# 江 南 大 学

# 《线性代数》2022-2023学年第一学期期末考试卷(A)

班级________ 学号________ 姓名________

| 题　号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得　分 | | | | | | | | |

| 本题得分 | |
|---|---|

一、填空题(每小题4分, 共20分)

(1) 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ -1 & 2-a & a & 0 \\ 0 & -2 & 3-a & a \\ 0 & 0 & -3 & 4-a \end{vmatrix} =$ ________

(2) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$ $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$

(3) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 相似, 则 $b=$ ________

(4) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,-1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(5,3,t)^{\mathrm{T}}$, 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关, 则 $t=$ ________

(5) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+4x_2^2+ax_3^2+6x_1x_2+2x_2x_3$ 正定, 则 $a$ 的取值范围是 ________

| 本题得分 | |
|---|---|

二、选择题(每小题4分, 共20分)

(1) 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 $n$ 阶矩阵, 则必有

(A) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$.　(B) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^2$.

(C) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$.　(D) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$.　〖　〗

(2) 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的三个不同的解向量, 则下列向量中不是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解向量的是

(A) $\frac{1}{3}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3)$.　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$.　(C) $\frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)$.　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$.　〖　〗

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵, $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}$ 均不可逆, 则 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值为

(A) $0,1,2$.　(B) $0,-1,2$.　(C) $0,-1,\frac{1}{2}$.　(D) $0,1,-\frac{1}{2}$.　〖　〗

(4) 设有向量组 (I): $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$; 向量组 (II): $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\alpha}_{s+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s+t}$, 则下列命题正确的是

(A) (II) 线性相关 $\Rightarrow$ (I) 线性相关.　(B) (II) 线性无关 $\Rightarrow$ (I) 线性无关.

(C) (I) 线性无关 $\Rightarrow$ (II) 线性无关.　(D) (I) 线性无关 $\Rightarrow$ (II) 线性相关.　〖　〗

(5) $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 具有相同的特征值是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似的

(A) 充分必要条件.　(B) 充分而非必要条件.

(C) 必要而非充分条件.　(D) 既非充分又非必要条件.　〖　〗

| 本题得分 | |
|---|---|

三、计算下列各题(每小题8分, 共16分)

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 是3阶方阵, $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, 已知 $|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{2}$, 求 $|(3\boldsymbol{A})^{-1}-2\boldsymbol{A}^*|$.

(2) 设矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足关系式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}$, 其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{X}$.

更多考试真题

请扫码获取

| 本题得分 | |
|---|---|

四、(本题满分 12 分) 已知向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}4\\5\\6\\7\end{pmatrix},$$

(1) 求此向量组的秩;

(2) 求此向量组的一个最大无关组, 并将其余向量用该最大无关组线性表示.

| 本题得分 | |
|---|---|

五、(本题满分 12 分) 设有线性方程组

$$\begin{cases} x_1+\ x_2+kx_3=\ 4, \\ -x_1+kx_2+\ x_3=\ k^2, \\ x_1-\ x_2+2x_3=-4, \end{cases}$$

问 $k$ 为何值时, 该方程组有唯一解、无解、有无穷多解? 并在有无穷多解时求出其通解.

| 本题得分 | |
|---|---|

六、(本题满分 14 分)已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+5x_3^2-4x_1x_3$.

(1) 写出二次型 $f$ 的矩阵表达式;

(2) 用正交变换把二次型 $f$ 化为标准形, 写出正交变换及对应的标准形.

| 本题得分 | |
|---|---|

七、(本题满分 6 分) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\quad,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系, 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 不是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解. 证明: 向量组 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2,\quad,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关.

# 江南大学

## 《线性代数》2022-2023学年第一学期期末考试卷(A)

班级________ 学号________ 姓名________

| 题 号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得 分 | | | | | | | | |

| 本题得分 | |
|---|---|

一、填空题(每小题 4 分, 共 20 分)

(1) 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ -1 & 2-a & a & 0 \\ 0 & -2 & 3-a & a \\ 0 & 0 & -3 & 4-a \end{vmatrix} =$ ___24___

(2) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$ ___$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$___

(3) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 相似, 则 $b=$ ___2___

(4) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,-1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3=(5,3,t)^{\mathrm{T}}$, 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关, 则 $t=$ ___1___

(5) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+4x_2^2+ax_3^2+6x_1x_2+2x_2x_3$ 正定, 则 $a$ 的取值范围是 ___$a>\frac{5}{2}$___

| 本题得分 | |
|---|---|

二、选择题(每小题 4 分, 共 20 分)

(1) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $n$ 阶矩阵, 则必有

(A) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$. (B) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$.

(C) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$. (D) $(\boldsymbol{AB})^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$. 〖 D 〗

(2) 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的三个不同的解向量, 则下列向量中不是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量的是

(A) $\frac{1}{3}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3)$. (B) $\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$. (C) $\frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)$. (D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$. 〖 A 〗

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵, $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}$ 均不可逆, 则 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值为

(A) $0,1,2$. (B) $0,-1,2$. (C) $0,-1,\frac{1}{2}$. (D) $0,1,-\frac{1}{2}$. 〖 C 〗

(4) 设有向量组 (I): $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$; 向量组 (II): $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\alpha}_{s+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s+t}$, 则下列命题正确的是

(A) (II) 线性相关 $\Rightarrow$ (I) 线性相关. (B) (II) 线性无关 $\Rightarrow$ (I) 线性无关.

(C) (I) 线性无关 $\Rightarrow$ (II) 线性无关. (D) (I) 线性无关 $\Rightarrow$ (II) 线性相关. 〖 B 〗

(5) $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 具有相同的特征值是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似的

(A) 充分必要条件. (B) 充分而非必要条件.

(C) 必要而非充分条件. (D) 既非充分又非必要条件. 〖 C 〗

| 本题得分 | |
|---|---|

三、计算下列各题(每小题 8 分, 共 16 分)

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵, $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, 已知 $|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{2}$, 求 $|(3\boldsymbol{A})^{-1}-2\boldsymbol{A}^*|$.

**解** 因 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*=2\boldsymbol{A}^*$ (3′), 故

$$|(3\boldsymbol{A})^{-1}-2\boldsymbol{A}^*|=\left|\frac{1}{3}\cdot 2\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{A}^*\right|=\left|-\frac{4}{3}\boldsymbol{A}^*\right| (5')=\left(-\frac{4}{3}\right)^3|\boldsymbol{A}^*|=\left(-\frac{4}{3}\right)^3|\boldsymbol{A}|^{3-1}\ (7')$$

$$=\left(-\frac{4}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{16}{27}.\ (8')$$

(2) 设矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足关系式 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}$, 其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{X}$.

**解** 由 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}$ 得 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$, 而 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 可逆, 故 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{B}$, (3′)

由
$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\mid\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 31 \end{array}\right),\ (7')$$

得
$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -11 \\ 5 & 31 \end{pmatrix}.\ (8')$$

| 本题得分 | |
|---|---|

四、(本题满分 12 分) 已知向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}4\\5\\6\\7\end{pmatrix},$$

(1) 求此向量组的秩；

(2) 求此向量组的一个最大无关组, 并将其余向量用该最大无关组线性表示.

**解** $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-3\\0&-2&-4&-6\\0&-3&-6&-9\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ $(4')$

(1) $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=2$；$(6')$

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是此向量组的一个最大无关组 $(8')$,

又 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&2&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ $(10')$, 故 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_4=-2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2$. $(12')$

| 本题得分 | |
|---|---|

五、(本题满分 12 分) 设有线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+kx_3=4,\\-x_1+kx_2+x_3=k^2,\\x_1-x_2+2x_3=-4,\end{cases}$$

问 $k$ 为何值时, 该方程组有唯一解、无解、有无穷多解? 并在有无穷多解时求出其通解.

**解一** 记该方向组为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$. 则 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&k\\-1&k&1\\1&-1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&k\\0&1+k&1+k\\0&-2&2-k\end{vmatrix}=(1+k)(4-k)$. $(2')$

① 当 $k\neq-1$ 且 $k\neq4$ 时, $|\boldsymbol{A}|\neq0$, 方程组有唯一解. $(4')$

② 当 $k=-1$ 时, $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&4\\-1&-1&1&1\\1&-1&2&-4\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&4\\0&0&0&5\\0&-2&3&-8\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&4\\0&2&-3&8\\0&0&0&1\end{array}\right)$, $(6')$

$R(\boldsymbol{A})=2$, $R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=3$, 方程组无解. $(7')$

③ 当 $k=4$ 时, $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&4&4\\-1&4&1&16\\1&-1&2&-4\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&4&4\\0&5&5&20\\0&-2&-2&-8\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&4&4\\0&1&1&4\\0&0&0&0\end{array}\right)$ $(9')$,

$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=2<3$, 方程组有无穷多解 $(10')$,

又 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&3&0\\0&1&1&4\\0&0&0&0\end{array}\right)$ $(11')$, 故通解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$, 其中 $k$ 为任意常数. $(12')$

**解二** 记该方向组为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$. 则

$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&k&4\\-1&k&1&k^2\\1&-1&2&-4\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&k&4\\0&k+1&k+1&k^2+4\\0&2&k-2&8\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&k&4\\0&2&k-2&8\\0&0&(k+1)(4-k)&2k(k-4)\end{array}\right)$, $(4')$

① 当 $k\neq-1$ 且 $k\neq4$ 时, $R(\boldsymbol{A})=3$, 方程组有唯一解. $(6')$

② 当 $k=-1$ 时, $R(\boldsymbol{A})=2$, $R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=3$, 方程组无解. $(8')$

③ 当 $k=4$ 时, $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=2<3$, 方程组有无穷多解, $(10')$

此时 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&4&4\\0&2&2&8\\0&0&0&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&3&0\\0&1&1&4\\0&0&0&0\end{array}\right)$ $(11')$, 故通解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$, 其中 $k$ 为任意常数. $(12')$

| 本题得分 | |
|---|---|

六、(本题满分 14 分)已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+5x_3^2-4x_1x_3$.

(1) 写出二次型 $f$ 的矩阵表达式;

(2) 用正交变换把二次型 $f$ 化为标准形, 写出正交变换及对应的标准形.

**解** (1) $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}2&0&-2\\0&3&0\\-2&0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$. (3′)

(2) $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&-2\\0&3-\lambda&0\\-2&0&5-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda&-2\\-2&5-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(3-\lambda)(6-\lambda)$. (5′)

所以特征值为 $\lambda=1,3,6$. (6′)

对 $\lambda=1$, $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&2&0\\-2&0&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, 对应特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$; (8′)

对 $\lambda=3$, $\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-1&0&-2\\0&0&0\\-2&0&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, 对应特征向量为 $\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$; (10′)

对 $\lambda=6$, $\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-4&0&-2\\0&-3&0\\-2&0&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, 对应特征向量为 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$. (12′)

$\xi_1,\xi_2,\xi_3$ 两两正交, 将其单位化得 $\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\eta}_3=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$,

所以正交变换为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}2&0&1\\0&\sqrt5&0\\1&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$, (13′)

在此正交变换下, 原二次型化为标准形 $f=y_1^2+3y_2^2+6y_3^2$. (14′)

| 本题得分 | |
|---|---|

七、(本题满分 6 分) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系, 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 不是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解. 证明: 向量组 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关.

**证一** 设有一组数 $k,k_1,k_2,\cdots,k_r$, 使

$$k\boldsymbol{\beta}+k_1(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+k_r(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_r)=\boldsymbol{0}, \qquad ①$$

两边左乘 $\boldsymbol{A}$, 由题意 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_j=\boldsymbol{0}\ (j=1,2,\cdots,r)$, 故有 $(k+k_1+\cdots+k_r)\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$,

由题意 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{0}$, 故有 $k+k_1+\cdots+k_r=0$. (3′) ②

代入①式得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\boldsymbol{0}$,

由题意 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, 故 $k_1=k_2=\cdots=k_r=0$ (5′), 代入② 得 $k=0$,

所以向量组 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关. (6′)

**证二** 由题意 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关(否则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示, 从而是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解), (2′)

而 $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_r)=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&1&1&\cdots&1\\0&0&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$ (4′) $\triangleq(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)\boldsymbol{K}$,

因 $|\boldsymbol{K}|=1$, 故 $R(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_r)=R(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)=r+1$, (5′)

从而向量组 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关. (6′)