

2014 级高等数学 I (2) 考试卷(A)

使用专业、班级_____ 学号_____ 姓名_____

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得 分								
阅卷人								

本题
得分

一、填空题(每小题 4 分, 共 20 分)

(1) 已知 $a = (1, -5, 5)$, $b = (1, -3, 2)$, $c = (401, 0, 0)$, 则 $a \times (2b) + 5c =$ (2015, 6, 4)

(2) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $xe^x - ye^y = ze^z$ 确定, 则 $dz = \frac{(1+x)e^x dx - (1+y)e^y dy}{(1+z)e^z}$

(3) 交换积分次序, 有 $\int_1^{e^2} dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy = \int_0^2 dy \int_{e^y}^{e^2} f(x, y) dx$

(4) 设 Σ 是圆柱体 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h\}$ ($R > 0, h > 0$) 的整个表面外侧, 则曲面积分

$$\oiint_{\Sigma} zxdydz + xydzdx + yzdx dy = \frac{1}{2} \pi R^2 h^2$$

(5) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n \sqrt{n}}$ 的收敛域是 $[-3, 1)$

本题
得分

二、选择题(每小题 4 分, 共 16 分)

(1) 函数 $u = xy^z$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处沿方向 $l = (1, 2, 2)$ 的方向导数是

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3. 【 B 】

(2) xOz 面上的曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ($a > 0, c > 0$) 绕 x 轴旋转一周形成的旋转曲面的方程是

(A) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. (B) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. (C) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. (D) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. 【 D 】

(3) 设在上半平面 $y > 0$ 内 $\frac{xdy + kydx}{x^2 + y^2}$ 是某二元函数 $u(x, y)$ 的全微分, 则 k 的值为

(A) -1. (B) 0. (C) 1. (D) 2. 【 A 】

(4) 设 $u_n = (-1)^{n-1} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), 则

(A) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 都发散. (B) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛.
(C) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 发散. (D) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 都收敛. 【 C 】

本题
得分

三、计算下列各题(每小题 8 分, 共 32 分)

(1) 设 $z = f(x^2 - y^2, e^y \sin x)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xf_1' + e^y \cos xf_2', \dots\dots\dots ④$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= 2f_1' + 2x(2xf_{11}'' + e^y \cos xf_{12}'') - e^y \sin xf_2' + e^y \cos x(2xf_{21}'' + e^y \cos xf_{22}'') \\ &= 4x^2 f_{11}'' + 4xe^y \cos xf_{12}'' + e^{2y} \cos^2 xf_{22}'' + 2f_1' - e^y \sin xf_2'. \dots\dots\dots ⑧ \end{aligned}$$

(2) 求过两条平行直线 $\frac{x-3}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{1}$ 和 $\frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$ 的平面的方程.

解 两直线上各取一点, 分别为 $M_1(3, 1, -2)$ 和 $M_2(4, -3, 0)$, $\dots\dots\dots ②$

则 $\overrightarrow{M_1 M_2} = (1, -4, 2)$,

直线的方向向量 $s = (5, 2, 1)$,

所求平面的法向量为

$$n = s \times \overrightarrow{M_1 M_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = (8, -9, -22), \dots\dots\dots ④ = | | = ⑥$$

因此所求平面为 $8(x-3) - 9(y-1) - 22(z+2) = 0$, $\dots\dots\dots ⑧$

即 $8x - 9y - 22z - 59 = 0$.

考试形式 开卷 ()、闭卷 (√), 在选项上打 “√”

开课教研室 大学数学部 命题教师 命题组 命题时间 2015.5.20 使用学期 2014-2015-2 总张数 3 教研室主任审核签字

(3) 计算二重积分 $\iint_D (x+2y)\sqrt{x^2+y^2}d\sigma$, 其中 D 是由圆 $x^2+y^2=2x$ 所围成的平面区域.

解 原式 $= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} (\rho\cos\theta + 2\rho\sin\theta)\rho \cdot \rho d\rho$ ④

$$= 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^5\theta + 2\cos^4\theta\sin\theta) d\theta$$
⑥

$$= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta d\theta = 8 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{64}{15}.$$
⑧

(4) 求由上半球面 $x^2+y^2+z^2=2a^2$ ($z \geq 0$) 与圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的立体的体积.

解1 $V = \iiint_{\Omega} dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \rho d\rho \int_{\rho}^{\sqrt{2a^2-\rho^2}} dz$ ② = ⑥

$$= 2\pi \int_0^a \rho \left(\sqrt{2a^2-\rho^2} - \rho \right) d\rho$$

$$= \frac{4}{3} (\sqrt{2}-1) \pi a^3.$$
⑧

解2 $V = \iiint_{\Omega} dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi d\varphi \int_0^{\sqrt{2}a} r^2 dr$ ② = ⑥

$$= 2\pi \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{1}{3} (\sqrt{2}a)^3 = \frac{4}{3} (\sqrt{2}-1) \pi a^3.$$
⑧

解3 $V = \iiint_{\Omega} dv = \int_0^a dz \iint_{x^2+y^2 \leq z^2} dx dy + \int_a^{\sqrt{2}a} dz \iint_{x^2+y^2 \leq 2a^2-z^2} dx dy$ ② = ⑥

$$= \pi \int_0^a z^2 dz + \pi \int_a^{\sqrt{2}a} (2a^2 - z^2) dz$$

$$= \frac{1}{3} \pi a^3 + 2\pi (\sqrt{2}-1) a^3 - \frac{1}{3} \pi (2\sqrt{2}-1) a^3 = \frac{4}{3} (\sqrt{2}-1) \pi a^3.$$
⑧

本题
得分

四、(本题8分) 将函数 $f(x) = \arctan x$ 展开成 x 的幂级数, 并求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

解 $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad (-1 < x < 1),$ ① = ③ (④)

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 \leq x \leq 1),$$
⑥ (⑦)

令 $x=1$ 得 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = f(1) = \frac{\pi}{4}.$ ⑧

本题
得分

五、(本题9分) 计算曲线积分 $I = \int_L (e^x \sin y - x - y) dx + (e^x \cos y + x) dy$, 其中 L 是曲线 $y = \sqrt{2x-x^2}$ 上从点 $A(2,0)$ 到点 $O(0,0)$ 的有向弧段.

解1 $I = \left(\oint_{L+\overline{OA}} - \int_{OA} \right) (e^x \sin y - x - y) dx + (e^x \cos y + x) dy$ ②

$$= \iint_D 2 dx dy - \int_0^2 (-x) dx$$
⑤ - ⑧

$$= \pi + 2.$$
⑨

解2 $I = \int_L d \left(e^x \sin y - \frac{1}{2} x^2 + xy \right) - 2y dx$ ④

$$= \left[e^x \sin y - \frac{1}{2} x^2 + xy \right]_{(2,0)}^{(0,0)} - 2 \int_2^0 \sqrt{2x-x^2} dx$$
⑥ - ⑧

$$= 2 + \pi.$$
⑨

本题 得分	
----------	--

六、(本题 10 分) 设有椭球面 $\Sigma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, 其中 $a > 0, b > 0, c > 0$.

(1) 证明 Σ 上任一点 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面方程为 $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1$.

(2) 在第一卦限内作 Σ 的切平面, 使该切平面与三坐标面所围成的四面体的体积最小. 求切点坐标及最小体积.

解 (1) 设 $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$, 则切平面的法向量为

$$\mathbf{n} = \left(\frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2}, \frac{2z_0}{c^2} \right) = 2 \left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}, \frac{z_0}{c^2} \right), \quad \dots\dots ②$$

$$\text{故切平面方程为 } \frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{z_0}{c^2}(z - z_0) = 0, \quad \dots\dots ④$$

$$\text{整理并注意到 } \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1, \text{ 即得 } \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1. \quad \dots\dots ⑤$$

(2) 切平面在三个坐标轴上的截距依次为 $\frac{a^2}{x_0}, \frac{b^2}{y_0}, \frac{c^2}{z_0}$, 故问题归结为

$$\begin{cases} \min V = \frac{1}{6} \frac{a^2 b^2 c^2}{x_0 y_0 z_0}, \\ \text{s.t. } \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1, \end{cases} \quad \dots\dots ⑦$$

等价于

$$\begin{cases} \max V = xyz, \\ \text{s.t. } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \end{cases}$$

作 Lagrange 函数 $L(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right)$,

$$\text{令 } \begin{cases} L_x = yz + \frac{2\lambda x}{a^2} = 0 \\ L_y = xz + \frac{2\lambda y}{b^2} = 0 \\ L_z = xy + \frac{2\lambda z}{c^2} = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases} \quad \dots\dots ⑧$$

$$\text{解得 } x = \frac{a}{\sqrt{3}}, y = \frac{b}{\sqrt{3}}, z = \frac{c}{\sqrt{3}}. \quad \dots\dots ⑨$$

由实际问题的性质可知, 所求切点即为 $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}} \right)$, 此时四面体的体积为

$$V_{\min} = \frac{1}{6} \frac{a^2 b^2 c^2}{\frac{a}{\sqrt{3}} \frac{b}{\sqrt{3}} \frac{c}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2} abc. \quad \dots\dots ⑩$$

本题 得分	
----------	--

七、(本题 5 分) 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_n}{u_{n+1}} \right| = \rho$ 且 $\rho < 1$, 问级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是否一定收敛或一定发散?

如果一定, 请证明你的结论; 如果不一定请举例说明.

解 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 一定发散. 证明如下: \dots\dots ②

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_n}{u_{n+1}} \right| = \rho < 1$ 知, 对 $\varepsilon \in (0, 1 - \rho)$, 存在正整数 N , 使得当 $n \geq N$ 时

$$\left| \frac{u_n}{u_{n+1}} \right| < \rho + \varepsilon < 1, \quad \dots\dots ③$$

即 $|u_n| \leq |u_{n+1}|, \quad n = N, N+1, \dots$

亦即当 $n \geq N$ 时, $|u_n|$ 是逐渐增大的, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, \dots\dots ④

由级数收敛的必要条件知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散. \dots\dots ⑤