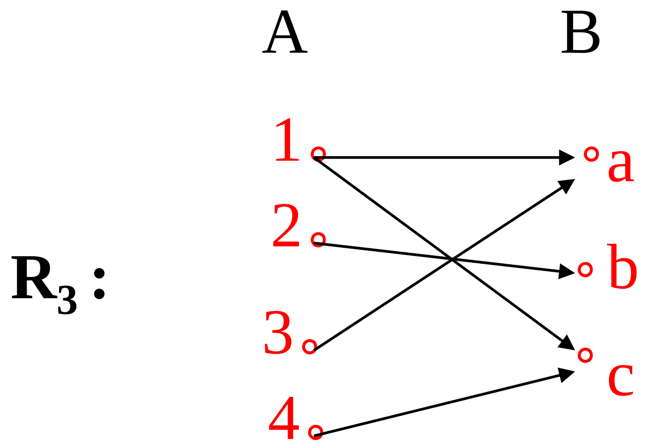
　　这样得到的图形即为R的关系图$G_R$。

# 关系的表示方法

例 设A={1,2,3,4}，B={a,b,c}， $R_3 \subseteq A\times B$，

$R_3$={ <1,a>,<1,c>,<2,b>,<3,a>,<4,c>}

则$R_3$的关系图如下：

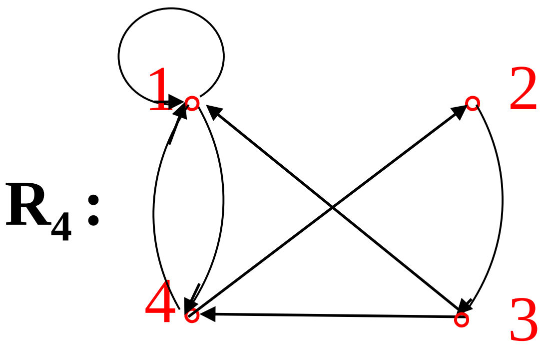


# 关系的表示方法

例 令 $A=\{1,2,3,4\}$， $R_4 \subseteq A\times A$，

$R_4=\{ <1,1>,<1,4>,<2,3>,<3,1>,<3,4>,<4,1>, <4,2>\}$

则$R_4$的关系图：



# 关系的表示方法

3.矩阵表示法：

设$A=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$，$B=\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$是个有限集，$R \subseteq A \times B$，R的m×n阶矩阵定义为 $M_R=(r_{ij})_{m\times n}$，其中

$$r_{ij}=\begin{cases} 1 & \text{若} <a_i,b_j> \in R \\ 0 & \text{若} <a_i,b_j> \notin R \end{cases} \qquad (1\le i\le m, 1\le j\le n)$$

例：$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{a,b,c\}$，$R_3 \subseteq A\times B$，$R_4 \subseteq A\times A$，

$R_3=\{ <1,a>,<1,c>,<2,b>,<3,a>,<4,c>\}$

$R_4=\{ <1,1>,<1,4>,<2,3>,<3,1>,<3,4>,<4,1>,<4,2>\}$

# 关系的表示方法

## 3.矩阵表示法：

$R_3$={ <1,a>,<1,c>,<2,b>,<3,a>,<4,c>}

$R_4$={ <1,1>,<1,4>,<2,3>,<3,1>,<3,4>,<4,1>,<4,2>}

$$M_{R_3} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{4\times 3} \end{array}$$

$$M_{R_4} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4\times 4} \end{array}$$

# 三个特殊关系

1、空关系Φ：

因为Φ⊆A×B，(或Φ⊆A×A)，所以Φ也是一个从A到B(或A上)的关系，称之为空关系。

空关系是不包含任何序偶的关系。

空关系的关系图：只有结点，无任何边；

空关系的关系矩阵：所有元素均为0。

# 三个特殊关系

2、完全关系(全域关系)：

$A \times B$(或$A \times A$)本身也是一个从A到B(或A上) 的关系，称 之为完全关系。

完全关系是含有全部序偶的关系。

完全关系的关系图：包含了所有可能的弧线;

完全关系的关系矩阵：所有元素均为1。

# 三个特殊关系

3. A上的恒等关系$I_A$：

$I_A \subseteq A \times A$，且$I_A = \{<x,x>|x \in A\}$ 称之为A上的恒等关系。

例　$A=\{1,2,3\}$，则 $I_A =\{<1,1>,<2,2>,<3,3>\}$。

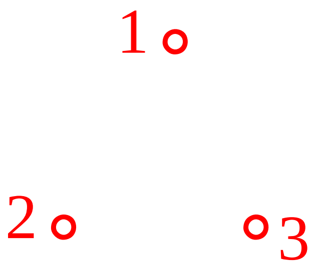
恒等关系的关系图：包含且只包含每个结点的环；

恒等关系的关系矩阵：单位矩阵。

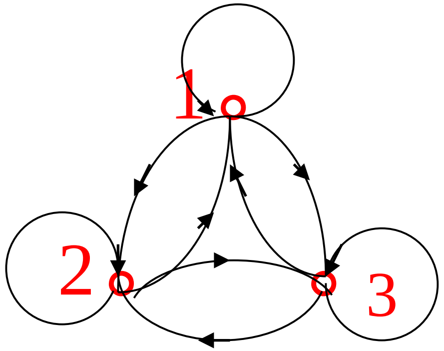
# 三个特殊关系

A={1,2,3},

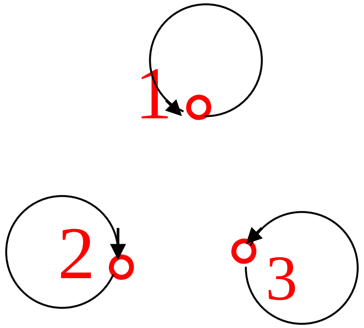
A上的 Φ、完全关系及恒等关系 $I_A$ 的关系图及关系矩阵如下：




Φ




A×A




$I_A$

$$\mathbf{M}_{\Phi}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}_{3\times3}\qquad \mathbf{M}_{A\times A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}_{3\times3}\qquad M_{IA}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}_{3\times3}$$

谢 谢