2023级《数学分析（2）》期中考试卷

使用专业、班级＿＿＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

题 数	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分
得 分									

本题得分	

一、填空题 〖每空 4 分，共计 20 分〗

1.定积分 $\int_{-1}^{1}(\frac{x\sin^4 x}{1+x^8}+\sqrt{1-x^2})dx=\frac{\pi}{2}$

2. 设 $f(x)$ 有连续的二阶导数，且 $f(\pi)=2,\int_0^{\pi}\left[f(x)+f''(x)\right]\sin xdx=5$，则 $f(0)=3$

3. 求曲线 $\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t), \\ y=a(\sin t-t\cos t), \end{cases}$（其中 $a>0,0\le t\le 2\pi$）的弧长 $2\pi^2 a$

4. $\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx=$ 2.

5.级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{\sqrt{n^p+1}}$ 收敛的充要条件是 p 满足不等式 $p>2$

本题得分	

二、选择题 〖每小题 4 分，共计 20 分〗

1. 设 $f'(\cos^2 x)=\sin^2 x$，且满足 $f(0)=0$，则 $f(x)=$（ D ）

A. $\cos x+\frac{1}{2}\cos^2 x$ B. $\cos^2 x-\frac{1}{2}\cos^4 x$

C. $x+\frac{1}{2}x^2$ D. $x-\frac{1}{2}x^2$

2. 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{sinx}{1+x^2}\cos^4 xdx$, $N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)dx$， $P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)dx$ 则有（ D ）

A. $N<P<M$ B. $M<P<N$ C. $N<M<P$ D. $P<M<N$

考试形式开卷（ ）、闭卷（ √ ），在选项上打（ √ ）

开课教研室 信计 命题教师＿＿＿ 命题时间 2024.4.22 使用学期 2023-2024（2）

3. 如果 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，且平均值为 2，则 $\int_1^{-1} f(x)dx =$（　C　）

A. -1　　B. 1　　C. -4　　D. 4

4. 下列反常积分收敛的是（　D　）

A. $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x}dx$　　B. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx$

C. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}dx$　　D. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln^3 x}}dx$

5. 设常数 $\lambda > 0$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$（　C　）

A. 发散　　B. 条件收敛　　C. 绝对收敛　　D. 收敛性与 λ 有关

本题得分	

三、计算题〖每小题 8 分，共计 16 分〗

（1）已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且满足方程 $f(x) = 3x - \sqrt{1-x^2}\int_0^1 f^2(x)dx$ 求 $f(x)$

解：设 $\int_0^1 f^2(x)dx = A$，则

$$f(x) = 3x - A\sqrt{1-x^2}$$

$$f^2(x) = 9x^2 - 6Ax\sqrt{1-x^2} + A^2(1-x^2)$$

$$A = \int_0^1 f^2(x)dx = \int_0^1 (9x^2 - 6Ax\sqrt{1-x^2} + A^2(1-x^2))dx$$

整理得 $2A^2 - 9A + 9 = 0$

解得 $A = \frac{3}{2}$ 或 $A = 3$

所以 $f(x) = 3x - \frac{3}{2}\sqrt{1-x^2}$ 或 $f(x) = 3x - 3\sqrt{1-x^2}$

（2）设 f 为连续可微函数，证明 $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$ 并求 $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

解：

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx \underline{\underline{x=\pi-t}} \int_{\pi}^{0} (\pi - t) f(\sin(\pi - t))(-1)dt$$

$$= \pi\int_0^{\pi} f(\sin t)dt - \int_0^{\pi} tf(\sin t)dt$$

$$= \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx - \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx$$

$$\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$$

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

$$= -\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{1}{1+\cos^2 x}d(\cos x)$$

$$= -\frac{\pi}{2}\arctan(\cos x)\Big|_0^\pi$$

$$= \frac{\pi^2}{4}$$

本题得分	

四、〖8 分〗设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $f(x)>0$，又

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + \int_b^x \frac{1}{f(t)}dt$$

证明：(1) $F'(x) \ge 2$；

(2) $F(x)=0$ 在 $[a,b]$ 中有且仅有一个实根.

证：（1）因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，且

$$F'(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)}$$

又 $f(x)>0$，所以 $F'(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)} \ge 2\sqrt{f(x) \bullet \frac{1}{f(x)}} = 2$

（2）因为 $F'(x) \ge 2$ 所以 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增，又 $f(x)>0$

$$F(a) = \int_b^a \frac{1}{f(t)}dt = -\int_a^b \frac{1}{f(t)}dt < 0$$

$$F(b) = \int_a^b f(t)dt > 0$$

本题得分	

五、〖8 分〗设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，$\lim_{n\to\infty} na_n = 0$，证明：

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

解：记级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 的前 n 项和为 s_n，则

$$s_n = (a_1 - a_2) + 2(a_2 - a_3) + \cdots + n(a_n - a_{n+1})$$
$$= a_1 + a_2 + \cdots + a_n - na_{n+1}$$

$$=a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}-(n+1)a_{n+1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n+1}a_k-(n+1)a_{n+1}$$

对上式两边取极限，得：

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n+1}a_k-(n+1)a_{n+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n+1}a_k-\lim_{n\to\infty}(n+1)a_{n+1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

即：$\sum_{n=1}^{\infty}n\left(a_n-a_{n+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$

本题得分	

六、〖10 分〗判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\arctan n}{\sqrt{n}}$的收敛性

解：令 $f(x)=\frac{\arctan x}{\sqrt{x}}\ \ (x\geq 1)$

$$f'(x)=\left(\frac{\arctan x}{\sqrt{x}}\right)'=\frac{2x-(1+x^2)\arctan x}{2(1+x^2)x^{\frac{3}{2}}}$$

当$x>\frac{\pi}{4}$时 $f'(x)<0$ 所以数列$\left\{\frac{\arctan n}{\sqrt{n}}\right\}$为单调递减数列

且$\lim_{n\to\infty}\frac{\arctan n}{\sqrt{n}}=0$

又莱布尼兹判别法可得级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\arctan n}{\sqrt{n}}$是收敛的。

七、（本题 10 分）用定义证明函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$在$(-1,1)$收敛，在$(-1,1)$不一致收敛，但在$[-a,a]$一致收敛，其中$0<a<1$.

证明：首先求出和函数，然后用定义证明即可！

收敛：对于固定的$x\in(-1,1)$，$\forall\varepsilon>0,\exists N=?$，使得当$n>N$时，都有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

一致收敛： $\forall\varepsilon>0,\exists N=?$，使得当$n>N$时，$\forall x\in(-1,1)$ 都有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

八、本题〖10 分〗设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$为正项级数，求证：当$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)>0$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛

证明：设$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)=A>0$，

由数列极限的保号性得：

$\exists N$,当$n>N$时有$\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}>\frac{A}{2}$。

即 $\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}>\frac{A}{2}a_{n+1}\Rightarrow a_{n+1}<\frac{2}{A}\left(\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)$

$$\sum_{n=N}^{m} a_{n+1}<\frac{2}{A}\sum_{n=N}^{m}\left(\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)\le\frac{2}{A}\left(\frac{a_N}{b_N}-\frac{a_{m+1}}{b_{m+1}}\right)\le\frac{2}{A}\frac{a_N}{b_N}$$

从而$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$的部分和有界，从而级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛。