# 2023 春线性代数 I

# A 卷

一、填空题 1-10 题，每小题 6 分，共 60 分

**1.** 行列式 $\begin{vmatrix} 22 & 23 & 24 & 25 \\ 23 & 24 & 25 & 22 \\ 24 & 25 & 22 & 23 \\ 25 & 22 & 23 & 24 \end{vmatrix} =$ ________.

解：

$$\begin{vmatrix} 22 & 23 & 24 & 25 \\ 23 & 24 & 25 & 22 \\ 24 & 25 & 22 & 23 \\ 25 & 22 & 23 & 24 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 94 & 94 & 94 & 94 \\ 23 & 24 & 25 & 22 \\ 24 & 25 & 22 & 23 \\ 25 & 22 & 23 & 24 \end{vmatrix} = 94 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 23 & 24 & 25 & 22 \\ 24 & 25 & 22 & 23 \\ 25 & 22 & 23 & 24 \end{vmatrix}$$

$$= 94 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 94 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 94 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 94 \times 16 = 1504$$

**2.** 设 $A$ 为 2 阶方阵，$A^*$ 表示 $A$ 的伴随矩阵。若 $A$ 的行列式 $|A| = 2$，则行列式 $|(A^*)^*| =$ ________.

解：$AA^* = |A|E \Rightarrow |A||A^*| = |A|^2 \Rightarrow |A^*| = |A| = 2$

$$A^*(A^*)^* = |A^*|E \Rightarrow \left|A^*(A^*)^*\right| = \left||A^*|E\right| = |A^*|^2 \Rightarrow \left|A^*\right| \cdot \left|(A^*)^*\right| = |A^*|^2 \Rightarrow \left|(A^*)^*\right| = |A^*| = 2$$

**3.** 设 $A$ 是 3 阶可逆矩阵，将 $A$ 的第一行和第二行对换得到矩阵 $B$，则 $AB^{-1} =$ ________

解：$B = E_{12}A \Rightarrow AB^{-1} = E_{12}^{-1} = E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**4.** 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$ ______________

解：$(AE)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&4&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&0&-3\\0&1&0&0&1&-4\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-2&5\\0&1&0&0&1&-4\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$

$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&5\\0&1&-4\\0&0&1\end{pmatrix}$

**5.** 已知三阶矩阵 $A$ 的三个特征值分别为 1，3，-1，若 $B=A^3-4A$，则 $B$ 的行列式 $|B|=$

______

解：$1\xrightarrow{B=A^3-4A}-3,\ 3\xrightarrow{B=A^3-4A}15,\ -1\xrightarrow{B=A^3-4A}3\Rightarrow|B|=-135$

**6.** 设 $A=\begin{pmatrix}3&-4\\4&3\end{pmatrix}$， $x=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$， 则向量 $A^3x$ 的模 $\left\|A^3x\right\|=$ ______________

解：$A=\begin{pmatrix}3&-4\\4&3\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}\frac{3}{5}&-\frac{4}{5}\\\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$

$A^3=125\begin{pmatrix}\cos3\theta&-\sin3\theta\\\sin3\theta&\cos3\theta\end{pmatrix}\Rightarrow\left|A^3x\right|=125\times5=625.$

**7.** 已知 $\mathbb{R}^2$ 的两组基为 $\alpha_1=(1,1)^T,\alpha_2=(1,0)^T$ 和 $\beta_1=(1,2)^T,\beta_2=(2,3)^T$，则从 $\alpha_1,\alpha_2$

到 $\beta_1,\beta_2$ 的过渡矩阵为 ________

解：$(\beta_1,\beta_2)=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2)P=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}P \Rightarrow P=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\-1&-1\end{pmatrix}$

**8.** 若向量 $\beta=(3,10,b,4)^T$ 可由向量组 $\alpha_1=(1,4,0,2)^T$，$\alpha_2=(2,7,1,3)^T$，$\alpha_3=(0,1,-1,a)^T$ 线性表示，且表示式唯一，则此唯一表示为：$\beta=$ ________

解：

$$\begin{pmatrix}1&2&0&3\\4&7&1&10\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&1&-1&2\\0&1&-1&b\\0&-1&a&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&1&-1&2\\0&0&0&b-2\\0&0&a-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&1&-1&2\\0&0&a-1&0\\0&0&0&b-2\end{pmatrix}$$

$\beta=-\alpha_1+2\alpha_2$.

**9.** 设 $A=\begin{pmatrix}0&1&2\\-1&0&3\\-2&-3&0\end{pmatrix}$，$\alpha=\begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}$，则 $\alpha^TA\alpha=$ ________

**0**

**10.** 二次型 $f(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2+2xy+2xz$ 是否正定 ________ （填"是"或"否"）

否

二、解答题 **11-12** 小题，每小题 **12** 分，共 **24** 分

11. 设 $A=\begin{pmatrix}\lambda&1&1\\0&\lambda-1&0\\1&1&\lambda\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$. 已知线性方程组 $Ax=b$ 存在两个不同的解，（1）求 $\lambda$，$a$；（2）求方程组 $Ax=b$ 的通解。

解：因方程组两个不同的解，$|A|=0$，即$\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)^2=0$，于是$\lambda=1$

或$\lambda=-1$……………………………………4 分

当$\lambda=1$时，$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & a\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)\Rightarrow r(Ab)=2>r(A)=1$，此时方程组无解。

……………………………………2 分

当$\lambda=-1$时，

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 1 & a\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1 & a\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0 & a+1\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0 & a+1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & a+2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & a+2\end{array}\right)$$

方程组有解，故$a=-2$.

当$\lambda=-1$，$a=-2$ 时，通解为 $x=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$……………………………………4 分

**12.** 设$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$， 求可逆矩阵$P$，使得$P^{-1}AP$为对角矩阵。

解：$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3(4-\lambda)$

故特征值为$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0,\lambda_4=4$ ........................................4 分

对应特征值$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$的特征值为$p_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},p_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},p_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

........................................4 分

对应特征值$\lambda_4=4$的特征向量为$p_4=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ ........................................2 分

令$P=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$,则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}$ ........................................2 分

三、证明题 13-14 小题，每小题 8 分，共 16 分

**13.** 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是齐次线性方程$Ax=0$的基础解系，若$\beta$是非齐次线性方程组

$Ax=b$ 的特解.判断向量组 $\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\beta+\alpha_3$ 是否线性相关，并给出理由。

证明：向量组 $\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\beta+\alpha_3$ 线性无关。

令$k_1(\beta_1+\alpha_1)+k_2(\beta+\alpha_2)+k_3(\beta+\alpha_3)=0$

即 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+(k_1+k_2+k_3)\beta=0$

$\therefore\quad A\left(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+(k_1+k_2+k_3)\beta\right)=0$

$\therefore\quad (k_1+k_2+k_3)A\beta=0$， 又 $A\beta=b\neq0$,........................................4 分

$\therefore\quad k_1+k_2+k_3=0$

从而 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$

又向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是齐次线性方程 $Ax=0$ 的基础解系，从而它们线性无关，故

$k_1=k_2=k_3=0$,于是向量组 $\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\beta+\alpha_3$ 线性无关。

........................................4 分

**14.** 设三阶对称矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & x & y \\ c & y & z \end{pmatrix}$正定，证明：二阶行列式 $\begin{vmatrix} x & y \\ y & z \end{vmatrix}>0$.

证明：$\because \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & x & y \\ c & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y & b \\ y & z & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$

........................................4 分

令$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=C$，$\begin{pmatrix} x & y & b \\ y & z & c \\ b & c & a \end{pmatrix}=B$，则 $C^TAC=B$，

$\therefore \begin{pmatrix} x & y & b \\ y & z & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$正定，故二阶行列式 $\begin{vmatrix} x & y \\ y & z \end{vmatrix}>0$.

........................................4 分