1-5 重言式与蕴含式

P	$\neg P \vee P$	$\neg P \wedge P$
F	T	F
T	T	F

$\neg P \vee P$为重言式(永真式);

$\neg P \wedge P$为矛盾式(永假式)。

重言式

重言式(矛盾式)定义:

给定一个命题公式，若无论对分量作怎样的指派，其对应的真值永为T，则称该命题公式为重言式或永真公式。

给定一个命题公式，若无论对分量作怎样的指派，其对应的真值永为F，则称该命题公式为矛盾式或永假公式。

若公式 A $\Leftrightarrow$ T，则 A 为重言式或永真式。

若公式 A $\Leftrightarrow$ F，则 A 为矛盾式或永假式。

重言式

定理　若A和B均为重言式，则$A\wedge B$及$A\vee B$也为重言式。

定理　若A是一个重言式，则对A的同一个分量都用另外一个合式公式置换，所得公式仍为重言式。

例：$\neg(P\wedge Q)\leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q)$ 是重言式(P14)

把P用$R\wedge T$ 替换，还是重言式。

重言式

例：证明 $(P\wedge(P\rightarrow Q))\rightarrow Q$ 为重言式。

方法1：列真值表

P	Q	$P\rightarrow Q$	$P\wedge(P\rightarrow Q)$	$(P\wedge(P\rightarrow Q))\rightarrow Q$
F	F	T	F	T
F	T	T	F	T
T	F	F	F	T
T	T	T	T	T

永真公式真值表的最后一列全是“T”。

重言式

例：证明 $(P\wedge(P\to Q))\to Q$ 为重言式。

方法2：等价公式变换

$$
\begin{aligned}
& (P\wedge(P\to Q))\to Q \\
\Leftrightarrow\ & (P\wedge(\neg P\vee Q))\to Q \\
\Leftrightarrow\ & ((P\wedge\neg P)\vee(P\wedge Q))\to Q \\
\Leftrightarrow\ & (F\vee(P\wedge Q))\to Q \Leftrightarrow (P\wedge Q)\to Q \\
\Leftrightarrow\ & \neg(P\wedge Q)\vee Q \Leftrightarrow (\neg P\vee\neg Q)\vee Q \\
\Leftrightarrow\ & \neg P\vee (\neg Q\vee Q) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P\vee T \\
\Leftrightarrow\ & T
\end{aligned}
$$

定理 设 A、B 为两个命题公式，A⇔B 当且仅当 A↔B是一个重言式。

证明：

若A⇔B，则不论对A、B做何种赋值，A与B的真值都相同，于是 A↔B⇔T，即 A↔B是一个重言式。

若A↔B是一个重言式，则 A↔B⇔T，

于是不论在何种赋值下，A与B的真值均相同，即 A⇔B。

蕴含式

定义：当且仅当 $A \to B$ 是重言式，则称 A 蕴涵 B，记作 $A \Rightarrow B$。

即：当且仅当 $A \to B \Leftrightarrow T$，则 $A \Rightarrow B$。

蕴含式的证明

考察A→B的真值表，如果 A→B为永真式，则前件A为真，后件B为假的情况就不会出现。

A	B	A→B
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

所以只要证明前件为真，后件为假的情况不发生，A→B即为永真式。

蕴含式的证明

第一种方法：真值表法

例1　求证 $P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$

蕴含式的证明

第二种方法：假设前件 A 为真，若在此假设下能推出后件 B 也为真，则 $A \Rightarrow B$ 成立。

A	B	$A \rightarrow B$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

例1　求证 $P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$

证明：

假设 $P \wedge (P \rightarrow Q)$ 为T，

则P为T 并且$(P \rightarrow Q)$为T，于是Q为T，

所以　$P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$ 成立。

蕴含式的证明

第二种方法：假设前件 A 为真，若在此假设下能推出后件 B 也为真，则 $A \Rightarrow B$ 成立。

例2 求证：

$((A \wedge B) \rightarrow C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$

证明：设前件$((A \wedge B) \rightarrow C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D)$ 为真。则 $((A \wedge B) \rightarrow C)$、$\neg D$、$(\neg C \vee D)$ 均为真。

$\neg D$ 为 T，则 D 为 F，由 $\neg C \vee D$ 为 T，于是 $\neg C$ 为 T，即 C 为 F，再由 $((A \wedge B) \rightarrow C$ 为 T，则 $(A \wedge B)$为 F，即 $\neg(A \wedge B)$ 为 T，于是 $\neg A \vee \neg B$ 为 T，因此 $((A \wedge B) \rightarrow C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$。

蕴含式的证明

第三种方法：假设后件B为假，若在此假设下能推出前件A也为假，则 $A \Rightarrow B$ 成立。

A	B	$A \to B$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

例3：求证 $P \Rightarrow P \vee Q$，$Q \Rightarrow P \vee Q$

证明：

假设 $P \vee Q$ 为 F，

则 P为 F， Q 为 F，所以

$P \Rightarrow P \vee Q$，$Q \Rightarrow P \vee Q$ 成立。

蕴含式的证明

第三种方法：假设后件B为假，若在此假设下能推出前件A也为假，则 $A \Rightarrow B$ 成立。

例4 求证：$((A \wedge B) \rightarrow C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$

证明：假设后件 $\neg A \vee \neg B$ 为 F，则A与B均为 T。

1. 如 C 为 F，则 $(A \wedge B) \rightarrow C$ 为 F，
   所以前件 $((A \wedge B) \rightarrow C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D)$ 为 F

2. 如 C 为 T，则 (1) 若 D 为 T，则 $\neg D$ 为 F，所以前件 $((A \wedge B) \rightarrow C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D)$ 为 F。
   (2) 若 D 为 F，则 $\neg C \vee D$ 为 F，所以前件 $((A \wedge B) \rightarrow C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D)$ 为 F。

综上 $((A \wedge B) \rightarrow C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$ 成立。

基础的蕴含式

I_1 $P\wedge Q\Rightarrow P$ I_2 $P\wedge Q\Rightarrow Q$

I_3 $P\Rightarrow P\vee Q$ I_4 $Q\Rightarrow P\vee Q$

I_5 $\neg P\Rightarrow P\to Q$ I_6 $Q\Rightarrow P\to Q$

I_7 $\neg(P\to Q)\Rightarrow P$ I_8 $\neg(P\to Q)\Rightarrow\neg Q$

I_9 $P,Q\Rightarrow P\wedge Q$

I_{10} $\neg P\wedge(P\vee Q)\Rightarrow Q$

I_{11} $P\wedge(P\to Q)\Rightarrow Q$

I_{12} $\neg Q\wedge(P\to Q)\Rightarrow\neg P$

I_{13} $(P\to Q)\wedge(Q\to R)\Rightarrow P\to R$

I_{14} $A\to B\Rightarrow(A\vee C)\to(B\vee C)$

I_{15} $A\to B\Rightarrow(A\wedge C)\to(B\wedge C)$

蕴含的性质

- 蕴含“$\Rightarrow$”是关系符，不是运算符。
- 蕴含的性质：

1) 有自反性：对任何命题公式 A，有 $A \Rightarrow A$。

2) 有传递性：若 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow C$，则 $A \Rightarrow C$。

3) 有反对称性：若 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$，则 $A \Leftrightarrow B$。

4) 若 $A \Rightarrow B$ 且 $A \Rightarrow C$，则 $A \Rightarrow B \wedge C$。

5) 若 $A \Rightarrow B$ 且 $C \Rightarrow B$，则 $A \vee C \Rightarrow B$。

定理：设 A、B 为任意两个命题公式， $A \Leftrightarrow B$ 的充要条件是 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$。

证明：若 $A \Leftrightarrow B$，则 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow T$，而 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$，

于是 $A \rightarrow B \Leftrightarrow T$ 且 $B \rightarrow A \Leftrightarrow T$，即 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$ 成立。

若 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$，则 $A \rightarrow B \Leftrightarrow T$ 且 $B \rightarrow A \Leftrightarrow T$，

于是 $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \Leftrightarrow T$。

而 $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \Leftrightarrow A \leftrightarrow B$，

于是 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow T$

即知 $A \Leftrightarrow B$ 成立。

思考

(1) 若 $\neg A \Leftrightarrow \neg B$ 是否有 $A \Leftrightarrow B$?

解：若 $\neg A \Leftrightarrow \neg B$ 则 $\neg A \leftrightarrow \neg B \Leftrightarrow T$

$$
\begin{aligned}
\text{而} \neg A \leftrightarrow \neg B &\Leftrightarrow (\neg A \rightarrow \neg B) \wedge (\neg B \rightarrow \neg A) \\
&\Leftrightarrow (B \rightarrow A) \wedge (A \rightarrow B) \\
&\Leftrightarrow A \leftrightarrow B
\end{aligned}
$$

于是 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow T$，即 $A \Leftrightarrow B$

(2) 若 $\neg A \Rightarrow \neg B$ 是否有 $A \Rightarrow B$?

解：若 $\neg A \Rightarrow \neg B$ 则 $\neg A \rightarrow \neg B \Leftrightarrow T$

而 $\neg A \rightarrow \neg B \Leftrightarrow B \rightarrow A$，

于是 $B \rightarrow A \Leftrightarrow T$，即 $B \Rightarrow A$ 而不是 $A \Rightarrow B$

谢 谢