# 1-3 命题公式及其真值表

# 命题公式

先看一个命题公式:

P：3是素数。

$(P \rightarrow F) \vee (Q \leftrightarrow R) \wedge T$

# 命题公式

在命题公式中有三种数据类型：

- 命题常项：即命题的真值。
- 常值命题：即具体命题。
- 命题变元：用大写字母表示的任一命题。命题变元本身不是命题，因为它没有固定真值，只有给它赋值，才变成命题。

将一个命题常项或常值命题赋予命题变元的过程称为给命题变元赋值，也称为对命题变元作指派。

# 合式公式

合式公式也称为命题公式，简称为公式。

## 定义：

(1) 单个命题变元本身是合式公式。

(2) 若A是合式公式，则$\neg$A是合式公式。

(3) 若A和B是合式公式，则$(A \wedge B)$、$(A \vee B)$、$(A \rightarrow B)$、$(A \leftrightarrow B)$都是合式公式。

(4) 当且仅当有限次地应用(1)，(2)，(3)所得到的符号串是合式公式。

注：这是一个递归方式的定义（递归定义）
（1）是递归定义的基础
（2）、（3）是归纳
（4）是递归的界限

# 命题公式

例：下面的式子是合式公式：

$(P \wedge Q)$,

$(\neg P \rightarrow R)$,

$((P \wedge Q) \vee R)$

下面的式子不是合式公式：

$(P \wedge Q$,

$P \neg \rightarrow R$,

$P \wedge Q \vee R \vee$

# 命题公式

为了简化命题公式，约定：

(1) 最外层括号可省；

(2) 不影响运算次序的括号可省。

运算次序由高到低为：

$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$

# 命题公式

合式公式：

$(P\wedge Q)$，$(\neg P\rightarrow R)$，$((P\wedge Q)\vee R)$

可以简化成：

$P\wedge Q$，

$\neg P\rightarrow R$，

$(P\wedge Q)\vee R$ ，

$P\wedge Q\vee R$

# 命题符号化

命题符号化（命题翻译），就是将自然语言表达的句子用符号化的命题公式来表达。

命题符号化的步骤：

(1)先将语句分解成原子命题。

(2)将每个原子命题用大写字母表示。注意每个原子命题都必须是一个完整的句子。

(3)用确切的逻辑联结词联结原子命题，构成给定命题的符号表达式。

# 命题符号化

例1 将下列命题符号化，并讨论它们的真值：

(1) $\sqrt{3}$ 是无理数当且仅当加拿大位于亚洲。

解：(1)令 P：$\sqrt{3}$ 是无理数，

真值为T；

Q：加拿大位于亚洲，

真值为F；

(1)符号化为 $P \leftrightarrow Q$，

真值为F。

# 命题符号化

(2) 除非 a 能被 2 整除，否则 a 不能被 4 整除。其中a 是一给定正整数。

解：令 P： a 能被 2 整除； Q： a 能被 4 整除； 这句话的含义与“如果 a 不能被 2 整除，则 a 不能被 4 整除”一样，也等价于说“如果a 能被 4 整除，则 a 一定能 被 2 整除”。

所以(2)表达为：$\neg P \rightarrow \neg Q$，也即$Q \rightarrow P$。

当 Q为T，P一定为T。也即没有Q为T，P为F的情况发生，所以其真值为T。

# 命题符号化

例2 符号化下列命题

(1) 如果小张与小王都不去，则小李去。

(2) 如果小张与小王不都去，则小李去。

解：令 P：小张去。Q：小王去。R：小李去。

(1)命题符号化为： $(\neg P\wedge\neg Q)\rightarrow R$

(2)命题符号化为： $\neg(P\wedge Q)\rightarrow R$

或 $(\neg P\vee\neg Q)\rightarrow R$

# 命题符号化

例3 符号化下面命题：

仅当天不下雨且我有时间，才上街。

解：令 P：天下雨。Q：我有时间。R：我上街。

分析：由于“仅当”是表示的是“必要条件”。

即我上街，一定是天不下雨且我有时间时；而天不下雨且我有时间时我不一定上街。

所以该命题表达为：$R \to (\neg P \wedge Q)$

# 命题符号化

例4 符号化下面命题：

若天不下雨，我就上街；否则在家。

解：令 P：天下雨。Q：我上街。R：我在家。 该命题可符号化为：

$$(\neg P \to Q) \wedge (P \to R)$$

# 命题符号化

例5 一个人起初说，“占据空间的有质量的而且不断变化的叫物质”；后来他改说，“占据空间的有质量的叫物质，而物质是不断变化的。”问他前后主张的差异在什么地方，试以命题形式进行分析。

解：令 P：某物占据空间； Q：某物有质量；
R：某物不断变化； S：某物叫物质。

起初：$(P \wedge Q \wedge R) \leftrightarrow S$

后来：$((P \wedge Q) \leftrightarrow S) \wedge (S \rightarrow R)$

# 命题符号化

例6 说离散数学枯燥无味或毫无价值，那是不对的。

解：

令 P：离散数学是枯燥无味的； Q：离散数学是毫无价值的。

该命题可符号化为：$\neg(P \vee Q)$

# 命题符号化

例7 若不是他生病了，我是不会同意他不参加学习的。

解：

令 P：他生病了； Q：我同意他不参加学习。

该命题可符号化为： $P \leftrightarrow Q$ 或者 $\neg P \leftrightarrow \neg Q$

# 真值表

一个含有命题变元的命题公式不是命题，因为它没有固定真值，但是给其中的所有命题变元赋值以后它就有了唯一的真值。

将所有各种赋值情况汇列成表，即为该命题公式的真值表。

# 真值表

例：命题公式 $(\neg P \to Q) \vee Q$ 的真值表如下所示：

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $\neg P \to Q$ | $(\neg P \to Q) \vee Q$ |
|---|---|---|---|---|
| F | F | T | F | F |
| F | T | T | T | T |
| T | F | F | T | T |
| T | T | F | T | T |

# 真值表

构造真值表的步骤：

- 由于每个命题变元都有两种赋值可能性(T,F)，所以含有 n(n ≥1) 个命题变元的命题公式真值表有$2^n$行。
- 将n个命题变元按字母次序排列。
- 将 F 记为 0，T 记为 1，按照二进制数的次序赋值。
- 赋值从 00…0 开始，然后按二进制加法依次加1，直到 11…1 为止。
- 对每个赋值，计算命题公式的真值。

# 真值表

例：构造
$P\rightarrow(Q\rightarrow R)$
的真值表

| | P | Q | R | $Q\rightarrow R$ | $P\rightarrow(Q\rightarrow R)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 0 0 | F | F | F | T | T |
| 0 0 1 | F | F | T | T | T |
| 0 1 0 | F | T | F | F | T |
| 0 1 1 | F | T | T | T | T |
| 1 0 0 | T | F | F | T | T |
| 1 0 1 | T | F | T | T | T |
| 1 1 0 | T | T | F | F | F |
| 1 1 1 | T | T | T | T | T |

# 课堂练习

例：构造 $(p \vee q) \rightarrow \neg r$ 的真值表

| $p$ $q$ $r$ | $p \vee q$ | $\neg r$ | $(p \vee q) \rightarrow \neg r$ |
|---|---|---|---|
| 0 0 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 0 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 1 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 1 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 0 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 0 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 1 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 1 1 | 1 | 0 | 0 |

# 谢 谢