高等数学 I(2)期末考试卷 A 参考答案

一、选择题（1~5 小题，每小题 6 分，共 30 分）

1. 设有直线 $l_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+8}{1}$ 与 $l_2:\begin{cases}x-y=6,\\2y+z=3.\end{cases}$ 求直线 l_1 和 l_2 的夹角.

解：$s_1=(1,-2,1)$，$s_2=\begin{vmatrix}i & j & k\\1 & -1 & 0\\0 & 2 & 1\end{vmatrix}=-i-j+2k=(-1,-1,2)$ —3'

$$\cos\phi=\frac{s_1\cdot s_2}{|s_1||s_2|}=\frac{1}{2}\Rightarrow\phi=\frac{\pi}{3}$$ —3'

2. 设 $z=arctan\left[xy+\sin(x+y)\right]$，求 $dz\big|_{(0,\pi)}$.　　答案：$(\pi-1)dx-dy$

3. 求二次积分 $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1\sqrt{x^3+1}dx$　　答案：$\dfrac{4\sqrt{2}-2}{9}$

4. 设 C 是圆周 $x^2+y^2=4$，求第一类曲线积分 $\oint_C(x^2+y^2+\sin xy)ds$　　$\underline{\quad 16\pi \quad}$.

5. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-2)^n$ 在 $x=-1$ 处条件收敛，求此级数的收敛区间。

解：由 Abel 定理可得收敛区间为（-1，5）.

6. 设函数 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)dt$，其中 φ 具有二阶导数，ψ 具有一阶导数，求 $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}$.

答案：0

解：

$$u_x=\varphi'(x+y)+\varphi'(x-y)+\psi(x+y)-\psi(x-y)$$

$$u_y=\varphi'(x+y)-\varphi'(x-y)+\psi(x+y)+\psi(x-y)$$

$$u_{xx}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y)$$

$$u_{yy}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y)$$

7. （10 分）求曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在点(0,1,-1)处的切平面的方程。

答案：$x-y+z+2=0$

8. （10 分） 求 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极值。

解：求函数的驻点

令 $\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2-y=0, \\ f_y(x,y)=24y^2-x=0 \end{cases}$ 得 $P_1(0,0)$, $P_2(\frac{1}{6},\frac{1}{12})$.

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6x & -1 \\ -1 & 48y \end{pmatrix}$$

5′

$H_f(P_1)=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，所以 $P_1(0,0)$ 是鞍点；

$H_f(P_2)=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ 正定，故 $P_2(\frac{1}{6},\frac{1}{12})$ 是函数的极小值点，相应的极小值为

$$f(\frac{1}{6},\frac{1}{12})=\left(\frac{1}{6}\right)^3+8\left(\frac{1}{12}\right)^3-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}=-\frac{1}{216}.$$

5′

9. （12 分）（1）求函数 $z=2-x^2-y^2$ 在点 $(3,4)$ 处的方向导数的最大值；

（2）求曲面 $z=2-x^2-y^2$ （ $z\geq 0$ ）的面积。

解：（1） $\nabla z|_{(3,4)}=(z_x,z_y)|_{(3,4)}=(-2x,-2y)|_{(3,4)}=-2(3,4)$,

6′

方向导数的最大值为梯度的模 $|\nabla z(3,4)|=10$.

（2） $z=2-x^2-y^2$

$$S=\iint_\Sigma dS\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}=\iint_{x^2+y^2\leq 2}\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}dxdy=\frac{13\pi}{3}.$$

6′

10. （10 分） 计算曲线积分 $\int_L (2x-y+4)dx+(5y+3x-6)dy$，其中 L 是折线 $O(0,0)\to A(3,0)\to B(3,2)$

解：补充有向线段BO，则

$$\int_L (2x-y+4)dx+(5y+3x-6)dy=\oint_{L+BO} - \int_{BO} = \oint_{L+BO} + \int_{OB}$$ ....2 分

$$\oint_{L+BO}(2x-y+4)dx+(5y+3x-6)dy \overset{Green}{=} \iint_D (3-(-1))d\sigma = 4A(D)=12$$ ....4 分

$$\int_{OB}(2x-y+4)dx+(5y+3x-6)dy$$

$$\overset{y=\frac{2}{3}x}{=} \int_0^3\left(2x-\frac{2}{3}x+4+\frac{2}{3}(\frac{10}{3}x+3x-6)\right)dx=\int_0^3\left(\frac{50}{9}x\right)dx=25$$ ....4 分

$$\int_L (2x-y+4)dx+(5y+3x-6)dy=12+25=37.$$

注：亦可直接计算。

11. （10 分）设曲面 Σ 是 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧，求曲面积分

$$\iint_\Sigma xy^3dydz+zdzdx+x^2dxdy.$$

解：补曲面$\Sigma_1:\begin{cases}x^2+y^2\le 4,\\ z=0\end{cases}$ 取下侧，记 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$，则

$$\iint_\Sigma xy^3dydz+zdzdx+x^2dxdy=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1}$$ ....2 分

由 Gauss 公式和区域关于 xoz 面的对称性可得

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} = \iiint_\Omega \left(y^3+0+0\right)dV=0$$ ....4 分

化曲面积分为二重积分并用极坐标方法计算可得

$$\iint_{\Sigma_1} = -\iint_D x^2dxdy=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^2\cos^2\theta\cdot rdr=-4\pi$$ ....4 分

故 $\iint_\Sigma xydydz+zdzdx+x^2dxdy=4\pi$。

12. （1）（7 分）求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的和函数.

解：收敛域为 $(-1,1)$，　　　2'

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n=2\sum_{n=0}^{\infty}nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n=2x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$=2x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'+\sum_{n=0}^{\infty}x^n=2x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'+\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$=2x\left(\frac{x}{1-x}\right)'+\frac{1}{1-x}$$

$$=\frac{2x}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x}=\frac{1+x}{(1-x)^2},x\in(-1,1).$$　　　5'

（2）（5 分）证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sin\pi x}{1+x^5}dx$ 收敛。

证明：$0<u_n=\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sin\pi x}{1+x^5}dx\le\int_0^{\frac{1}{n}}\sin\pi x dx=\frac{1}{\pi}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)\sim\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2=\frac{\pi}{2n^2}.$

2'　　　3'

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sin\pi x}{1+x^5}dx$ 收敛