2-5 谓词演算的等价与蕴含

谓词演算

- 对命题变元赋值比较容易，因为每个变元只有两个值可赋，所以可以画真值表。
- 在谓词演算中，由于谓词公式中可能有命题变元、个体变元。而论域中的个体可能有无限多个，所以没有办法画真值表。

谓词公式赋值

一、对谓词公式赋值（给谓词公式一个解释）

对一个谓词公式赋值由如下四部分组成：

(1) 指定非空个体域集合；

(2) 将谓词公式中的命题变元，用确定的命题替代；

(3) 对公式中的个体变元用论域中的具体个体替代；

(4) 对公式中含有的谓词变项，用谓词常项替代。

谓词公式赋值

例：给公式 P→N(x) 作赋值。

个体域：实数集合；

P：2>1；

N(x)：x是自然数；

x=4 。

是它的一个赋值：

此公式变成 T→N(4)，它的真值为“ T ” 。

谓词公式的永真式

二、谓词公式的永真式

给定谓词公式 A，如果不论对其作任何赋值，都使得谓词公式 A 的真值为真，则称 A 为永真式。

例如，公式 $I(x) \vee \neg I(x)$

谓词公式的等价式

三、谓词公式的等价公式：

给定谓词公式 A、B，如果 A↔B是永真式，则称 A 与 B 等价，记作 A⇔B。

例如：

$$N(x) \rightarrow I(x) \Leftrightarrow \neg N(x) \vee I(x)$$

谓词公式的蕴含式

四、谓词公式的蕴含式

给定谓词公式 A、B，如果 A→B 为永真式，则称 A 蕴含 B，记作 A⇒B。

谓词公式的蕴含式

例如， $G(x) \wedge N(x) \Rightarrow N(x)$

因为 $(G(x) \wedge N(x)) \rightarrow N(x)$

$\Leftrightarrow \neg(G(x) \wedge N(x)) \vee N(x)$

$\Leftrightarrow (\neg G(x) \vee \neg N(x)) \vee N(x)$

$\Leftrightarrow \neg G(x) \vee (\neg N(x) \vee N(x)) \Leftrightarrow T$ 是永真式，

所以 $G(x) \wedge N(x) \Rightarrow N(x)$。

谓词演算的等价及蕴含公式

由命题演算推广出的公式

一、由命题演算推广出的公式

一个不含自由变元的谓词公式是命题。

含有 n 个自由变元的原子谓词公式，可以看成是命题变元。

所以只要不牵涉到量词的运算，命题演算中的等价公式和重言蕴含公式均可推广到谓词演算中使用。

由命题演算推广出的公式

例如： $A(x) \Rightarrow A(x) \vee B(x)$

$$P \Rightarrow P \vee Q$$

$$\exists x(A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow \exists x(\neg A(x) \vee B(x))$$

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$$

$$\neg(\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)) \Leftrightarrow \neg \exists x A(x) \vee \neg \exists x B(x)$$

$$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$$

有限个体域下谓词演算的消去量词公式

二、有限个体域下谓词演算的消去量词公式

- 谓词逻辑与命题逻辑的区别在于对命题的表达不同。
- 谓词公式与命题公式的最大区别在于多了量词，所以我们主要研究量词的处理。

有限个体域下谓词演算的消去量词公式

设论域为 $\{a_1,a_2,\ldots.,a_n\}$，则

1. $\forall xA(x) \Leftrightarrow A(a_1)\wedge A(a_2)\wedge\ldots\ldots\wedge A(a_n)$
2. $\exists xB(x) \Leftrightarrow B(a_1)\vee B(a_2)\vee\ldots\ldots\vee B(a_n)$

量词否定等价公式（“¬”与量词的关系）

三、量词否定等价公式

谓词逻辑与命题逻辑的区别在于命题的表达不同。

谓词公式与命题公式的最大区别在于多了量词，而所有的命题表达式都可以表示成只含有联结词“¬”、“∧”、“∨”的表达式。

所以只要研究清楚“量词”与“¬”、“∧”、“∨”之间的关系，谓词表达式的运算也就清楚了。

量词否定等价公式（“¬”与量词的关系）

三、量词否定等价公式（量词与“¬”的关系）

$$\neg\forall xA(x) \Leftrightarrow \exists x\neg A(x)$$

$$\neg\exists xA(x) \Leftrightarrow \forall x\neg A(x)$$

量词转换律

直观解释：

“并不是所有的 x 都有性质 A”与“存在 x 没有性质 A”是一个意思。

“不存在有性质 A 的 x ”与“所有 x 都没有性质 A”是一个意思。

量词作用域的扩充与收缩

四、量词作用域的扩充与收缩

量词辖域的扩充与收缩研究的是量词与“∨, ∧”的关系，其中一个运算对象不受该量词约束，有如下公式：

1. $\forall xA(x) \vee B \Leftrightarrow \forall x(A(x) \vee B)$

2. $\forall xA(x) \wedge B \Leftrightarrow \forall x(A(x) \wedge B)$

3. $\exists xA(x) \vee B \Leftrightarrow \exists x(A(x) \vee B)$

4. $\exists xA(x) \wedge B \Leftrightarrow \exists x(A (x) \wedge B)$

量词作用域的扩充与收缩

我们以有限个体域证明公式

$$\forall x A(x) \vee B \Leftrightarrow \forall x (A(x) \vee B)$$

证明：设个体域为 $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$，

$$\forall x A(x) \vee B$$

$$\Leftrightarrow (A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \ldots \wedge A(a_n)) \vee B$$

$$\Leftrightarrow (A(a_1) \vee B) \wedge (A(a_2) \vee B) \wedge \ldots \wedge (A(a_n) \vee B)$$

$$\Leftrightarrow \forall x (A(x) \vee B)$$

量词作用域的扩充与收缩

其它公式：

5. $B \to \forall x A(x) \Leftrightarrow \forall x(B \to A(x))$

6. $B \to \exists x A(x) \Leftrightarrow \exists x(B \to A(x))$

7. $\forall x A(x) \to B \Leftrightarrow \exists x(A(x) \to B)$

8. $\exists x A(x) \to B \Leftrightarrow \forall x(A(x) \to B)$

量词的分配公式

五、量词的分配公式

若两个运算对象均受同一个量词约束，量词与“∨, ∧”运算是什么关系？

有如下的量词分配公式：

1. $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$
2. $\exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x) \vee \exists xB(x)$
3. $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$
4. $\forall xA(x) \vee \forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$

量词的分配公式

证明公式1 $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$

证明：设个体域为D。

若一个赋值使得 $\forall x(A(x) \wedge B(x))$ 为 T，则对任意个体 $x \in D$ 均有 $A(x) \wedge B(x)$ 为 T，于是对任意个体 $x \in D$ 均有 $A(x)$ 为 T，并且对任意个体 $x \in D$ 均有 $B(x)$ 为 T，所以 $\forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$ 为 T。

量词的分配公式

若一个赋值使得$\forall x(A(x)\wedge B(x))$ 为 F，则至少有一个个体 $a\in D$ 使得 $A(a)\wedge B(a)$ 为 F，即 $A(a)$ 为 F 或者 $B(a)$ 为 F，于是$\forall xA(x)$ 为 F 或者 $\forall xB(x)$ 为 F，所以$\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$ 为 F。

综上，$\forall x(A(x)\wedge B(x))\Leftrightarrow\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$。

量词的分配公式

可以用公式 1 来证明公式 2：

公式1 $\forall x(A(x)\land B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x)\land\forall xB(x)$

$$\exists x(A(x)\lor B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x)\lor\exists xB(x)$$

证明：

$$\begin{aligned}
&\exists x(A(x)\lor B(x))\\
\Leftrightarrow\ &\neg(\neg\exists x(A(x)\lor B(x)))\\
\Leftrightarrow\ &\neg(\forall x(\neg(A(x)\lor B(x))))\\
\Leftrightarrow\ &\neg(\ \forall x(\neg A(x)\land\neg B(x))\ )\\
\Leftrightarrow\ &\neg(\ \forall x\neg A(x)\land\forall x\neg B(x)\ )\\
\Leftrightarrow\ &\neg(\neg\exists xA(x)\land\neg\exists xB(x))\\
\Leftrightarrow\ &\exists xA(x)\lor\exists xB(x)
\end{aligned}$$

公式 1

量词的分配公式

举例说明公式3：

$\exists x(A(x) \land B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \land \exists xB(x)$

设 A(x)：x在联欢会上唱歌；

B(x)：x在联欢会上跳舞。论域：{我们班}

$\exists x(A(x) \land B(x))$表示：我们班有些同学在联欢会上既唱歌又跳舞”。

$\exists xA(x) \land \exists xB(x)$表示：我们班有些同学在联欢会上唱歌并且我们班有些同学在联欢会上跳舞。

可看出：$\exists x(A(x) \land B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \land \exists xB(x)$

量词的分配公式

证明公式3，

$$\exists x(A(x)\wedge B(x))\Rightarrow \exists xA(x)\wedge \exists xB(x)$$

证明：假设前件 $\exists x(A(x)\wedge B(x))$为T， 则个体域中至少有一个体a，使得 $A(a)\wedge B(a)$ 为 T，于是 A(a)和 B(a) 都为 T，所以有 $\exists xA(x)$ 为 T 以及 $\exists xB(x)$ 为 T，进而 $\exists xA(x)\wedge \exists xB(x)$ 为 T。

因此 $\exists x(A(x)\wedge B(x))\Rightarrow \exists xA(x)\wedge \exists xB(x)$

量词的分配公式

思考：能否证出

$\exists xA(x) \wedge \exists xB(x) \Rightarrow \exists x(A(x) \wedge B(x))$？

假设 $\exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$ 为 T，于是个体域中存在个体 a，使得 A(a) 为 T，

并且存在个体 b，使得 B(b) 为 T。

也就是未必能找出使得A(x)与B(x)都成立的个体。

量词的分配公式

公式3：$\exists x(A(x)\wedge B(x))\Rightarrow\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$

利用公式3可以证明公式4

$$\forall xA(x)\vee\forall xB(x)\ \Rightarrow\ \forall x(A(x)\vee B(x))$$

证明：

$$\exists x(\neg A(x)\wedge\neg B(x))\ \Rightarrow\ \exists x\neg A(x)\wedge\exists x\neg B(x)\qquad\text{公式3}$$

$$\exists x\neg(A(x)\vee B(x))\ \Rightarrow\ \neg\forall xA(x)\wedge\neg\forall xB(x)$$

$$\neg\forall x(A(x)\vee B(x))\ \Rightarrow\ \neg(\forall xA(x)\vee\forall xB(x))$$

因为若 $\neg P\Rightarrow\neg Q$，则 $Q\Rightarrow P$　所以

$$\forall xA(x)\vee\forall xB(x)\ \Rightarrow\ \forall x(A(x)\vee B(x))$$

公式 4 得证。

量词的分配公式

其它公式：

5. $\exists x(A(x)\to B(x)) \;\Leftrightarrow\; \forall xA(x)\to\exists xB(x)$

6. $\exists xA(x)\to\forall xB(x) \;\Rightarrow\; \forall x(A(x)\to B(x))$

量词的分配公式

证明公式6

$\exists xA(x)\rightarrow\forall xB(x)\Rightarrow\forall x(A(x)\rightarrow B(x))$

证明： $\exists xA(x)\rightarrow\forall xB(x)$

$\Leftrightarrow\neg\exists xA(x)\vee\forall xB(x)$

$\Leftrightarrow\forall x\neg A(x)\vee\forall xB(x)$

$\Rightarrow\forall x(\neg A(x)\vee B(x))$ 公式4

$\Leftrightarrow\forall x(A(x)\rightarrow B(x))$

两个量词的谓词演算公式

六、两个量词的谓词演算公式

在**A(x,y)**前若有两个量词，如果两个量词相同，则它们的次序是可以交换的；

但如果两个量词是不同的，它们的次序就不可以随便交换。

两个量词的谓词演算公式

例如，设 $A(x,y)$ 表示“$x+y=0$”，

个体域：实数集合，

- $\forall x \exists y A(x,y)$表示“对于任意给定的一个实数 x，可以找到一个实数 y，使得 $x+y=0$”。这是一个为“真”的命题。
- 而交换量词后$\exists y \forall x A(x,y)$ 表示“存在一个实数 y，与任意一个实数 x 之和都等于 0”。这是一个为“假”的命题。

两个量词的谓词演算公式

两个谓词的公式：

1. $\forall x \forall y A(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall x A(x,y)$
2. $\forall x \forall y A(x,y) \Rightarrow \exists y \forall x A(x,y)$
3. $\exists y \forall x A(x,y) \Rightarrow \forall x \exists y A(x,y)$
4. $\forall x \exists y A(x,y) \Rightarrow \exists x \exists y A(x,y)$
5. $\forall y \forall x A(x,y) \Rightarrow \exists x \forall y A(x,y)$
6. $\exists x \forall y A(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x A(x,y)$
7. $\forall y \exists x A(x,y) \Rightarrow \exists x \exists y A(x,y)$
8. $\exists x \exists y A(x,y) \Leftrightarrow \exists y \exists x A(x,y)$

两个量词的谓词演算公式

例如，设 $A(x,y)$：x与y是同乡，

个体域：江南大学计算机21级所有学生，

$\exists y \forall x A(x,y)$：

表示“存在一个同学 y，他与班中任意一个同学都是同乡”。

就是说这个班所有同学都是同乡。

$\forall x \exists y A(x,y)$：

表示“对任意一个同学 x，可以找到一个班中同学y，

y与x是同乡”。

$$\exists y \forall x A(x,y) \Rightarrow \forall x \exists y A(x,y)$$

两个量词的谓词演算公式

注意：下面式子不成立

$\forall x\exists y A(x,y) \not\Rightarrow \exists y\forall x A(x,y)$

两个量词的谓词演算公式

为了便于记忆，用下面图形表示上面八个公式。

$$\begin{tikzcd}
\forall x \forall y A(x,y) \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \forall y \forall x A(x,y) \arrow[d, Rightarrow] \\
\exists x \forall y A(x,y) \arrow[d, Rightarrow] & \exists y \forall x A(x,y) \arrow[d, Rightarrow] \\
\forall y \exists x A(x,y) \arrow[d, Rightarrow] & \forall x \exists y A(x,y) \arrow[d, Rightarrow] \\
\exists y \exists x A(x,y) \arrow[r, Leftrightarrow] & \exists x \exists y A(x,y)
\end{tikzcd}$$

谢 谢