《线性代数 I（B）》参考答案

一、填空题（1-12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

1. 行列式 $\begin{vmatrix} x & x^2 & (x-2)^2 \\ y & y^2 & (y-2)^2 \\ z & z^2 & (z-2)^2 \end{vmatrix} =$ ______ $4(y-x)(z-x)(z-y)$

2. 已知行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 2 & b & 0 \\ 0 & c & 3 & 0 \\ 10 & 20 & 30 & 40 \end{vmatrix}$，设 A_{ij} 表示 a_{ij} 的代数余子式，则 $A_{41}+4A_{44}=$

______ $(4-a)(6-bc)$

3. 设 $P_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$P_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 则 $P_3^5P_1^{10}AP_2^{10}=$

______ $\begin{pmatrix} 61 & 82 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. 设 $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$，$E$ 是单位矩阵，则 $(A-3E)^{-1}=$ ______ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$ ______ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6. 已知 $\mathbb{R}^3$ 的两组基为 $\alpha_1=(1,0,1)^T$，$\alpha_2=(1,1,-1)^T$，$\alpha_3=(1,-1,1)^T$；$\beta_1=(3,0,1)^T$，$\beta_2=(2,0,0)^T$，$\beta_3=(0,2,-2)^T$，则由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵为

______

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

7. 已知三维向量空间的基为 $\alpha_1=(1,1,0)^T$, $\alpha_2=(1,0,1)^T$, $\alpha_3=(0,1,1)^T$ ，则向量 $\beta=(2,2,2)^T$ 在此基下的坐标为 $(1,1,1)$ ________

8. 设 A 为四阶矩阵，若 A 的秩 $r(A)=2$，则伴随矩阵 A^* 的秩 $r(A^*)=$ 0 ________

9. 已知向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\3\\t\end{pmatrix}$ 线性相关，将 α_2 表示成 α_1,α_3 的线性组合为

$\alpha_2=\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_3)$

____

10. 设 $A=\begin{pmatrix}1&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&1\end{pmatrix}$， $\alpha=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, 则向量 $A^3\alpha$ 的模 $\|A^3\alpha\|=$ 40 ________

11. 已知三阶矩阵 A 的特征值为 1，-1，2，设 $B=A^3-6A^2$,则 B 的行列式 $|B|=$

-560

____

12. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2$ 是否正定 ________ （答：是或否）

正定

二、解答题（13-14 小题，每小题 12 分，共 24 分）

13. 讨论方程组 $\begin{cases}x_1+x_3=\lambda\\4x_1+x_2+2x_3=\lambda+2\\6x_1+x_2+4x_3=2\lambda+3\end{cases}$ 解的情况并在有无穷多解的情况求出通解。

解：

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&\lambda\\4&1&2&\lambda+2\\6&1&4&2\lambda+3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&\lambda\\0&1&-2&-3\lambda+2\\0&1&-2&-4\lambda+3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&\lambda\\0&1&-2&-3\lambda+2\\0&0&0&-\lambda+1\end{array}\right)$$

………3′

当$\lambda \neq 1$时，$rank(Ab)=3>rank(A)=2$,此时方程组无解；

………3′

当$\lambda = 1$时，$rank(Ab)=rank(A)=2<3$，方程组有无穷多解。此时，上述初等行变换结果为$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$，故方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

………6′

解法 2 观察这些方程左边可得 2（1）+（2）=（3），于是右边应有$2\lambda+(\lambda+2)=2\lambda+3$，故$\lambda=1$．由此继续解方程即可。

14. 求可逆矩阵P，将$\begin{pmatrix} 2023 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$相似对角化。

解：$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 2023-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(2023-\lambda)$

所以矩阵的特征值为$\lambda_1 = 2023, \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$

………3′

解方程组$(A-2023E)x=0$得：$p_1 = (1,0,0)^T$，

………3′

解方程组$(A-0E)x=0$得：$p_2 = (-1,2023,0)^T, p_3 = (-1,0,2023)^T$.

………4′

令$P=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\0 & 2023 & 0\\0 & 0 & 2023\end{pmatrix}$,则有 $P^{-1}AP=diag\left(2023,0,0\right)$.

………2′

三、证明题（15-16 小题，每小题 8 分，共 16 分）

15. 证明：若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则向量组$\alpha_1+a_2$，$\alpha_2+2\alpha_3$，$\alpha_3+3\alpha_1$线性无关.

证明：$(\alpha_1+a_2，\alpha_2+2\alpha_3，\alpha_3+3\alpha_1)=(\alpha_1，\alpha_2，\alpha_3)\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\1 & 1 & 0\\0 & 2 & 1\end{pmatrix}$

………4′

而$\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\1 & 1 & 0\\0 & 2 & 1\end{pmatrix}$可逆，故向量组$\alpha_1+a_2$，$\alpha_2+2\alpha_3$，$\alpha_3+3\alpha_1$线性无关。

………4′

16. 设$A=(a_{ij})$为三阶实对称矩阵，证明：若 A 正定，则对角元$a_{33}>0$

证明：因 A 正定，故$(0,0,1)A(0,0,1)^T>0$,

………4′

而$(0,0,1)A(0,0,1)^T=a_{33}$,故$a_{33}>0$

………4′