《数学分析（2）》期中试卷

使用专业、班级__________ 学号____________ 姓名_________________

每题 10 分，共 10 题

一、设 f 为连续可微函数，试求

$$\frac{d}{dx}\int_a^x (x-t)f'(t)\,dt$$

并求 $\frac{d}{dx}\int_a^x (x-t)\sin t\,dt$

二、已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且满足方程

$$f(x)=3x-\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f^2(x)\,dx$$

求 $f(x)$

三、设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $f(x)>0$，又

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x \frac{1}{f(t)}dt$$

证明：F(x)=0 在 $[a,b]$ 中有且仅有一个实根。

四、计算

（1）$\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos x}dx$

（2）讨论无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ 的敛散性

五、设 f 为连续可微函数，证明

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

并求 $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

六、设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，$\lim_{n\to\infty} na_n = 0$，证明：$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

七、判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\arctan n}{\sqrt{n}}$的收敛性

八、设函数列$\{f_n\}$在$(a,x_0)\cup(x_0,b)$上一致收敛于$f(x)$，且对每个n，$\lim_{x\to x_0}f_n(x)=a_n$，则$\lim_{n\to\infty}a_n$和$\lim_{x\to x_0}f(x)$均存在且相等。

九、设 $a_0,a_1,a_2,\cdots$ 为等差数列$(a_0\neq 0)$，试求：

（1）幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径

（2）数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ 的和

十、求函数 $\ln\frac{1+x}{1-x}$ 展开成 x 的幂级数. $(x \in (-1,1))$

试 卷 专 用 纸