2016《线性代数 II》期末考试卷(B)

使用专业、班级__________ 学号____________ 姓名_________________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

本题得分	

一、填空题(每小题 4 分, 共 20分)

1. 三阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} =$ ___32___.

2. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$，则 $(A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，且其秩为 2，则 $a=$ ___6___.

4. 设 η_1、η_2 是非齐次线性方程组 $AX=b$ 的两个解，若 $\lambda\eta_1+\mu\eta_2$ 仍然为该线性方程组的解，则 λ、μ 满足关系式 $\underline{\lambda+\mu=1}$.

5. 设 A 为三阶矩阵，且 A 的各行元素之和为 4，则 A 一定有特征值___4___.

本题得分	

二、选择题(每小题 4 分, 共 16 分)

1. 设 A，B 均为 n 阶矩阵, 则必有（ C ）.

（A）$|A+B|=|A|+|B|$　（B）$AB=BA$　（C）$|AB|=|BA|$　（D）$|A|^2=|B|^2$

2. 如果 $P\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}-2a_{21} & a_{12}-2a_{22} & a_{13}-2a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，则 $P=$（ B ）.

（A）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　（C）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　（D）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

3.“n 阶矩阵 A 有 n 个不同的特征根”是“A 与 n 阶对角阵相似”的（ B ）.

（A）充要条件　（B）充分而非必要条件

（C）必要而非充分条件　（D）既不充分也不必要条件

4. 设 A 是秩为 $n-1$ 的 n 阶矩阵，α_1、α_2 是方程组 $AX=0$ 的两个不同的解向量，则方程组 $AX=0$ 的通解为（ D ）.

（A）$\alpha_1+\alpha_2$　（B）$k\alpha_1$　（C）$k(\alpha_1+\alpha_2)$　（D）$k(\alpha_1-\alpha_2)$

本题得分	

三、（本题 10 分）

设 $a=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，$A=ab^T$，求 A^6.

解： $A^6=a\,(b^Ta)^5 b^T$ ………(4') $=-ab^T$ ………(6')

$$=-\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$ ………(10')

考试形式开卷（）、闭卷（√），在选项上打（√）

开课教研室___大学数学部___ 命题教师___命题组___ 命题时间___2017-5-1___ 使用学期___16-17-2___ 总张数___3___ 教研室主任审核签字_____________

本题得分	

四、（本题 12 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$，且满足 $AX=A+2X$，求 X.

解：$\because\ (A-2E)X=A\cdots\cdots\cdots(2')$

由 $|A-2E|=\begin{vmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{vmatrix}=-1\neq 0\Rightarrow A-2E$ 可逆 $\Rightarrow X=(A-2E)^{-1}A\cdots\cdots\cdots(5')$

$$(A-2E\,\vdots\,A)=\begin{pmatrix}2&2&3&4&2&3\\1&-1&0&1&1&0\\-1&2&1&-1&2&3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&3&-8&-6\\0&1&0&2&-9&-6\\0&0&1&-2&12&9\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots(11')$$

$$\therefore X=\begin{pmatrix}3&-8&-6\\2&-9&-6\\-2&12&9\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots(12')$$

本题得分	

五、（本题 12 分）齐次线性方程组为 $\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0\\x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=0\\x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=0\end{cases}$，问：

当 λ 为何值时，该方程组只有零解、有非零解；并求出非零解时的通解.

解：系数行列式 $|A|=\begin{vmatrix}1+\lambda&1&1\\1&1+\lambda&1\\1&1&1+\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+3)\lambda^2\cdots\cdots\cdots(3')$

⑴ 当 $|A|\neq 0$ 即 $\lambda\neq -3$ 且 $\lambda\neq 0$ 时，方程组只有零解；$\cdots\cdots\cdots(5')$

(2)当 $|A|=0$ 即 $\lambda=-3$ 或 $\lambda=0$ 时，方程组有非零解；$\cdots\cdots\cdots(7')$

当 $\lambda=-3$ 时，$A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow$ 通解为 $c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},c\in R\cdots\cdots(9'')$

当 $\lambda=0$ 时，$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow$ 通解为 $c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$；$c_1$、$c_2\in R.\cdots(12')$

本题得分	

六、（本题 12 分）

已知向量组 $\overrightarrow{\alpha_1}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\4\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\alpha_2}=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\2\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\alpha_3}=\begin{pmatrix}2\\-5\\3\\6\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\alpha_4}=\begin{pmatrix}1\\5\\4\\8\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\alpha_5}=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\0\end{pmatrix}$；

（1）求该向量组的秩以及它的一个最大无关组；

（2）将其余向量用所求的最大无关组线性表示.

解：$(\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3},\overrightarrow{\alpha_4},\overrightarrow{\alpha_5})=\begin{pmatrix}1&0&2&1&1\\-1&3&-5&5&-2\\2&1&3&4&2\\4&2&6&8&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&2&1&1\\0&1&-1&2&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots(4')$

$$\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&2&1&0\\0&1&-1&2&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots(6')$$

$\Rightarrow$ 该向量组的秩为 3 $\cdots\cdots\cdots(8')$

$\Rightarrow$ 最大无关组为 $(\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\ \overrightarrow{\alpha_5})\cdots\cdots\cdots(10')$

$\Rightarrow\overrightarrow{\alpha_3}=2\overrightarrow{\alpha_1}-\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_4}=\overrightarrow{\alpha_1}+2\overrightarrow{\alpha_2}\cdots\cdots\cdots(12')$

本题得分	

七、(本题12分)

设 $A=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}$，求正交矩阵 P 和对角阵 Λ， 使得 $P^{-1}AP=\Lambda$.

解: $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda&2&2\\2&3-\lambda&2\\2&2&3-\lambda\end{vmatrix}=(7-\lambda)(1-\lambda)^2=0\Rightarrow$ 特征值为7、1 ……(3')

当$\lambda=7$时, $(A-\lambda E)=\begin{pmatrix}-4&2&2\\2&-4&2\\2&2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$;……(5')

当$\lambda=1$时, $(A-\lambda E)=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$， $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$;……(8')

$\Rightarrow P=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{3}&-\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt6}{6}\\\frac{\sqrt3}{3}&\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt6}{6}\\\frac{\sqrt3}{3}&0&-\frac{\sqrt6}{3}\end{pmatrix}$……(11')； $\Lambda=\begin{pmatrix}7&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $P^{-1}AP=\Lambda$……(12')

本题得分	

八、（本题 6 分）

已知向量组$\vec{\alpha_1}$、$\vec{\alpha_2}$、$\vec{\alpha_3}$ 是正交向量组，证明：$\vec{\alpha_1}$、$\vec{\alpha_2}$、$\vec{\alpha_3}$ 线性无关.

证明：

设 $k_1\vec{\alpha_1}+k_2\vec{\alpha_2}+k_3\vec{\alpha_3}=\vec{O}$

$\Rightarrow\vec{\alpha_1}^T(k_1\vec{\alpha_1}+k_2\vec{\alpha_2}+k_3\vec{\alpha_3})=0$………(2')

因为$\vec{\alpha_1}$、$\vec{\alpha_2}$、$\vec{\alpha_3}$为正交向量组$\Rightarrow k_1\vec{\alpha_1}^T\vec{\alpha_1}=0\overset{\vec{\alpha_1}\neq\vec{0}}{\Rightarrow}k_1=0$

类似可证$k_2=k_3=0$………(5')

所以 $\vec{\alpha_1}$、$\vec{\alpha_2}$、$\vec{\alpha_3}$线性无关.………(6')