2017《线性代数 I》期末考试卷(A)评分标准

使用专业、班级__________ 学号____________ 姓名_________________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

本题得分	

一、填空题(每小题 5 分, 共 40 分)

(1) 设行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&-1\\2&3&7&8\\0&6&-4&3\\3&5&-7&4\end{vmatrix}$, 则 $A_{31}+2A_{32}+3A_{33}-A_{34}=$ ___0___.

(2) 设 $A=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\5&3&0&0\\0&0&1&2\\0&0&1&1\end{pmatrix}$, 则 $A^{-1}=$ $\begin{pmatrix}3&-1&0&0\\-5&2&0&0\\0&0&-1&2\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$.

(3) 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2+2A-E=O$, 则 $(A-E)^{-1}=$ ___$-(A+3E)/2$___.

(4) 设三阶方阵 A 有三个特征值 $-1,1,2$，则 $|A^{-1}+A^*|=$ ___$1/2$___.

(5) 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$ 线性无关，则 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4+\alpha_5)=$ ___4___.

(6) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是四元非齐次线性方程组 $AX=b$ 的三个解, $R(A)=3$, 且 $\alpha_1+\alpha_2=(2,4,0,8)^T$, $\alpha_2+\alpha_3=(6,5,4,3)^T$, 则 $AX=b$ 的通解为 ___$X=k(4,1,4,-5)^T+(1,2,0,4)^T$___.

(7) 已知 $\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(1,1,-1)^T,\alpha_3=(0,1,0)^T$ 和 $\beta_1=(1,-2,1)^T$, $\beta_2=(1,2,-1)^T$, $\beta_3=(0,1,-2)^T$ 为 R^3 的两组基, 则从基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵为 $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\-2&1&0\end{pmatrix}$.

(8) 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+2x_3^2+2tx_1x_2+2x_1x_3$ 是正定二次型，则 t 满足 ___$|t|<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$___.

本题得分	

二、解答题(每小题 9 分, 共 18 分)

(1) 设 $A=\begin{pmatrix}3&1&-1\\2&2&0\\1&0&2\end{pmatrix}$, 且 $BA=A+B$, 求 B.

解: $B(A-E)=A$

$(A-E)^TB^T=A^T$ ……(3′)

$$\begin{pmatrix}2&2&1&3&2&1\\1&1&0&1&2&0\\-1&0&1&-1&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1]{\substack{r_1\leftrightarrow r_2\\ r_2-2r_1}}\begin{pmatrix}1&1&0&1&2&0\\0&0&1&1&-2&1\\0&1&1&0&2&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&1&0&1&2&0\\0&1&1&0&2&2\\0&0&1&1&-2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1-r_2]{r_2-r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&2&-2&-1\\0&1&0&-1&4&1\\0&0&1&1&-2&1\end{pmatrix}$$ ……(8′)

得 $B=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-2&4&-2\\-1&1&1\end{pmatrix}$ ……(9′)

考试形式开卷（ ）、闭卷（√），在选项上打（√）

开课教研室__大学数学部__ 命题教师______ 命题时间__2017-12-12__ 使用学期__17-18-1__ 总张数__3__ 教研室主任审核签字__________

(2) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&x&-2\\0&-2&3\end{pmatrix}$ 与矩阵 $B=\begin{pmatrix}-1&&\\&2&\\&&y\end{pmatrix}$ 相似，求 x, y.

解：$\begin{cases}1+x+3=-1+2+y\\ \begin{vmatrix}1&-2&0\\-2&x&-2\\0&-2&3\end{vmatrix}=-2y\end{cases}$ ……(4′)

即得 $\begin{cases}x=y-3\\3x-16=-2y\end{cases}$ ……(7′)

得 $x=2, y=5$ ……(9′)

本题得分	

三、(本题12分) 设向量组 $\alpha_1=(1,2,0,-2)^T$, $\alpha_2=(-1,4,2,2)^T$, $\alpha_3=(3,3,-1,-6)^T$, $\alpha_4=(-5,2,4,10)^T$，求该向量组的秩以及一个最大无关组，并将其余向量用该最大无关组线性表示.

解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&-1&3&-5\\2&4&3&2\\0&2&-1&4\\-2&2&-6&10\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+2r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&-1&3&-5\\0&6&-3&12\\0&2&-1&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[r_3-3r_2]{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&-1&3&-5\\0&2&-1&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1+r_2]{r_2\times\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1&0&\frac{5}{2}&-3\\0&1&-\frac{1}{2}&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ ……(6′)

故 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$

α_1,α_2 为一个最大无关组

$\alpha_3=\frac{5}{2}\alpha_1-\frac{1}{2}\alpha_2$

$\alpha_4=-3\alpha_1+2\alpha_2$. ……(12′)

本题得分	

四、(本题12分) 问 λ 为何值时，线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\x_1+\lambda x_2+x_3=1+2\lambda\\x_1+x_2+\lambda x_3=1-\lambda\end{cases}$ 有惟一解，无解，无穷多解？并求其通解.

解：$B=(A\,b)=\begin{pmatrix}\lambda&1&1&0\\1&\lambda&1&1+2\lambda\\1&1&\lambda&1-\lambda\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-\lambda r_1]{r_1\leftrightarrow r_3,\ r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&1&\lambda&1-\lambda\\0&\lambda-1&1-\lambda&3\lambda\\0&1-\lambda&1-\lambda^2&\lambda(\lambda-1)\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&1&\lambda&1-\lambda\\0&\lambda-1&1-\lambda&3\lambda\\0&0&(1-\lambda)(\lambda+2)&\lambda(\lambda+2)\end{pmatrix}$ ……(4′)

(1) $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq-2$ 时，$R(A)=R(B)=3$，方程组有惟一解. ……(6′)

(2) $\lambda=1$ 时，$B\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，$R(A)=1$，$R(B)=2$ 方程组无解. ……(8′)

(3) $\lambda=-2$ 时，$B\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，$R(A)=R(B)=2<3$ 方程组有无穷多解.

此时 $\begin{cases}x_1-x_3=1\\x_2-x_3=\cancel{1}\,2\end{cases}$，令 $x_3=C$

得通解 $X=C\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$. 其中 C 为任意常数. ……(12′)

本题得分	

五、(本题12分) 求一个正交变换将二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)==x_1^2+x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2$ 化为标准型.

解: $A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ $\quad |A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&0\\-2&1-\lambda&0\\0&0&3-\lambda\end{vmatrix}=-(3-\lambda)^2(1+\lambda)$

$\therefore$ 特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=3$, $\lambda_3=-1$. ……(4′)

当 $\lambda_1=\lambda_2=3$ 时, $A-3E=\begin{pmatrix}-2&-2&0\\-2&-2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $x_1+x_2=0$

得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. ξ_1,ξ_2 已正交,单位化得 $p_1=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix},p_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

当 $\lambda_3=-1$ 时, $A+E=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\therefore\begin{cases}x_1-x_2=0\\x_3=0\end{cases}$

得基础解系 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, 单位化得 $p_3=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$ ……(10′)

令 $P=\left(p_1,p_2,p_3\right)$,则 P 正交

经正交变换 $x=Py$,二次型化为标准型 $f=3y_1{}^2+3y_2{}^2-y_3{}^2$. ……(12′)

本题得分	

六、(本题6分) 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,,\alpha_3$ 线性无关,讨论 $l\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,m\alpha_3+\alpha_1$ 的线性相关性.

解: 设 $x_1\left(l\alpha_1+\alpha_2\right)+x_2\left(\alpha_2+\alpha_3\right)+x_3\left(m\alpha_3+\alpha_1\right)=0$ ……(1′)

得 $\left(lx_1+x_3\right)\alpha_1+\left(x_1+x_2\right)\alpha_2+\left(x_2+mx_3\right)\alpha_3=0$

由 $\alpha_1,\alpha_2,,\alpha_3$ 线性无关可得 $\begin{cases}lx_1+x_3=0\\x_1+x_2=0\\x_2+mx_3=0\end{cases}$ ……(3′)

$\begin{vmatrix}l&0&1\\1&1&0\\0&1&m\end{vmatrix}=lm+1$

因此当 $lm+1\neq0$ 时,上述方程组只有零解. 向量组 $l\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,m\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关.

当 $lm+1=0$ 时,上述方程组有非零解. 向量组 $l\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,m\alpha_3+\alpha_1$ 线性相关. ……(6′)