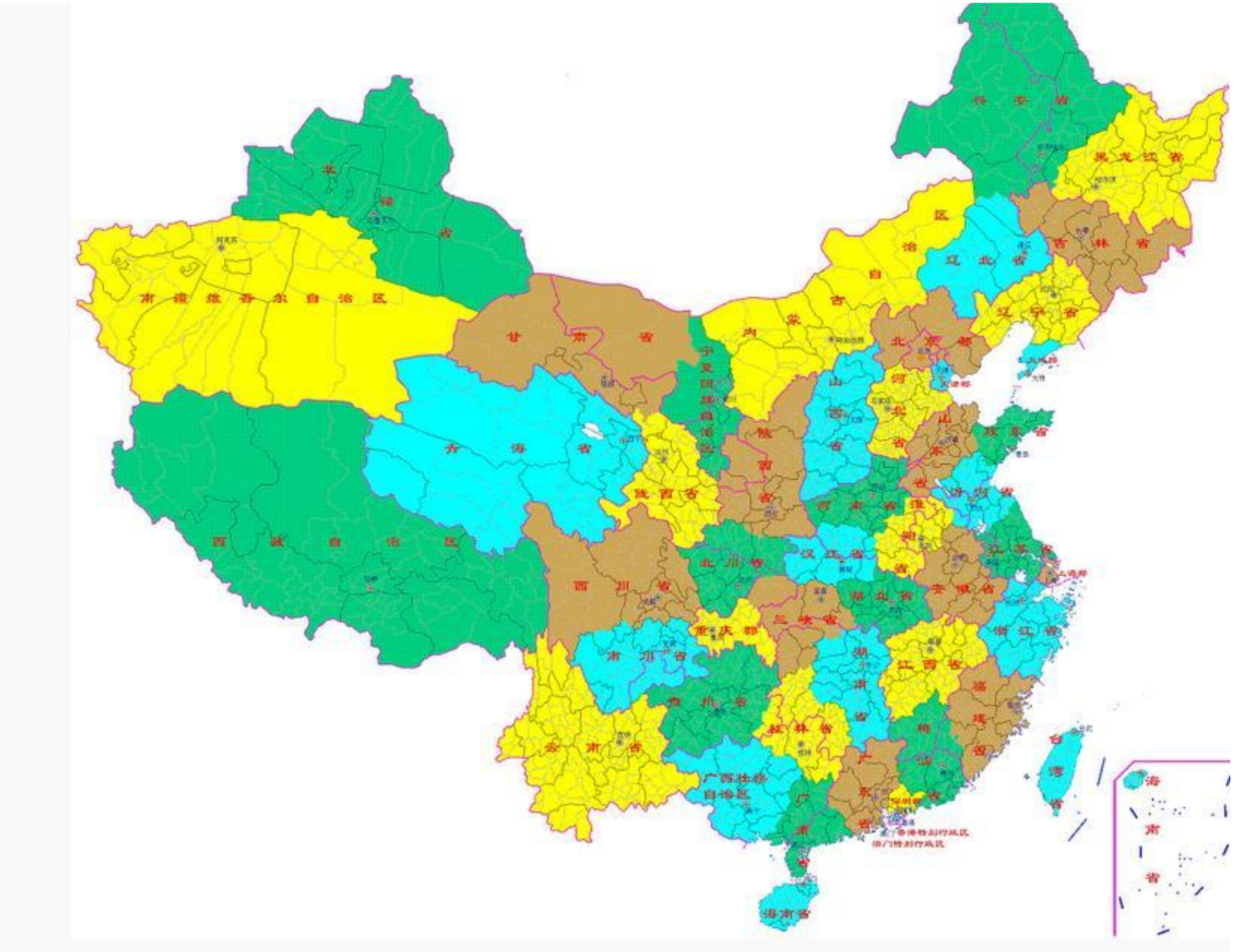
7-6 对偶图与着色

对偶图与着色



对偶图与着色

与平面图有密切关系的一个图的应用是图形的着色问题，这个问题最早起源于地图的着色。

一个地图的相邻的两个国家着于不同的颜色，那么最少需用多少种颜色?

长时间悬而未决的数学难题

提出猜想

一百多年前，英国格色里(Guthrie)提出了用四种颜色即可对地图着色的猜想

第一次证明

1879年肯普(Kempe)提出了这个猜想的第一个证明

第二次证明

1890年希伍德(Hewood)发现肯普的证明是错误的，但他指出肯普的方法，虽不能证明地图着色用四种颜色就够了，但可证明用五种颜色就够了

第三次证明

1976年美国数学家阿佩尔和黑肯宣布：他们用电子计算机证明了四色猜想是成立的。

所以从1976年以后就把四色猜想这个名词改为“四色定理”了

对偶图

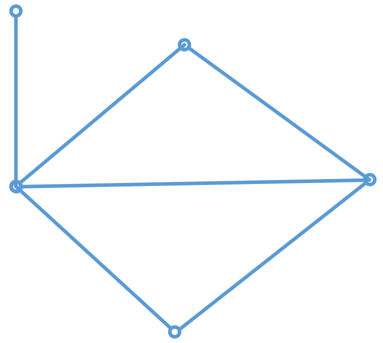
给定平面图$G = \langle V, E\rangle$，它有面F_1，F_2，…，F_n，若有图$G^* = \langle V^*, E^*\rangle$满足下述条件：

(1)对于图G的任一个面F_i，内部有且仅有一个结点$v_i^* \in V^*$。

(2)对于图G的面F_i，F_j的公共边e_k，存在且仅存在一条边$e_k^* \in E^*$，使$e_k^* = (v_i^*, v_j^*)$，且e_k^*和e_k相交。

(3)当且仅当e_k只是一个面F_i的边界时，v_i^*存在一个环e_k^*和e_k相交，

则图G^*是图G的对偶图。



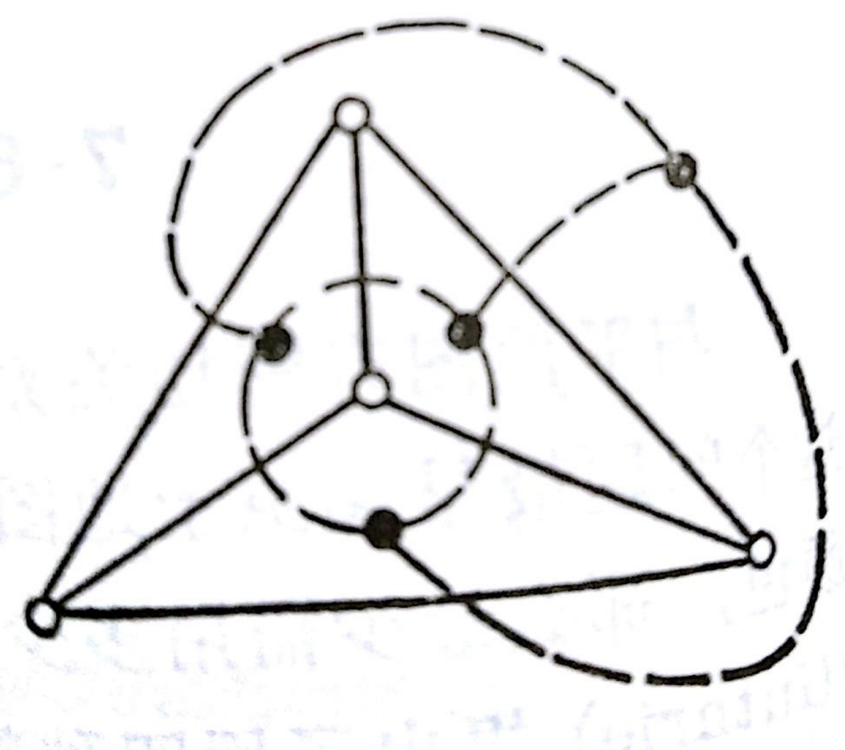
对偶图

- **从这个定义看出，*G**是*G*的对偶图，则*G*也是*G**的对偶图。一个连通平面图的对偶图也必是平面图。**

自对偶图

[定义]自对偶图

如果图*G*的对偶图*G**同构于*G*，则称*G*是自对偶的。



对偶图与着色

- **从对偶图的概念，我们可以看到，对于地图的着色问题，可以归纳为对于平面图的结点着色问题，因此四色问题可以归结为要**证明**对于任何一个平面图，一定可以用四种颜色对它的结点进行着色，使得邻接的结点都有不同的颜色。**

对偶图与着色

- 图G的正常着色(或简称为**着色**)是指对它的每一个结点指定一种颜色，使得没有两个相邻的结点有同一种颜色。如果图G在着色时用n种颜色，我们称**G为n-色的**。
- 对于图G着色时，需**最少**颜色数称为**着色数**，记作$\chi(G)$。

对偶图与着色

- 虽然到现在还没有一个简单通用的方法，可以确定任一图G是否是*n*-色的。但我们可用韦尔奇·鲍威尔法(Welch Powell)（贪心算法）对图G进行着色，其方法是：
  - (1)将图G的结点按照度数的递减次序进行排列。(这种排列可能并不是唯一的，因为有些点有相同的度数)。
  - (2)用第一种颜色对第一点进行着色，并且按排列次序，对前面着色点不邻接的每一点着上同样的颜色。
  - (3)用第二种颜色对尚未着色的点重复(2)，用第三种颜色继续这种做法，直到所有的点全部着上色为止。

对偶图与着色

例1 用韦尔奇·鲍威尔法对图7-6.1着色。

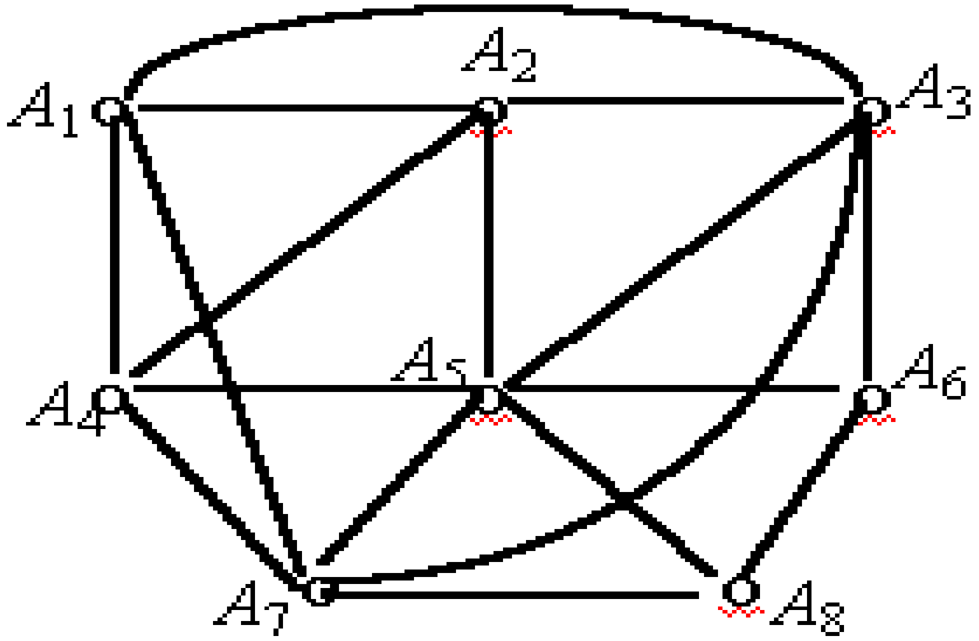


图7-6.1

解　(1)根据递减次序排列各点A_5，A_3，A_7，A_1，A_2，A_4，A_6，A_8。

对偶图与着色

(2)第一种颜色对A_5着色，并对不相邻的结点A_1也着第一种颜色。

(3)对A_3结点和它不相邻的结点A_4，A_8着第二种颜色。

(4)对A_7结点和它不相邻的结点A_2，A_6着第三种颜色。

因此图G是**三色的**。注意图G不可能是二色的，因为A_1，A_2，A_3相互邻接，故必须用三种颜色。所以$x(G) = 3$。

对偶图与着色

- **定理7-6.1** **对于n个结点的完全图K_n，有$\chi(K_n) = n$。**

  证明 **因为完全图每一个结点与其它各结点都相邻接，故n个结点的着色数不能少于n，又n个结点的着色数至多为n，故有$\chi(K_n) = n$。**

对偶图与着色

- **定理7-6.2** **设G为至少有三个结点的连通平面图，则G中必有一个结点u，使得$\deg(u) \le 5$。**

  证明 **设$G = \langle V, E \rangle$，若G的每一个结点u，都有$\deg(u) \ge 6$，但**

  因故$2e \ge 6v$，所以$e \ge 3v > 3v - 6$，与定理7-5.3矛盾。

定理7-5.3 设G为有v个结点e条边的连通平面图，若$v \ge 3$，则$e \le 3v-6$。

对偶图与着色

- **定理7-6.3 任意平面图*G*最多是5-色的。**
- **证明：P320**

图着色问题的应用——解决资源分配冲突问题

- 1.有n项工作，每项工作需要一天的时间完成，有些工作需要相同的人员或者设备而不能安排在同时进行。问需要几天才能完成所有的工作?

解题思路：用图描述，顶点表示工作，如果两项工作不能同时进行就用一条边连接。工作的时间安排对应于图的点着色。所需要的最少天数即对应这个图的最少着色数。

图着色问题的应用——解决资源分配冲突问题

- 2. 无线交换设备波长分配。有n台设备和k个发射波长，要给每个设备分配一个波长。如果两个设备靠的太近，则不能给他们分配相同的波长，以防止干扰。
- 解题思路：用图描述，顶点表示设备，如果两个设备靠的近，则不能给题目分配相同的波长，就用一条边连接。这样，这个图的k着色就给出了一个波长分配方案：给不同颜色的设备分配不同的波长。

谢 谢