《高等代数 I(1)》期末考试卷（C）

一、填空题〖每小题 5 分，共计 30 分〗

1. 已知$f(x)$是首项系数为 3 的一元 n 次多项式，则$\left(3, f(x)\right)=$________.

2. 已知A是 3 阶方阵，$|A|=2$，则$\left|\left(-\frac{1}{3}A\right)^{-1}+A^*\right|=$____________.

3. 若A 是4×3的矩阵，且$R(A)=2, B=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\-1&0&3\end{pmatrix}$, 则$R(AB)=$______________.

4. 范德蒙德行列式$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&5&8\\2^2&3^2&5^2&8^2\\2^3&3^3&5^3&8^3\end{vmatrix}=$__________________.

5. 已知 A 是一个 n 阶可逆矩阵，且有$A^2-2A-E=0$, 则$A^{-1}=$____________.

6. 设 4 阶矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$,其中列向量组$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，且满足$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$，向量$\beta=3\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4$，则线性方程组$AX=\beta$的通解为____________.

二、本小题 〖10 分〗

计算 n 级行列式$D_n=\begin{vmatrix}a_1+1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_1&a_2+1&a_3&\cdots&a_n\\a_1&a_2&a_3+1&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n+1\end{vmatrix}$.

三、本小题 〖10 分〗

假设$f(x),g(x)$是两个一元多项式，

证明：若$(f(x),g(x))=1$，则有$(f(x),f(x)+g(x))=1$.

四、本小题 〖15 分〗

假设矩阵A的逆矩阵为$A=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}$,

(1)求矩阵A^{-1}. (2) 求矩阵$(A^*)^{-1}$. (3) 矩阵X满足矩阵方程$AX+E=A^2+X$,求矩阵X.

五、本小题〖10 分〗

设列向量组

$\alpha_1=(1,1,1,3)^T, \alpha_2=(-1,-3,5,1)^T, \alpha_3=(3,2,-1,p+2)^T, \alpha_4=(-2,-6,10,p)^T$.

问当p为何值时，该向量组线性相关？并在此时求出该向量组的秩和一个极大无关组.

六、本小题 〖12 分〗

假设η^*是非齐次线性方程组$AX=\beta$的一个解，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$是对应的导出组$AX=0$的一个基础解系，证明：

(1) $\eta^*,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$线性无关.

(2) $\eta^*,\eta^*+\xi_1,\eta^*+\xi_2,\cdots,\eta^*+\xi_{n-r}$线性无关.

七、本小题 〖13 分〗

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\3&2&1&1&-3\\0&1&2&2&6\\5&4&3&3&-1\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix}1\\p\\3\\q\end{pmatrix}$.

(1) 问p,q为何值时，非齐次线性方程组$AX=\beta$有解？

(2) 求齐次线性方程组$AX=0$的基础解系.

(3) 求非齐次线性方程组$AX=\beta$的通解.