3-7 复合关系和逆关系

复合关系

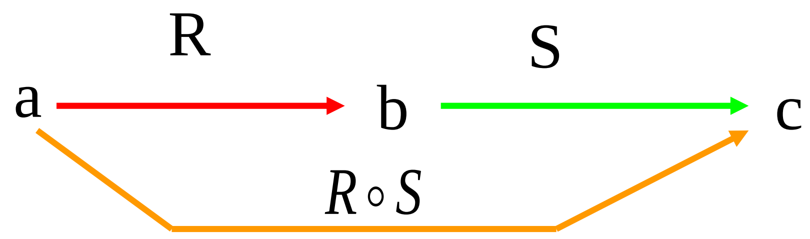
关系除了可进行集合的并、交、差、补、对称差等运算外，还可以进行关系的复合等运算。

例如：有3个人a,b,c，A={a,b,c}，

R是A上的兄妹关系， S是A上的母子关系，

$\langle a,b\rangle \in R \wedge \langle b,c\rangle \in S$

即a是b的哥哥, b是c的母亲，



a和c之间是什么关系？

a和c之间是舅舅和外甥的关系，

这样就产生一种新的关系，称它是R和S的复合关系，记作 R∘S

复合关系定义

一、定义：设R是从X到Y的关系，S是从Y到Z的关系，则R和S的复合关系记作 $R \circ S$

定义为：

$$R \circ S = \{<x,z> \mid x \in X \wedge z \in Z \wedge \exists y(y \in Y \wedge <x,y> \in R \wedge <y,z> \in S)\}$$

显然，$R \circ S$ 是从X到Z的关系。即

$R \subseteq X \times Y$，$S \subseteq Y \times Z$，$R \circ S \subseteq X \times Z$

复合关系计算方法

二、复合关系的计算方法

- 枚举法
- 关系图法
- 关系矩阵法
- 谓词公式法

枚举法

二、复合关系的计算方法

$A=\{1,2,3\}$， $B=\{1,2,3,4\}$， $C=\{1,2,3,4,5\}$

$R \subseteq A \times B$， $S \subseteq B \times C$

$R=\{ \langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,1\rangle \}$

$S=\{ \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 4,5\rangle \}$

(1)枚举法

$R \circ S=\{ \langle 1,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 3,2\rangle \}$

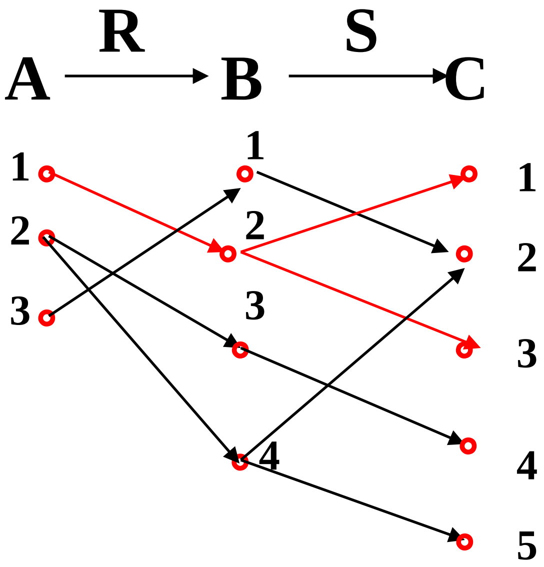
关系图法

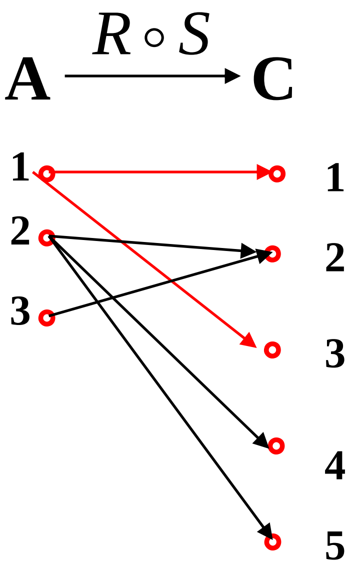
(2)有向图法（俗称过河拆桥法）

A={1,2,3}， B={1,2,3,4}， C={1,2,3,4,5}， R⊆A×B， S⊆B×C

R={<1,2>,<2,3>,<2,4>,<3,1>}

S={<1,2>, <2,1>, <2,3>, <3,4>,<4,2>,<4,5>}





关系矩阵法

(3)关系矩阵法

$$M_{R1\circ R2} = M_{R1} \circ M_{R2}$$

在{0，1}集合上定义两个运算(其中加法使用逻辑∨, 乘法使用逻辑∧):

逻辑乘 ∧：　$0\wedge 0=0$，　$0\wedge 1=0$，

$1\wedge 0=0$，　$1\wedge 1=1$

逻辑加∨：　$0\vee 0=0$，　$0\vee 1=1$，

$1\vee 0=1$，　$1\vee 1=1$

关系矩阵法

令 $A=\{a_1, a_2,\ldots, a_m\}$ ， $B=\{b_1, b_2,\ldots, b_n\}$， $C=\{c_1, c_2,\ldots, c_t\}$ ， $R\subseteq A\times B$， $S\subseteq B\times C$

$$M_R=\begin{pmatrix} <a_1,b_1><a_1,b_2>\ldots<a_l,b_n> \\ <a_2,b_1><a_2,b_2>\ldots<a_2,b_n> \\ \vdots \quad (a_{ij}) \quad \vdots \\ <a_m,b_1><a_m,b_2>\ldots<a_m,b_n> \end{pmatrix} \quad M_S=\begin{pmatrix} <b_1,c_1><b_1,c_2>\ldots<b_l,c_t> \\ <b_2,c_1><b_2,c_2>\ldots<b_2,c_t> \\ \vdots \quad (b_{ij}) \quad \vdots \\ <b_n,c_1><b_n,c_2>\ldots<b_n,c_t> \end{pmatrix} \quad M_{R\circ S}=\begin{pmatrix} <a_1,c_1>\ldots<a_l,c_t> \\ <a_2,c_1>\ldots<a_2,c_t> \\ \vdots \quad (c_{ij}) \quad \vdots \\ <a_m,c_1>\ldots<a_m,c_t> \end{pmatrix}$$

$$c_{11}=(a_{11}\wedge b_{11})\vee(a_{12}\wedge b_{21})\vee\ldots\vee(a_{1n}\wedge b_{n1}) = \bigvee_{k=1}^{n}(a_{1k}\wedge b_{k1})$$

$$c_{ij}=(a_{i1}\wedge b_{1j})\vee(a_{i2}\wedge b_{2j})\vee\ldots\vee(a_{in}\wedge b_{nj}) = \bigvee_{k=1}^{n}(a_{ik}\wedge b_{kj}) \qquad (1\le i\le m,\ 1\le j\le t)$$

关系矩阵法

例： A={1,2,3}， B={1,2,3,4}， C={1,2,3,4,5}

$R \subseteq A \times B$， $S \subseteq B \times C$

R={<1,2>,<2,3>,<2,4>,<3,1>}

S={<1,2>,<2,1>,<2,3>,<3,4>,<4,2>,<4,5>}

$$\begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ 0&0&1&1 \\ 1&0&0&0 \end{pmatrix}_{3\times4} \circ \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 1&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&1&0&0&1 \end{pmatrix}_{4\times5} = \begin{pmatrix} 1&0&1&0&0 \\ 0&1&0&1&1 \\ 1&0&0&0&0 \end{pmatrix}_{3\times5}$$

谓词公式法

(4)谓词公式法

设R是实数集合，S和T都是集合R上的关系，定义如下：

$$S=\{<x,y>|\ y=x^2+3x\}$$

$$T=\{<x,y>|\ y=2x+3\}$$

$$x \xrightarrow{S} x^2+3x \xrightarrow{T} 2(x^2+3x)+3 = 2x^2+6x+3$$

所以 $S\circ T=\{<x,y>|\ y=2x^2+6x+3\}$

复合关系的性质

三、性质

关系复合运算不满足交换律

1、结合律：R⊆A×B，S⊆B×C，T⊆C×D 则

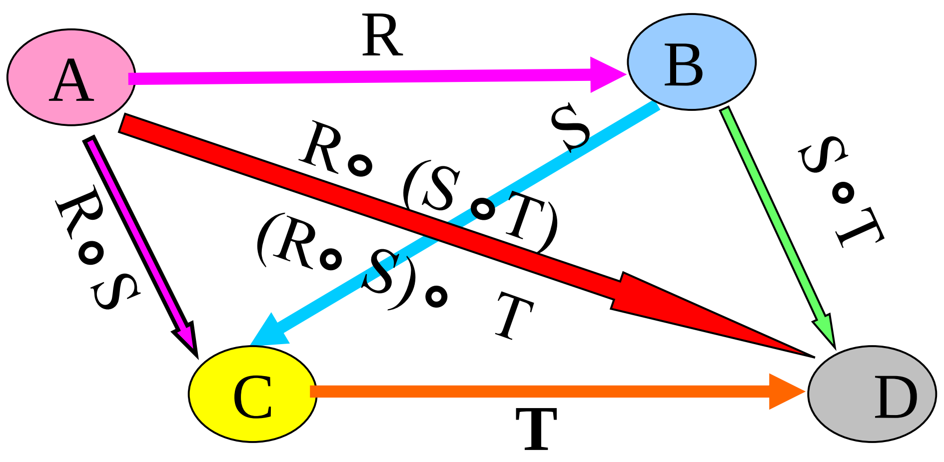
$$R\circ(S\circ T) = (R\circ S)\circ T$$

显然

$R\circ(S\circ T)\subseteq A\times D$,

$(R\circ S)\circ T\subseteq A\times D$

用图形象表示：



复合关系的性质

证明：设任意 $a\in A \wedge d\in D\wedge <a,d>\in R\circ(S\circ T)$，

$<a,d>\in R\circ(S\circ T)$

$\Leftrightarrow \exists b(b\in B\wedge <a,b>\in R\wedge <b,d>\in S\circ T)$

$\Leftrightarrow \exists b(b\in B\wedge <a,b>\in R\wedge \exists c(c\in C\wedge <b,c>\in S\wedge <c,d>\in T))$

$\Leftrightarrow \exists b\exists c(b\in B\wedge <a,b>\in R\wedge (c\in C\wedge <b,c>\in S\wedge <c,d>\in T))$

$\Leftrightarrow \exists c\exists b(c\in C\wedge (b\in B\wedge <a,b>\in R\wedge <b,c>\in S) \wedge <c,d>\in T)$

$\Leftrightarrow \exists c\ (c\in C\wedge \exists b(b\in B\wedge <a,b>\in R\wedge <b,c>\in S) \wedge <c,d>\in T)$

$\Leftrightarrow \exists c\ (c\in C\wedge <a,c>\in R\circ S\wedge <c,d>\in T)$

$\Leftrightarrow <a,d>\in (R\circ S)\circ T$

所以 $R\circ(S\circ T)= (R\circ S)\circ T$

复合关系的性质

2、分配律

$R \subseteq A \times B$， $S \subseteq B \times C$， $T \subseteq B \times C$

(1) $R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$

(2) $R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T)$

关系的复合运算对并运算有分配率。

对交运算没有分配率，但有包含关系。

复合关系的性质

证明(1)　$R\circ(S\cup T)=(R\circ S)\cup(R\circ T)$

设任意$a\in A\wedge c\in C\wedge \langle a,c\rangle\in R\circ(S\cup T)$，

$\langle a,c\rangle\in R\circ(S\cup T)$

$\Leftrightarrow \exists b(b\in B\wedge\langle a,b\rangle\in R\wedge\langle b,c\rangle\in S\cup T)$

$\Leftrightarrow\exists b(b\in B\wedge\langle a,b\rangle\in R\wedge(\langle b,c\rangle\in S\vee\langle b,c\rangle\in T))$

$\Leftrightarrow\exists b((b\in B\wedge\langle a,b\rangle\in R\wedge\langle b,c\rangle\in S)\vee(b\in B\wedge\langle a,b\rangle\in R\wedge\langle b,c\rangle\in T))$

$\Leftrightarrow\exists b(b\in B\wedge\langle a,b\rangle\in R\wedge\langle b,c\rangle\in S)\vee\exists b(b\in B\wedge\langle a,b\rangle\in R\wedge\langle b,c\rangle\in T)$

$\Leftrightarrow\langle a,c\rangle\in R\circ S\vee\langle a,c\rangle\in R\circ T$

$\Leftrightarrow\langle a,c\rangle\in(R\circ S)\cup(R\circ T)$

所以 $R\circ(S\cup T)=(R\circ S)\cup(R\circ T)$

复合关系的性质

证明(2) $R\circ(S\cap T)\subseteq(R\circ S)\cap(R\circ T)$

设任意 $a\in A\wedge c\in C\wedge\langle a,c\rangle\in R\circ(S\cap T)$

$\langle a,c\rangle\in R\circ(S\cap T)$

$\Leftrightarrow \exists b(b\in B\wedge\langle a,b\rangle\in R\wedge\langle b,c\rangle\in S\cap T)$

$\Leftrightarrow \exists b(b\in B\wedge\langle a,b\rangle\in R\wedge(\langle b,c\rangle\in S\wedge\langle b,c\rangle\in T))$

$\Leftrightarrow \exists b((b\in B\wedge\langle a,b\rangle\in R\wedge\langle b,c\rangle\in S)\wedge(b\in B\wedge\langle a,b\rangle\in R\wedge\langle b,c\rangle\in T))$

$\Rightarrow \exists b(b\in B\wedge\langle a,b\rangle\in R\wedge\langle b,c\rangle\in S)\wedge\exists b(b\in B\wedge\langle a,b\rangle\in R\wedge\langle b,c\rangle\in T)$

$\Leftrightarrow \langle a,c\rangle\in R\circ S\wedge\langle a,c\rangle\in R\circ T$

$\Leftrightarrow \langle a,c\rangle\in(R\circ S)\cap(R\circ T)$

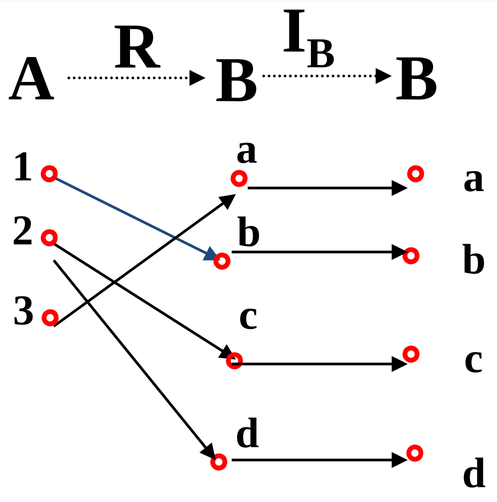
所以 $R\circ(S\cap T)\subseteq(R\circ S)\cap(R\circ T)$

【 提示： $\exists x(A(x)\wedge B(x))\Rightarrow\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$ 】

复合关系的性质

3、R是从A到B的关系，即 $R \subseteq A \times B$，
则 $R \circ I_B = I_A \circ R = R$

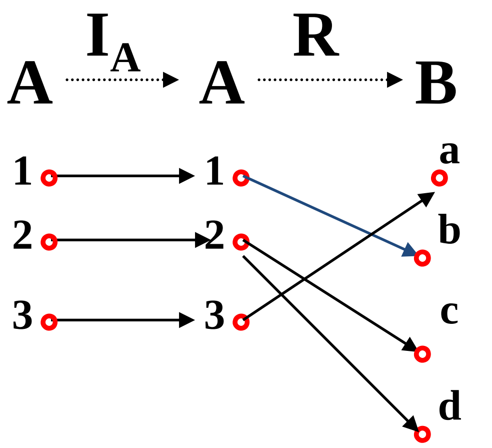
$R \circ I_B$



下面列举一例来验证。

令A={1,2,3}，B={a,b,c,d}

$I_A \circ R$



从这两个图看出它们的复合都等于R。

复合关系的性质

定理：R 是 A 上的关系，R是传递的， 当且仅当 $R \circ R \subseteq R$ 。

证明：必要性，已知 R 传递，（求证$R \circ R \subseteq R$）

任取$<x,y> \in R \circ R$，由关系复合的定义有

$\exists z(z \in A \wedge <x,z> \in R \wedge <z,y> \in R)$，

由R传递得 $<x,y> \in R$ 所以 $R \circ R \subseteq R$。

充分性，已知 $R \circ R \subseteq R$，（求证R 传递）

任取 $x,y,z \in A$，且有$<x,y> \in R \wedge <y,z> \in R$，

根据关系复合的定义有$<x,z> \in R \circ R$ ，

由$R \circ R \subseteq R$，于是 $<x,z> \in R$，所以 R 传递。

复合关系的性质

四、 关系的乘幂

令R是A上关系，由于复合运算可结合，所以关系的复合可以写成乘幂形式。

即$R \circ R = R^2$， $R^2 \circ R = R \circ R^2 = R^3$， …

一般地

$R^0 = I_A$,

$R^m \circ R^n = R^{m+n}$

$(R^m)^n = R^{mn}$ (m,n为非负整数)

逆关系

逆关系定义

一、定义

R是从A到B的关系，如果将R中的所有序偶的两个元素的位置互换，得到一个从B到A的关系，称之为R的逆关系，记作R^C。

$$R^C=\{<y,x>|<x,y>\in R\}$$

$$<y,x>\in R^C \Leftrightarrow <x,y>\in R$$

显然 $R^C \subseteq B \times A$，即 R^C是从B到A的关系。

逆关系计算方法

二、计算方法

1. $R=\{<1,2>,<2,3>,<3,4>,<4,5>\}$

   $R^C=\{<2,1>,<3,2>,<4,3>,<5,4>\}$

2. R^C的有向图：是将R的有向图的所有边的方向颠倒一下即可。

3. R^C的关系矩阵为R关系矩阵的转置，即$M_{R^C}=(M_R)^T$。

例如

$$M_R=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}_{3\times 4}\qquad M_{R^c}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}_{4\times 3}$$

逆关系的性质

三. 性质

令R、S都是从X到Y的关系，则

1. $(R^C)^C = R$
2. $(R \cup S)^C = R^C \cup S^C$
3. $(R \cap S)^C = R^C \cap S^C$
4. $(R - S)^C = R^C - S^C$
5. $(\sim R)^C = \sim R^C$

逆关系的性质

证明性质2.　$(R\cup S)^C = R^C\cup S^C$

证明：任取 $y\in Y\wedge x\in X\wedge <y,x>\in(R\cup S)^C$，则

$<y,x>\in(R\cup S)^C \Leftrightarrow <x,y>\in R\cup S$

$\Leftrightarrow <x,y>\in R\vee<x, y>\in S$

$\Leftrightarrow <y,x>\in R^C\vee<y,x>\in S^C$

$\Leftrightarrow<y,x>\in R^C\cup S^C$

所以 $(R\cup S)^C = R^C\cup S^C$ 。

逆关系的性质

证明性质5.　$(\sim R)^C = \sim R^C$

证明：任取 $y \in Y \wedge x \in X \wedge \langle y,x\rangle \in (\sim R)^C$

$\langle y,x\rangle \in (\sim R)^C \Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in \sim R$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \notin R \Leftrightarrow \neg \langle x,y\rangle \in R \Leftrightarrow \neg \langle y,x\rangle \in R^C$

$\Leftrightarrow \langle y,x\rangle \notin R^C \Leftrightarrow \langle y,x\rangle \in \sim R^C$

所以 $(\sim R)^C = \sim R^C$

逆关系的性质

性质6.令R是从X到Y的关系，S是Y到 Z的关系，则

$(R \circ S)^C = S^C \circ R^C$ 。 (注意 $\neq R^C \circ S^C$)

证明：任取$z \in Z \wedge x \in X \wedge \langle z,x\rangle \in (R \circ S)^C$,

$\langle z,x\rangle \in (R \circ S)^C \Leftrightarrow \langle x,z\rangle \in R \circ S$

$\Leftrightarrow \exists y(y \in Y \wedge \langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,z\rangle \in S)$

$\Leftrightarrow \exists y(y \in Y \wedge \langle y,x\rangle \in R^C \wedge \langle z,y\rangle \in S^C)$

$\Leftrightarrow \exists y(y \in Y \wedge \langle z,y\rangle \in S^C \wedge \langle y,x\rangle \in R^C)$

$\Leftrightarrow \langle z,x\rangle \in S^C \circ R^C$

所以 $(R \circ S)^C = S^C \circ R^C$

逆关系的性质

定理1　$R \subseteq S \Leftrightarrow R^C \subseteq S^C$。

证明：充分性，已知$R^C \subseteq S^C$，则任取$<x,y> \in R$

$<x,y> \in R \Leftrightarrow <y, x> \in R^C$

$\Rightarrow <y, x> \in S^C \Leftrightarrow <x,y> \in S$

所以　$R \subseteq S$

必要性，已知$R \subseteq S$，则任取$<y,x> \in R^C$，

$<y,x> \in R^C \Leftrightarrow <x,y> \in R$

$\Rightarrow <x,y> \in S \Leftrightarrow <y,x> \in S^C$

所以　$R^C \subseteq S^C$

逆关系的性质

定理 2　R是A上关系，则

(1) R是对称的，当且仅当 $R^C=R$

(2) R是反对称的，当且仅当 $R\cap R^C\subseteq I_A$。

逆关系的性质

证明(1)R是对称的，当且仅当 $R^C=R$

充分性：已知 $R^C=R$ (求证R对称)

任取 $x,y\in A$，设$\langle x,y\rangle\in R$，则$\langle y,x\rangle\in R^C$，

而$R^C=R$，所以有$\langle y,x\rangle\in R$，

所以R对称。

逆关系的性质

证明(1)R是对称的，当且仅当 $R^C=R$

必要性：已知R 对称，(求证$R^C=R$)

先证$R^C \subseteq R$，任取$<y,x> \in R^C$，则$<x,y> \in R$，因R对称，所以有$<y,x> \in R$，所以 $R^C \subseteq R$。

再证$R \subseteq R^C$，任取$<x,y> \in R$，因R对称，所以有$<y,x> \in R$，则$<x,y> \in R^C$，所以 $R \subseteq R^C$。

最后得$R^C=R$ 。

逆关系的性质

证明(2) R是反对称的，当且仅当 $R\cap R^C\subseteq I_A$

充分性，已知$R\cap R^C\subseteq I_A$，(求证R反对称)

任取 $x,y\in A$，设$<x,y>\in R$ 且$<y,x>\in R$，

$<x,y>\in R\land<y,x>\in R$

$\Leftrightarrow<x,y>\in R\land<x,y>\in R^C$，

$\Leftrightarrow <x,y>\in R\cap R^C\Rightarrow <x,y>\in I_A$ (因$R\cap R^C\subseteq I_A$)

$\Rightarrow x=y$

所以 R反对称。

逆关系的性质

必要性，已知R反对称，(求证$R\cap R^C\subseteq I_A$)

任取$<x,y>\in R\cap R^C$

$<x,y>\in R\cap R^C \Leftrightarrow <x,y>\in R\wedge <x,y>\in R^C$

$\Leftrightarrow <x,y>\in R\wedge <y,x>\in R$

$\Rightarrow x=y$ (因R反对称)

$\Rightarrow <x,y>\in I_A$

所以 $R\cap R^C\subseteq I_A$。

谢 谢