2014 级高等数学Ⅰ(2)考试卷(A)

使用专业、班级________ 学号________ 姓名________

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得 分								
阅卷人								

本题得分	

一、填空题(每小题 4 分, 共 20 分)

(1) 已知 $\boldsymbol{a}=(1,-5,5)$, $\boldsymbol{b}=(1,-3,2)$, $\boldsymbol{c}=(401,0,0)$, 则 $\boldsymbol{a}\times(2\boldsymbol{b})+5\boldsymbol{c}=$ $\underline{(2015,6,4)}$

(2) 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $xe^x-ye^y=ze^z$ 确定, 则 $\mathrm{d}z=$ $\underline{\dfrac{(1+x)e^x\mathrm{d}x-(1+y)e^y\mathrm{d}y}{(1+z)e^z}}$

(3) 交换积分次序, 有 $\int_1^{e^2}\mathrm{d}x\int_0^{\ln x}f(x,y)\mathrm{d}y=$ $\underline{\int_0^2\mathrm{d}y\int_{e^y}^{e^2}f(x,y)\mathrm{d}x}$

(4) 设 Σ 是圆柱体 $\Omega=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le R^2, 0\le z\le h\right\}$ $(R>0,h>0)$ 的整个表面外侧, 则曲面积分

$\oiint_{\Sigma} zx\mathrm{d}y\mathrm{d}z+xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ $\underline{\dfrac{1}{2}\pi R^2h^2}$

(5) 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^n}{2^n\sqrt{n}}$ 的收敛域是 $\underline{[-3,1)}$

本题得分	

二、选择题(每小题 4 分, 共16 分)

(1) 函数 $u=xy^z$ 在点 $(1,1,1)$ 处沿方向 $\boldsymbol{l}=(1,2,2)$ 的方向导数是

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3. 【 B 】

(2) xOz 面上的曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ $(a>0,c>0)$ 绕 x 轴旋转一周形成的旋转曲面的方程是

(A) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$. (B) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{c^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$. (C) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$. (D) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{c^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$. 【 D 】

(3) 设在上半平面 $y>0$ 内 $\dfrac{x\mathrm{d}y+ky\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ 是某二元函数 $u(x,y)$ 的全微分, 则 k 的值为

(A) -1. (B) 0. (C) 1. (D) 2. 【 A 】

(4) 设 $u_n=(-1)^{n-1}\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ $(n=1,2,3,\cdots)$, 则

(A) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都发散. (B) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛.

(C) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 发散. (D) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都收敛. 【 C 】

本题得分	

三、计算下列各题(每小题 8 分, 共 32 分)

(1) 设 $z=f(x^2-y^2, e^y\sin x)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'+e^y\cos xf_2'$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f_1'+2x(2xf_{11}''+e^y\cos xf_{12}'')-e^y\sin xf_2'+e^y\cos x(2xf_{21}''+e^y\cos xf_{22}'')$$

$$=4x^2f_{11}''+4xe^y\cos xf_{12}''+e^{2y}\cos^2 xf_{22}''+2f_1'-e^y\sin xf_2'.$$

(2) 求过两条平行直线 $\dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{1}$ 和 $\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z}{1}$ 的平面的方程.

解 两直线上各取一点, 分别为 $M_1(3,1,-2)$ 和 $M_2(4,-3,0)$,

则 $\overrightarrow{M_1M_2}=(1,-4,2)$,

直线的方向向量 $\boldsymbol{s}=(5,2,1)$,

所求平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}\times\overrightarrow{M_1M_2}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 5 & 2 & 1\\ 1 & -4 & 2\end{vmatrix}=(8,-9,-22),$$

因此所求平面为 $8(x-3)-9(y-1)-22(z+2)=0$,

即 $8x-9y-22z-59=0$.

考试形式 开卷( )、闭卷(√), 在选项上打"√"

开课教研室 大学数学部 命题教师 命题组 命题时间 2015.5.20 使用学期 2014-2015-2 总张数 3 教研室主任审核签字________

(3) 计算二重积分 $\iint\limits_D (x+2y)\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 是由圆 $x^2+y^2=2x$ 所围成的平面区域.

解 原式 $=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}(\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta)\rho\cdot\rho\mathrm{d}\rho$

$$=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^5\theta+2\cos^4\theta\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\mathrm{d}\theta=8\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot1=\frac{64}{15}.$$

(4) 求由上半球面 $x^2+y^2+z^2=2a^2\ (z\geq0)$ 与圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的立体的体积.

解1 $V=\iiint\limits_\Omega \mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho\mathrm{d}\rho\int_\rho^{\sqrt{2a^2-\rho^2}}\mathrm{d}z$

$$=2\pi\int_0^a\rho\left(\sqrt{2a^2-\rho^2}-\rho\right)\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{4}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)\pi a^3.$$

解2 $V=\iiint\limits_\Omega \mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}a}r^2\mathrm{d}r$

$$=2\pi\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{1}{3}\left(\sqrt{2}a\right)^3=\frac{4}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)\pi a^3.$$

解3 $V=\iiint\limits_\Omega \mathrm{d}v=\int_0^a\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leq z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_a^{\sqrt{2}a}\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leq 2a^2-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\pi\int_0^a z^2\mathrm{d}z+\pi\int_a^{\sqrt{2}a}(2a^2-z^2)\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{3}\pi a^3+2\pi\left(\sqrt{2}-1\right)a^3-\frac{1}{3}\pi\left(2\sqrt{2}-1\right)a^3=\frac{4}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)\pi a^3.$$

本题得分	

四、(本题 8 分) 将函数 $f(x)=\arctan x$ 展开成 x 的幂级数, 并求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

解 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\quad(-1<x<1)$,

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\quad(-1\leq x\leq1),$$

令 $x=1$ 得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=f(1)=\frac{\pi}{4}$.

本题得分	

五、(本题 9 分) 计算曲线积分 $I=\int_L(\mathrm{e}^x\sin y-x-y)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y+x)\mathrm{d}y$, 其中 L 是曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 上从点 $A(2,0)$ 到点 $O(0,0)$ 的有向弧段.

解1 $I=\left(\oint_{L+\overline{OA}}-\int_{OA}\right)(\mathrm{e}^x\sin y-x-y)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y+x)\mathrm{d}y$

$$=\iint\limits_D 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_0^2(-x)\mathrm{d}x$$

$$=\pi+2.$$

解2 $I=\int_L\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x\sin y-\frac{1}{2}x^2+xy\right)-2y\mathrm{d}x$

$$=\left[\mathrm{e}^x\sin y-\frac{1}{2}x^2+xy\right]_{(2,0)}^{(0,0)}-2\int_2^0\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x$$

$$=2+\pi.$$

本题得分	

六、(本题10分) 设有椭球面 $\Sigma: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, 其中 $a>0, b>0, c>0$.

(1) 证明 Σ 上任一点 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面方程为 $\dfrac{x_0 x}{a^2}+\dfrac{y_0 y}{b^2}+\dfrac{z_0 z}{c^2}=1$.

(2) 在第一卦限内作 Σ 的切平面, 使该切平面与三坐标面所围成的四面体的体积最小. 求切点坐标及最小体积.

解 (1) 设 $F(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1$, 则切平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\left(\frac{2x_0}{a^2},\frac{2y_0}{b^2},\frac{2z_0}{c^2}\right)=2\left(\frac{x_0}{a^2},\frac{y_0}{b^2},\frac{z_0}{c^2}\right),$$

故切平面方程为 $\dfrac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\dfrac{y_0}{b^2}(y-y_0)+\dfrac{z_0}{c^2}(z-z_0)=0$,

整理并注意到 $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}+\dfrac{z_0^2}{c^2}=1$, 即得 $\dfrac{x_0 x}{a^2}+\dfrac{y_0 y}{b^2}+\dfrac{z_0 z}{c^2}=1$.

(2) 切平面在三个坐标轴上的截距依次为 $\dfrac{a^2}{x_0},\dfrac{b^2}{y_0},\dfrac{c^2}{z_0}$, 故问题归结为

$$\begin{cases}\min V=\dfrac{1}{6}\dfrac{a^2b^2c^2}{x_0y_0z_0},\\ \text{s.t.}\ \ \dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}+\dfrac{z_0^2}{c^2}=1,\end{cases}$$

等价于

$$\begin{cases}\max V=xyz,\\ \text{s.t.}\ \ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\end{cases}$$

作 Lagrange 函数 $L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1\right)$,

令

$$\begin{cases}L_x=yz+\dfrac{2\lambda x}{a^2}=0\\ L_y=xz+\dfrac{2\lambda y}{b^2}=0\\ L_z=xy+\dfrac{2\lambda z}{c^2}=0\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\end{cases}$$

解得

$$x=\frac{a}{\sqrt{3}},\ y=\frac{b}{\sqrt{3}},\ z=\frac{c}{\sqrt{3}}.$$

由实际问题的性质可知, 所求切点即为 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{b}{\sqrt{3}},\dfrac{c}{\sqrt{3}}\right)$, 此时四面体的体积为

$$V_{\min}=\frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{\frac{a}{\sqrt{3}}\frac{b}{\sqrt{3}}\frac{c}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}abc.$$

本题得分	

七、(本题5分) 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right|=\rho$ 且 $\rho<1$, 问级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是否一定收敛或一定发散? 如果一定, 请证明你的结论; 如果不一定请举例说明.

解 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 一定发散. 证明如下:

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right|=\rho<1$ 知, 对 $\varepsilon\in(0,1-\rho)$, 存在正整数 N, 使得当 $n\ge N$ 时

$$\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right|<\rho+\varepsilon<1,$$

即

$$|u_n|\le|u_{n+1}|,\quad n=N,N+1,\cdots$$

亦即当 $n\ge N$ 时, $|u_n|$ 是逐渐增大的, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\ne 0$,

由级数收敛的必要条件知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.