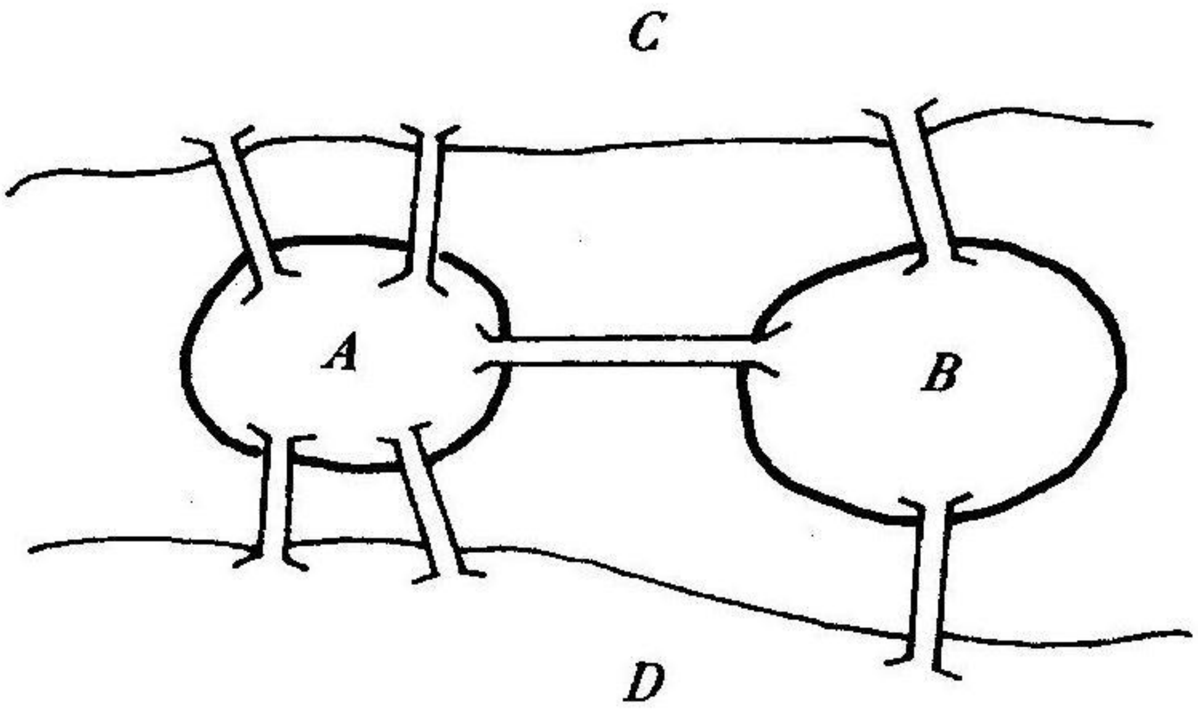
7-4 欧拉图与汉密尔顿图

哥尼斯堡七桥问题

1736年瑞士数学家列昂哈德·欧拉(leonhard Euler)发表了图论的第一篇论文“哥尼斯堡七桥问题”。这个问题是这样的：哥尼斯堡(Konigsberg)城市有一条横贯全城的普雷格尔(Pregel)河，城的各部分用七座桥连接，每逢假日，城中的居民进行环城的逛游，这样就产生一个问题，能不能设计一次“遍游”，使得从某地出发对每座跨河桥走一次，而在遍历了七桥之后却又能回到原地。

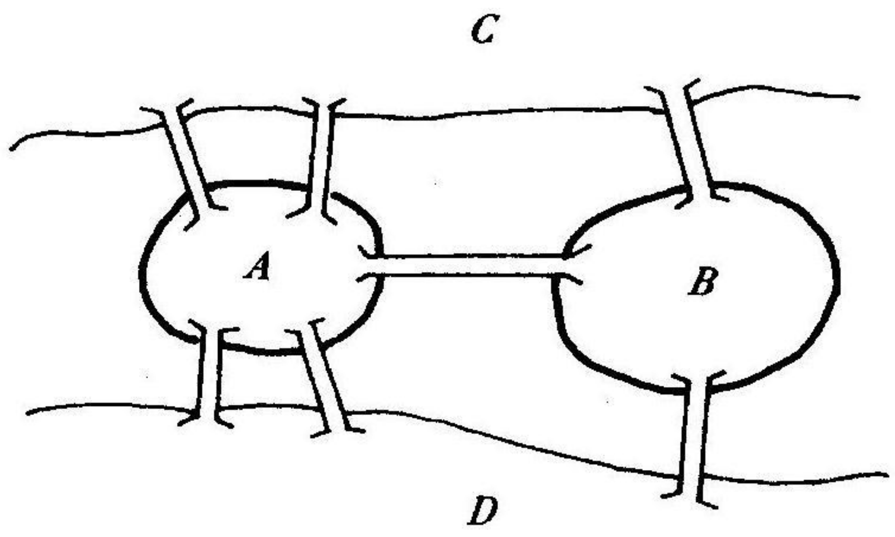
哥尼斯堡七桥问题

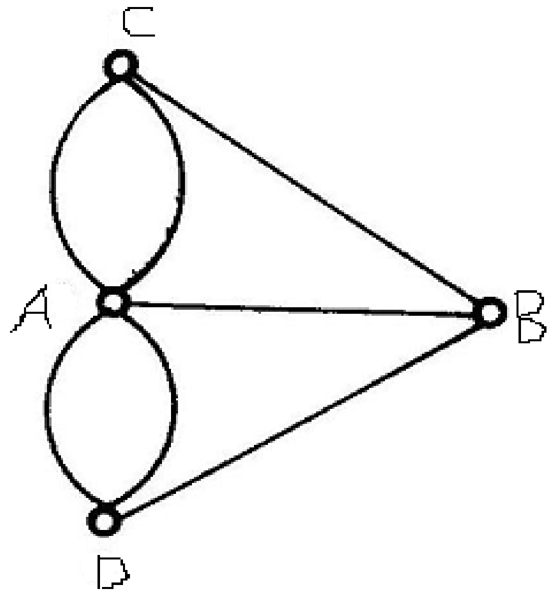


哥尼斯堡七桥问题

- Leonhard Euler(1707~1783):
  - 人类有史以来最多产的数学家.
  - 1736年, “七桥问题” ,图论和拓扑学诞生

哥尼斯堡七桥问题的图





图中的结点*A*，*B*，*C*，*D*表示四块地，而边表示七座桥。哥尼斯堡七桥问题是在图中找寻经过每一条边且仅一次而回到原地的通路。

欧拉路、欧拉回图、欧拉图

- 欧拉在1736年的一篇论文中提出了一条简单的准则，确定了哥尼斯堡七桥问题是不能解的。下面将讨论这个问题的证明。
- [定义] 欧拉回路 给定无孤立点图*G*，若存在一条路，经过图中每边一次且仅一次，该条路称为欧拉路；若存在一条回路，经过图中的每边一次且仅一次，该回路称为欧拉回路。
- 具有欧拉回路的图称为欧拉图

定理

[定理] 无向图G具有一条欧拉路，当且仅当G是连通的，且有零个或两个奇数度结点。

证明

必要性: 设G具有欧拉路，即有点边序列$v_0e_1v_1e_2v_2…e_iv_ie_{i+1}…e_kv_k$，其中结点可能重复出现，但边不重复，因为欧拉路经过图G中每一个结点，故图G必连通的。对任意一个不是端点的结点v_i，在一个欧拉路中每当v_i出现一次，必关联两条边，故虽然v_i可重复出现，但$deg(v_i)$必是偶数。对于端点，若$v_0=v_k$，则$deg(v_0)$为偶数，即G中无奇数度结点，若端点v_0与v_k不同，则$deg(v_0)$为奇数，$deg(v_k)$为奇数，G中就有两个奇数度结点。

定理

充分性: 若图G连通，有零个或两个奇数度结点，我们构造一条欧拉路如下：

1. 若有两个奇数度结点，则从其中的一个结点开始构造一条迹，即从v_0出发关联e_1 “进入” v_1，若$deg(v_1)$为偶数，则必由v_1再经过e_2进入v_2，如此进行下去，每次仅取一次。由于G是连通的，故必可到达另一奇数度结点停下，得到一条迹L_1：$v_0e_1v_1e_2v_2 \ldots e_iv_ie_{i+1} \ldots e_kv_k$。若$G$中没有奇数度结点，则从任一结点$v_0$出发，用上述的方法必可回到结点$v_0$，得到上述一条闭迹$L_1$。
2. 若L_1通过了G的所有边，则L_1就是欧拉路。

定理

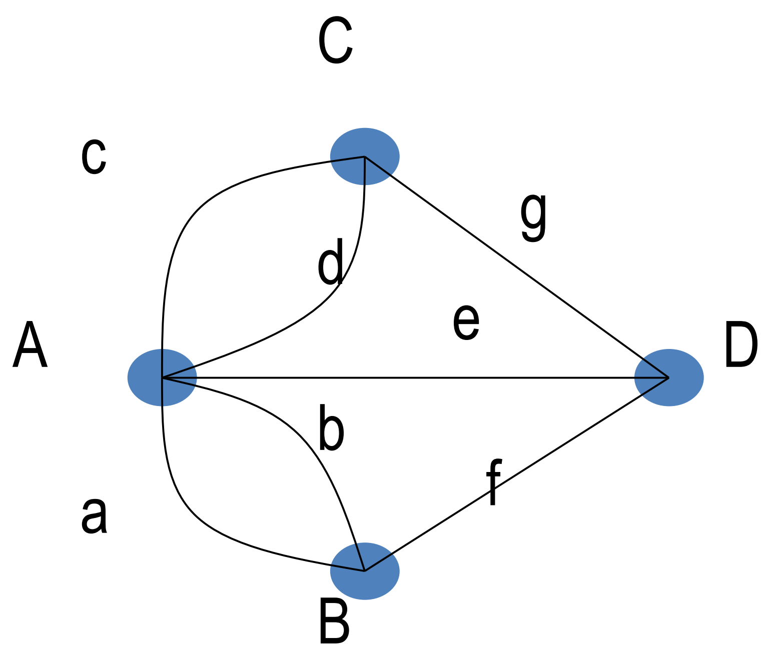
3. 若G中去掉L_1后得到子图G'，则G'中每一点的度数为偶数，因原图是连通的，故L_1与G'至少有一个结点v_i重合，在G'中由v_i出发重复⑴的方法，得到闭迹L_2。
4. 当L_1与L_2组合在一起，如果恰是G，则即得欧拉路，否则重复⑶可得到闭迹L_3，以此类推直到得到一条经过图G中所有边的欧拉路。

推论

推论

无向图G具有一条欧拉回路，当且仅当G是连通的，并且所有结点度数为偶数。

由于有了欧拉路和欧拉回路的判别准则，因此哥尼斯堡七桥问题立即有了确切的答案，因为有四个结点的度数皆为奇数，故欧拉路必不存在。



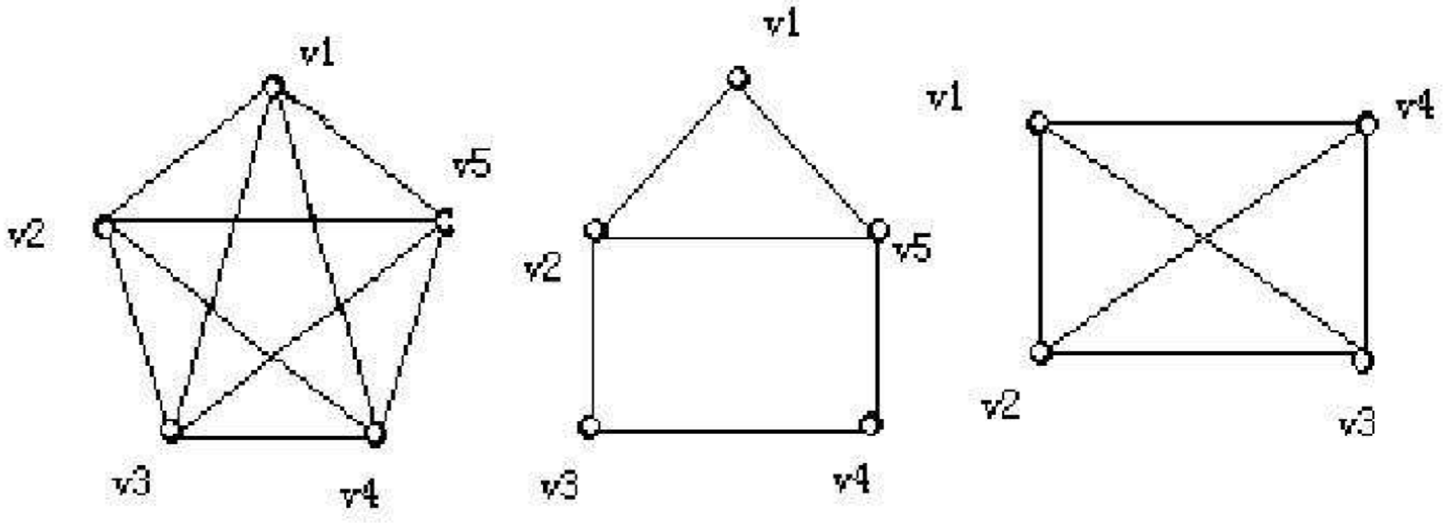
一笔划问题

与七桥问题类似的还有一笔划的判别问题，要判定一个图G是否可一笔划画出，有两种情况：

- 一是从图G中某一结点出发，经过图G的每一边一次且仅一次到达另一结点。
- 另一种就是从G的某个结点出发，经过G的每一边一次且仅一次回到该结点。

上述两种情况可以由欧拉路和欧拉回路的判定条件给予解决。

举例



(a) (b) (c)

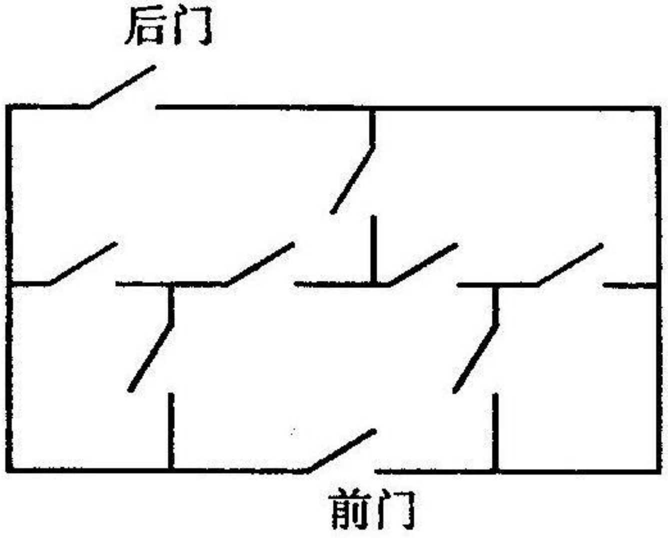
(a)是欧拉图

(b)不是欧拉图，但存在欧拉路

(c)既不是欧拉图，也不存在欧拉路

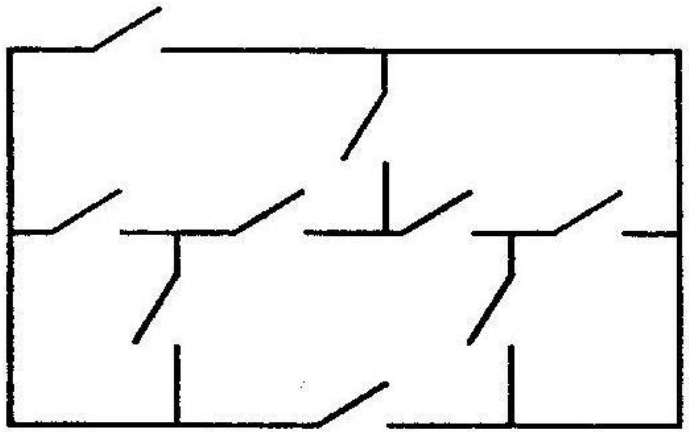
举例

下图是一幢房子的平面图形，前门进入一个客厅，由客厅通向4个房间。如果要求每扇门只能进出一次，现在你由前门进去，能否通过所有的门走遍所有的房间和客厅，然后从后门走出。

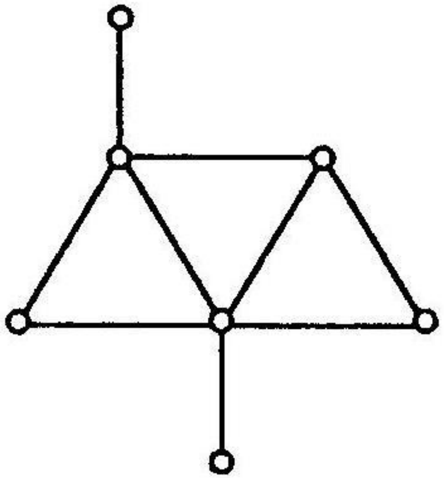


(a)

举例



(a)


(b)

解: 将4个房间和一个客厅及前门外和后门外作为结点，若两结点有边相连就表示该两结点所表示的位置有一扇门相通。 由此得图 (*b*)。 由于图中有4个结点是奇度结点， 故由定理知本题无解。

有向图欧拉路（回路）

- 欧拉路和欧拉回路的概念，很容易推广到有向图上去。
- 定义7-4.2 给定有向图*G*，通过每边一次且仅一次的一条单向路(回路)，称作**单向欧拉路(回路)**。

定理

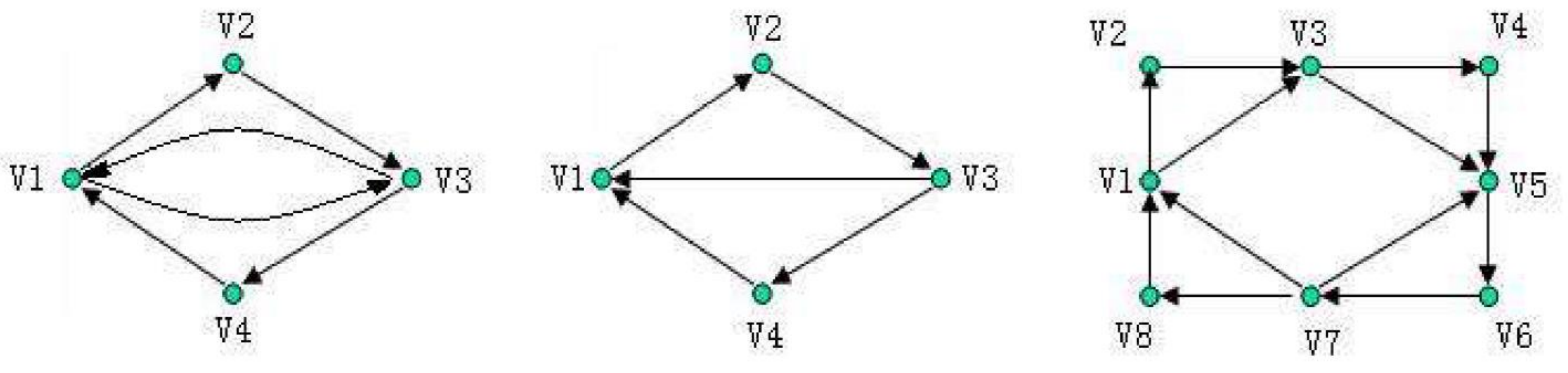
定理7-4.2

- 有向图*G*具有一条单向欧拉回路，当且仅当是连通的，且每个结点的入度等于出度。
- 一个有向图*G*具有单向欧拉路，当且仅当是连通的，而且除两个结点外，每个结点的入度等于出度，但这两个结点中，一个结点的入度比出度大**1**。另一个结点的入度比出度小**1**。

定理

- 这个定理的证明可以看作是无向图的欧拉路的推广，因为对于有向图的任意一个结点来说，如果入度与出度相等，则该结点的总度数为偶数，若入度和出度之差为**1**时，其总度数为奇数。因此定理的证明与定理**7-4.1**相似。

举例



(a) (b) (c)

(a)是欧拉图

(b)不是欧拉图，但存在欧拉路

(c)既不是欧拉图，也不存在欧拉路

举例-计算机鼓轮设计

例3.1.3　计算机鼓轮设计。设有旋转鼓轮其表面等分成**16**个部分。如图所示。

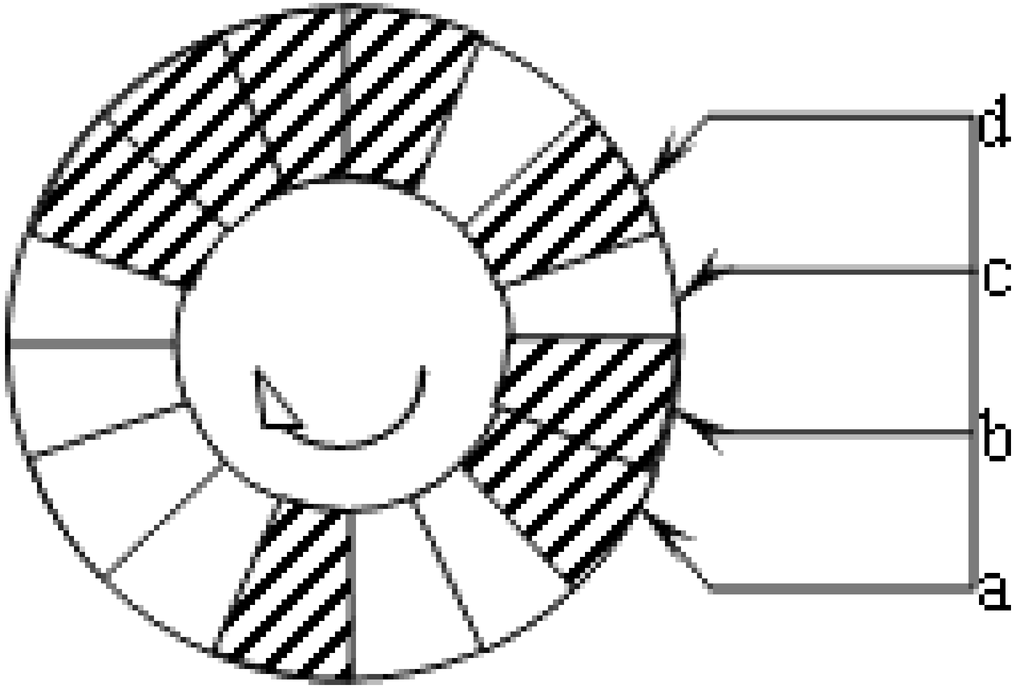


图 7-4.4

计算机鼓轮设计

- 其中每一部分分别用绝缘体或导体组成。绝缘体部分给出信号为0，导体给出的信号为1，在图3.1.16中所示的阴影部分为导体，空白部分表示绝缘体，根据图中鼓轮的位置，触点将得到信号为1101，如果将鼓轮顺时针方向转一个部分，触点将有信号1010。问鼓轮上的16个绝缘体和导体怎样安排，才能使鼓轮每旋转一个部分，四个触点能得到一组不同的四位二进制码。

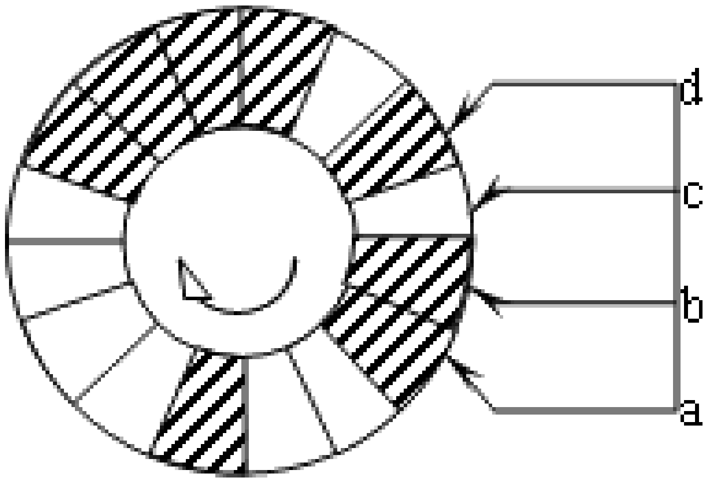


图 7-4.4

计算机鼓轮设计

设有八个结点的有向图，
　如图**3.1.17**所示，

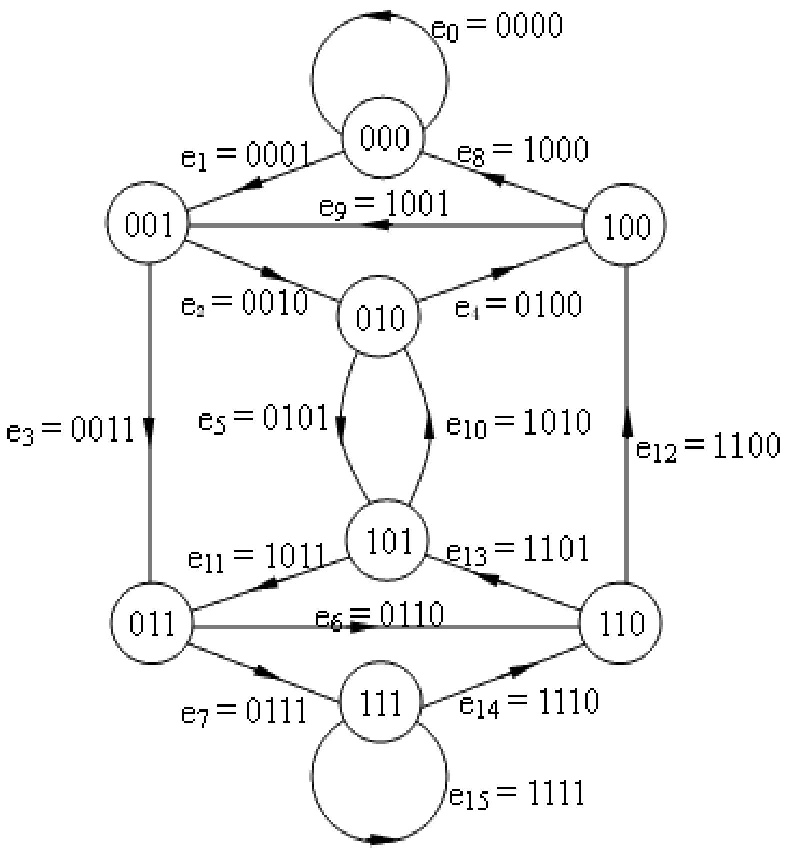


图 7-4.5

计算机鼓轮设计

- 其结点分别记三位二进制码{000，001，010，011，100，101，110，111}，设，从结点可引出两条有向边0和1。按照上述的方法，对于八个结点的有向图共有16条边，在这种图的任一条路中，其邻接的边必是和的形式，即是第一条边标号的后三位与第二条边标号的头三位相同。因为图中的16条边被记成不同的二进制数，可见前述鼓轮转动所得的16个不同的位置触点的二进制码，即对应着图中的一条欧拉回路。

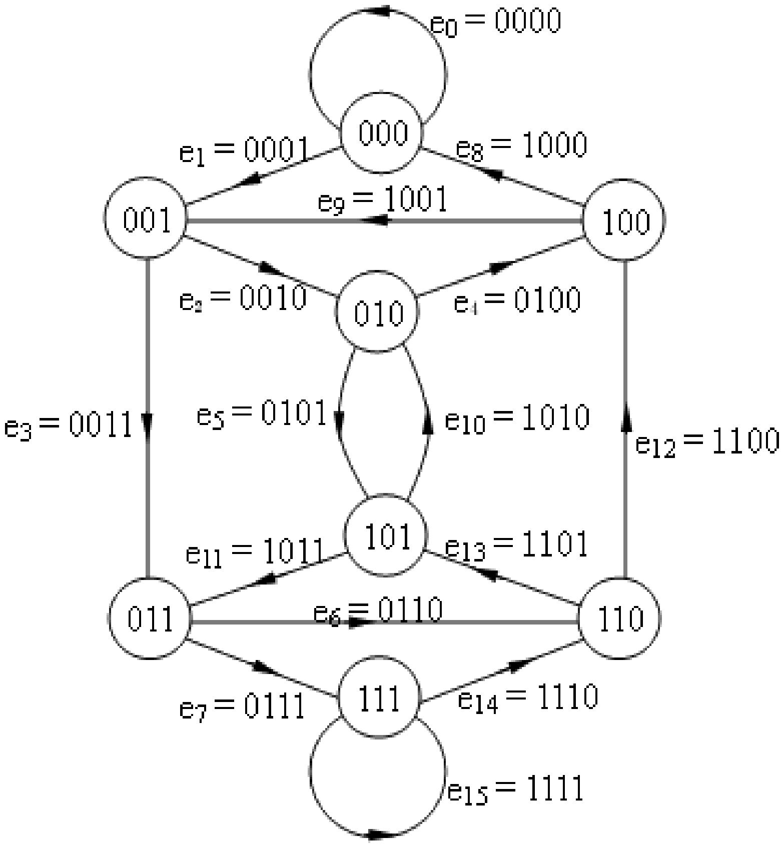


图 7-4.5

计算机鼓轮设计

■ 每个结点的入度为2，出度也为2，图中的欧拉回路是{0000，0001，0010，0100，1001，0011，0110，1101，1010，0101，1011，0111，1111，1110，1100，1000}。根据相邻边的记法16个二进制数可写成对应的0-1码0000100110101111。将它安排成环状，既是所求的鼓轮。

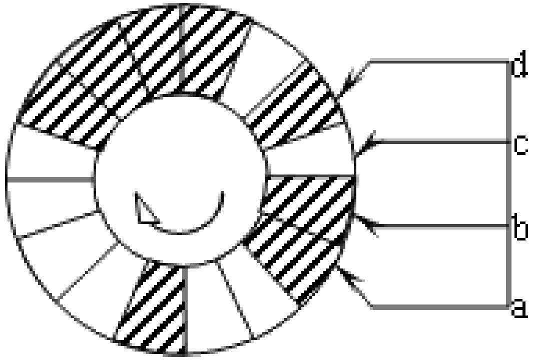


图 7-4. 4

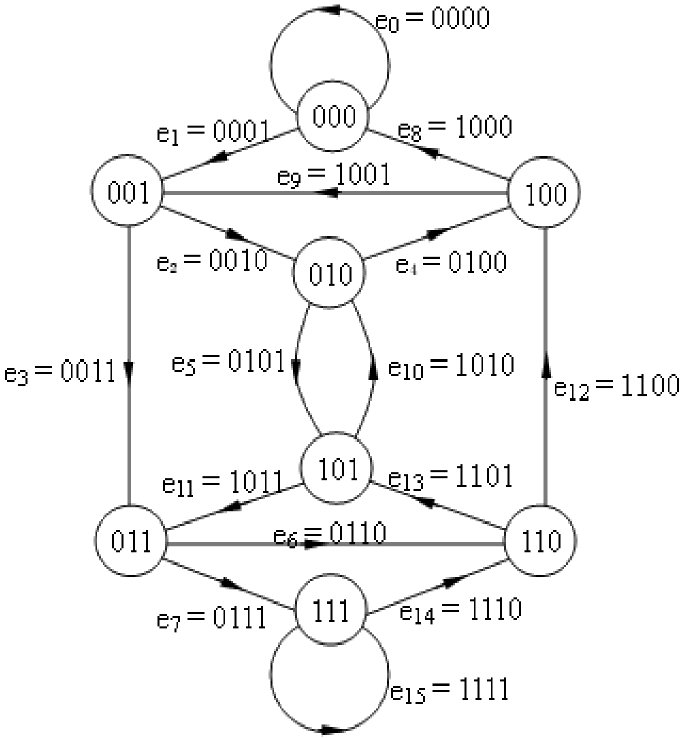


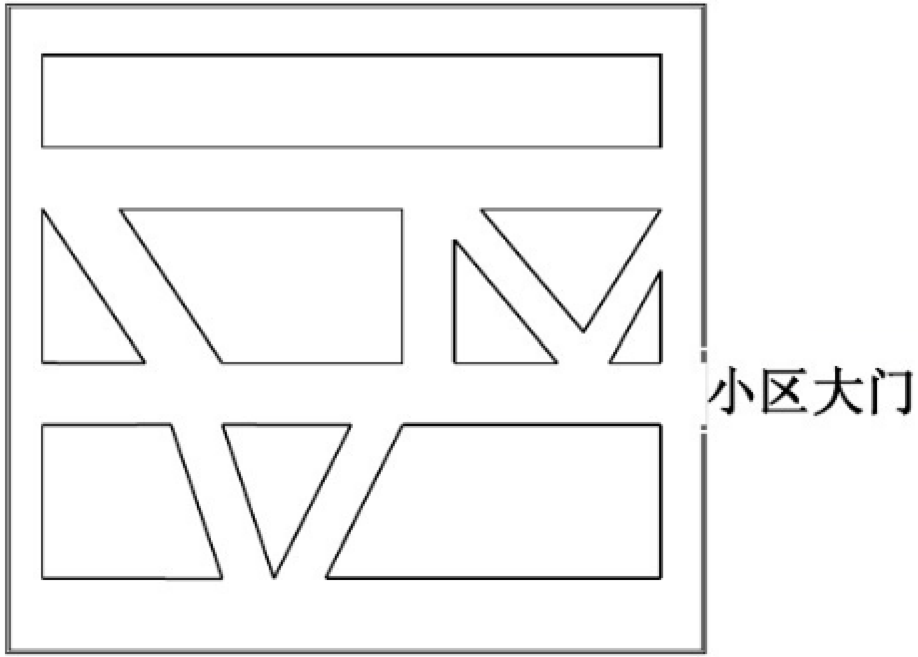
图 7-4. 5

计算机鼓轮设计

上述的例子可以推广到有n个触点的鼓轮。

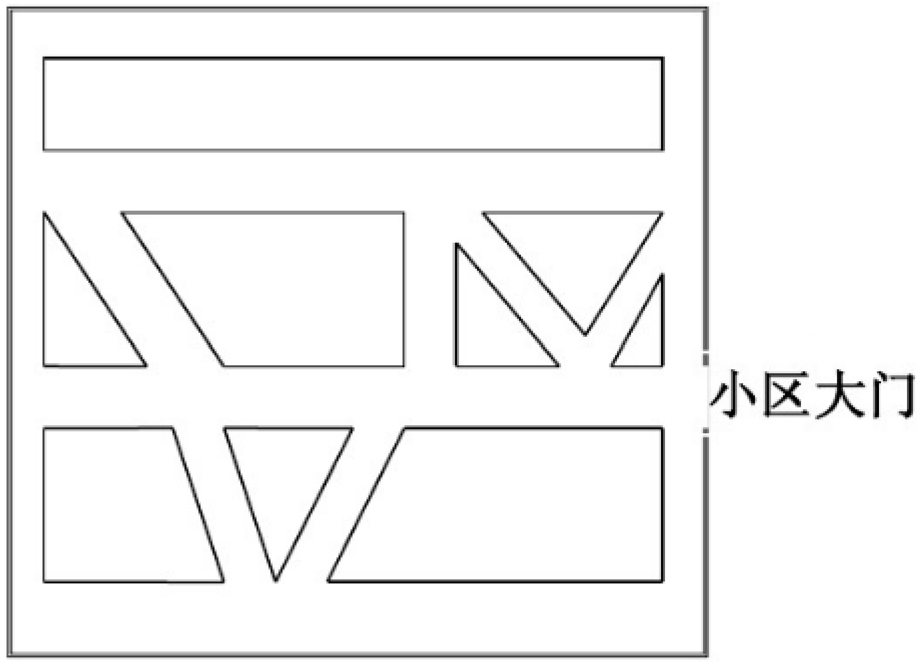
课堂练习

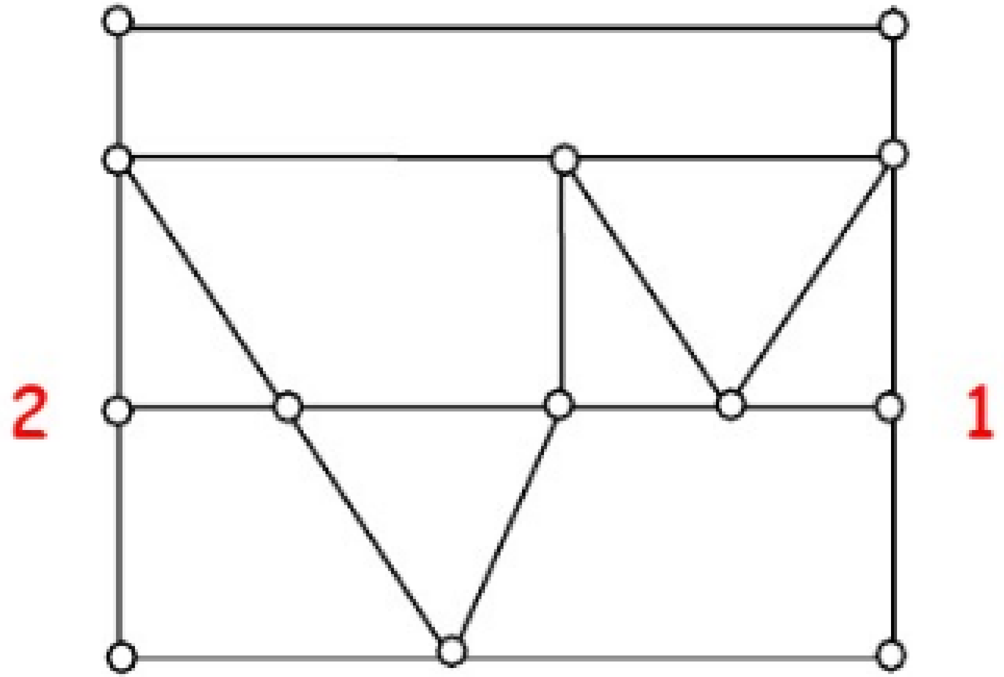
有一个小区（如下图），清洁车每天都要清扫每条路。请问有没有办法以小区大门为起点，每条街道只清扫一次？并回到起点。



课堂练习

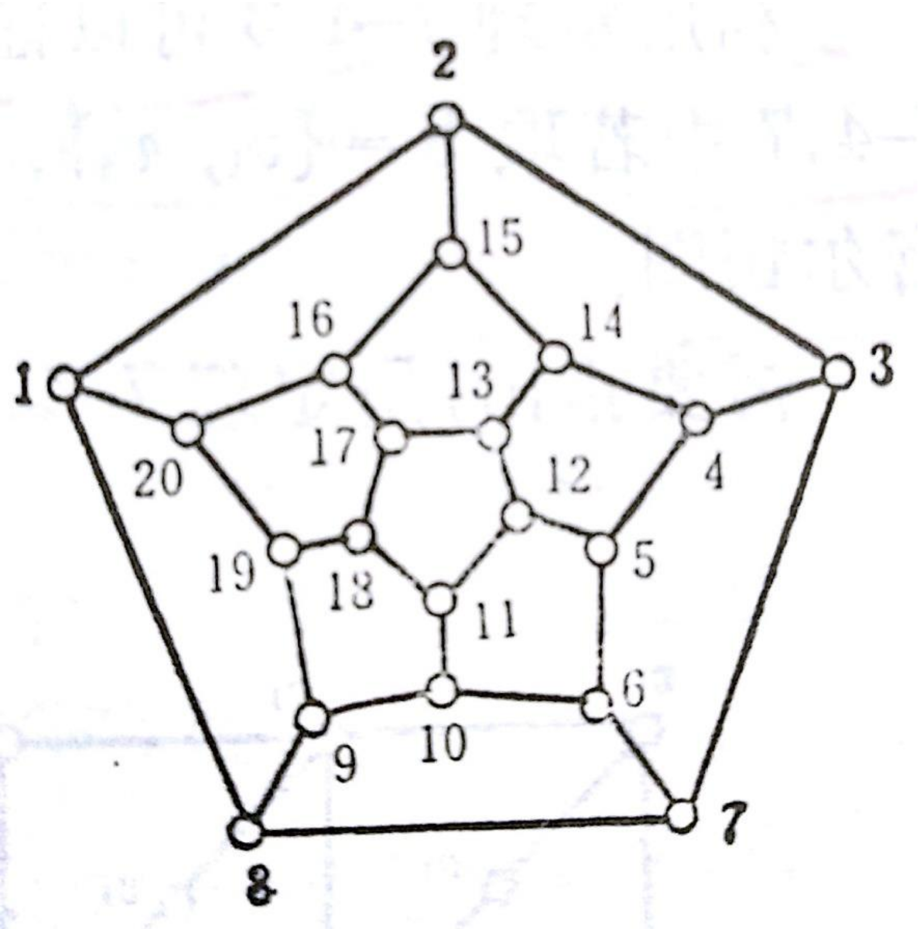
是否存在欧拉回路？





汉密尔顿回路——周游世界问题

1859年威廉·汉密尔顿爵士在给他的朋友的一封信中，首先谈到关于十二面体的一个数学游戏：能不能找到旅行路线，沿着交通线经过每一个城市恰好一次，再回到原来的出发地？



汉密尔顿路(回路)、汉密尔顿图

[定义] 汉密尔顿路，汉密尔顿回路

给定图G，若存在一条路经过图中的每一个结点恰好一次，这条路称作汉密尔顿路。若存在一条回路，经过图中的每一个结点恰好一次，这个回路称作汉密尔顿回路。

具有汉密尔顿回路的图称为汉密尔顿图。

定理

[定理] 无向图具有汉密尔顿回路的必要条件

若图$G=\langle V, E\rangle$具有汉密尔顿回路，则对于结点集V的每一个非空子集S均有$W(G-S)\leq|S|$成立。其中$W(G-S)$是$G-S$中连通分支数。

证明　设C是G的一条汉密尔顿回路，则对于V的任何一个非空子集S，在C中删去S中任一结点a_1，则$C-a_1$是连通非回路，若删去S中的另一个结点a_2，则$W(C-a_1-a_2)\leq 2$，由归纳法得知

$$W(C-S)\leq |S|$$

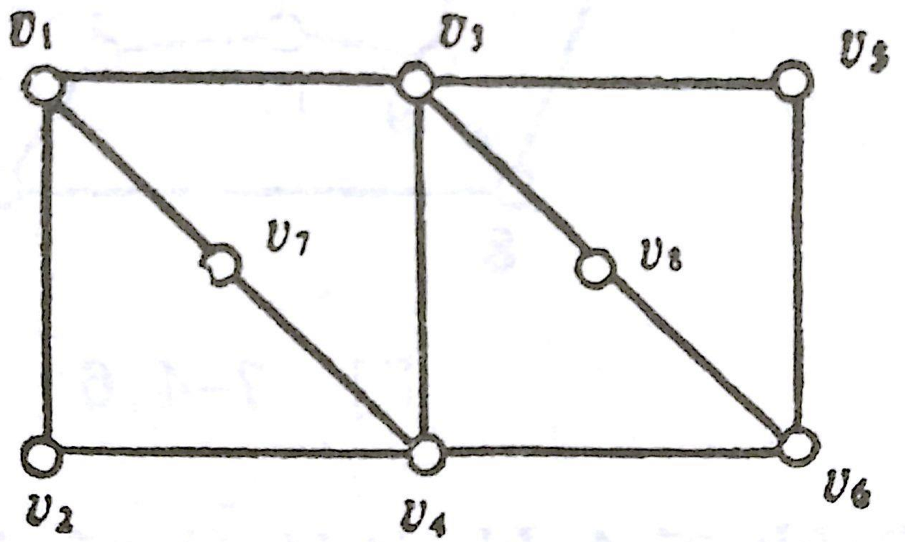
同时$C-S$是$G-S$的一个生成子图，因而

$$W(G-S)\leq W(C-S)$$

所以　$W(G-S)\leq |S|$

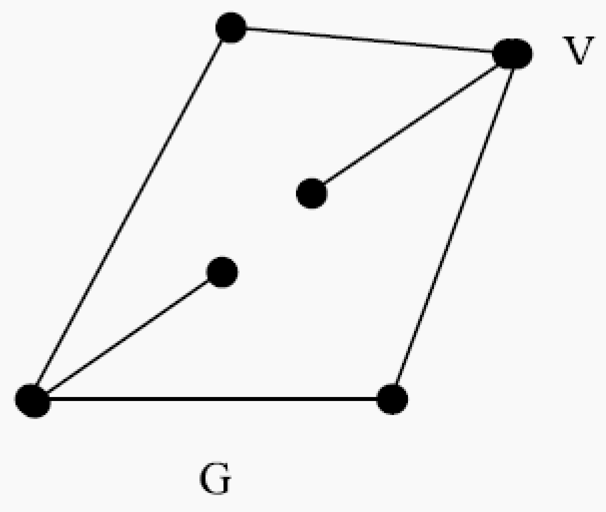
汉密尔顿图的必要条件

利用该定理可以证明某些图是非汉密尔顿图。如图7-4.7 (a)中取S={v_1,v_4}，则$G-S$中有三个分图，故G不是汉密尔顿图。



举例

这个图是汉密尔顿图吗？



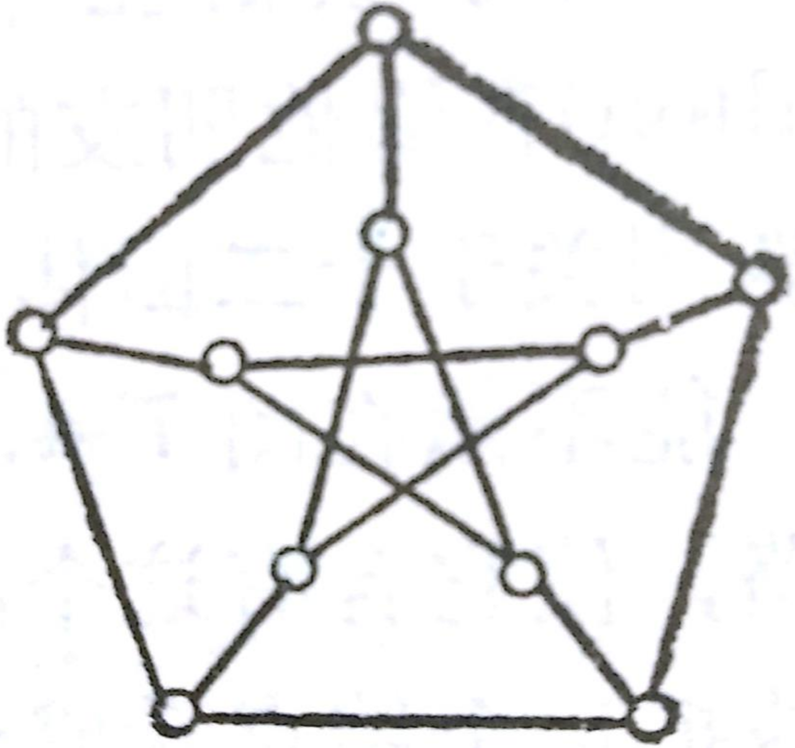
令$V_1=\{v\}$, $\omega(G-V_1)=2>|V_1|$

所以G非哈密尔顿图。

汉密尔顿图的必要条件

注意：必要条件 仅能用于判定不是

例如，著名的彼得森(Pertersen)图,在图中删去任一个结点或任意两个结点，不能使它不连通；删去三个结点，最多只能得到有两个连通分支的子图；删去四个结点，最多只能得到有三个连通分支的子图；删去五个或五个以上的结点，余下的结点数都不大于5，故必不能有5个以上的连通分支数。所以该图满足$W(C-S)\leq|S|$，但是它并非汉密尔顿图。



汉密尔顿图的判别

- 虽然汉密尔顿回路问题和欧拉回路问题在形式上极为相似，但对图 *G*是否存在汉密尔顿回路的没有充要的判别准则。
- 图的汉密尔顿回路问题判定是NP-困难问题。到目前为止，有关的定理有300多个，但没有一个是理想的。拓展H图的实用特征仍然被图论领域认为是重大而没有解决的问题。
- 下面我们给出一个无向图具有汉密尔顿路的充分条件。

汉密尔顿路的充分条件

[定理] 无向图具有汉密尔顿路的充分条件

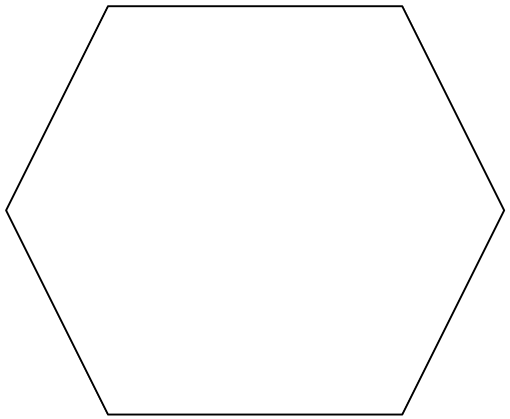
设*G*具有*n*个结点的简单图，如果*G*中每一对结点的度数之和大于等于*n*-1，则在*G*中存在一条汉密尔顿路。

证明 （p307 略）

汉密尔顿路的充分条件

容易看出，定理**7-4.4**的条件是图中的汉密尔顿路的存在的充分条件，但是并不是必要的条件。

设图是*n*边形，如下图所示，其中n=**6**虽然任何两个结点度数的和是**4＜6－1**，但在*G*中有一条汉密尔顿路。



举例

例题： 某地有5个风景点，若每个景点均有两条道路与其他景点相通，问是否可经过每个景点一次而游完这5处。

解 将景点作为结点，道路作为边，则得到一个有5个结点的无向图。

由题意，对每个结点$v_i(i=1,2,3,4,5)$有

$deg(v_i)=2$。

则对任两点和均有

$deg(v_i) + deg(v_j)=2 + 2 =4 = 5 – 1$

所以此图有一条汉密尔顿路。即经过每个景点一次而游完这5个景点。

举例

例题1：

考虑在七天内安排七门功课的考试，使得同一位教师所任的两门课程考试不安排在接连的两天里，试证如果没有教师担任多于四门课程，则符合上述要求的考试安排总是可能的。

举例

证明　设*G*为七个结点的图，每一个结点对应一门功课的考试，如果这两个结点对应的课程的考试是由不同教师担任的，那么这两个结点之间有一条边，因为每个教师所任的课程不超过4，故每个结点的度数至少是3，任两个结点度数的和至少是6，故*G*总包含一条汉密尔顿路，它对应于一个七门考试课目的一个适当安排。

汉密尔顿回路的充分条件

[定理] 无向图具有汉密尔顿回路的充分条件

设图*G*是具有*n*个结点的简单图，如果*G*中每一对结点的度数大于等于*n*，则在*G*中存在一条汉密尔顿回路。

证明 （略）

汉密尔顿回路问题

范更华：歪打正着学了图论　灵光一闪发现定理

——科学中国人（2005）年度人物

——新华网 **2006.1.10**

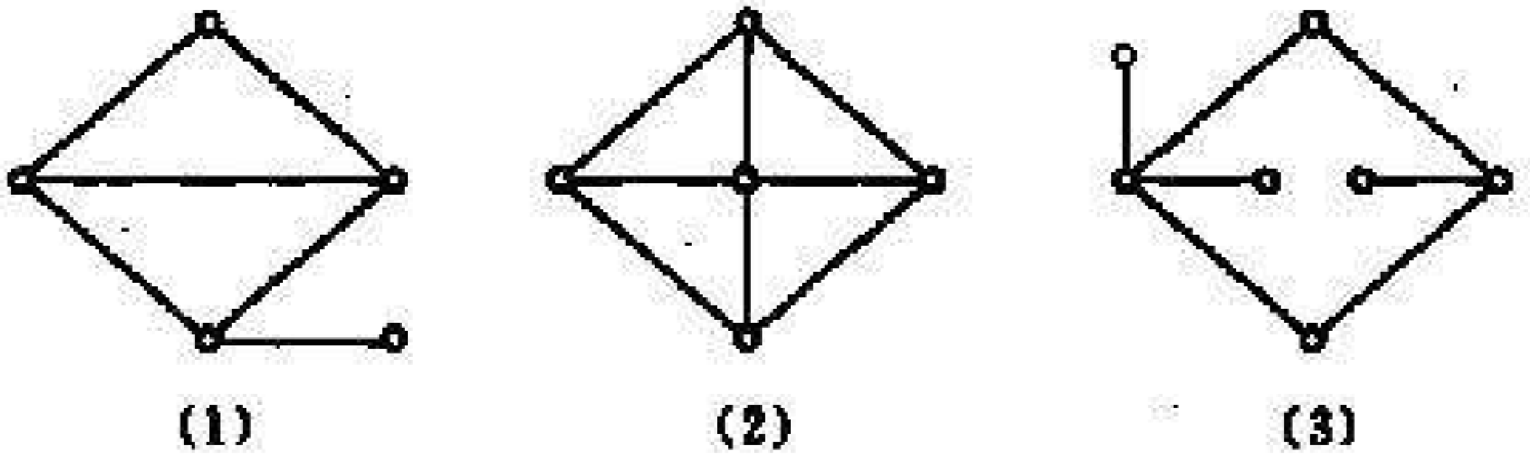
汉密尔顿回路问题是图论最古老的研究课题之一，是至今未解决的世界难题，在许多领域有着重要应用。经过多年艰苦攻克，范更华的这一项目在这一问题的研究上开辟了一条新的途径，证明若图中每对距离为2的点中有一点的度数至少是图的点数的一半，则该图存在哈密尔顿回路。了此成果引发了大量后续工作，以“范定理”、“范 条件”、“范类型”被广泛引用而出现于多种国际权威学术刊物，并作为定理出现在国外的教科书中。

汉密尔顿回路问题

迄今为止没有找到完美的充分必要性定理

举例

判断下图是不是哈密尔顿图?



图中（1），（3），不是哈密尔顿图，（2）为哈密尔顿图。

典型应用——货郎担问题

- 货郎担问题也叫旅行商问题，即TSP问题（Traveling Salesman Problem），是数学领域中著名问题之一。该问题实质是在一个带权完全无向图中，找一个权值最小的Hamilton回路
- 其一般提法为：有n个城市，用1，2，…，n表示，有一个货郎从城1出发到其他城市一次且仅一次，最后回到城市1，怎样选择行走路线使总路程最短？
- 旅行商问题的提法为：假设有一个旅行商人要拜访n个城市，他必须选择所要走的路径，路经的限制是每个城市只能拜访一次，而且最后要回到原来出发的城市。路径的选择目标是要求得的路径路程为所有路径之中的最小值。
- 货郎担问题（TSP问题）是一个组合优化问题。该问题可以被证明具有NPC计算复杂性。因此，任何能使该问题的求解得以简化的方法，都将受到高度的评价和关注。

典型应用——货郎担问题

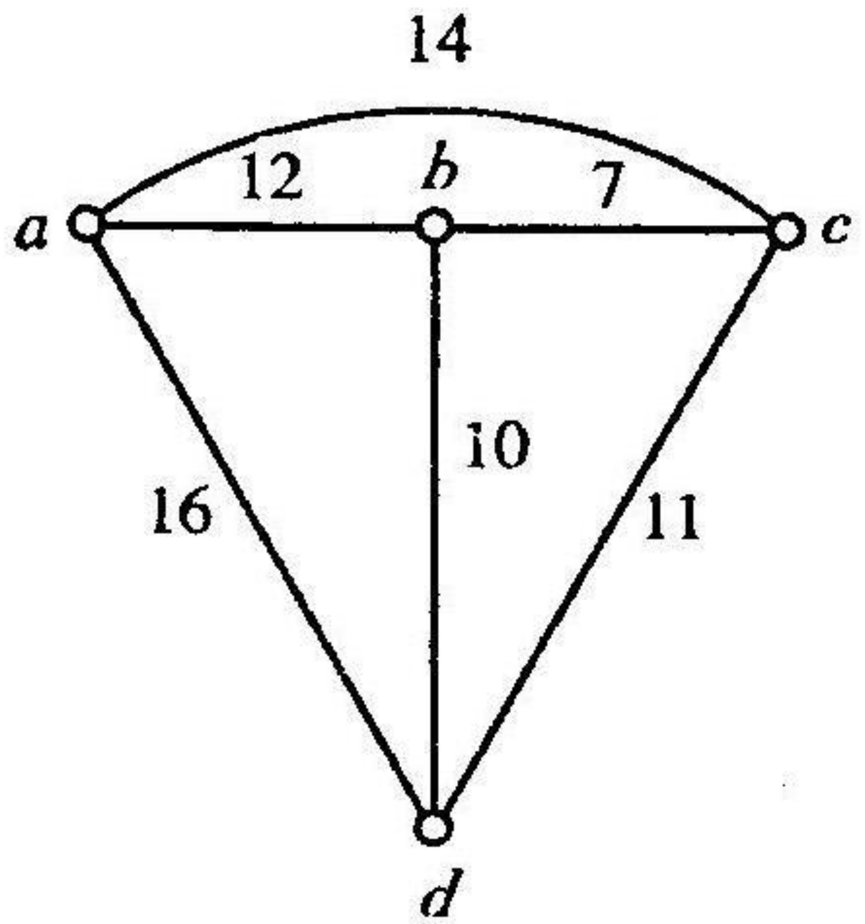
- 研究货郎担问题十分有趣且有实用价值，但是很遗憾，至今没有找到很有效的算法。
- 选择一：枚举法，缺点：计算量非常大（如节点很多），即使在计算机上也很难实现。30点可能，需要几小时。点数再多，就只能采用最近邻。
- 选择二：最邻近法，缺点：近似解，但可接受

最邻近法

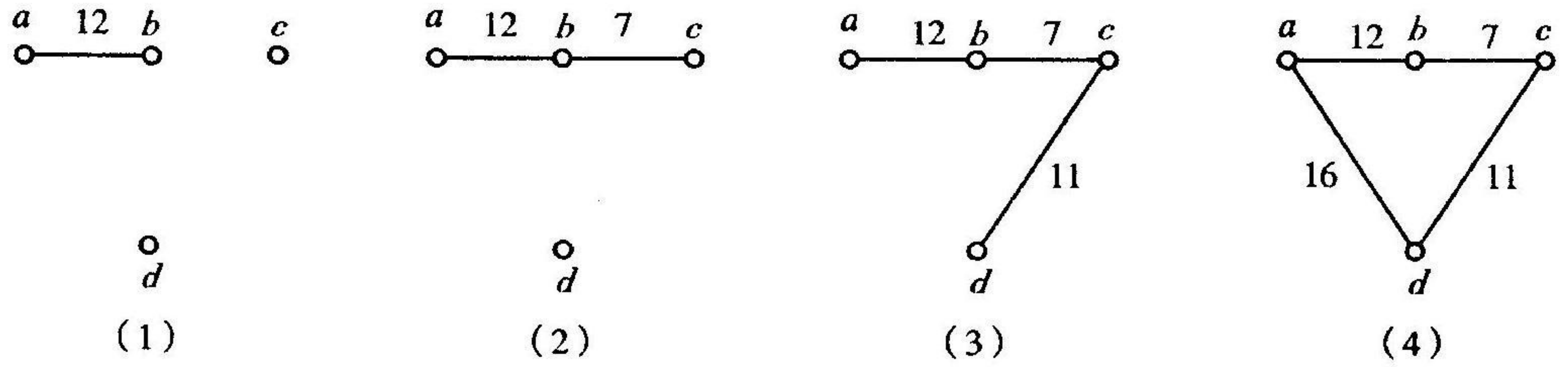
- 1) 由任意选择的结点开始， 找与该点最靠近（即权最小）的点， 形成有一条边的初始路径。
- 2) 设 x 表示最新加到这条路上的结点， 从不在路上的所有结点中选一个与 x 最靠近的结点， 把连接 x 与这一结点的边加到这条路上。 重复这一步， 直到 G 中所有结点包含在路上。
- 3) 将连接起始点与最后加入的结点之间的边加到这条路上，就得到一个圈， 即为问题的近似解。

举例

某流动售货员居住在 a 城，为推销货物他要访问 b，c， d城后返回 a 城。若该 4 城间的距离如下图所示，试用最邻近方法找出完成该旅行的最短路线？



举例



解： 按最邻近方法一共有 4 步。 得到的总距离为46。

谢 谢