
3-11 相容关系

相容关系

相容关系是另一种常见关系，如朋友关系、同学关系等。

一、定义：给定集合 X 上的关系 r ，若 r 是**自反的**、**对称的**，则称 r 是 X 上的相容关系。

例子： X 是由一些英文单词构成的集合。

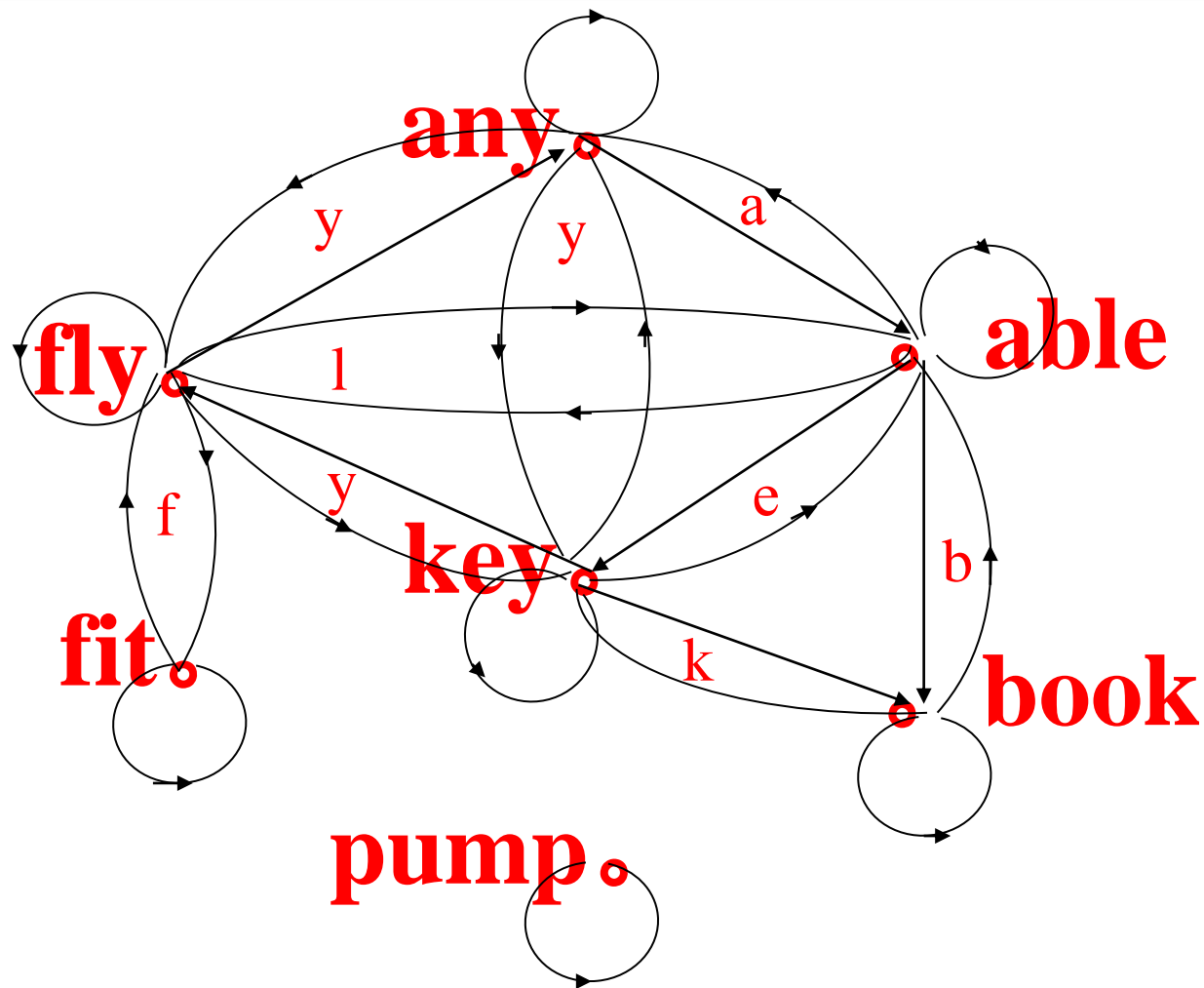
$X = \{\text{fly, any, able, key, book, pump, fit}\}$,

X 上关系 r :

$$r = \{ \langle \alpha, \beta \rangle \mid \alpha \in X, \beta \in X \text{ 且 } \alpha \text{ 与 } \beta \text{ 含有相同字母} \}$$

相容关系

r 的有向图:
有自反、
对称性, 但
不传递。



相容关系简化图及矩阵

二、 简化图和简化矩阵

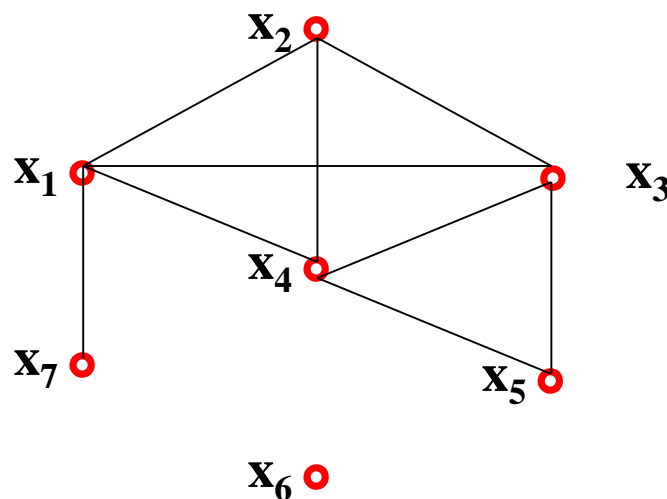
图的简化: (1) **不画环**;

(2) 两条对称边用一条**无向**直线代替。

令 $x_1 = \text{fly}$, $x_2 = \text{any}$, $x_3 = \text{able}$, $x_4 = \text{key}$, $x_5 = \text{book}$, $x_6 = \text{pump}$, $x_7 = \text{fit}$,

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$,

r 的简化图及简化矩阵为:

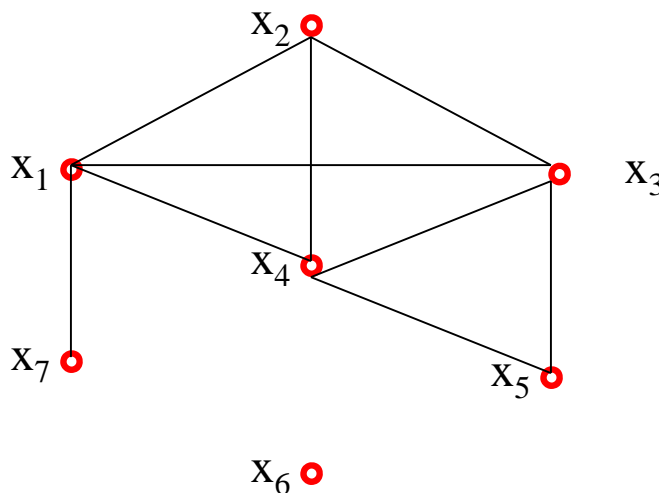


x_2	1					
x_3	1	1				
x_4	1	1	1			
x_5	0	0	1	1		
x_6	0	0	0	0	0	
x_7	1	0	0	0	0	0
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6

相容类

三. 相容类及最大相容类

相容类定义：设 r 是集合 X 上的相容关系， $C \subseteq X$ ，如果对于 C 中任意两个元素 x, y 都有 $\langle x, y \rangle \in r$ ，则称 C 是 r 的一个相容类。



x_2	1					
x_3	1	1				
x_4	1	1	1			
x_5	0	0	1	1		
x_6	0	0	0	0	0	
x_7	1	0	0	0	0	0
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6

$\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}, \{x_1, x_2, x_3\}, \{x_2, x_3, x_4\}, \{x_1, x_2, x_4\}$, 等都是相容类。

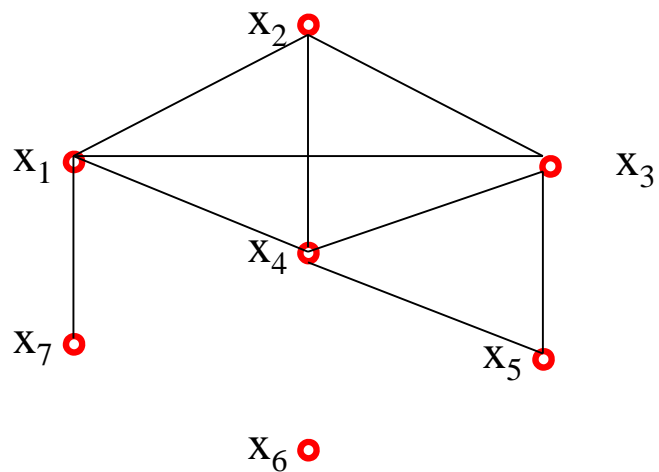
上述相容类中，有些相容类间有真包含关系。

最大相容类

最大相容类定义：设 r 是集合 X 上的相容关系， C 是 r 的一个相容类，如果 C 不能被其它相容类所真包含，则称 C 是一个最大相容类，记作 C_r 。

也可以说， C 是一个相容类，如果 C 中加入任意一个 X 中的其它元素，就不再是相容类，则 C 就是一个最大相容类。

最大相容类



x_2	1					
x_3	1	1				
x_4	1	1	1			
x_5	0	0	1	1		
x_6	0	0	0	0	0	
x_7	1	0	0	0	0	0
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6

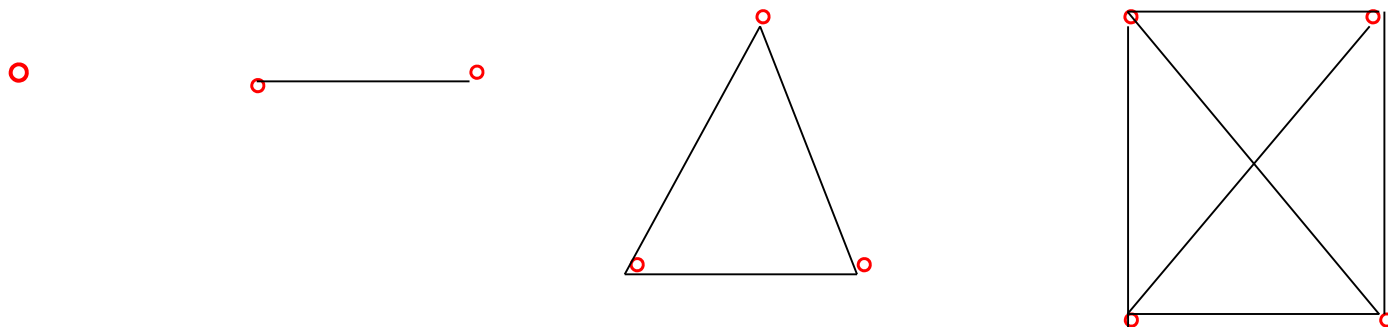
$\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $\{x_3, x_4, x_5\}$, $\{x_1, x_7\}$, $\{x_6\}$ 都是最大相容类。

最大相容类

从简化图找最大相容类：

- 找最大的**完全多边形**。
- 在相容关系简化图中，每个**最大完全多边形**的结点集合构成一个最大相容类。

完全多边形：在多边形中，任意两个结点之间均相联结。



完全覆盖

四、完全覆盖：

定义：r 是X上的相容关系，由 r 的所有最大相容类为元素构成的集合，称之为 X 的完全覆盖。记作 $C_r(X)$ 。

例如：

$$C_r(X) = \{\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{x_3, x_4, x_5\}, \{x_1, x_7\}, \{x_6\}\}$$

$$C_r'(X) = \{\{x_1, x_2, x_5\}, \{x_2, x_3, x_5\}, \{x_3, x_4, x_5\}, \{x_1, x_4, x_5\}\}$$

相容关系定理

定理 给定集合 X 上的一个覆盖 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, 由它确定的关系 $R = A_1^2 \cup A_2^2 \cup \dots \cup A_n^2$, 其中 $A_i^2 = A_i \times A_i$ ($i=1,2,\dots,n$) 是 X 上的一个相容关系。

证明:

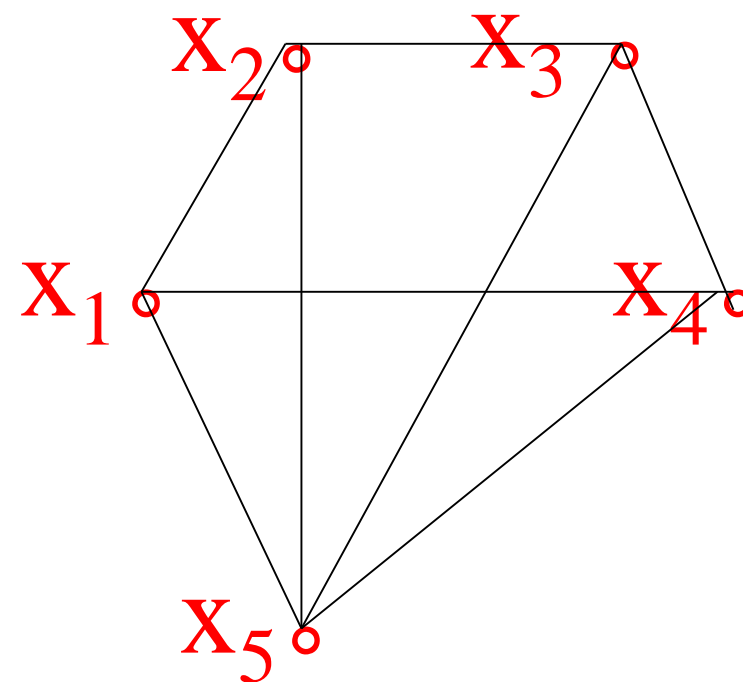
1) 证 R 自反: 任取 $a \in X$, 因为 A 是 X 的覆盖, 必存在正整数 $n \geq i > 0$, 使得 $a \in A_i$, 而 $\langle a, a \rangle \in A_i \times A_i$, 又 $A_i \times A_i \subseteq R$, 于是有 $\langle a, a \rangle \in R$, 即 R 是自反的。

2) 证 R 对称: 任取 $a, b \in X$, 设 $\langle a, b \rangle \in R$, 必存在正整数 $n \geq i > 0$, 使得 $\langle a, b \rangle \in A_i \times A_i$, 于是 $\langle b, a \rangle \in A_i \times A_i$, 又 $A_i \times A_i \subseteq R$, 所以有 $\langle b, a \rangle \in R$, 即 R 是对称的。

课堂练习

练习： 给定 X 上相容关系 r' ，如图所示，
求 r' 的最大相容类。

$\{x_1, x_2, x_5\}$, $\{x_2, x_3, x_5\}$,
 $\{x_3, x_4, x_5\}$, $\{x_1, x_4, x_5\}$



谢谢