
第二篇 集合论

引言

- 集合是数学中最基本的概念，又是数学各分支、自然科学及社会科学各领域的最普遍采用的**描述工具**。集合论是离散数学的重要组成部分，是现代数学中占有独特地位的一个分支。
- 集合论是现代各科数学的基础。集合论的思想已渗透到古典分析、概率、函数论以及信息论、排队论等现代数学各领域。

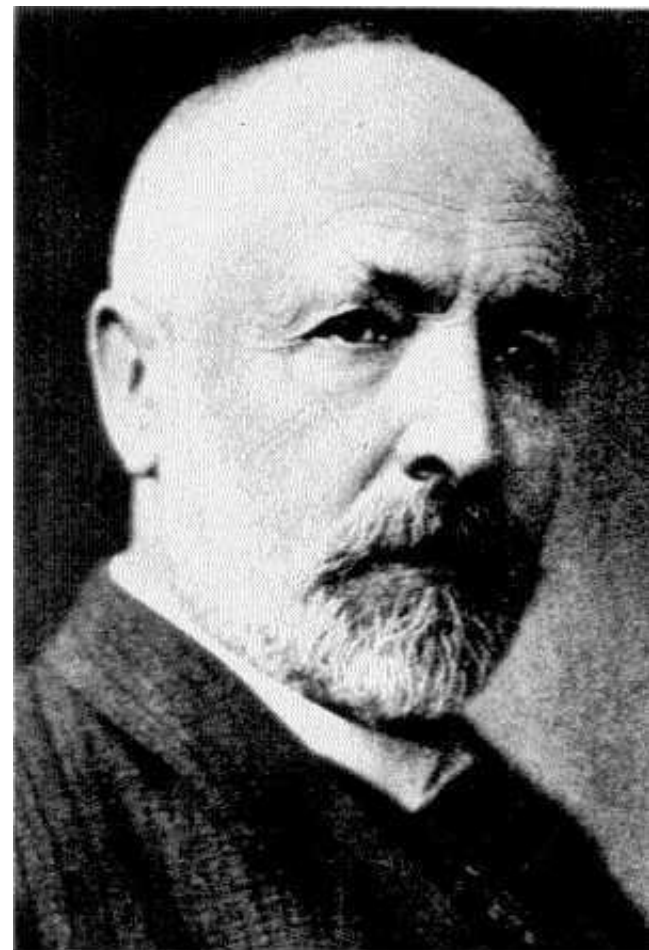
引言

发展历史

起源：十六世纪末期

奠定集合论基础：1876-1883 Cantor

十九世纪下半叶，德国数学家康托尔创立了著名的集合论，在集合论刚产生时，曾遭到许多人的猛烈攻击。但不久这一开创性成果就为广大数学家所接受了，并且获得广泛而高度的赞誉。数学家们发现，从自然数与康托尔集合论出发可建立起整个数学大厦。因而集合论成为现代数学的基石。“一切数学成果可建立在集合论基础上”这一发现使数学家们为之陶醉。



发展历史

- 1903年，一个震惊数学界的消息传出：集合论是有漏洞的。这就是英国数学家罗素提出的著名的罗素悖论。
- 罗素的这条悖论使集合论产生了危机。它非常浅显易懂，而且所涉及的只是集合论中最基本的东西。
- 罗素悖论一提出就在当时的数学界与逻辑学界内引起了极大震动。德国的著名逻辑学家弗雷格在他的关于集合的基础理论完稿付印时，收到了罗素关于这一悖论的信。他立刻发现，自己忙了很久得出的一系列结果却被这条悖论搅得一团糟。他只能在自己著作的末尾写道：“一个科学家所碰到的最倒霉的事，莫过于是在他的工作即将完成时却发现所干的工作的基础崩溃了。”

罗素悖论

1901 年罗素提出以下悖论：设论述域是所有集合的集合，并定义集合

$$S = \{A \mid A \notin A\}。$$

这样， S 是不以自身为元素的全体集合的集合，那么“ S ”是不是它自己的元素呢？

假设 S 不是自己的元素，那么 S 满足谓词 $A \notin A$ ，而该谓词定义了集合 S ，所以 $S \in S$ 。另一方面，如果 $S \in S$ ，那么 S 必须满足定义 S 的谓词，所以 $S \notin S$ 。

这样导致了一个类似于谎言悖论的矛盾：既非 $S \in S$ ，也非 $S \notin S$ 。

罗素悖论起因于集合可以是自己的元素的概念。康脱以后创立的许多公理化集合论都直接或间接地限制集合成为它自己的元素，因而避免了罗素悖论。

罗素悖论

- 罗素悖论 (Russell 's paradox) , 当时的提出, 造成了第三次数学危机。

罗素悖论的通俗版本

- 一位理发师说：“我只帮所有不自己刮脸的人刮脸。”
- 那么理发师是否给自己刮脸呢？如果他给的话，但按照他的话，他就不该给自己刮脸（因为他“只”帮不自己刮脸的人刮脸）；如果他不给的话，但按照他的话，他就该给自己刮脸（因为是“所有”不自己刮脸的人，包含了理发师本人），于是矛盾出现了。

鳄鱼困境

- 一个鳄鱼偷了一个父亲的儿子，它保证如果这个父亲能猜出它要做什么，它就会将儿子还给父亲。那么如果这个父亲猜“鳄鱼不会将儿子还给他”，那会怎样？
- 回答：这是一个无解得问题。如果鳄鱼不还儿子，那么父亲就猜对了，鳄鱼就违背了诺言。如果鳄鱼将儿子还给他，那么父亲就猜错了，鳄鱼又违背了诺言。



全能悖论

- 上帝能造出一个重到他自己也举不起的东西吗？如果他能，那么他不能举起这个东西，就证明他力量方面不是全能的。如果他不能，那么不能创造出这样一个东西，就证明他在创造方面不是全能的。
- 回答：最普遍的回答是上帝是全能的，所以“不能举起”是毫无意义的条件。其他的回答指出这个问题本身就是矛盾的，就像“正方形的圆”一样。



埃庇米尼得斯悖论

- 埃庇米尼得斯在一首诗中写道：“克里岛的人，人人都说谎，邪恶的野兽，懒惰的网！”然而埃庇米尼得斯自己却是个克里岛人。如果埃庇米尼得斯是一个克里岛人，并且是一个说谎者的话，那么他的诗中所说的“克里岛的人，人人都说谎”就是一个谎话。这就意味着所有的克里岛人都是诚实的人，那么埃庇米尼得斯所言就是实话。那么这个悖论又回到了开始。
- 回答：如果埃庇米尼得斯知道至少一个克里岛人（除了他以外）不说谎，那么他的诗就是一个谎言（因为他坚称所有克里岛人说谎），即使这首诗的作者是一个说谎者的事实也是真的。

悖论的解决方案

- 罗素悖论提出后，数学家们纷纷提出自己的解决方案。人们希望能够通过对康托尔的集合论进行改造，通过对集合定义加以限制来排除悖论，这就需要建立新的原则。“这些原则必须足够狭窄，以保证排除一切矛盾；另一方面又必须充分广阔，使康托尔集合论中一切有价值的内容得以保存下来。”

ZFC公理系统

- 1904 ~ 1908年，策梅罗(Zermelo)列出了第一个集合论的公理系统，他的公理，使数学哲学中产生的一些矛盾基本上得到了统一，在此基础上以后就逐步形成了公理化集合论和抽象集合论，使该学科成为在数学中发展最为迅速的一个分支。
- ◆ 集合论的现代公理化开始于1908年策梅罗所发表的一组公理，经过弗兰克尔的加工，这个系统称为策梅罗-弗兰克尔集合论（ZF），其中包括1904年策梅罗引入的选择公理。
- ◆ 另外一种系统是冯·诺伊曼-伯奈斯-哥德尔集合论。公理集合论中一个有名的猜想是连续统假设（CH）。哥德尔证明了连续统假设与策梅罗-弗兰克尔集合论的相容性，科恩证明了连续统假设与策梅罗-弗兰克尔集合论的独立性。
- ◆ 现在把策梅罗-弗兰克尔集合论与选择公理一起称为ZFC系统。

第三章 集合与关系

3-1 集合的概念和表示法

集合的概念

- **定义(集合set)**: 把具有共同性质的一些对象汇集成一个整体, 就构成一个集合, 这些对象称为**元素**(element)或**成员**(member)
- 用大写英文字母A,B,C,...表示集合
- 用小写英文字母a,b,c,...表示元素
- $a \in A$: 表示a是A的元素, 读作 “a属于A”
- $a \notin A$: 表示a不是A的元素, 读作 “a不属于A”

集合的概念

- 集合不能精确定义。
- 集合可以描述为:一个集合把世间万物分成两类, 一些对象属于该集合, 是组成这个集合的成员, 另一些对象不属于该集合。可以说, 由于一个集合的存在, 世上的对象可分辨地分成两类, 世上任一对象或属于该集合或不属于该集合, 二者必居其一也只居其一。

集合的概念： 三点注意

1、 集合并不决定于它的元素展示方法。集合的元素被重复或重新排列，集合并不改变，即 $\{a, a, e, i, o, u\} = \{a, u, e, o, i\}$ 。但有时对重复出现的元素都认为是集合的元素，这种集合称为多重集。

即 $\{a, a, e, i, o, u, u\} \neq \{a, e, i, o, u\}$ 。

2、 集合的元素可以是具体事物，可以是抽象概念，也可以是集体，不是集合的元素称为本元。如，一本书，一支笔，集合 $\{1,2,3\}$ 可以组成集合 $B = \{\text{一本书}, \text{一支笔}, \{1,2,3\}\}$ 。特别地，以集合为元素的集合称为集合族或集合类如 $A = \{\{1,2,3\}, \{8,9,6\}\}$ 。

3、 集合中元素之间可以有某种关联，也可以彼此毫无关系。

3-1.1 集合的概念

- n 元集(n -set) : 有 n 个元素的集合称为 n 元集。
- $|A|$: 表示集合 A 中的元素个数, A 是 n 元集 $\Leftrightarrow |A|=n$
- 0元集: 记作 \emptyset
- 1元集(或单元集),如 $\{a\}$, $\{b\}$, $\{\emptyset\}$...

3-1.1 集合的概念

● 有限集合与无限集合

这里对有限集合与无限集合只给出朴素的定义，以后再给出严格的形式定义。

➤ 有限集合：元素个数是有限个的集合。

如果A是有限集合，用 $|A|$ 表示A中元素个数。

例如， $A=\{1,2,3\}$ ，则 $|A|=3$ 。

➤ 无限集合：元素个数是无限个的集合。

对无限集合 ‘大小’ 的讨论，以后进行。

3-1.2 集合的表示方法

- 通常使用“列举法”和“叙述法”两种方法来给出一个集合。

(1) 列举法(roster): 列出集合中的全体元素，元素之间用逗号分开，然后用花括号括起来。

例如：

$$A=\{a,b,c,d,\dots,x,y,z\}$$

$$B=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

➤ **集合中的元素不规定顺序**

$$C=\{2,1\}=\{1,2\}$$

➤ **集合中的元素各不相同**

$$C=\{2,1,1,2\}=\{2,1\}$$

3-1.2 集合的表示方法

- 通常使用“列举法”和“叙述法”两种方法来给出一个集合。

(2) 叙述法(defining predicate): 用谓词 $P(x)$ 表示“ x 具有性质 P ”，用 $A=\{x|P(x)\}$ 表示元素具有性质 P 的集合 A ，如果 $P(b)$ 为真，那么 $b \in A$ ，否则 $b \notin A$ 。

3-1.2 集合的表示方法

- 通常使用“列举法”和“叙述法”两种方法来给出一个集合。

(2) 叙述法(defining predicate): 用谓词 $P(x)$ 表示“ x 具有性质 P ”，用 $A=\{x|P(x)\}$ 表示元素具有性质 P 的集合 A ，如果 $P(b)$ 为真，那么 $b \in A$ ，否则 $b \notin A$ 。

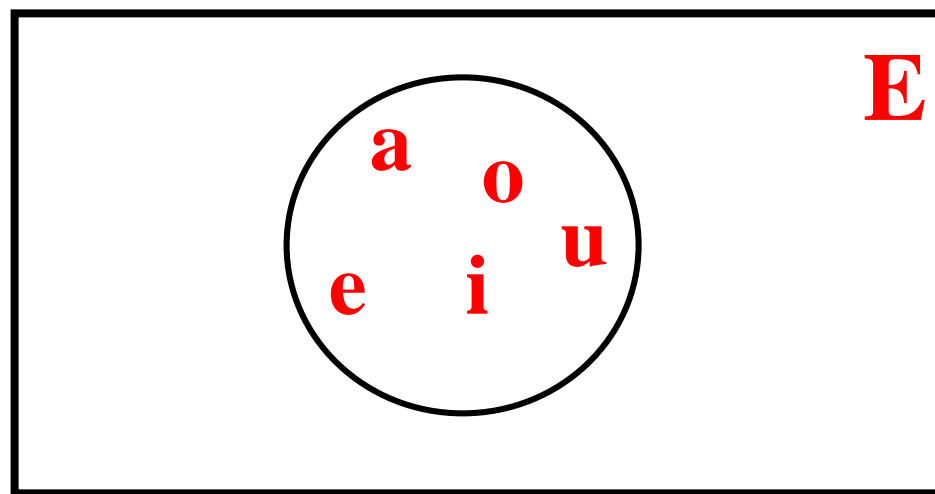
例如： $P_1(x)$: x 是英文字母

$$\begin{aligned} A &= \{x|P_1(x)\} = \{x| x \text{是英文字母}\} \\ &= \{a,b,c,d,\dots,x,y,z\} \end{aligned}$$

3-1.2 集合的表示方法

- 文氏图(Venn Diagram)

- 用一个大的矩形表示全集，在矩形内画一些圆或其它的几何图形，来表示集合，有时也用一些点来表示集合中的特定元素。
- 例如：集合 $V=\{a,e,i,o,u\}$ ，用文氏图表示如下：



3-1.2 集合的表示方法

- 表示法可以互相转化。

例如： $E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$

$= \{x \mid x > 0 \text{ 且 } x \text{ 是偶数}\}$

$= \{x \mid x = 2(k+1), \text{ } k \text{ 为非负整数}\}$

$= \{2(k+1) \mid k \text{ 为非负整数}\}$

3-1.2 集合的表示方法

- 表示法可以互相转化。
- 两个集合相等的外延性原理：两个集合A、B是相等的，当且仅当它们有相同的成员，记作 $A=B$ ；否则记作 $A \neq B$ 。
- 集合的元素还可以是一个集合。

例如： $S = \{a, \{1, 2\}, p, \{q\}\}$

3-1.2 集合的表示方法

说明：

(1)集合中的元素间次序是无关紧要的，但是必须是可以区分的，即是不同的。例如 $A=\{a,b,c,a\}$ ， $B=\{c,b,a\}$ ，则A与B是一样的。

(2)对集合中的元素无任何限制，例如令 $A=\{\text{人}, \text{石头}, 1, B\}$ ， $B=\{\Phi, \{\Phi\}\}$

3-1.2 集合的表示方法

(3)常用的几个集合符号的约定:

自然数集合 $N = \{1, 2, 3, \dots\}$

整数集合 I , 实数集合 R , 有理数集合 Q

(4)集合中的元素也可以是集合, 下面的集合的含义不同:

如 a : 张书记

$\{a\}$: 党支部(只有一个书记)

$\{\{a\}\}$: 分党委(只有一个支部)

$\{\{\{a\}\}\}$: 党委 (只有一个分党委)

$\{\{\{\{a\}\}\}\}$: 市党委(只有一个党委)

3-1.3 数的集合

- N: 自然数(natural numbers)集合

$$N=\{0,1,2,3,\dots\}$$

- Z: 整数(integers)集合

$$Z=\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}=\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

- Q: 有理数(rational numbers)集合

- R: 实数(real numbers)集合

集合间的关系

集合间的关系

- 包含 \subseteq
- 相等 $=$
- 真包含 \subset

(1) 包含关系 子集

- **定义子集(subset)**: 设A、B是任意两个集合, 如果A的每一个元素是B的成员, 则称A为B的子集, 或说A包含于B, 或说B包含A, 记作 $A \subseteq B$, 或 $B \supseteq A$ 。
- $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$
- 若A不是B的子集, 则记作 $A \not\subseteq B$
- $A \not\subseteq B \Leftrightarrow (\exists x)(x \in A \wedge x \notin B)$

(1) 包含关系 子集

证明 $A \not\subseteq B \Leftrightarrow (\exists x)(x \in A \wedge x \notin B)$ **成立**

[证明]：根据定义 $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$

则 $A \not\subseteq B \Leftrightarrow \neg (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$

$$\Leftrightarrow (\exists x) \neg (\neg (x \in A) \vee (x \in B))$$

$$\Leftrightarrow (\exists x) ((x \in A) \wedge \neg (x \in B))$$

$$\Leftrightarrow (\exists x) (x \in A \wedge x \notin B)$$

证毕。

(1) 包含关系 子集

- 包含(\subseteq)的性质

1、 $A \subseteq A$ (自反性)

[证明] $A \subseteq A \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in A) \Leftrightarrow T$

2、若 $A \subseteq B$,且 $A \neq B$,则 $B \not\subseteq A$ (反对称性)

3、若 $A \subseteq B$,且 $B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$ (传递性)

(1) 包含关系 子集

● 包含(\subseteq)的性质

1、 $A \subseteq A$ (自反性)

[证明] $A \subseteq A \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in A) \Leftrightarrow T$

2、若 $A \subseteq B$,且 $A \neq B$,则 $B \not\subseteq A$ (反对称性)

3、若 $A \subseteq B$,且 $B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$ (传递性)

[证明] $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$

$\forall x, x \in A$

$\Rightarrow x \in B \quad (A \subseteq B)$

$\Rightarrow x \in C \quad (B \subseteq C)$

$\therefore (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in C)$, 即 $A \subseteq C$ 证毕

(1) 包含关系 子集

- \in 与 \subseteq 的联系与区别

- \in 表示集合的**元素**（可以为集合）与**集合**本身的从属关系，
- \subseteq 表示两个**集合之间**的包含关系。

(2) 相等关系

1. 定义：A、B是集合，如果它们的元素完全相同，则称A与B相等。
记作 $A=B$ 。 定理： $A=B$ ，当且仅当 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$ 。

证明：充分性，已知 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$ ，假设
 $A\neq B$ ，则至少有一个元素a,使得 $a\in A$ 而 $a\notin B$ ；
或者 $a\in B$ 而 $a\notin A$ 。如果 $a\in A$ 而 $a\notin B$ ，则与
 $A\subseteq B$ 矛盾。如果 $a\in B$ 而 $a\notin A$ ，则与 $B\subseteq A$ 矛盾。
所以 $A=B$ 。

必要性显然成立，因为如果 $A=B$ ，则必有
 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$ 。

(2) 相等关系

- 定理3-2.1 集合A和集合B相等的充分必要条件是这两个集合互为子集。

$$A=B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

$$A=B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

$$[\text{证明}] A=B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A \quad (= \text{定义})$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (\forall x)(x \in B \rightarrow x \in A) \quad (\subseteq \text{定义})$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)((x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A)) \quad (\text{量词分配})$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B) \quad (\Leftrightarrow \text{等价式})$$

证毕。

(2) 相等关系 子集

- 定理3-2.1 集合A和集合B相等的充分必要条件是这两个集合互为子集。

$$A=B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

$$A=B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

非常重要

Tip: 今后证明两个集合相等，主要利用这个互为子集的判定条件。

(2) 相等关系 子集

性质:

- (1)有自反性, 对任何集合 A , 有 $A=A$ 。
 - (2)有传递性, 对任何集合 A 、 B 、 C , 如果有 $A=B$ 且 $B=C$, 则 $A=C$ 。
 - (3)有对称性, 对任何集合 A 、 B , 如果有 $A=B$, 则 $B=A$ 。
-

(3) 真包含关系 真子集

- **[定义]真子集(proper subset):** 如果集合A的每一个元素都属于B, 但集合B至少有一个元素不属于A, 则称A为B的真子集, 记作 $A \subset B$ 。
- $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$
- $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (\exists x)(x \in B \wedge x \notin A)$

(3) 真包含关系 真子集

谓词定义: $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$

$$\Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \neg \forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$\Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B) \wedge$$

$$(\neg \forall x (x \in A \rightarrow x \in B) \vee \neg \forall x (x \in B \rightarrow x \in A))$$

$$\Leftrightarrow (\forall x (x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \neg \forall x (x \in A \rightarrow x \in B))$$

$$\vee (\forall x (x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \neg \forall x (x \in B \rightarrow x \in A))$$

$$\Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \exists x (x \in B \wedge x \notin A)$$

(3) 真包含关系 真子集

● $A \subsetneq B$ 的含义

- $A \subsetneq B \Leftrightarrow \neg(A \subseteq B \wedge A \neq B)$ (⊆定义)
- $\Leftrightarrow \neg(A \subseteq B) \vee (A = B)$ (德摩根律)
- $\Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge x \notin B) \vee (A = B)$ (⊊定义)
- $\Leftrightarrow A \not\subseteq B \vee (A = B)$

- 含义：A不是B的子集或者A和B相等。

(3) 真包含关系 真子集

● 真包含(\subset)的性质

1、 $A \not\subset A$ (反自反性)

[证明] $A \subset A \Leftrightarrow A \subseteq A \wedge A \neq A \Leftrightarrow T \wedge F \Leftrightarrow F$ 证毕。

2. 若 $A \subset B$, 则 $B \not\subset A$ (反对称性)

[证明] (反证) 设 $B \subset A$, 则

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B \Rightarrow A \subseteq B \text{ (化简)}$$

$$B \subset A \Leftrightarrow B \subseteq A \wedge B \neq A \Rightarrow B \subseteq A$$

$$\text{所以 } A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow A = B \text{ (=定义)}$$

$$\text{但是 } A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B \Rightarrow A \neq B \text{ (化简)}$$

矛盾!

(3) 真包含关系 真子集

● 真包含(\subset)的性质

3、若 $A \subset B$, 且 $B \subset C$, 则 $A \subset C$ (**传递性**)

[证明] $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B \Rightarrow A \subseteq B$ (化简),

同理 $B \subset C \Rightarrow B \subseteq C$,

所以 $A \subseteq C$.

假设 $A = C$,

则 $B \subseteq C \Leftrightarrow B \subseteq A$,

又 $A \subseteq B$, 故 $A = B$

此与 $A \subset B$ 矛盾, 所以 $A \neq C$.

所以, $A \subset C$ 证毕。

练习题

练习题： 设 $A=\{a,\{a\},\{a,b\},\{\{a,b\},c\}\}$ 判断下面命题的真值。

(1) $\{a\} \in A$

(2) $\neg(\{a\} \subseteq A)$

(3) $c \in A$

(4) $\{a\} \subseteq \{\{a,b\},c\}$

(5) $\{\{a\}\} \subseteq A$

(6) $\{a,b\} \in \{\{a,b\},c\}$

(7) $\{\{a,b\}\} \subseteq A$

(8) $\{a,b\} \subseteq \{\{a,b\},c\}$

(9) $\{c\} \subseteq \{\{a,b\},c\}$

(10) $(\{c\} \subseteq A) \rightarrow (a \in \Phi)$

特殊集合

全集

全集 E

定义：包含所讨论的所有集合的集合，称之为全集，记作 E 。
实际上，是论域。

由于讨论的问题不同，
全集也不同。所以全集不唯一。
若讨论数，可以把实数集看成全集。
若讨论人，可以把人类看成全集。



全集文氏图

全集

由于论域内任何客体 x 都属于 E ,

所以 $x \in E$ 为永真式。

用永真式定义全集 E 。

$$E = \{x \mid P(x) \vee \neg P(x)\}$$

性质：对于任何集合 A , 都有 $A \subseteq E$ 。

空集

空集 \emptyset

定义：没有元素的集合，称之为空集，记作 \emptyset 。

因为在论域内，客体 $x \in \emptyset$ 是一个矛盾式，所以要用一个矛盾式去定义 \emptyset 。

$$\emptyset = \{x \mid P(x) \wedge \neg P(x)\}$$

空集

性质：

1. 对于任何集合A，都有 $\emptyset \subseteq A$ 。

因为 $\forall x(x \in \emptyset \rightarrow x \in A)$ 为永真式，所以 $\emptyset \subseteq A$ 。

2. 空集是唯一的。

证明：假设有两个空集 \emptyset_1 、 \emptyset_2 ，则

因为是 \emptyset_1 空集，则由性质1得 $\emptyset_1 \subseteq \emptyset_2$ 。

因为是 \emptyset_2 空集，则由性质1得 $\emptyset_2 \subseteq \emptyset_1$ 。

所以 $\emptyset_1 = \emptyset_2$ 。

幂集

集合的幂集

定义：A 是集合，由 A 的所有子集构成的集合，称之为 A 的幂集。记作 $\mathcal{P}(A)$ 或 2^A 。

$$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$$

例如：

$$A = \Phi \quad \mathcal{P}(A) = \{\Phi\}$$

$$A = \{a\}, \quad \mathcal{P}(A) = \{\Phi, \{a\}\}$$

$$A = \{a, b\}, \quad \mathcal{P}(A) = \{\Phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

$$A = \{a, b, c\}$$

$$\mathcal{P}(A) = \{\Phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

幂集性质

➤ 给定有限集合A，如果 $|A|=n$ ，则 $|\mathcal{P}(A)|=2^n$ 。

证明：因为A有n个元素，故 $\mathcal{P}(A)$ 中元素个数为

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n$$

而

$$(x+y)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1}y + C_n^2 x^{n-2}y^2 + \dots + C_n^n y^n$$

令 $x=y=1$ 得

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n$$

$$\text{所以 } |\mathcal{P}(A)| = 2^n \quad |2^A| = 2^{|A|} = 2^n$$

练习

练习 P86 (7) 设 $A = \{\Phi\}$,

$$\mathcal{P}(A) = \{\Phi, \{\Phi\}\}$$

若不熟练, 可将 $\{\Phi, \{\Phi\}\}$ 中的元素分别看成

$$\Phi = a, \{\Phi\} = b, \text{ 于是 } \{\Phi, \{\Phi\}\} = \{a, b\}$$

$$B = \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) = \mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\Phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

然后再将 a, b 代回即可

$$B = \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) = \mathcal{P}(\{\Phi, \{\Phi\}\}) = \{\Phi, \{\Phi\}, \{\{\Phi\}\}, \{\Phi, \{\Phi\}\}\}$$

判断下列命题真值:

a) $\Phi \in B \quad \Phi \subseteq B$

b) $\{\Phi\} \in B \quad \{\Phi\} \subseteq B$

c) $\{\{\Phi\}\} \in B \quad \{\{\Phi\}\} \subseteq B$

a)、b)、c) 中命题均为真。

3-2 集合的运算

集合的运算

交运算 \cap

并运算 \cup

差运算 $-$

补运算 \sim

对称差运算 \oplus

交运算

定义：令 A 、 B 是集合，由既属于 A ，也属于 B 的元素构成的集合，称之为 A 与 B 的交集，记作 $A \cap B$ 。

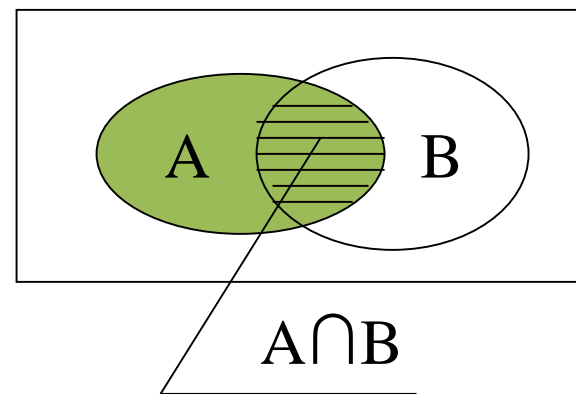
例如： $A=\{1,2,3\}$ ， $B=\{2,3,4\}$ ，则 $A \cap B=\{2,3\}$

谓词定义：

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$

如果 $A \cap B = \Phi$ ，则称 A 与 B 不相交。



交运算

例1: 设 $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid n-1 \leq x \leq n\}, n=1,2,\dots,10$, 则

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \emptyset$$

例2: 设 $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1/n\}, n=1,2,\dots$, 则

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots = \{0\}$$

交运算

性质：

- (1) 幂等律 对任何集合 A ，有 $A \cap A = A$ 。
- (2) 交换律 对任何集合 A 、 B ，有 $A \cap B = B \cap A$ 。
- (3) 结合律 对任何集合 A 、 B 、 C ，有 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ 。
- (4) 同一律 对任何集合 A ，有 $A \cap E = A$ 。
- (5) 零律 对任何集合 A ，有 $A \cap \Phi = \Phi$ 。

交运算

定理: $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$ 。

证明: $A \cap B = A \Leftrightarrow \forall x (x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A)$

$$\Leftrightarrow \forall x ((x \in A \cap B \rightarrow x \in A) \wedge (x \in A \rightarrow x \in A \cap B))$$

$$\Leftrightarrow \forall x ((\neg x \in A \cap B \vee x \in A) \wedge (\neg x \in A \vee x \in A \cap B))$$

$$\Leftrightarrow \forall x ((\neg(x \in A \wedge x \in B) \vee x \in A) \wedge (\neg x \in A \vee (x \in A \wedge x \in B)))$$

$$\Leftrightarrow \forall x (((x \notin A \vee x \notin B) \vee x \in A) \wedge (x \notin A \vee (x \in A \wedge x \in B)))$$

$$\Leftrightarrow \forall x (T \wedge (T \wedge (x \notin A \vee x \in B)))$$

$$\Leftrightarrow \forall x (x \notin A \vee x \in B)$$

$$\Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$\Leftrightarrow A \subseteq B \quad \text{证毕。}$$

并运算

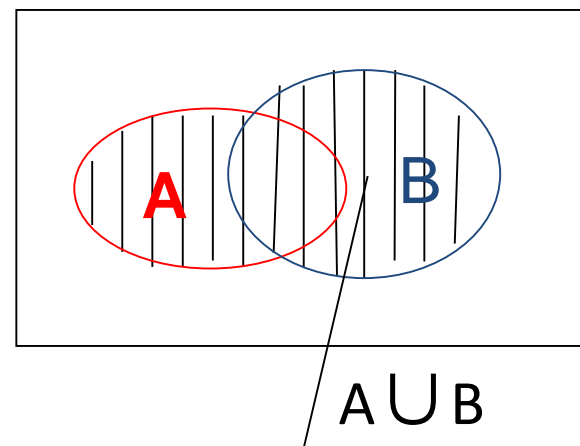
定义：**A**、**B**是集合，由或属于**A**，或属于**B**的元素构成的集合，称之为**A**与**B**的并集，记作 **$A \cup B$** 。

例如： $A=\{1,2,3\}$ ， $B=\{2,3,4\}$ ， $A \cup B=\{1,2,3,4\}$

谓词定义：

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$



并运算

例1: 设 $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid n-1 \leq x \leq n\}, n=1,2,\dots,10$, 则

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = [0, 10]$$

例2: 设 $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1/n\}, n=1,2,\dots$, 则

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots = [0, 1]$$

并运算

性质：

- (1)幂等律 对任何集合 A ，有 $A \cup A = A$ 。
- (2)交换律 对任何集合 A 、 B ，有 $A \cup B = B \cup A$ 。
- (3)结合律 对任何集合 A 、 B 、 C ，有 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ 。
- (4)同一律 对任何集合 A ，有 $A \cup \Phi = A$ 。
- (5)零律 对任何集合 A ，有 $A \cup E = E$ 。

并运算

(6)分配律 对任何集合 A 、 B 、 C ，有

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)。$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)。$$

(7)吸收律 对任何集合 A 、 B ，有

$$A \cup (A \cap B) = A \quad A \cap (A \cup B) = A。$$

证明： $A \cup (A \cap B)$

$$= (A \cap E) \cup (A \cap B) \quad (\text{同一})$$

$$= A \cap (E \cup B) \quad (\text{分配})$$

$$= A \cap E = A \quad (\text{零律}) (\text{同一})$$

差运算

差运算 - (相对补集)

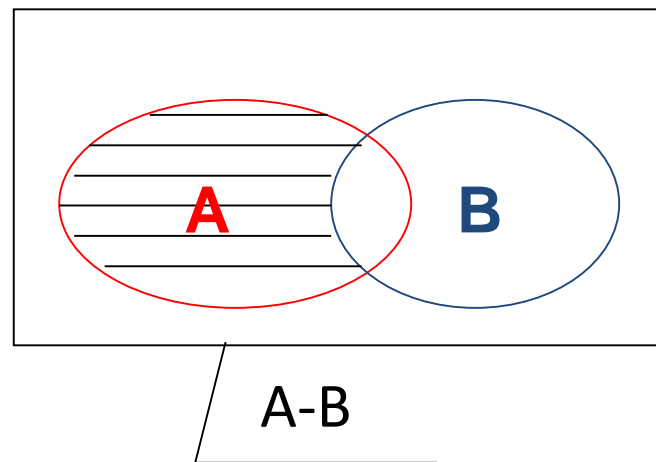
定义：**A**、**B**是集合，由属于 **A**，而不属于 **B** 的元素构成的集合，称之为 **A** 与 **B** 的差集，或**B** 对 **A** 的相对补集，记作 **A-B**。

例如： $A=\{1,2,3\}$ ， $B=\{2,3,4\}$ 则 $A-B=\{1\}$

谓词定义：

$$A-B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$x \in A-B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$$



差运算

性质：设 A 、 B 、 C 是任意集合，则

(1) $A - \Phi = A$

(2) $\Phi - A = \Phi$

(3) $A - A = \Phi$

(4) $A - B \subseteq A$

(5) $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$ （没有结合律）

差运算

(6) \cap 对-满足分配率

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

证明：对任意 x ，

$$x \in (A \cap B) - (A \cap C)$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \wedge x \notin (A \cap C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge (x \notin A \vee x \notin C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \notin C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B - C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \cap (B - C)$$

所以 $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$ 证毕

差运算

(6) \cap 对-满足分配率

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

(7) 但 \cup 对 - 不满足分配率

反例: $A \cup (A - B) = A$ 而 $(A \cup A) - (A \cup B) = \Phi$

所以并对差不满足分配律。

自然联想到-对 \cap 及 \cup 是否满足分配率? 有如下公式:

$$(8) A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

$$(9) A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

注意: 这不是分配律

差运算

证明性质5: $(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$

证明: 任取 $x \in (A-C)-(B-C)$

$$x \in (A-C) \wedge x \notin (B-C)$$

$$(x \in A \wedge x \notin C) \wedge (x \notin B \vee x \in C)$$

$$(x \in A \wedge x \notin C) \wedge (x \notin B \vee x \in C)$$

$$(x \in A \wedge x \notin C \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C \wedge x \in C)$$

$$x \in A \wedge x \notin C \wedge x \notin B$$

$$x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C$$

$$(x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \notin C$$

$$x \in A-B \wedge x \notin C \quad x \in (A-B)-C$$

所以 $(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$

差运算

证明性质9 $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

证明： 任取 $x \in A - (B \cup C)$

$$x \in A \wedge x \notin (B \cup C)$$

$$x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C)$$

$$x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C)$$

$$(x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C)$$

$$x \in A - B \wedge x \in A - C$$

$$x \in (A - B) \cap (A - C)$$

所以 $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

差运算

定理: $A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \Phi$

证明:

$$\begin{aligned} A - B = \Phi &\Leftrightarrow \forall x (x \in A - B \leftrightarrow x \in \Phi) \\ &\Leftrightarrow \forall x (x \in A - B \leftrightarrow F) \\ &\Leftrightarrow \forall x (\neg (x \in A - B)) \quad (P \leftrightarrow F \Leftrightarrow \neg P) \\ &\Leftrightarrow \forall x (\neg (x \in A \wedge x \notin B)) \\ &\Leftrightarrow \forall x (x \notin A \vee x \in B) \\ &\Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B) \\ &\Leftrightarrow A \subseteq B \end{aligned}$$

证毕。

绝对补集

绝对补集 \sim

定义：A 是集合，由不属于 A 的元素构成的集合，称之为 A 的绝对补集，记作 $\sim A$ 。实际上 $\sim A = E - A$ 。

例如：E={1,2,3,4}，A={2,3}，则 $\sim A = \{1,4\}$

谓词定义： $\sim A = E - A = \{x \mid x \in E \wedge x \notin A\} = \{x \mid x \notin A\}$

$$x \in \sim A \Leftrightarrow x \notin A$$

绝对补集

性质：设A、B、C是任意集合，则

(1) $\sim E = \Phi$

(2) $\sim \Phi = E$

(3) $\sim(\sim A) = A$

(4) $A \cap \sim A = \Phi$

(5) $A \cup \sim A = E$

(6) $A - B = A \cap \sim B$

(7) $\sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B$

(8) $\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B$

证明(7)：对任意元素x，

$$x \in \sim(A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow x \notin A \cap B$$

$$\Leftrightarrow \neg(x \in A \wedge x \in B)$$

$$\Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B$$

$$\Leftrightarrow x \in \sim A \vee x \in \sim B$$

$$\Leftrightarrow x \in \sim A \cup \sim B$$

所以 $\sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B$

证毕。

绝对补集

$$(9) \quad A \subseteq B \Leftrightarrow \sim B \subseteq \sim A$$

$$(10) \quad \sim A = B \text{ 当且仅当 } A \cup B = E \text{ 且 } A \cap B = \Phi$$

绝对补集

证明(9)

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$\Leftrightarrow \forall x (x \notin B \rightarrow x \notin A) \Leftrightarrow \forall x (x \in \sim B \rightarrow x \in \sim A)$$

$$\Leftrightarrow \sim B \subseteq \sim A$$

绝对补集

证明(10): $A \cup B = E \wedge A \cap B = \Phi$

$$\Leftrightarrow \forall x (x \in A \cup B \leftrightarrow x \in E) \wedge (P \leftrightarrow T = P)$$

$$\forall x (x \in A \cap B \leftrightarrow x \in \Phi) (P \leftrightarrow F = \neg P)$$

$$\Leftrightarrow \forall x (x \in A \cup B \leftrightarrow T) \wedge \forall x (x \in A \cap B \leftrightarrow F)$$

$$\Leftrightarrow \forall x (x \in A \cup B \wedge \neg(x \in A \cap B))$$

$$\Leftrightarrow \forall x ((x \in A \vee x \in B) \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B))$$

$$\Leftrightarrow \forall x ((x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin A \vee x \notin B))$$

$$\Leftrightarrow \forall x ((x \notin A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \notin A))$$

$$\Leftrightarrow \forall x ((x \in \sim A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in \sim A))$$

$$\Leftrightarrow \forall x ((x \in \sim A \leftrightarrow x \in B))$$

$$\Leftrightarrow \sim A = B$$

绝对补集

定理1 $A \subseteq B \Leftrightarrow \sim B \subseteq \sim A$

证明:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$\Leftrightarrow \forall x (x \notin B \rightarrow x \notin A)$$

$$\Leftrightarrow \forall x (x \in \sim B \rightarrow x \in \sim A)$$

$$\Leftrightarrow \sim B \subseteq \sim A$$

证毕。

绝对补集

定理2 $\sim A=B$ 当且仅当 $A \cup B=E$ 且 $A \cap B=\Phi$

证明: $A \cup B=E \wedge A \cap B=\Phi$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \forall x(x \in A \cup B \leftrightarrow x \in E) \wedge \quad (P \leftrightarrow T \Leftrightarrow P) \\ &\quad \forall x(x \in A \cap B \leftrightarrow x \in \Phi) \quad (P \leftrightarrow F \Leftrightarrow \neg P) \\ &\Leftrightarrow \forall x(x \in A \cup B \leftrightarrow T) \wedge \forall x(x \in A \cap B \leftrightarrow F) \\ &\Leftrightarrow \forall x(x \in A \cup B \wedge \neg(x \in A \cap B)) \\ &\Leftrightarrow \forall x((x \in A \vee x \in B) \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B)) \\ &\Leftrightarrow \forall x((x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin A \vee x \notin B)) \\ &\Leftrightarrow \forall x((x \notin A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \notin A)) \\ &\Leftrightarrow \forall x((x \in \sim A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in \sim A)) \\ &\Leftrightarrow \forall x(x \in \sim A \leftrightarrow x \in B) \Leftrightarrow \sim A=B \quad \text{证毕。} \end{aligned}$$

对称差

对称差 \oplus

定义：**A**、**B**是集合，由属于**A**而不属于**B**，或者属于**B**而不属于**A**的元素构成的集合，称之为**A**与**B**的对称差，记作 **$A \oplus B$** 。

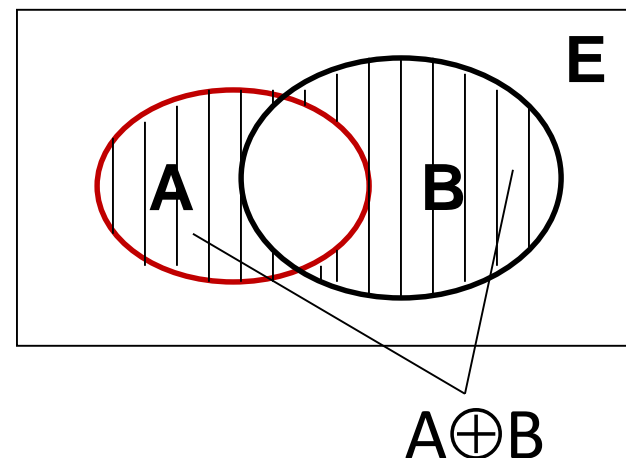
例如 $A=\{1,2,3\}$ $B=\{2,3,4\}$ 则 $A \oplus B=\{1,4\}$

谓词定义：

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

$$= \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$$

$$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$$



对称差

证明: $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$

证明:

$$\begin{aligned} & (A \cup B) - (A \cap B) \\ &= (A \cup B) \cap \sim(A \cap B) \\ &= (A \cup B) \cap (\sim A \cup \sim B) \\ &= (A \cap \sim A) \cup (A \cap \sim B) \cup (B \cap \sim A) \cup (B \cap \sim B) \\ &= (A \cap \sim B) \cup (B \cap \sim A) \\ &= (A - B) \cup (B - A) \text{ 证毕。} \end{aligned}$$

对称差

性质：

(1) 交换律 对任何集合 A 、 B ，有 $A \oplus B = B \oplus A$ 。

(2) 结合律 对任何集合 A 、 B 、 C ，有 $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ 。

(3) 同一律 对任何集合 A ，有 $A \oplus \Phi = A$ 。

(4) 对任何集合 A ，有 $A \oplus A = \Phi$ 。

(5) \cap 对 \oplus 可分配。 $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$

对称差

证明性质(5): \cap 对 \oplus 可分配 $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$

证明: $(A \cap B) \oplus (A \cap C)$

$$= ((A \cap B) \cup (A \cap C)) - (A \cap B) \cap (A \cap C)$$

$$= (A \cap (B \cup C)) - (A \cap B \cap C)$$

$$= A \cap ((B \cup C) - (B \cap C)) \quad (\cap \text{对}-\text{分配})$$

$$= A \cap (B \oplus C)$$

证毕。

集合运算的性质 (集合恒等式)

(1) 幂等律(idempotent laws)

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

(2) 结合律(associative laws)

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

(3) 交换律(commutative laws)

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

集合运算的性质 (集合恒等式)

(4) 分配律(distributive laws)

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(5) 对合律(double complement law)

$$\sim \sim A = A$$

(6) 零律(dominance laws)

$$A \cup E = E$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

集合运算的性质 (集合恒等式)

(7) 同一律(identity laws)

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap E = A$$

(8) 排中律(excluded middle)

$$A \cup \sim A = E$$

(9) 矛盾律(contradiction)

$$A \cap \sim A = \emptyset$$

(10) 全补律

$$\sim \emptyset = E$$

$$\sim E = \emptyset$$

集合运算的性质（集合恒等式）

(11) 吸收律(absorption laws)

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

(12) 德.摩根律(DeMorgan' s laws)

$$\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B$$

$$\sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B$$

(13) 补交转换律(difference as intersection)

$$A - B = A \cap \sim B$$

集合恒等式证明(方法)

(1) 逻辑演算法:

利用逻辑等价式和逻辑推理规则

(2) 集合演算法:

利用集合恒等式和已知的集合结论

集合恒等式证明(方法)

(1) 逻辑演算法(格式)

题型: $A \subseteq B$.

证明: $\forall x, x \in A$

$\Rightarrow \dots(????)$

$\Rightarrow x \in B$

$\therefore A \subseteq B$ 证毕.

集合恒等式证明(方法)

(1) 逻辑演算法(格式)

题型: $A=B$.

证明: $\forall x, x \in A$

$\Leftrightarrow \dots(????)$

$\Leftrightarrow x \in B$

$\therefore A=B$ 证毕.

或证明: $\forall x, x \in A \Rightarrow \dots (????) \Rightarrow x \in B$.

另, $\forall x, x \in B \Rightarrow \dots (????) \Rightarrow x \in A$.

$\therefore A=B$ 证毕.

集合恒等式证明(方法)

例1: 分配律(证明) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

证明: $\forall x, x \in A \cup (B \cap C)$

$$\Leftrightarrow x \in A \vee x \in (B \cap C) \quad (\cup \text{定义})$$

$$\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \quad (\cap \text{定义})$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \quad (\text{命题逻辑分配律})$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C) \quad (\cup \text{定义})$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (\cap \text{定义})$$

$\therefore A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ 成立

证毕。

集合恒等式证明(方法)

例2: 零律(证明) $A \cap \emptyset = \emptyset$

证明: $\forall x, x \in A \cap \emptyset$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in \emptyset \quad (\cap \text{定义})$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge F \quad (\emptyset \text{定义})$$

$$\Leftrightarrow F \quad (\text{命题逻辑零律})$$

$\therefore A \cap \emptyset = \emptyset$ 成立

证毕。

集合恒等式证明(方法)

例3: 排中律(证明) $A \cup \sim A = E$

证明: $\forall x, x \in A \cup \sim A$

$$\Leftrightarrow x \in A \vee x \in \sim A \quad (\cup \text{定义})$$

$$\Leftrightarrow x \in A \vee x \notin A \quad (\sim \text{定义})$$

$$\Leftrightarrow x \in A \vee \neg(x \in A) \quad (\notin \text{定义})$$

$$\Leftrightarrow T \quad (\text{命题逻辑排中律})$$

$\therefore A \cup \sim A = E$ 成立

证毕。

集合恒等式证明(方法)

(2) 集合演算法（格式）

题型: $A=B$.

证明: A

$= \dots (????)$

$= B$

$\therefore A=B. \quad \#$

题型: $A \subseteq B$.

证明: A

$\subseteq \dots (????)$

$\subseteq B$

$\therefore A \subseteq B. \quad \#$

集合恒等式证明(方法)

例1: 吸收律(一式证明) $A \cup (A \cap B) = A$

证明: $A \cup (A \cap B)$

$$= (A \cap E) \cup (A \cap B) \quad (\text{同一律})$$

$$= A \cap (E \cup B) \quad (\text{逆用分配律})$$

$$= A \cap E \quad (\text{零律})$$

$$= A \quad (\text{同一律})$$

$$\therefore A \cup (A \cap B) = A$$

证毕。

集合恒等式证明(方法)

例2: 吸收律(二式证明) $A \cap (A \cup B) = A$

证明: $A \cap (A \cup B)$

$$= (A \cap A) \cup (A \cap B) \quad (\text{分配律})$$

$$= A \cup (A \cap B) \quad (\text{幂等律})$$

$$= A \quad (\text{吸收律第一式})$$

$$\therefore A \cap (A \cup B) = A$$

证毕。

集合恒等式证明(方法)

(2) 集合演算法（格式）续

题型: $A=B$

证明: $(\subseteq) \dots$

$\therefore A \subseteq B$

$(\supseteq) \dots$

$\therefore A \supseteq B$

$\therefore A = B. \quad \#$

说明: 把 $=$ 分成 \subseteq 与 \supseteq

题型: $A \subseteq B$

证明: $A \cap B$ (或 $A \cup B$)

$= \dots (????)$

$= A$ (或 B)

$\therefore A \subseteq B. \quad \#$

说明: 化 \subseteq 成 $=$

$$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$$

$$A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$$

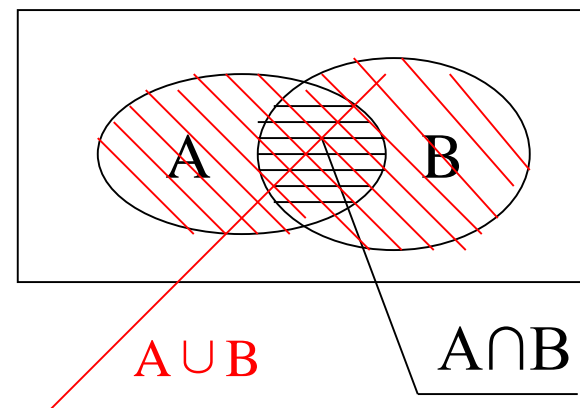
3-3 包含排斥原理

集合的计数

这节主要解决集合的计数问题。

例：有A，B两个商店，A店经营1000种商品，B店经营1200种商品，其中有100种商品两个商店都经营，问两个商店共经营多少种商品？

显然 $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 2100$



集合的计数

定理3-3.1 设 A_1 , A_2 为有限集合, 其元素个数分别为 $|A_1|$, $|A_2|$, 则

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

这个定理, 常被称做**包含排斥原理**。

证明: 见P96

推理: 对于任意三个有限集合 A_1 , A_2 和 A_3 , 则

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = & |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| \\ & - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \end{aligned}$$

集合的计数

如果有**A,B,C**三个有限集合，则

$$\begin{aligned} & |A \cup B \cup C| \\ &= |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - (|A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|) \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \end{aligned}$$

集合的计数

定理3-3.2

设 A_1, A_2, \dots, A_n 为有限集合, 其元素个数分别为 $|A_1|, |A_2|, \dots, |A_n|$, 则

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| \\ + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

集合的计数

例1 某个研究所有**170**名职工，其中**120**人会英语，**80**人会法语，**60**人会日语，**50**人会英语和法语，**25**人会英语和日语，**30**人会法语和日语，**10**人会英语、日语和法语。问有多少人不会这三种语言？

令**U**为全集，**E**、**F**、**J**分别为会英语、法语和日语人的集合。

$$|U|=170$$

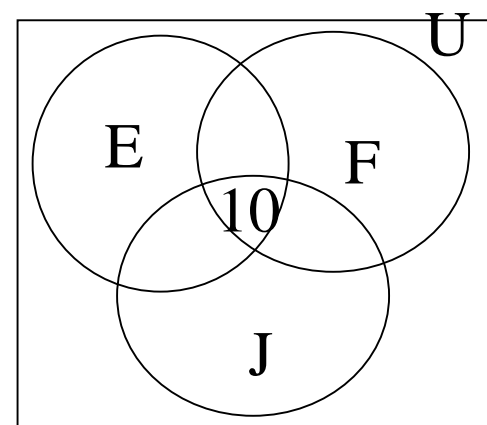
$$|E|=120 \quad |F|=80 \quad |J|=60$$

$$|E \cap F|=50 \quad |E \cap J|=25 \quad |F \cap J|=30$$

$$|E \cap F \cap J|=10$$

$$\begin{aligned} |E \cup F \cup J| &= |E| + |F| + |J| - |E \cap F| - |E \cap J| - |F \cap J| + |E \cap F \cap J| \\ &= 120 + 80 + 60 - 50 - 25 - 30 + 10 = 165 \end{aligned}$$

$$|U - (E \cup F \cup J)| = 170 - 165 = 5 \quad \text{即有5人不会这三种语言。}$$



集合的计数

例2 对24名科技人员掌握外语的情况进行调查结果如下：

英、日、德、法四种外语中，每个人至少会一种；

会英、日、德、法语的人数分别是13、5、10、9人；

同时会英、日语的有2人；

同时会英、法语的有4人；

同时会德、法语的有4人；

同时会英、德语的有4人；

会日语的人不会德语，也不会法语；

问这24人中，只会一种外语的人各是多少人？

同时会英、法、德三种语言的人有多少人？

集合的计数

设全集为U，E, F, G, J分别表示会英、法、德、日语人的集合。

$$|U|=24, \quad |E \cap F| = |G \cap F| = |E \cap G| = 4$$

又设 $|E \cap F \cap G| = x$ 只会英、日、德、法一种外语的人分别是 y_1, y_2, y_3, y_4 。

于是可以画出文氏图及方程如下：

$$y_1 + 2(4-x) + x + 2 = 13$$

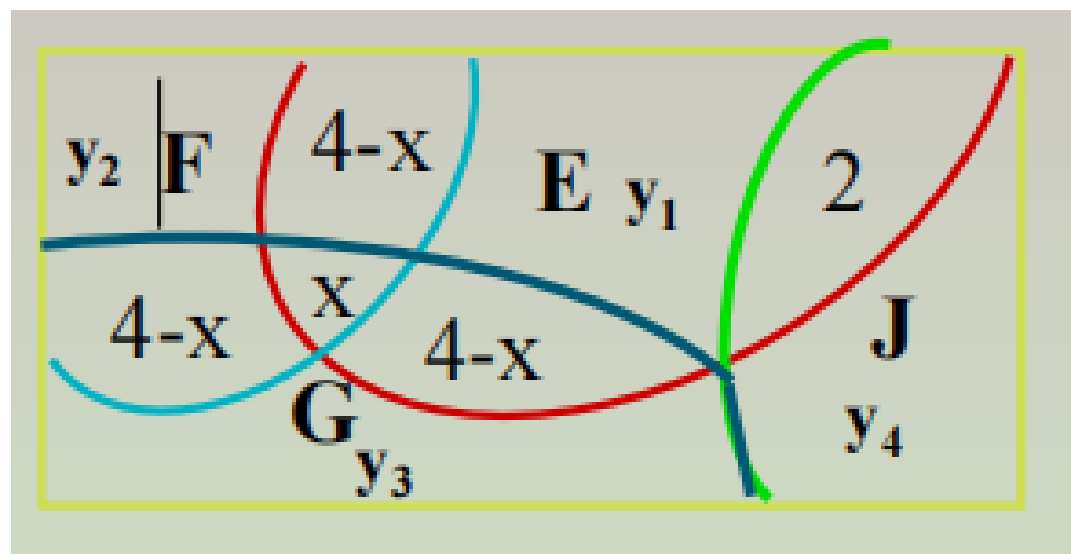
$$y_2 + 2(4-x) + x = 9$$

$$y_3 + 2(4-x) + x = 10$$

$$y_4 + 2 = 5$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 3(4-x) + x + 2 = 24$$

$$\text{解得: } y_1 = 4, \quad y_2 = 2, \quad y_3 = 3, \quad y_4 = 3, \quad x = 1$$



集合的计数

例3.求1到1000之间不能被5、6、8整除的数的个数。

解.设全集 $E = \{x \mid x \text{ 是1到1000的整数}\}$

$$|E| = 1000$$

A_5 、 A_6 、 A_8 是 E 的子集并分别表示可被5、6、8整除的数的集合。

$\lfloor x \rfloor$ 表示小于或等于 x 的最大整数。

$\text{LCM}(x,y)$:表示 x,y 两个数的最小公倍数。

(Least Common Multiple)

集合的计数

例3.求1到1000之间不能被5、6、8整除的数的个数。

$$|A_5| = \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor = 200$$

$$|A_6| = \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor = 166$$

$$|A_8| = \left\lfloor \frac{1000}{8} \right\rfloor = 125$$

$$|A_5 \cap A_6| = \left\lfloor \frac{1000}{LCM(5,6)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{30} \right\rfloor = 33$$

$$|A_5 \cap A_8| = \left\lfloor \frac{1000}{LCM(5,8)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{40} \right\rfloor = 25$$

$$|A_6 \cap A_8| = \left\lfloor \frac{1000}{LCM(6,8)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{24} \right\rfloor = 41$$

$$|A_5 \cap A_6 \cap A_8| = \left\lfloor \frac{1000}{LCM(5,6,8)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{120} \right\rfloor = 8$$

集合的计数

不能被5、6、8整除的数的集合为：

$$\sim(A_5 \cup A_6 \cup A_8)$$

$$\begin{aligned} & |\sim(A_5 \cup A_6 \cup A_8)| \\ &= |E| - |A_5 \cup A_6 \cup A_8| \\ &= |E| - (|A_5| + |A_6| + |A_8| - |A_5 \cap A_6| - |A_5 \cap A_8| - |A_6 \cap A_8| + |A_5 \cap A_6 \cap A_8|) \\ &= 1000 - (200 + 166 + 125 - 33 - 25 - 41 + 8) = 600 \end{aligned}$$

3-4 序偶与笛卡尔积

序偶与有序n元组

定义：由两个对象 x 、 y 组成的序列称为有序二元组，也称之为**序偶**，记作 $\langle x, y \rangle$ ；

称 x 、 y 分别为序偶 $\langle x, y \rangle$ 的第一，第二元素。

注意，序偶 $\langle x, y \rangle$ 与集合 $\{x, y\}$ 不同：

序偶 $\langle x, y \rangle$ ：元素 x 和 y 有次序；

集合 $\{x, y\}$ ：元素 x 和 y 的次序是无关紧要的。

序偶与有序n元组

定理：设 $\langle x, y \rangle$ ， $\langle u, v \rangle$ 是两个序偶，如果 $x=u$ 和 $y=v$ ，
则称 $\langle x, y \rangle$ 和 $\langle u, v \rangle$ 相等，记作 $\langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle$ 。

定义：有序3元组是一个序偶，其第一个元素也是个序偶。

有序3元组 $\langle \langle a, b \rangle, c \rangle$ 可以简记成 $\langle a, b, c \rangle$ 。

但 $\langle a, \langle b, c \rangle \rangle$ 不是有序3元组。

序偶与有序n元组

定义:有序n元组是一个序偶,其第一个元素本身是个有序n-1元组,记作 $\langle \langle x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \rangle, x_n \rangle$ 。且可以简记成 $\langle x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n \rangle$ 。

定理: $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle = \langle y_1, y_2, \dots, y_n \rangle$
 $\Leftrightarrow (x_1 = y_1) \wedge (x_2 = y_2) \wedge \dots \wedge (x_n = y_n)$

集合的笛卡尔积

定义: 设A、B是集合, 由A的元素为第一元素, B的元素为第二元素组成**序偶的集合**, 称为A和B的**笛卡尔积**或直积, 记作 $A \times B$, 即 $A \times B = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in B \}$

例1 设 $A = \{0, 1\}$, $B = \{a, b\}$, 求 $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$ 。

解: $A \times B = \{ \langle 0, a \rangle, \langle 0, b \rangle, \langle 1, a \rangle, \langle 1, b \rangle \}$

$B \times A = \{ \langle a, 0 \rangle, \langle b, 0 \rangle, \langle a, 1 \rangle, \langle b, 1 \rangle \}$

$A \times A = \{ \langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle \}$

可见 $A \times B \neq B \times A$

所以, 集合的笛卡尔积运算**不满足**交换律。

集合的笛卡尔积

结合律:

$$(A \times B) \times C = \{ \langle \langle a, b \rangle, c \rangle \mid \langle a, b \rangle \in A \times B \wedge c \in C \}$$

$$A \times (B \times C) = \{ \langle a, \langle b, c \rangle \rangle \mid a \in A \wedge \langle b, c \rangle \in B \times C \},$$

因 $\langle a, \langle b, c \rangle \rangle$ 不是有序三元组,

所以 $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$ 。

故 \times 也不满足结合律。

集合的笛卡尔积性质

性质

1) 如果A、B都是有限集，且 $|A|=m$, $|B|=n$ ，则 $|A \times B| = mn$.

证明：由笛卡尔积的定义及排列组合中的乘法原理，
直接推得此定理。

2) $A \times \Phi = \Phi \times B = \Phi$

集合的笛卡尔积性质

3) \times 对 \cup 和 \cap 满足分配律。

设 A, B, C 是任意集合，则

$$(1) \quad A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C);$$

$$(2) \quad A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C);$$

$$(3) \quad (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C);$$

$$(4) \quad (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$

集合的笛卡尔积性质

证明 (1) : 任取 $\langle x, y \rangle \in A \times (B \cup C)$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \cup C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C)$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in A \times B \vee \langle x, y \rangle \in A \times C$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in (A \times B) \cup (A \times C)$$

所以(1)式成立。其余可以类似证明。

集合的笛卡尔积性质

4)若 $C \neq \Phi$, 则 $A \subseteq B \Leftrightarrow (A \times C \subseteq B \times C) \Leftrightarrow (C \times A \subseteq C \times B)$.

证明 $A \subseteq B \Leftrightarrow (A \times C \subseteq B \times C)$

证明:

必要性: 设 $A \subseteq B$, 求证 $A \times C \subseteq B \times C$

任取 $\langle x, y \rangle \in A \times C \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in C$

$\Rightarrow x \in B \wedge y \in C$ (因 $A \subseteq B$)

$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in B \times C$

所以, $A \times C \subseteq B \times C$.

集合的笛卡尔积性质

充分性： 若 $C \neq \Phi$, 由 $A \times C \subseteq B \times C$ 求证 $A \subseteq B$

取 C 中元素 y , 任取 $x \in A \Rightarrow x \in A \wedge y \in C$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in A \times C$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in B \times C \text{ (由 } A \times C \subseteq B \times C \text{)}$$

$$\Leftrightarrow x \in B \wedge y \in C \Rightarrow x \in B \text{ 所以, } A \subseteq B.$$

所以 $A \subseteq B \Leftrightarrow (A \times C \subseteq B \times C)$

类似可以证明 $A \subseteq B \Leftrightarrow (C \times A \subseteq C \times B)$

集合的笛卡尔积性质

5) 设A、B、C、D为非空集合，则

$$A \times B \subseteq C \times D \Leftrightarrow A \subseteq C \wedge B \subseteq D.$$

证明：必要性,由 $A \times B \subseteq C \times D$ 证明 $A \subseteq C \wedge B \subseteq D$.

任取 $x \in A$ ，任取 $y \in B$ ，

所以 $x \in A \wedge y \in B$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in A \times B$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in C \times D \text{ (由 } A \times B \subseteq C \times D \text{)}$$

$$\Leftrightarrow x \in C \wedge y \in D \text{ 所以, } A \subseteq C \wedge B \subseteq D.$$

集合的笛卡尔积性质

证明: 充分性, 由 $A \subseteq C$, $B \subseteq D$. 证明 $A \times B \subseteq C \times D$

任取 $\langle x, y \rangle \in A \times B$

$$\langle x, y \rangle \in A \times B$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B$$

$$\Rightarrow x \in C \wedge y \in D \text{ (由 } A \subseteq C, B \subseteq D \text{)}$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in C \times D \text{ 所以, } A \times B \subseteq C \times D \text{ 证毕.}$$

n维笛卡尔积

定义 [n维笛卡尔积] :

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{ \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \mid x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \dots \wedge x_n \in A_n \}$$

$$A \times A \times \dots \times A = A^n$$

$$|A_i| = n_i, i = 1, 2, \dots, n \Rightarrow$$

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = n_1 \times n_2 \times \dots \times n_n.$$

n维笛卡尔积性质与2维笛卡尔积类似.

设 \mathbf{R} 是实数集合, 则 \mathbf{R}^2 表示笛卡尔坐标平面,
 \mathbf{R}^3 表示三维空间, \mathbf{R}^n 表示n维空间。

集合的笛卡尔积

应用:

1) 令 $A1 = \{x | x \text{ 是学号}\}$ $A2 = \{x | x \text{ 是姓名}\}$ $A3 = \{\text{男, 女}\}$
 $A4 = \{x | x \text{ 是出生日期}\}$ $A5 = \{x | x \text{ 是班级}\}$ $A6 = \{x | x \text{ 是籍贯}\}$

则 $A1 \times A2 \times A3 \times A4 \times A5 \times A6$ 中一个元素:

$\langle 001, \text{王强}, \text{男}, 2003.02.16, \text{计科2001}, \text{辽宁} \rangle$

这就是学生档案数据库的一条信息, 所以学生的档案就是 $A1 \times A2 \times A3 \times A4 \times A5 \times A6$ 的一个子集。

集合的笛卡尔积

$A=\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z\}$ 是英文字母表.

一个英文单词可以看成有序 n 元组:

如 $at=<a,t>$, $boy=<b,o,y>$, $data=<d,a,t,a>$,
 $computer=<c,o,m,p,u,t,e,r>$

于是可以说:

$at \in A^2$, $boy \in A^3$, $data \in A^4$, $computer \in A^8, \dots$

于是英文词典中的单词集合可以看成是

$A \cup A^2 \cup \dots \cup A^n$ 的一个子集。

谢谢