

2018 级《线性代数 I》期末考试卷 (A) 参考答案

本题 得分	
----------	--

一、判断题 (1-10 小题, 每题 2 分, 共 20 分)

(注: 正确的在后方括号中打“√”, 错误的在后方括号中打“×”)

1. 已知 n 阶方阵 A, B . 若 $AB = O, A \neq O$, 则 $B = O$. (×)
2. 初等矩阵都是可逆阵, 并且其逆阵都是它们本身. (×)
3. 若 n 阶方阵 A, B 均可逆, 则它们的乘积 AB 也可逆. (√)
4. 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 线性相关, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关. (×)
5. 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 线性无关. (√)
6. 若三阶方阵 A 有三个不同的特征值, 则方阵 A 相似与某一对角矩阵. (√)
7. 已知 A, B 是可逆矩阵. 若 A 与 B 相似, 则 A^{-1} 与 B^{-1} 相似. (√)
8. 已知 A, B 是可逆矩阵, 若 A 与 B 相似, 则 $A + A^{-1}$ 与 $B + B^{-1}$ 相似. (√)
9. 正交矩阵一定可逆. (√)
10. 若 n 阶方阵 A, B 均正定, 则它们的和 $A + B$ 也正定. (√)

本题 得分	
----------	--

二、填空题 (11-15 小题, 每题 4 分, 共 20 分)

11. 设 A 为三阶矩阵, 其行列式 $|A| = 3, A^*$ 为其伴随矩阵. 若交换矩阵 A 的第一行和第二行得到矩阵 B , 则行列式 $|BA^*| = \underline{\quad\quad}$.
答案: -27.
12. 设四元线性方程组 $Ax = b$ 的系数矩阵 A 的秩为 3, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是它的三个解, 其中 $\alpha_1 = (1, -2, -3, 4)^T, 5\alpha_2 - 2\alpha_3 = (2, 0, 1, 8)^T$, 则其导出组 $Ax = 0$ 的基础解系为 $\underline{\quad\quad}$.
答案: $(-1, 6, 10, -4)^T$
13. 设二阶矩阵 A 的特征值为 -2 和 -3, $f(x) = x^2 - x - 1$, 则行列式 $|f(A)| = \underline{\quad\quad}$.
答案: 55.
14. 设 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \alpha = (1, 2)^T$, 则向量 $A\alpha$ 的长度 $\|A\alpha\| = \underline{\quad\quad}$.
答案: $\sqrt{5}$.
15. 当 t 满足不等式 $\underline{\quad\quad}$ 时, 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + tx_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$ 正定.
答案: $t > \frac{3}{5}$

本题 得分	
----------	--

三、计算题 (16-19 小题, 共 48 分)

16. (本题 12 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 维向量空间 \mathbb{R}^3 的一组基,

- (1) 求由基 $\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3$ 到基 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 的过渡矩阵;
 (2) 设向量 β 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标为 $(1, 1, 1)$, 求 β 在基 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 下的坐标。

解: (1) $(\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

所以

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^{-1} = (\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

..... 3 分

另一方面,

$$(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

..... 3 分

故所求的过渡矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ 2 分

(2) 依题意和 (1) 可得

$$\beta = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

因此新坐标为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$

..... 4 分

17. (本题 12 分) 已知四元线性方程组 $Ax = b$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & 2a & 1 & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & 1 \\ 0 & 0 & a^2 & 2a \end{pmatrix}, \quad x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T, \quad b = (1, 0, 0, 0)^T.$$

- (1) 求行列式 $|A|$;
 (2) a 为何值时, 方程组有唯一解, 并求 x_1 ;
 (3) a 为何值时, 方程组有无穷多解, 并求通解。

解: (1) 按第一行展开可得行列式 $|A| = 5a^4$ 4 分

(2) 由 (1), 当 $a \neq 0$ 时, $|A| \neq 0$, 该方程组有唯一解. 由克拉姆法则

$$x_1 = \frac{D_3}{D_4} = \frac{4a^3}{5a^4} = \frac{4}{5a}.$$

..... 4 分

(3) 当 $a = 0$ 时方程组的增广矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由此可知 $\text{rank}(A|b) = \text{rank}(A) = 3 < 4$, 故当 $a = 0$ 时方程组有无穷多个解, 导出组的基础解系中仅有一个解向量, 可取为 $\xi = (1, 0, 0, 0)^T$, 方程组的特解可取为 $\eta = (0, 1, 0, 0)^T$. 故通解为

$$x = \eta + k\xi, \quad k \in \mathbb{R}.$$

..... 4 分

18. (本题 10 分) 已知向量组 $\alpha_1 = (1, 2, 3, 1)^T$, $\alpha_2 = (3, -1, 2, -4)^T$, $\alpha_3 = (-1, 2, 1, 3)^T$, $\alpha_4 = (-2, 3, 1, 5)^T$, 求它的秩和一个最大线性无关组, 并将其余向量用最大线性无关组表示出来。

解: 将向量组拼成矩阵进行初等行变换如下:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 7 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{7} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

..... 4 分

向量组的秩为 2, 最大线性无关组可取 α_1, α_2 ;

$$\alpha_3 = \frac{5}{7}\alpha_1 - \frac{4}{7}\alpha_2;$$

$$\alpha_4 = \alpha_1 - \alpha_2.$$

..... 6 分

19. (本题 14 分) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(1) 求矩阵 A 的特征值和特征向量;

(2) 求矩阵 B 的特征值和特征向量;

(3) 求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = B$.

解: (1) 解特征方程 $|\lambda E - A| = 0$ 可得矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 3$.
 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 所对应的特征向量为

$$\xi_1 = (-1, 1, 0)^T, \quad \xi_2 = (-1, 0, 1)^T.$$

$\lambda_3 = 3$ 所对应的特征向量为

$$\xi_3 = (1, 1, 1)^T.$$

令 $P_1 = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则有

$$P_1^{-1}AP_1 = \text{diag}(0, 0, 3).$$

..... 5 分

(2) 解特征方程 $|\lambda E - B| = 0$ 可得矩阵 B 的特征值为 $\eta_1 = \eta_2 = 0$, $\eta_3 = 3$.

$\eta_1 = \eta_2 = 0$ 所对应的特征向量为

$$\zeta_1 = (1, 0, 0)^T, \quad \zeta_2 = (0, 1, 0)^T.$$

$\lambda_3 = 3$ 所对应的特征向量为

$$\zeta_3 = (1, 2, 3)^T.$$

令 $P_2 = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 则有

$$P_2^{-1}BP_2 = \text{diag}(0, 0, 3).$$

..... 5 分

(3) 由 (1) 和 (2) 得

$$P_1^{-1}AP_1 = \text{diag}(0, 0, 3) = P_2^{-1}BP_2.$$

于是有

$$P_2P_1^{-1}AP_1P_2^{-1} = B$$

令 $P = P_1P_2^{-1}$, 则有 $P^{-1}AP = B$. 计算可得

$$P = P_1P_2^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & \frac{4}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

..... 4 分

本题 得分	
----------	--

四、证明题 (20-21 小题, 每题 6 分, 共 12 分)

20. 设 α 是 n 维列向量, 其长度为 1, E 是 n 阶单位矩阵, 令 $H = E - 2\alpha\alpha^T$, 证明: H 是对称的正交矩阵。

证明: 对称性: $H^T = (E - 2\alpha\alpha^T)^T = E^T - 2(\alpha\alpha^T)^T = E - 2(\alpha^T)^T\alpha^T = E - 2\alpha\alpha^T = H$.

..... 2 分

正交性:

$$\begin{aligned} H^T H &= H^2 = (E - 2\alpha\alpha^T)(E - 2\alpha\alpha^T) \\ &= E^2 - 2\alpha\alpha^T E - E2\alpha\alpha^T + 4\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T \quad (\because \alpha^T\alpha = 1) \\ &= E - 4\alpha\alpha^T + 4\alpha\alpha^T = E. \end{aligned}$$

..... 4 分

21. 设 λ, μ 是对称矩阵 A 的两个不同的特征值, p, q 是对应的特征向量, 证明: p 与 q 正交。

证明:

$$\begin{aligned} \lambda p^T q &= (\lambda p^T)q = (\lambda p)^T q = (Ap)^T q \\ &= p^T A^T q = p^T Aq = p^T \mu q = \mu p^T q. \end{aligned}$$

..... 4 分

即 $\lambda p^T q = \mu p^T q$. 由 $\lambda \neq \mu$ 知 $p^T q = 0$, 故 p 与 q 正交。

..... 2 分