3-6 关系的性质

研究内容

(1)　自反性(reflexivity)

(2)　反自反性(irreflexivity)

(3)　对称性(symmetry)

(4)　反对称性(antisymmetry)

(5)　传递性(transitivity)

本节要求

1.准确掌握这五个性质的定义。

2.熟练掌握五个性质的判断和证明。

特别注意

从X到Y的关系R是$X \times Y$ 的子集，即$R \subseteq X \times Y$，

而$X \times Y \subseteq (X \cup Y) \times (X \cup Y)$

所以 $R \subseteq (X \cup Y) \times (X \cup Y)$

令$Z = X \cup Y$，则$R \subseteq Z \times Z$

因此，我们今后通常限于讨论同一集合上的关系。

自反性

一、自反性

定义：设R是集合A上的关系，如果对于任意x∈A 都有<x,x>∈R（xRx），则称R是A上的自反关系。

$$R在A上自反 \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow xRx)$$

从有向图看关系的自反性：每个结点都有环。

从关系矩阵看关系的自反性：主对角线都为1。

自反性

<u>自反性(举例)：</u>

平面上三角形的全等关系，

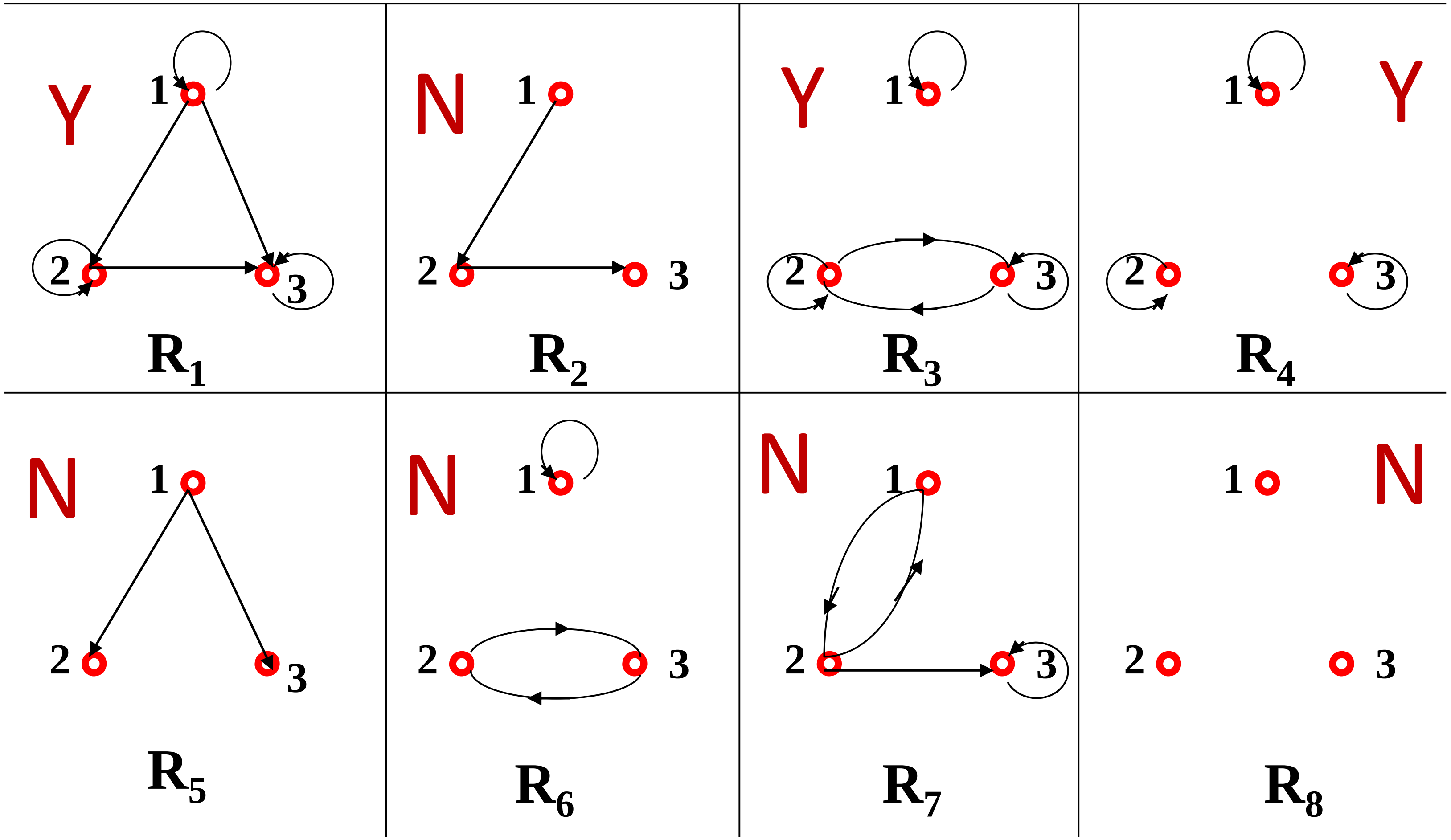
实数集中实数的小于等于关系，

幂集上的集合的相等、包含关系。

……

自反性

令A={1,2,3}，给定A上八个关系，那些是自反的？



R是A上的关系，则R的有向图中，A的所有元素都要有指向自己的环。

反自反性

二、反自反性

定义：设R是集合A上的关系，如果对于任意的$x\in A$都有 $\langle x,x\rangle\notin R$，则称R为A上的反自反关系。即

$$R\text{在}A\text{上反自反}\Leftrightarrow\forall x(x\in A\rightarrow\langle x,x\rangle\notin R)$$

从有向图看关系的反自反性：每个结点都无环。

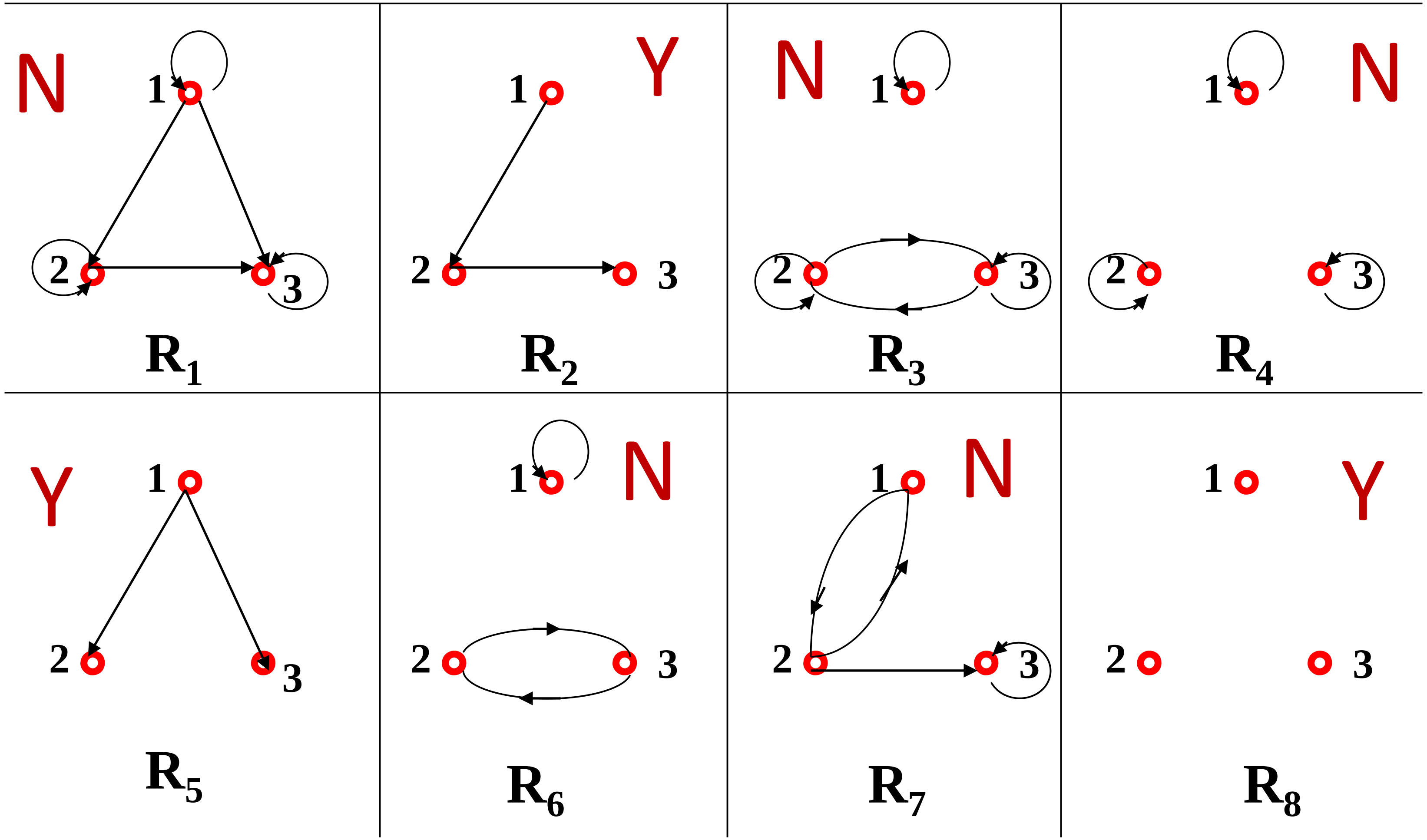
从关系矩阵看关系的反自反性：主对角线都为0。

如：实数的大于关系 >，父子关系是反自反的。

反自反性

令A={1,2,3}给定A上八个关系如右图所示，判断哪些关系是反自反关系？

R是A上的关系，则在R的有向图中，A的所有元素都无环。

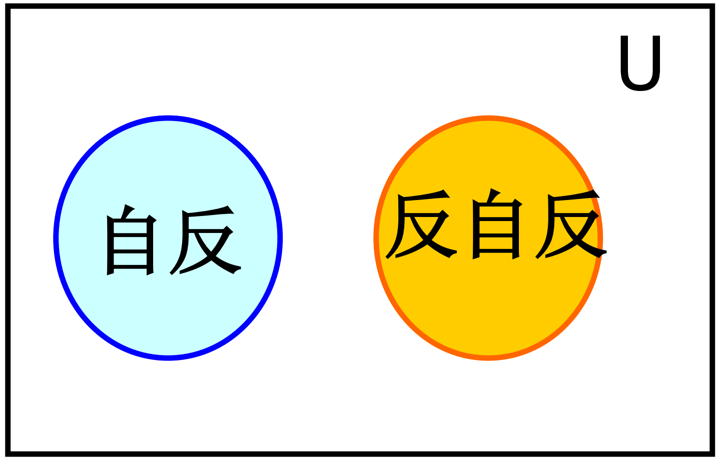


思考

一个不是自反的关系，就是反自反的关系.

对否？

关系文氏图



对称性

三、 对称性

定义：R是集合A上的关系，对任何x，y∈A，如果有xRy，必有yRx，则称R为A上的对称关系。 R在A上对称

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y((x \in A \wedge y \in A \wedge xRy) \rightarrow yRx)$$

从有向图看关系的对称性：

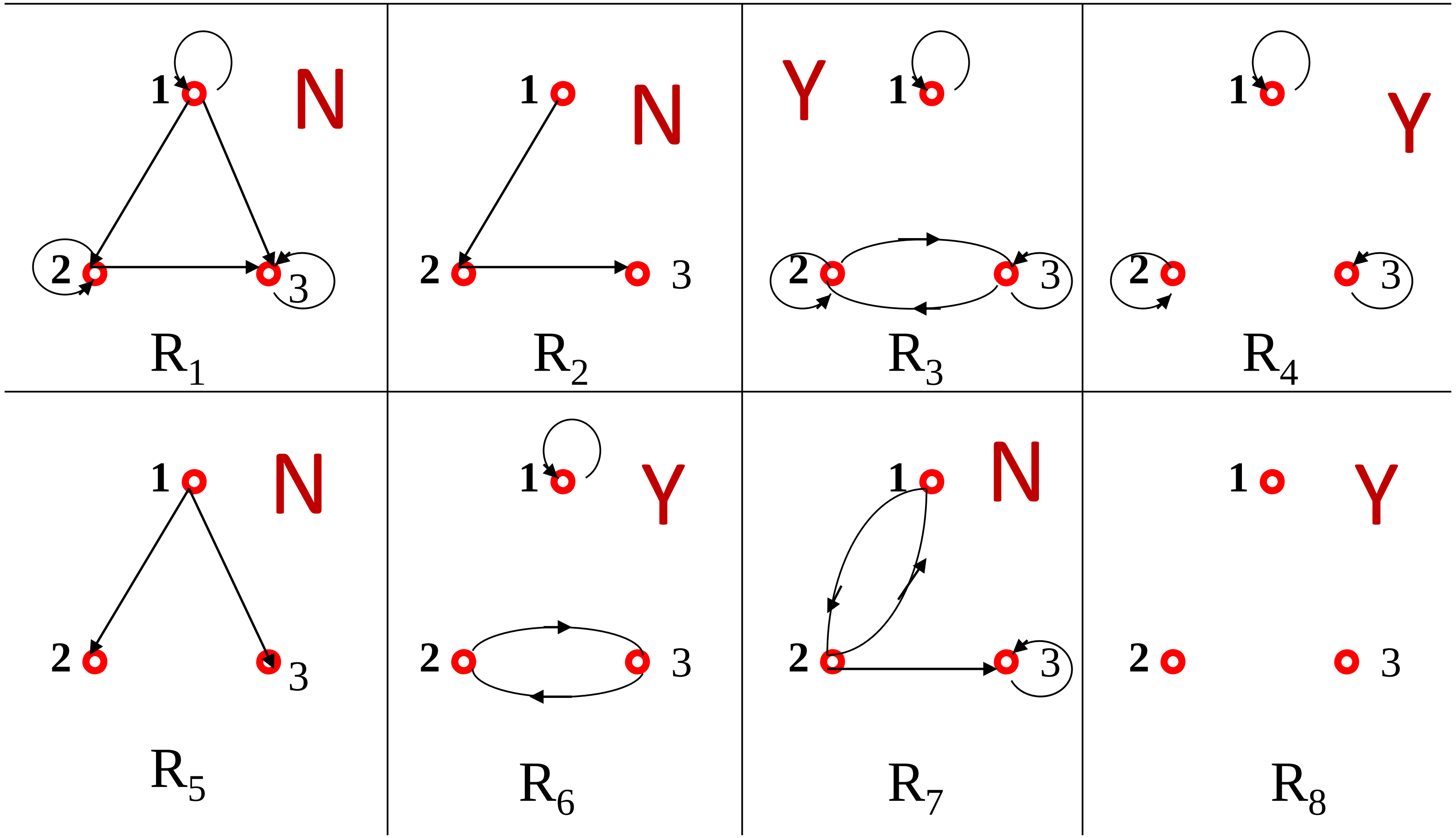
两个不同结点之间，若有边的话，一定有方向相反的两条边。

从关系矩阵看关系的对称性：关于主对角线对称的矩阵。

对称性

令A={1,2,3}，给定A上八个关系如右图所示，判断哪些关系是对称关系。

两个不同的结点间，可以无边；如果有边，则要成对出现（方向相反）。



反对称性

四、反对称性

定义：设R为集合A上的关系，对任何x，y∈A，如果有xRy 和 yRx ，就有 x=y，则称R为A上的反对称关系 。

R在A上反对称

$\Leftrightarrow \forall x \forall y((x \in A \land y \in A \land xRy \land yRx) \rightarrow x=y)$

$\Leftrightarrow \forall x \forall y((x \in A \land y \in A \land x \neq y \land xRy) \rightarrow y \not R x)$

反对称性

由关系图看关系的反对称性：

两个不同的结点之间最多有一条边。

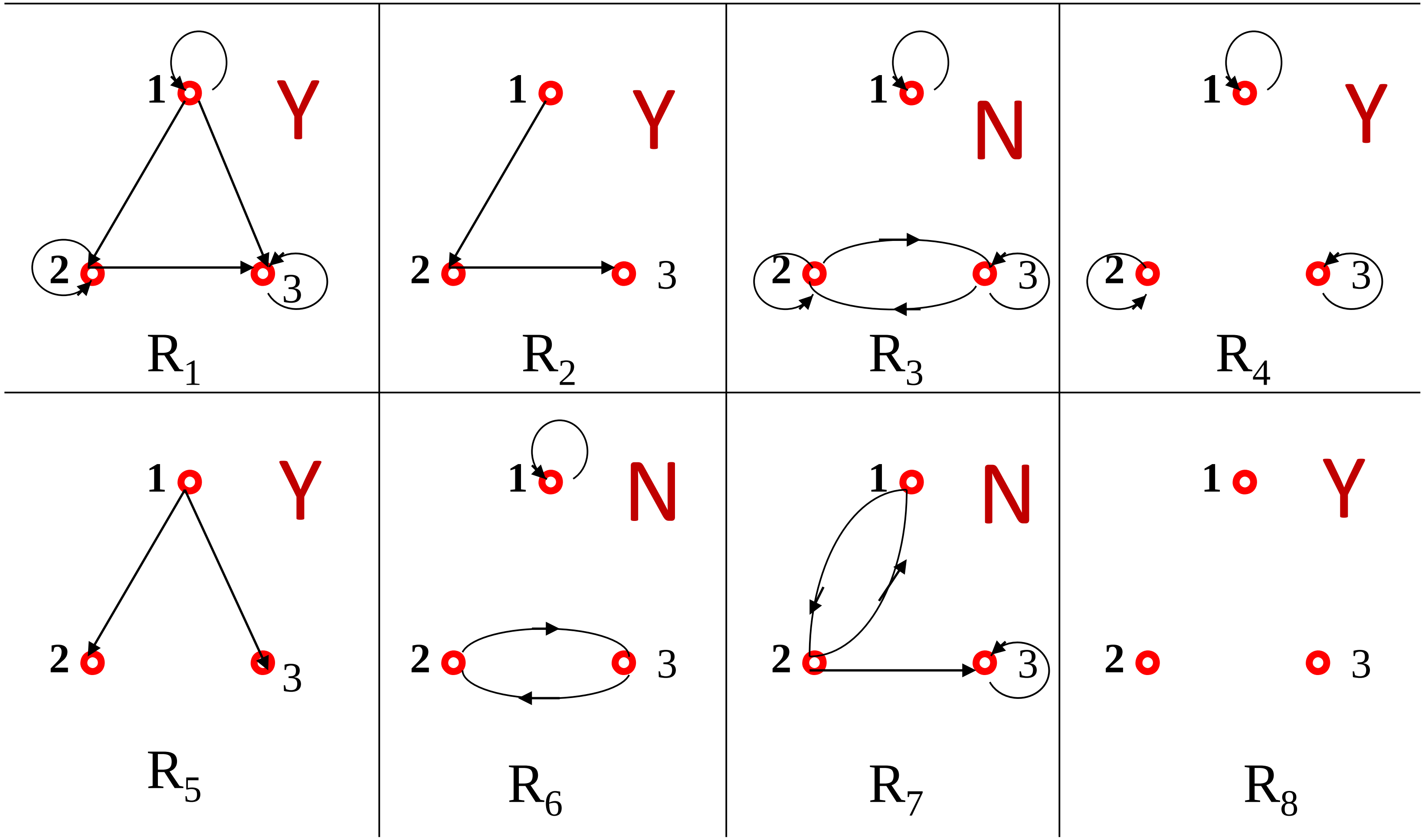
从关系矩阵看关系的反对称性：

关于主对角线对称的两个元素中最多有一个1。

反对称性

令A={1,2,3}，给定A上八个关系如下图所示，判断哪些关系是反对称关系。

两个不同的结点间，可以无边；如果有边，则至多只有一条边。

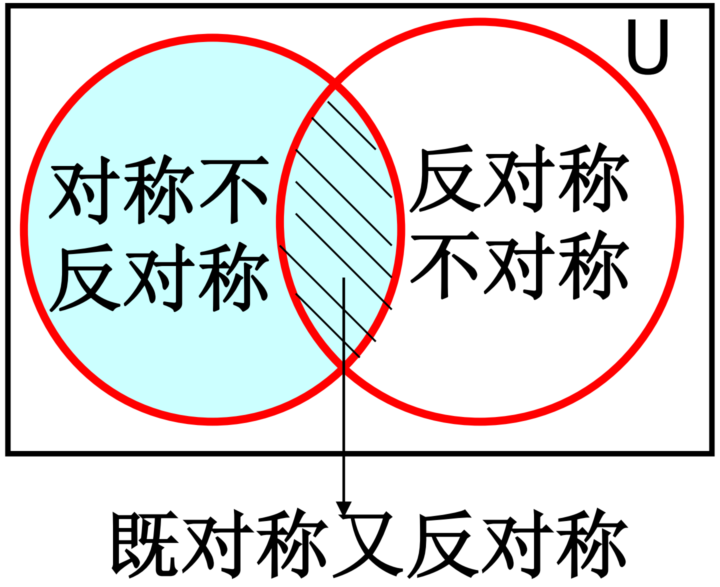


思考

1.是否有关系既不是对称的也不是反对称的?

2.是否有关系既是对称也是反对称的?

关系文氏图



传递性

五、 传递性

定义：R是A上的关系，对任何$x,y,z\in A$，如果有xRy和yRz，就有xRz， 则称R为A上的传递关系。即 R在A上传递

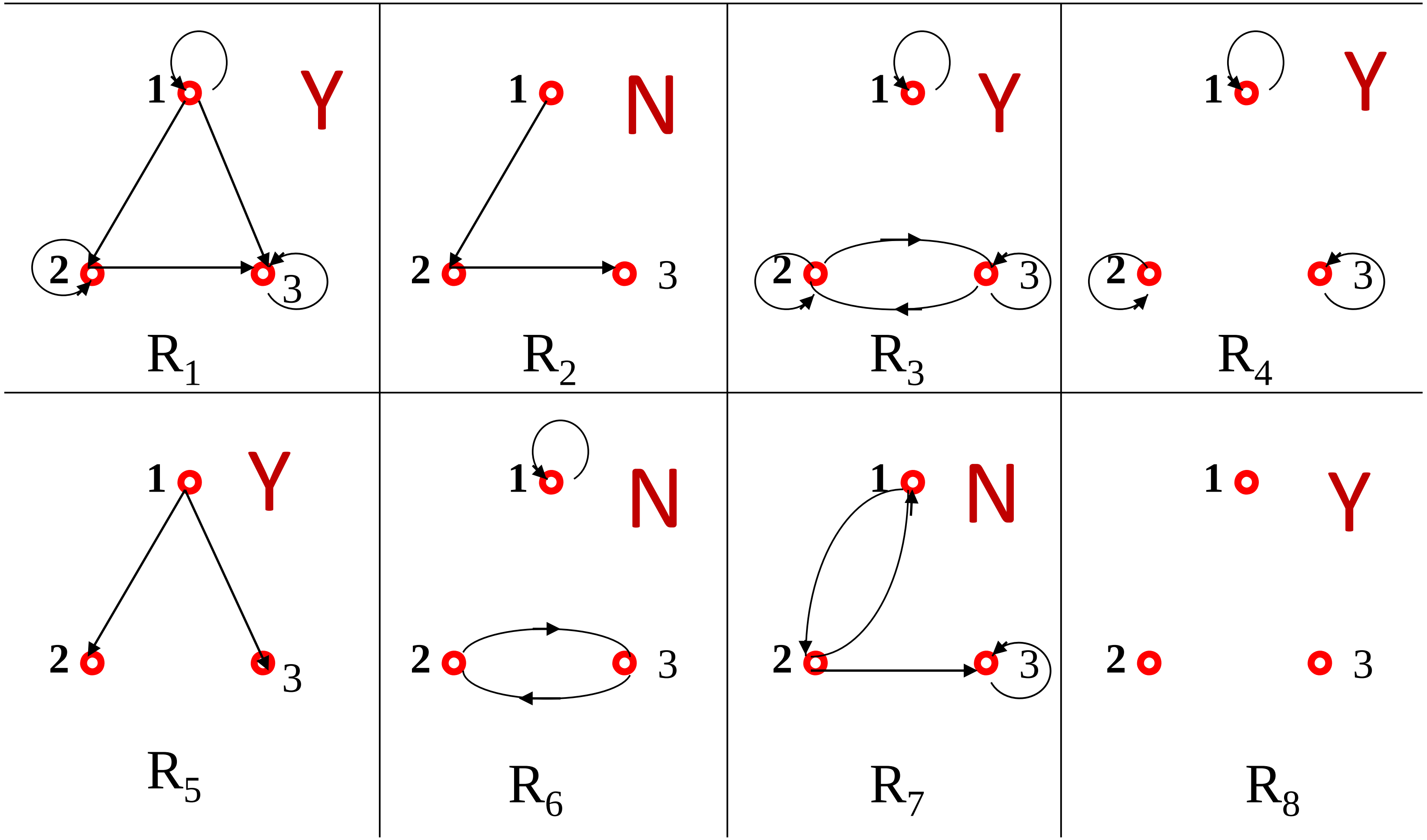
$\Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z((x\in A \wedge y\in A \wedge z\in A \wedge xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz)$

从关系关系图和关系矩阵中不易看清是否有传递性。必须直接根据传递的定义来检查。

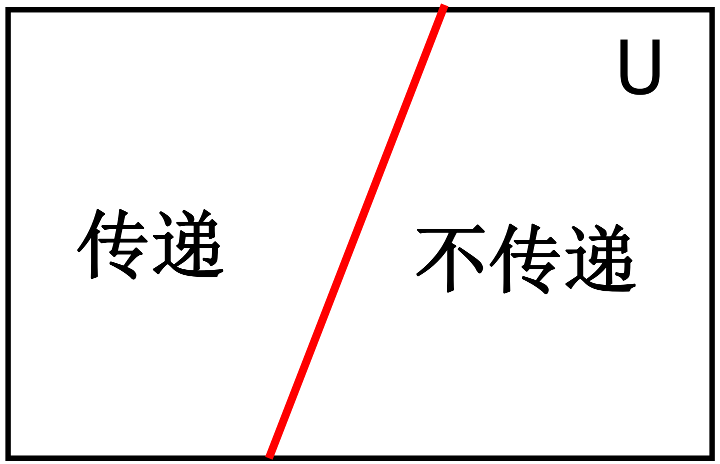
判断时，任意三个元素都满足前件为假，或，当前件为真时，后件也为真，则具有该性质；若有一组元素使前件为真后件为假，则不具有该性质。

传递性

令A={1,2,3}，给定A上八个关系如下图所示，判断哪些关系是传递关系。

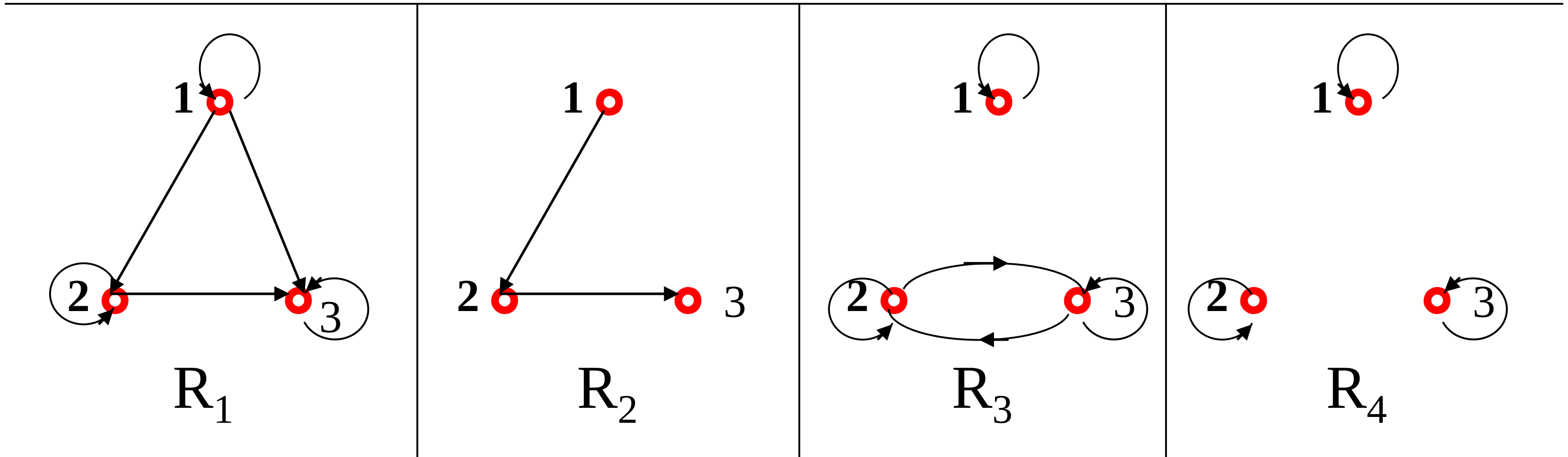


关系文氏图



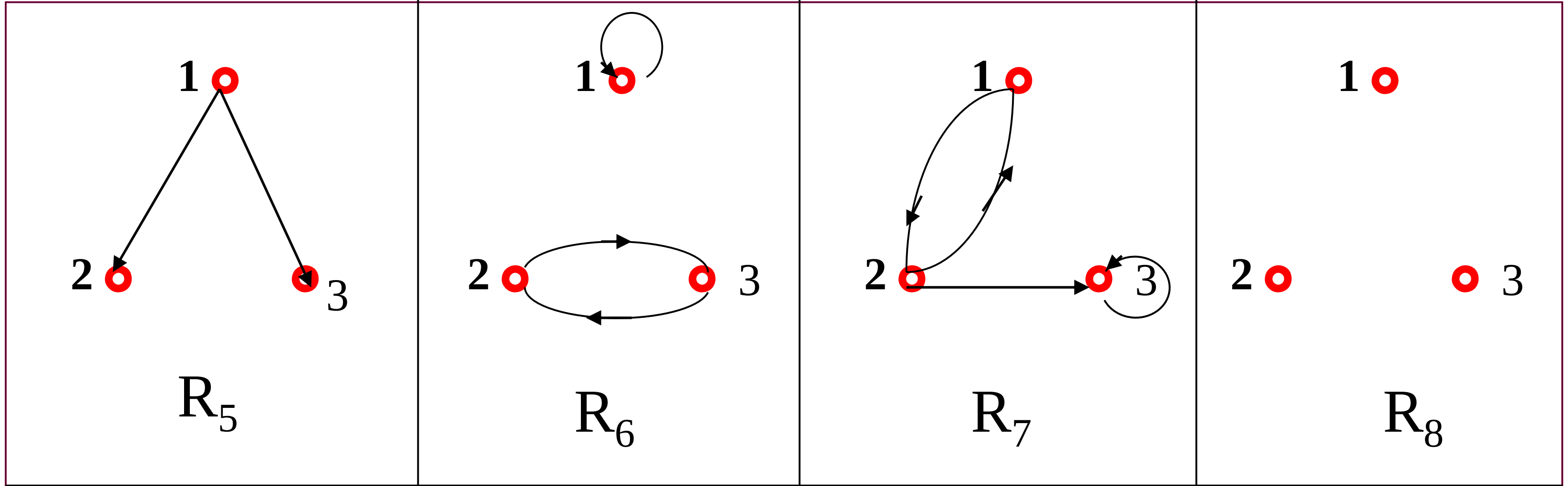
关系的性质

下面归纳这八个关系的性质：Y-有　N-无



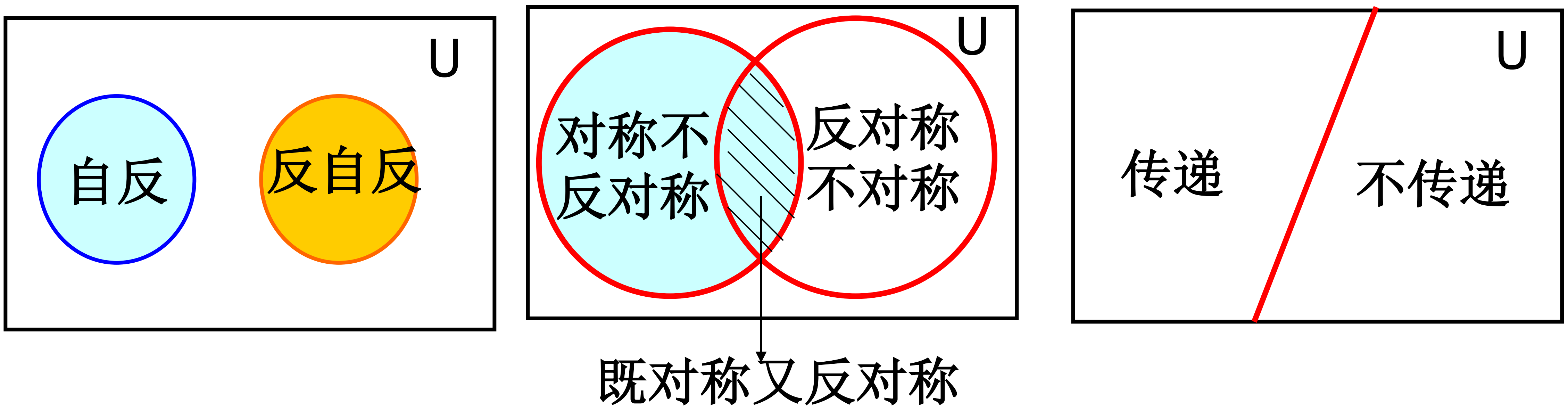
	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1	Y	N	N	Y	Y
R_2	N	Y	N	Y	N
R_3	Y	N	Y	N	Y
R_4	Y	N	Y	Y	Y

关系的性质



	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_5	N	Y	N	Y	Y
R_6	N	N	Y	N	N
R_7	N	N	N	N	N
R_8	N	Y	Y	Y	Y

关系文氏图



关系的性质

R在A上自反$\Leftrightarrow\forall x(x\in A\rightarrow xRx)$

R在A上反自反$\Leftrightarrow\forall x(x\in A\rightarrow <x,x>\notin R)$

R在A上对称$\Leftrightarrow\forall x\forall y((x\in A\wedge y\in A\wedge xRy)\rightarrow yRx)$

R在A上反对称

$\Leftrightarrow\forall x\forall y((x\in A\wedge y\in A\wedge xRy\wedge yRx)\rightarrow x=y)$

$\Leftrightarrow\forall x\forall y((x\in A\wedge y\in A\wedge x\neq y\wedge xRy)\rightarrow y\not R x)$

R在A上传递

$\Leftrightarrow\forall x\forall y\forall z((x\in A\wedge y\in A\wedge z\in A\wedge xRy\wedge yRz)\rightarrow xRz)$

关系的性质

性质判定:	从关系的有向图	从关系矩阵
自反性	每个结点都有环	主对角线全是1
反自反性	每个结点都无环	主对角线全是0
对称性	不同结点间如果有边,则有方向相反的两条边。	是以主对角线对称的矩阵。
反对称性	不同结点间最多有一条边.	以主对角线为对称的位置不会同时为1
传递性	如果有边<a,b>,<b,c>,则也有边<a,c>.	如果$a_{ij}=1$,且$a_{jk}=1$,则$a_{ik}=1$

关系的性质

例1　令I是整数集合，I上的关系R定义为：

R={<x,y>|x-y可被3整除}，

求证R是自反、对称和传递的。

证明：(1)证自反性：任取x∈I，(求证<x,x>∈R)

因 x-x=0, 0可被3整除,所以有<x,x>∈R, 故R自反。

关系的性质

(2)证对称性：任取$x,y\in I$，设$<x,y>\in R$，(求证$<y,x>\in R$)

由R定义得 $x-y$可被3整除，即$x-y=3n(n\in I)$，

$y-x=-(x-y)=-3n=3(-n)$，因$-n\in I$，于是 $<y,x>\in R$, 所以R对称。

(3)证传递性：任取$x,y,z\in I$，设xRy且yRz，(证xRz)

由R定义得 $x-y=3m$，$y-z=3n$ $(m.n\in I)$

$x-z= (x-y)+(y-z)=3m+3n=3(m+n)$，

因$m+n\in I$, 于是xRz，所以R传递。　　　　　证毕

举例

例1：在 N = {0,1,2,...} 上：

$\leq=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x\leq y\}$

自反,反对称,传递

$\geq=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x\geq y\}$

自反,反对称,传递

$<=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x<y\}$

反自反,反对称,传递

举例

$>=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x>y\}$ (大于关系)

反自反,反对称,传递

$I_N=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x=y\}$ (恒等关系)

自反,对称,反对称,传递

$E_N=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\}=N\times N$ (全域关系)

自反,对称,传递

谢 谢