必要性

设A是一个$n*n$实对称半正定矩阵，令$S \subseteq \{1,2,\dots,n\}, |S| = k$，对应子矩阵为$B = A[S]$，则$B$也是对称的

对任意$y \in \mathbb{R}^k$，构造向量$x \in \mathbb{R}^n$如下：

$$x_i = \begin{cases} y_j & \text{如果 } i \text{ 是 } S \text{ 中的第 } j \text{ 个元素} \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

$$\text{则：} x^T A x = \sum_{i,j=1}^{n} x_i a_{ij} x_j = \sum_{i \in S, j \in S} y_i a_{ij} y_j = y^T B y$$

因为A半正定，$x^T Ax \ge 0$，所以$y^T By \ge 0$。B是半正定矩阵

半正定矩阵的特征值均非负，行列式等于特征值的乘积，因此$\det(B) \ge 0$

由于S任意，所以A一切主子式≥ 0

充分性

设A是一个$n*n$实对称矩阵，且所有主子式非负

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$f(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{12} & & & \dots \\ \dots & & & \dots \\ -a_{1n} & \dots & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^n - s_1\lambda^{n-1} + s_2\lambda^{n-2} \dots + (-1)^n s_n$$

其中s_k为A所有k阶主子式之和, 由于所有主子式非负，$s_k \ge 0$

特征值$\lambda_1, \dots, \lambda_n$为$f(\lambda) = 0$的根，假设存在负特征值$\lambda_1, \dots, \lambda_m (\lambda_j < 0)$

由于矩阵的特征值之积等于矩阵的行列式，所以m为偶数

设正特征值为$\mu_1, \dots, \mu_p (\mu_j \ge 0)$

$s_k \ge 0$，所以$s_1 \ge 0$(所有1阶主子式之和≥ 0，对角元素之和≥ 0)

$$\text{所以} s_1 = \sum \lambda_i + \sum \mu_i \ge 0$$

$$s_2 = \sum_{i<j} \lambda_i \mu_j$$

取$m = 2$，设$\lambda_1 = -a$，$\lambda_2 = -b$

$$s_1 = -a - b + \mu \ge 0$$

$$\mu \ge a + b$$

$$s_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\mu + \lambda_2\mu$$

$$= \lambda_1\lambda_2 + \mu(\lambda_1 + \lambda_2)$$

$$= ab - \mu(a+b)$$

$$\le ab - (a+b)(a+b)$$

$$= -a^2 - ab - b^2 < 0$$

与$s_2 \ge 0$矛盾，假设不成立，不存在负特征值，故A半正定