2016《线性代数 I》期末考试卷(B)评分标准

使用专业、班级__________ 学号__________ 姓名______________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

本题得分	

一、填空题(每小题 4 分, 共 20 分)

(1) 已知 $\alpha=(1,1,1)^T,\beta=(-1,1,1)$, 则 $(\alpha\beta)^{2016}=$ $\underline{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$.

(2) 已知 A,B 是可逆方阵, 则 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}=$ $\underline{\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}}$.

(3) 已知三阶方阵 A 有三个特征值 $1,2,3,$, 方阵 B 与 A 相似，则 $\left|2B^{-1}\right|=$ $\underline{\dfrac{4}{3}}$.

(4) 设三阶方阵 A 满足 $A^2-2A-4E=O$, 则 $(A+E)^{-1}=$ $\underline{A-3E}$.

(5) 设 η_1,η_2,η_3 是四元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的三个解向量, $R(A)=3$,已知 $\eta_1=(0,1,2,3)^T$, $\eta_2+\eta_3=(1,2,3,4)^T$,则该方程组的通解为 $\underline{X=k(1,0,-1,-2)^T+(0,1,2,3)^T}$

本题得分	

二、选择题(每小题 4 分, 共 16 分)

(1) 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, C 为 n 阶方阵, 若 $ABC=E$, 则 [C]

(A) $BAC=E$ (B) $ACB=E$ (C) $CAB=E$ (D) $CBA=E$.

(2) 设 A 为 $m\times n$ 矩阵, C 为 n 阶可逆方阵, $B=AC$, $R(A)=r$, $R(B)=r_1$, 则 [A]

(A) $r=r_1$; (B) $r>r_1$; (C) $r<r_1$; (D) r 与 r_1 的关系依C 而定

(3) n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关的充要条件是 [C]

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中没有零向量;

(B) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中有一个向量不能由其余向量线性表示;

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任一向量均不能由其余向量线性表示;

(D) 向量个数 $s\le n$.

(4) n 阶实对称矩阵 A 正定的充要条件是 [D]

(A) $|A|>0$; (B) A^2 正定;

(C) A 的主对角线元素均为正数; (D) 存在可逆矩阵 C 使得 $A=C^TC$.

本题得分	

三、解答题(每小题 8 分, 共 16 分)

(1) 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

解：
$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 4\times\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 3\times\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \\
&= 7\times\big(2\times3-4\times(-2)\big) \\
&= 98
\end{aligned}
$$

考试形式开卷（ ）、闭卷（√），在选项上打（√）

开课教研室 大学数学部 命题教师______ 命题时间 2016-12-12 使用学期 16-17-1 总张数 3 教研室主任审核签字__________

(2) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&2&1\\0&3&2\\0&0&1\end{pmatrix}$，且 $AB=A^T+2B$，求矩阵B.

解：$(A-2E)B=A^T$ $\quad A-2E=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&-1\end{pmatrix}$ $\quad A^T=\begin{pmatrix}3&0&0\\2&3&0\\1&2&1\end{pmatrix}\cdots\cdots(3')$

$$(A-2E\vdots A^T)=\begin{pmatrix}1&2&1&3&0&0\\0&1&2\vdots2&3&0\\0&0&-1&1&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&-4&-12&-3\\0&1&0\vdots&4&7&2\\0&0&1&-1&-2&-1\end{pmatrix}\cdots\cdots(7')$$

故 $B=\begin{pmatrix}-4&-12&-3\\4&7&2\\-1&-2&-1\end{pmatrix}\cdots\cdots(8')$

本题得分	

四、(本题10分) 设向量组 $\alpha_1=(1,-1,0,2)^T,\alpha_2=(-1,2,2,1)^T,\alpha_3=(-1,3,4,4)^T$，$\alpha_4=(1,1,4,8)^T$，求该向量组的秩以及一个最大无关组，并将其余向量用该最大无关组线性表示.

解：$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\-1&2&3&1\\0&2&4&4\\2&1&4&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\0&1&2&2\\0&2&4&4\\0&3&6&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&3\\0&1&2&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\cdots\cdots(6')$$

该向量组的秩为 2；

α_1，α_2为一个最大无关组；

$\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$

$\alpha_4=3\alpha_1+2\alpha_2.\cdots\cdots(10')$

本题得分	

五、(本题15分) 问 λ 为何值时，线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=1\\2x_1+2x_2-\lambda x_3=1\\-2x_1-2\lambda x_2+\lambda x_3=5\lambda-6\end{cases}$ 有惟一解，无解，无穷多解？并求其通解.

解：$$B=(A\vdots b)=\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\2&2&-\lambda\vdots&1\\-2&-2\lambda&\lambda&5\lambda-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\0&-2&2-\lambda\vdots&-1\\0&4-2\lambda&\lambda-2&5\lambda-4\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\0&-2&2-\lambda&\vdots&-1\\0&0&(\lambda-2)(\lambda-1)&6(\lambda-1)\end{pmatrix}\cdots\cdots(6')$$

当 $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq2$ 时，$R(A)=R(B)=3$, 方程组有惟一解；

当 $\lambda=2$ 时，$R(A)=2$，$R(B)=3$, 方程组无解；

当 $\lambda=1$ 时，$R(A)=R(B)=2\prec3$, 方程组有无穷多解；$\cdots\cdots(12')$

$B\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-2&1\vdots&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,得同解方程组$\begin{cases}x_1=0\\-2x_2+x_3=-1\end{cases}$,令 $x_2=C$，得通解

$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$,其中$C$为任意常数.$\cdots\cdots(15')$

本题得分	

六、(本题15分) 求一个正交变换将二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$ 化为标准形.

解： $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$, $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&0\\0&3-\lambda&2\\0&2&3-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(2-\lambda)(5-\lambda)$,

得特征值 $\lambda_1=1, \lambda_2=2$，$\lambda_3=5.\cdots\cdots(6')$

当 $\lambda_1=1$ 时，$A-E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$,得基础解系 $\xi_1=\left(0,1,-1\right)^T$

当 $\lambda_2=2$ 时，$A-2E=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$,得基础解系 $\xi_2=\left(1,0,0\right)^T$

当 $\lambda_3=5$ 时，$A-5E=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-2&2\\0&2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$,得基础解系 $\xi_3=\left(0,1,1\right)^T\cdots\cdots(9')$

将 ξ_1,ξ_2,ξ_3 单位化得 $p_1=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$, $p_2=\left(1,0,0\right)^T$, $p_3=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$

令 $P=\left(p_1,p_2,p_3\right)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$,

经过正交变换 $X=PY$,二次型 f 化为标准型 $f\left(y_1,y_2,y_3\right)=y_1{}^2+2y_2{}^2+5y_3{}^2\cdots\cdots(15')$

本题得分	

七、(本题8分) 设 n 阶可逆方阵 A 的伴随矩阵为 A^*， 证明:$\left(A^{-1}\right)^*=\left(A^*\right)^{-1}$.

证明： $A^*=|A|A^{-1}$

$$\left(A^{-1}\right)^*=\left|A^{-1}\right|\left(A^{-1}\right)^{-1}=\frac{1}{|A|}A$$

$$\left(A^*\right)^{-1}=\left(|A|A^{-1}\right)^{-1}=\frac{1}{|A|}A$$

因此 $\left(A^{-1}\right)^*=\left(A^*\right)^{-1}$.