线性代数 I（A）参考答案

一、填空题（1-12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

1. $4(y-x)(z-x)(z-y)$. **2.** $(4-a)(6-bc)$ **3.** $A=\begin{pmatrix}61 & 0\\ 3 & 0\end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ **6.** $P=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ **7.** $(1,1,-1)$ **8.** k(1,1,1)

9. $\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$ **10.** -288 **11.** 20 **12.** 是

二、解答题（13-14 小题，每小题 12 分，共 24 分）

13. 讨论方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3\\ x_1+\lambda x_2+x_3=-2\\ x_1+x_2+\lambda x_3=-2\end{cases}$ 解的情况并在有无穷多解的情况求出通解。

解：

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \lambda & -2\\ 1 & \lambda & 1 & -2\\ \lambda & 1 & 1 & \lambda-3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \lambda & -2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 3\lambda-3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \lambda & -2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 & 3\lambda-3\end{array}\right)$$

…………………………………………………… 4 分

当 $2-\lambda-\lambda^2\neq 0$，即 $\lambda\neq -2$ 且 $\lambda\neq 1$ 时，$rank(Ab)=rank(A)=3$，此时方程组有唯一解;

…………………………………………………… 2 分

当 $\lambda=-2$ 时，$rank(Ab)=3>rank(A)=2$，此时方程组无解;…………………………… 2 分

当 $\lambda=1$ 时，$rank(Ab)=rank(A)=1<3$，方程组有无穷多解。继续上述初等行变换得

$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$，故方程组的通解为 $\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+l\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ ………………………… 4 分

14. 求可逆矩阵 P，将 $\begin{pmatrix} 2023 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似对角化。

解：$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2023-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2(2023-\lambda)$

所以矩阵的特征值为 $\lambda_1=2023, \lambda_2=\lambda_3=0$. .... **4 分**

解方程组 $(A-2023E)x=0$ 得：$p_1=(2023,1,1)^T$. .... **2 分**

解方程组 $(A-0E)x=0$ 得：$p_2=(0,1,0)^T$，$p_3=(0,0,1)^T$ .... **3 分**

令 $P=\begin{pmatrix} 2023 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,则 $P^{-1}AP=diag\left(2023,0,0\right)$... **3 分**

三、证明题（15-16 小题，每小题 8 分，共 16 分）

15. 证明：若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则向量组 α_1，α_1+a_2，$\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3$ 线性无关.

证明：$(\alpha_1,\ \alpha_1+a_2,\ \alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3)=(\alpha_1,\ a_2,\ \alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

.... **4 分**

又 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 可逆，所以向量组 α_1，α_1+a_2，$\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3$ 线性无关。

.... **4 分**

16. 设 $A=(a_{ij})$ 为三阶实对称矩阵，证明：若 A 正定，则对角元 $a_{22}>0$

证明：因 A 正定，故 $(0,1,0)A(0,1,0)^T>0$， .... **4 分**

而 $a_{22}=(0,1,0)A(0,1,0)^T$，故 $a_{22}>0$ .... **4 分**