2023级《线性代数Ⅰ》期末考试卷(A)

班级__________ 学号____________ 姓名

请将答案写在答题纸上!

一、单选题(1-5,每小题4分,共20分)

1. 设 A 为 n 阶矩阵, $A^2 = A$, 则下列成立的是【 】

(A) $A=O$ **(B)** $A=E$ **(C)** 若 A 不可逆,则 $A=O$ **(D)** 若 A 可逆,则 $A=E$

2. 若 n 阶矩阵 A 经过若干次初等变换化为矩阵 B, 则【 】

(A) $|A|=|B|$ **(B)** $|A|\neq|B|$

(C) 若 $|A|=0$, 则 $|B|=0$ **(D)** 若 $|A|>0$, 则 $|B|>0$

3. 下列矩阵中不能相似于对角矩阵的是【 】

(A) $\begin{pmatrix}1&1&a\\0&2&2\\0&0&3\end{pmatrix}$ **(B)** $\begin{pmatrix}1&1&a\\1&2&0\\a&0&3\end{pmatrix}$ **(C)** $\begin{pmatrix}1&1&a\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ **(D)** $\begin{pmatrix}1&1&a\\0&2&2\\0&0&2\end{pmatrix}$

4. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关, $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关,则【 】

(A) α_1 可由 α_2,α_3 线性表示 **(B)** α_4 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示

(C) α_4 可由 α_1,α_3 线性表示 **(D)** α_4 可由 α_1,α_2 线性表示

5. 设 α_1,α_2 是齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系, β_1,β_2 是非齐次方程组 $Ax=b$ 的两个不同解,则方程组 $Ax=b$ 的通解为【 】

(A) $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1-\alpha_2)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$ **(B)** $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$

(C) $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1+\beta_2)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$ **(D)** $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$

二、填空题(6-11,每小题5分,共30分)

6. 行列式 $\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}=$ ____. **7.** 设 $\alpha=(1,-1,2)^T$, $\beta=(2,1,1)^T$, $A=\alpha\beta^T$, 则 $A^n=$ ____.

8. 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ 和 $\beta_1=\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}$, $\beta_2=\begin{pmatrix}3\\-1\\3\end{pmatrix}$ 是向量空间 V 的两组基,则从 α_1,α_2 到 β_1,β_2 的过渡矩阵为____.

9. 设 $A=\begin{pmatrix}3&-4\\4&3\end{pmatrix}$, $\alpha=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, 则向量 $A^2\alpha$ 的模 $\|A^2\alpha\|=$ ____.

10. 设 A,B 都是三阶矩阵, A 相似于 B, 且 $|E-A|=|E-2A|=|E-3A|=0$, 则 $|B^{-1}+2E|=$ ____.

11. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2-x_3)^2+(x_2+x_3)^2$ 是否正定____.(填"是"或"否")

三、解答题(12-14小题,每小题12分,共36分)

12. 讨论含参数 a 的线性方程组 $\begin{cases}ax_1+(a+3)x_2+x_3=-2\\x_1+ax_2+x_3=a\\x_1+x_2+ax_3=a^2\end{cases}$ 解的情况,在有无穷多解时求出结构式通解。

13. 求向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1\\5\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\0\\3\\-1\end{pmatrix}$, $\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\3\\3\\7\end{pmatrix}$ 的秩和一个极大线性无关组,并将其余向量用此极大线性无关组表示。

14. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&2&2\\2&4&-2\\2&-2&4\end{pmatrix}$, 求正交矩阵 Q 使得 Q^TAQ 为对角矩阵。

四、证明题(15-16小题,每小题7分,共14分)

15. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 A 的三个不同的特征值,对应的特征向量为 α_1, α_2, α_3, 令 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$. 证明:向量组 $\beta, A\beta, A^2\beta$ 线性无关.

16. 设 A,B 为 n 阶正定矩阵,证明: $A+B$ 为正定矩阵。

考试形式开卷( )、闭卷(√),在选项上打(√)
开课教研室 大学数学部 命题教师________ 命题时间 2023-12-20 使用学期 23-24-1 总张数 1 教研室主任审核签字