# 2023级《线性代数 I》期末考试试题(A)

班级____________ 学号____________ 姓名____________

**请将答案写在题纸上!**

一、填空题(1-10小题,每小题5分,共50分)

1. 行列式 $\begin{vmatrix} a+b & 0 & 0 & a-b \\ 0 & a+b & a-b & 0 \\ 0 & a-b & a+b & 0 \\ a-b & 0 & 0 & a+b \end{vmatrix} =$ ____

2. 设 $A,B$ 均为三阶方阵,$|A|=2$, $|B|=-4$, 则 $|2A^*B^{-1}|=$ __

3. 设 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$, 矩阵 $A=\alpha\beta^T$, 则 $A^5=$ __

4. 设 $n$ 阶矩阵 $A$ 和 $B$ 满足 $AB=A+B$, 则 $(A-E)^{-1}=$ __

5. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\2&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$, 又 $BA=A+2B$, 则 $B=$ __

6. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\4&t&-3\\3&-1&1\end{pmatrix}$, 若 $A$ 的列向量组线性相关,则 $t=$ __

7. 若 $n$ 阶可逆矩阵 $A$ 的每行元素之和为6,则 $3A^{-1}+2E$ 必有一特征值为 __

8. 若矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{pmatrix}$ 相似,则 $y=$ __

9. 设矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$. 若 $\alpha_1,\alpha_3$ 是 $A$ 的列向量组的极大无关组,且 $\alpha_2=2\alpha_1-3\alpha_3,\alpha_4=-\alpha_1+\alpha_3,b=\alpha_1+2\alpha_3-\alpha_4$, 则非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的通解为 __

10. 若矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&a&b+3\\0&a-2&a\end{pmatrix}$ 正定,则 $a$ 的取值范围是 ____

二、计算题(11-13小题,每小题12分,共36分)

11. 问 $k$ 为何值时,线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+kx_3=4 \\ -x_1+kx_2+x_3=k^2 \\ x_1-x_2+2x_3=-4 \end{cases}$ 有唯一解,无解,有无穷多解?并在有无穷多解时,求出结构式通解。

12. 已知向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\4\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\0\\7\\14\end{pmatrix}$, $\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_5=\begin{pmatrix}1\\3\\3\\10\end{pmatrix}$, 求此向量组的秩及一个极大无关组,并将其余向量用此极大无关组线性表示。

13. 用正交变换将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2$ 化为标准形。

三、证明题(14-15小题,每小题7分,共14分)

14. 设 $A$ 为可逆矩阵,证明:$A^TA$ 正定。

15. 设 $A$ 为 $n$ 阶方阵,且 $A^2=E$, 证明:$r(A-E)+r(A+E)=n$, 其中 $r(A)$ 表示 $A$ 的秩。

考试形式开卷( )、闭卷(√),在选项上打(√)

开课教研室 大学数学部 命题教师____ 命题时间 2024.5.20 使用学期 2023-2024-2 总张数 1 教研室主任审核签字