《数学分析Ⅰ(2)》期末考试卷

使用专业、班级__________ 学号____________ 姓名_________________

一、判断下列命题是否正确，并说明理由 〖每题 5 分，共计 20 分〗

1. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

2. 若幂级数 $\sum a_n x^n$ 在点 $a \neq 0$ 收敛, 则它在任一 $x \in [-|a|, |a|]$ 处收敛.

3. 若 $\sum |a_n|$ 收敛, 则 $\sum a_n^2$ 收敛.

4. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域的任一内闭子区间上必一致收敛.

二、计算题 〖每个 7 分，共计 70 分〗

1. 求函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{|x|}}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在原点的偏导数，并判定函数在原点的可微性.

2. $f(x,y)=(a^2-c^2)x^2+(b^2-c^2)y^2+c^2-\left[(a-c)x^2+(b-c)y^2+c\right]^2$ 在闭圆盘 $x^2+y^2\le 1$ 上的最大值和最小值，其中 $a>b>c>0$.

3. 将累次积分

$$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{x+y} f\left(x,y,z\right)dz$$

化为按 x, z, y 次序的累次积分.

4. 计算曲线积分：

$$I=\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2},$$

其中 L 是实平面上光滑封闭曲线.

5. 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\dfrac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}}$ $(-\infty<x<+\infty)$ 的敛散性.

6. 设 $f(x,y)$ 为可微函数， $f(1,1)=1, f_x(1,1)=a, f_y(1,1)=b, \varphi(x)=f(x, f(x, f(x,x)))$，求 $\varphi'(1)$.

7. 求 $u=x-2y+2z$ 在条件 $x^2+y^2+z^2=1$ 下的极值.

8. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$ 的收敛半径，收敛区间，收敛域以及和函数.

9. 求函数 $z=1-(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2})$ 在 $M(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{b}{\sqrt{2}})$ 点沿方向 l 的方向导数，其中方向 l 是曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 在 $M(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{b}{\sqrt{2}})$ 点的内法线方向.

10. 求由曲线 $x=a(t-\sin t),, y=a(1-\cos t), (a>0), 0\le t\le 2\pi,$ 与 x 轴所围平面图形绕 y 轴旋转所得立体的体积.

三、证明论述题 〖每个 5 分，共计 10 分〗

1. 叙述并证明二元函数极限的局部有界性定理.

2. 二元函数极限的存在性与累次极限的存在性之间有何关系？试依据定理等相关结论和实例予以说明.

考试形式开卷（√）、闭卷（ ），在选项上打（√）

开课教研室__信计__ 命题教师_________ 命题时间__2022.6.6__ 使用学期__2021-2022-2__ 总张数__1__ 教研室主任审核签字 _________