2018 级《 高等数学 I(1) 》期末考试卷 （A）

使用专业、班级__________ 学号____________ 姓名_________________

题　数	一	二	三	四	五	六	七	总　　分
得　分								

本题得分	

一、填空题〖每小题 4 分，共计 32 分〗

(1) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}=\underline{\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)}$.

(2) 已知 $f(x)=\int_1^x\sqrt{1+t^3}\,dt$，则 $(f^{-1})'(0)=\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

(3) 函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}$ 的跳跃间断点为 $\underline{x=1}$.

(4) 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=e,\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]$，

则 $c=\underline{\frac{1}{2}}$.

(5) 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)F(x)=\frac{\arctan\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(1+x)}$. 已知

$F(1)=\frac{\pi}{4},F(x)>0$，则 $f(x)=\underline{\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}}$.

(6) 定积分 $\int_{-2}^{2}(x^3+2)\sqrt{4-x^2}\,dx=\underline{4\pi}$.

(7) 圆 $x^2+y^2=1$ 绕直线 $x=2$ 旋转而成的旋转体的体积为 $\underline{4\pi^2}$.

(8) 微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2x-y}+1$ 的通解为 $\underline{x-y+\ln|2x-y-1|=C}$.

本题得分	

二、计算题〖每小题 6 分，共计 30 分〗

(1) 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\right)^{nx}$ (其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n>0$).

解

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\right)^{nx}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}})-n}{n}\right)^{\frac{n}{(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}})-n}\cdot x\cdot[(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}})-n]} \qquad (2分)$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot[(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}})-n]} \qquad (2分)$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}})-n}{\frac{1}{x}}}=e^{\ln a_1a_2\cdots a_n}=a_1a_2\cdots a_n \qquad (2分)$$

(2) 已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数，它在 $x=0$ 的某个邻域内满足关系式

$$f(1+\tan x)+3f(1-\tan x)=8x+o(x),$$

且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6,f(6))$ 处的法线方程.

解 因为 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数，所以 $f(6)=f(1)$ 且

$f'(6)=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(6+h)-f(6)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(5+1+h)-f(5+1)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$. (2 分)

由 $f(x)$ 连续得 $f(1)+3f(1)=\lim\limits_{x\to0}f(1+\tan x)+3f(1-\tan x)=\lim\limits_{x\to0}8x+o(x)=0$，

故 $f(1)=0$. (1 分)

又 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(1+\tan x)+3f(1-\tan x)}{x}=8$，而

考试形式开卷（ ）、闭卷（√ ），在选项上打（√）

开课教研室__大学数学部___ 命题教师_________ 命题时间__2018-12-05____ 使用学期__2018-2019-1___ 总张数__3___ 教研室主任审核签字 _________

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+\tan x)+3f(1-\tan x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+\tan x)-f(1)+3(f(1-\tan x)-f(1))}{\tan x}\cdot\dfrac{\tan x}{x}=-2f'(1)$

所以 $f'(1)=-4$. (2 分)

因此曲线在点 $(6, f(6))$ 处的法线方程为 $y=\dfrac{1}{4}(x-6)$. (1 分)

(3) 求不定积分 $\int\dfrac{\cos x}{1+\cos x}dx$.

解 1

$\int\dfrac{\cos x}{1+\cos x}dx=\int\dfrac{\cos x(1-\cos x)}{\sin^2 x}dx$ (2分)

$=\int\dfrac{1}{\sin^2 x}d\sin x-\int(\csc^2 x-1)dx$ (2分)

$=-cs\,c\,x+\cot x+x+C.$ (2分)

解 2 令 $u=\tan\dfrac{x}{2}$，则

$\int\dfrac{\cos x}{1+\cos x}dx=\int\dfrac{1-u^2}{1+u^2}du$ (2分)

$=\int[\dfrac{2}{1+u^2}-1]du=2\arctan u-u+C$ (2分)

$=x-\tan\dfrac{x}{2}+C.$ (2分)

(4) 求积分 $\int_0^a\dfrac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$.

解

$\int_0^a\dfrac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}\xlongequal{x=a\sin t}\int_0^{\frac{p}{2}}\dfrac{a\cos t}{a\sin t+a\cos t}dt$ (2分)

$=\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{p}{2}}\dfrac{\cos t+\sin t+\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}dt=\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{p}{2}}(1+\dfrac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t})dt$ (2分)

$=\dfrac{p}{4}+\dfrac{1}{2}\ln(\sin t+\cos t)\Big|_0^{\frac{p}{2}}=\dfrac{p}{4}.$ (2分)

(5) 求方程 $y''+y=\cos x$ 满足条件 $y\big|_{x=0}=0, y'\big|_{x=0}=\dfrac{3}{2}$ 的特解.

解 原方程对应的齐次线性方程的特征方程为 $r^2+1=0$，故 $r_{1,2}=\pm i$. 所以对应的齐次线性方程的通解为 $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$. (2 分)

因为 $l=i$ 是特征方程的根，故令 $y^*=x(A\cos x+B\sin x)$ 为原方程的特解，代入原方程得

$-2A\sin x+2B\cos x=\cos x$. 比较系数得 $A=0, B=\dfrac{1}{2}$，故 $y^*=\dfrac{1}{2}x\sin x$. 因此原方程的通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\dfrac{1}{2}x\sin x$. (3 分)

由初值条件 $y\big|_{x=0}=0, y'\big|_{x=0}=\dfrac{3}{2}$ 得 $C_1=0, C_2=\dfrac{3}{2}$，

从而所求特解为 $y=\dfrac{3}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}x\sin x$. (1 分)

本题得分	

三、〖每小题 5 分，共计 10 分〗

(1) 计算由曲线 $y=\sqrt{x+2}$ 与直线 $x-3y+4=0$ 所围平面图形的面积.

解 解方程 $\begin{cases}x-3y+4=0,\\ y=\sqrt{x+2}\end{cases}$ 得交点分别为 $(2,2)$ 和 $(-1,1)$. (1 分)

因此所求面积为

$A=\int_1^2(3y-4-(y^2-2))dy$ (2分)

$=\left[-\dfrac{1}{3}y^3+\dfrac{3}{2}y^2-2y\right]_1^2=\dfrac{1}{6}.$ (2分)

(2) 计算曲线 $y=\int_{-\frac{p}{2}}^{x}\sqrt{\cos t}\,dt$ 上相应于 $-\dfrac{p}{2}\le x\le\dfrac{p}{2}$ 的一段弧长.

解 由 $\cos t\ge 0$ 知 $-\dfrac{p}{2}\le t\le\dfrac{p}{2}$.因此所求弧长为

$S=\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\sqrt{1+y'^2}dx$ (2分)

$=\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\sqrt{1+\cos x}dx=$ (2分)

$2\int_0^{\frac{p}{2}}\sqrt{2}\cos\dfrac{x}{2}dx=4.$ (1分)

本题得分	

四、〖10 分〗设函数 $y(x)$ 满足方程 $y''-4y'+4y=0$.

(1) 证明：反常积分 $\int_{-\infty}^{0} y(x)dx$ 收敛.

(2) 当 $y(0)=1, y'(0)=1$ 时，求 $\int_{-\infty}^{0} y(x)dx$ 的值.

解 (1) 方程 $y''-4y'+4y=0$ 的特征方程为 $r^2-4r+4=0$，解得 $r_{1,2}=2$.所以方程 $y''-4y'+4y=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{2x}$. (2 分)

因为

$$\int_{-\infty}^{0} y(x)dx=\int_{-\infty}^{0}(C_1+C_2x)e^{2x}dx=C_1\int_{-\infty}^{0}e^{2x}dx+C_2\int_{-\infty}^{0}xe^{2x}dx \quad (2分)$$

$$=\frac{1}{2}C_1e^{2x}\Big|_{-\infty}^{0}+C_2\left(\frac{x}{2}e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}\right)\Big|_{-\infty}^{0} \quad (2分)$$

$$=\frac{C_1}{2}-\frac{C_2}{4}. \quad (1分)$$

故反常积分 $\int_{-\infty}^{0} y(x)dx$ 收敛. (1 分)

(2) 将条件 $y(0)=1, y'(0)=1$ 代入到 $y=(C_1+C_2x)e^{2x}$，解得 $C_1=1, C_2=-1$.因此

$$\int_{-\infty}^{0} y(x)dx=\frac{C_1}{2}-\frac{C_2}{4}=\frac{3}{4}. \quad (2 分)$$

本题得分	

五、〖8 分〗求曲线 $y=(x-1)(x+1)^3$ 的单调区间、凹凸区间、极值和拐点.

解 $y'=(x+1)^3+3(x-1)(x+1)^2=(x+1)^2(4x-2), y''=2(x+1)(4x-2)+4(x+1)^2=12x(x+1)$.

令 $y'=0, y''=0$，得 $x_1=-1, x_2=0, x_3=\frac{1}{2}$. (2 分)

当 $x<-1$ 时，$y'<0, y''>0$，所以曲线在 $(-\infty,-1]$ 上单调递减且图形是凹的.

当 $-1<x<0$ 时，$y'<0, y''<0$，所以曲线在 $[-1,0]$ 上单调递减且图形是凸的.

当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时，$y'<0, y''>0$，所以曲线在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上单调递减且图形是凹的.

当 $x>\frac{1}{2}$ 时，$y'>0, y''>0$，所以曲线在 $[\frac{1}{2},+\infty)$ 上单调递增且图形是凹的. (4 分)

所以曲线的单调递增区间为 $[\frac{1}{2},+\infty)$，单调递减区间为 $(-\infty,\frac{1}{2}]$，$y(\frac{1}{2})=-\frac{27}{16}$ 为函数的极小值.曲线的凹区间为 $[0,+\infty)$ 和 $(-\infty,-1]$，凸区间为 $[-1,0]$，$(-1,0),(0,1)$ 为曲线的两个拐点. (2 分)

本题得分	

六、证明题 〖每小题 5 分，共计 10 分〗

(1) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$.证明方程 $F(x)=0$ 在 (a,b) 内有且仅有一个根，其中 $F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x \frac{1}{f(t)}dt \quad x\in[a,b]$.

证明 存在性：因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且

$$F(a)=\int_b^a \frac{1}{f(t)}dt=-\int_a^b \frac{1}{f(t)}dt<0, F(b)=\int_a^b f(t)dt>0.$$

由零点定理知存在 $c\in(a,b)$ 使得 $F(c)=0$，即方程 $F(x)=0$ 在 (a,b) 内有根. (3 分)

唯一性：因为 $F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}\geq 2\sqrt{f(x)\cdot\frac{1}{f(x)}}=2$，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增，故方程 $F(x)=0$ 在 (a,b) 内至多有一根.

综上可知，方程 $F(x)=0$ 在 (a,b) 内有且仅有一个根. (2 分)

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f''(x)>0$.证明 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$

证明 由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导得

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(x)}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

x 介于 x 与 $\frac{a+b}{2}$ 之间. (2 分)

因为 $f''(x)>0$，故 $f(x)\geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)$，从而

$$\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right]dx=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)，即$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx. \quad (3 分)$$