

---

## 2-4 变元的约束

---

# 量词的作用域

---

## 一、量词的作用域(辖域)

在谓词公式中，量词的作用范围称之为量词的作用域，也叫量词的辖域。

例：  $\forall xA(x)$  中  $\forall x$  的辖域为  $A(x)$ 。

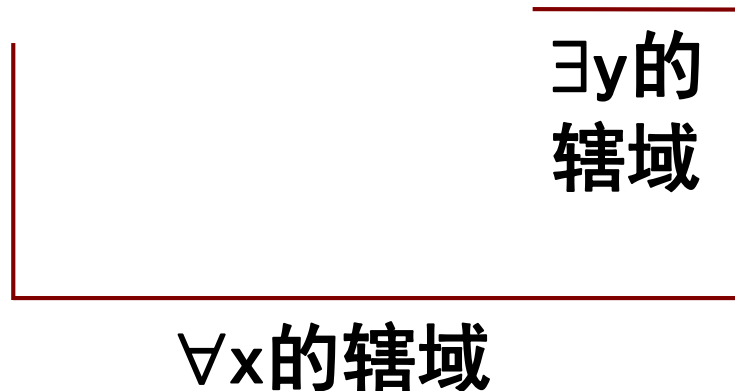
$\exists x(A(x) \rightarrow B(x))$  中  $\exists x$  的辖域为：

$$(A(x) \rightarrow B(x))$$

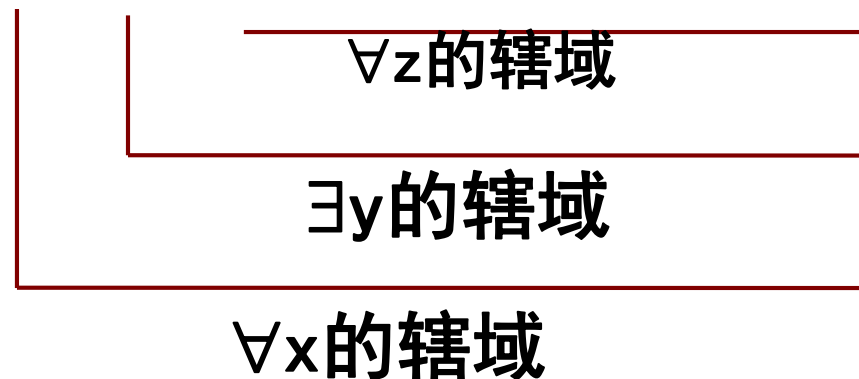
# 量词的作用域

例：

$$\forall x((P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \exists y R(x, y))$$



$$\forall x \exists y \forall z (A(x, y) \rightarrow B(x, y, z)) \wedge C(t)$$



# 量词的作用域

---

一般地，

- 如果量词后边只是一个原子谓词公式时，该量词的辖域就是此原子谓词公式。

例如：  $\forall xA(x)$

- 如果量词后边是括号，则此括号所表示的区域就是该量词的辖域。

例如：  $\exists x(A(x) \rightarrow B(x))$

- 如果多个量词紧挨着出现，则后边的量词及其辖域就是前边量词的辖域。

例如：  $\forall x \exists y \forall z (A(x,y) \rightarrow B(x,y,z)) \wedge C(t)$

# 变元的约束

---

## 二、自由变元与约束变元

在谓词公式中的个体变元可以分成两种，一种是受到量词约束的，一种是不受量词约束的。

例：  $\forall x(F(x,y) \rightarrow \exists yP(y)) \wedge Q(z)$

$F(x,y)$ 中的  $x$  在  $\forall x$  的辖域内，受到  $\forall x$  的约束，  
而  $y$  不受  $\forall x$  的约束。

$P(y)$ 中的  $y$  在  $\exists y$  的辖域内，受  $\exists y$  的约束。

$Q(z)$ 中的  $z$  不受任何量词约束。

# 变元的约束

---

定义：如果客体变元  $x$  在  $\forall x$  或者  $\exists x$  的辖域内，则称  $x$  在此辖域内约束出现，并称  $x$  在此辖域内是约束变元。否则  $x$  是自由出现，并称  $x$  是自由变元。

例：  $\forall x(F(x,y) \rightarrow \exists yP(y)) \wedge Q(z)$

$F(x,y)$  中的  $x$  和  $P(y)$  中的  $y$  是约束变元。

而  $F(x,y)$  中的  $y$  和  $Q(z)$  中的  $z$  是自由变元。

# 变元的约束

---

例：  $\forall x(F(x, y) \rightarrow \exists y P(y)) \wedge Q(z)$

$y$  既是自由变元，也是约束变元。为避免混淆，需要对约束变元换名。

# 约束变元的换名

---

约束变元的换名规则：

设  $A$  为一谓词公式，将  $A$  中某量词辖域内的一个约束变元的所有出现及相应的指导变元全部改成  $A$  中没出现过的某个变元符号， $A$  中其余部分不变，记所得公式为  $A'$ ，则  $A \Leftrightarrow A'$ 。



# 约束变元的换名

---

例：(1)  $\forall x(F(x,y) \rightarrow \exists yP(y)) \wedge Q(z)$

对约束变元  $y$  进行改名，谓词公式变为：

$$\forall x(F(x,y) \rightarrow \exists tP(t)) \wedge Q(z)$$

(2)  $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x,y)) \vee (R(x) \wedge A(x))$

$\forall x$  的辖域

对约束变元  $x$  进行改名，谓词公式变为：

$$\forall z(P(z) \rightarrow Q(z,y)) \vee (R(x) \wedge A(x))$$

# 自由变元的代入

---

对自由变元也可以换名，此换名叫代入。

自由变元的代入规则：

设  $A$  为一谓词公式，将  $A$  中某个自由出现的个体变元的所有出现用某个  $A$  中没出现过的变元符号代替， $A$  中其余部分不变，记所得公式为  $A'$ ，则  $A \Leftrightarrow A'$ 。

# 自由变元的代入

---

例1:  $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x, y)) \vee (R(x) \wedge A(x))$

对自由变元  $x$  作代入, 谓词公式变为

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x, y)) \vee (R(z) \wedge A(z))$$

例2  $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x, y)) \vee (R(x) \wedge A(y))$

对自由变元  $x$  作代入, 谓词公式变为

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x, y)) \vee (R(z) \wedge A(y))$$

# 变元的约束

---

说明:

(1) 一个  $n$  元谓词  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , 若在前边添加  $k$  个量词, 使其中的  $k$  个个体变元变成约束变元, 则此  $n$  元谓词就变成了  $n-k$  元谓词。

(2) 一个谓词公式如果无自由变元, 它就表示一个命题。

# 变元的约束

---

例：假设  $P(x,y,z)$  表示  $x+y=z$ ，个体域是整数集。 $\forall x \exists y P(x,y,z)$  表示“对任意给定的整数  $x$ ，都可以找到整数  $y$ ，使得  $x+y=z$ ”。

如果令  $z=1$ ，则  $\forall x \exists y P(x,y,1)$  就变成了命题“任意给定的整数  $x$ ，都可以找到整数  $y$ ，使得  $x+y=1$ ”。

可见每当给  $z$  指定某个整数  $a$  后， $\forall x \exists y P(x,y,a)$  就变成了一个命题。所以谓词公式  $\forall x \exists y P(x,y,z)$  是只含有个体变元  $z$  的一元谓词。

---

谢谢