高数 I（2）B 参考答案

1. 已知向量α,β的模分别为$|\alpha|=2,|\beta|=\sqrt{2}$，且 $\alpha\cdot\beta=2$， 求 $|\alpha\times\beta|$

答案 2

2. 设C是圆周$x^2+y^2=2x$，求第一类曲线积分$\int_C xds$

答案：2π

3. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-2)^n$ 在$x=-1$处条件收敛，求此级数的收敛区间。

答案：$(-1,5)$

4. 判断直线$l:\begin{cases}x+3y+2z-1=0\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$ 与平面$\pi:4x-2y+z-2=0$，的位置关系。

答案：直线垂直于平面

5. 求函数$u(x,y)=x^2+2y^2$ 在点$M(1,2)$处方向导数的最大值。

答案：$2\sqrt{17}$

6. 已知函数 $z=\dfrac{e^x}{x-y}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

答案：z

7. 求曲面$z-e^z+2xy=3$点$(1,2,0)$处的切平面方程。

答案： $2x+y-4=0$

8. 求函数 $f(x,y)=x^2(1+y^2)+e^y-y$ 的极值.

解：

$$\begin{cases} f_x=2x(1+y^2)=0, \\ f_y=2x^2y+e^y-1=0 \end{cases} \quad \Rightarrow x=0, y=0;$$

$A=f_{xx}(0,0)=2(1+y^2)|_{(0,0)}=2$，$B=f_{xy}(0,0)=(4xy)|_{(0,0)}=0$，$C=f_{yy}(0,0)=(2x^2+e^y)|_{(0,0)}=1$

$AC-B^2=2>0, A>0 \Rightarrow$ 函数有极小值 $f(0,0)=1$

9. 计算曲线积分

$$\int_C (3x-y)dx+(x+5y)dy,$$

其中有向曲线 $C: y=\sqrt{1-x^2}$ ，方向为从点 $(1,0)$ 到点 $(-1,0)$.

解: 添加辅助曲线 $C_1: y=0, \quad x:-1\to 1$，

$$\int_C = \oint_{C+C_1} - \int_{C_1} \quad ......1'$$

$$\oint_{C+C_1} = \iint_D (Q_x-P_y)dxdy = \iint_D (1-(-1))dxdy = \pi$$

$$\int_{C_1} = \int_{-1}^1 3xdx=0$$

所以 $\int_C (3x-y)dx+(x+5y)dy = \pi$.

10. 设 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 与 $x^2+y^2=z$ 所围成的立体，求 Ω 的体积 V 与表面积 S .

解:

$$V=\iiint_V \mathrm{d}V = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_0^1(\sqrt{2-r^2}-r^2)r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{6}(8\sqrt{2}-7).$$

球面：$S_1=\iint_{D_{xy}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2-r^2}}r\mathrm{d}r=2\pi(2-\sqrt{2});$

抛物面:$S_2=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{1+4r^2}r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1);$

表面积$S=S_1+S_2=2\pi(2-\sqrt{2})+\frac{1}{6}\pi(5\sqrt{5}-1).$

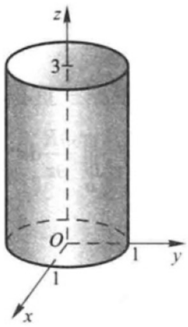
11. 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}$的和.

解： 收敛域为$(-1,1)$， 记$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n+1}$，

$$S(x)=x^2\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x^2\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^n\right)'=x^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'$$
$$=x^2\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x^2}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=1.$$

12. 计算曲面积分$\iint_{\Sigma}(y^3-z)xdydz+(x-y)dxdy$，其中$\Sigma$是柱面$x^2+y^2=1$介于平面$z=0$和$z=3$之间的部分，取外侧。



解：将曲面Σ补上Σ_1（取上侧）和Σ_2（取下侧），

则 $\iint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y^3-z)xdydz=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}-\iint_{\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_2}$

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2} \overset{Gauss}{=} \iiint_V (P_x + Q_y + R_z)dxdydz$$
$$= \iiint_V (y^3 - z + 0 + 0)dxdydz$$
$$= \iiint_V y^3 dxdydz - \iiint_V zdxdydz$$
$$= 0 - \int_0^3 dz \iint_{D_z} zdxdy = -\int_0^3 (\pi z)dz = -\frac{9\pi}{2}$$

$$\iint_{\Sigma_1} (x-y)dxdy + (y^3 - z)xdydz + \iint_{\Sigma_2} (x-y)dxdy + (y^3 - z)xdydz$$
$$= \iint_{\Sigma_1} (x-y)dxdy + \iint_{\Sigma_1} (y^3 - z)xdydz + \iint_{\Sigma_2} (x-y)dxdy + \iint_{\Sigma_2} (y^3 - z)xdydz$$
$$= \iint_{(\Sigma_1)_{xy}} (x-y)d\sigma + 0 + \left[-\iint_{(\Sigma_2)_{xy}} (x-y)d\sigma \right]$$
$$= 0$$

故

$$\iint_{\Sigma} (x-y)dxdy + (y^3 - z)xdydz = -\frac{9\pi}{2} \text{。}$$