

数分 II (A)

使用专业、班级_____ 学号_____ 姓名_____

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总 分
得 分								

本题 得分	
----------	--

 一、填空题〔每小题 4 分，共计 16 分〕

1. $\int_{-1}^1 \left(\frac{x^2 \sin x}{1+x^2} + x^2 \right) dx =$ _____.
2. 求曲线 $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t), \\ y = a(\sin t - t \cos t), \end{cases}$ (其中 $a > 0, 0 \leq t \leq 2\pi$) 的弧长_____.
3. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^p+1}}$ 收敛的充要条件是 p 满足不等式_____.
4. 设 $z = x^2 - xy + y^2$ 在点 $(-1,1)$ 处沿着方向 $(2,1)$ 的方向导数 $\frac{\partial z}{\partial l} =$ _____.

本题 得分	
----------	--

 二、选择题 〔每小题 4 分，共计 16 分〕

- (1) 下列广义积分收敛的是 ()
- (A) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$ (B) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 4x}{1+x^2} dx$
- (C) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ ($p \leq 1$) (D) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p} dx$ ($p \leq 1$)
- (2) 下列级数中收敛的是 ()
- (A) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1}$ (B) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+3}{n^2+5n}$
- (C) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (D) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$

- (3) 下列关于二元函数的结论正确的是 ()
- (A) 偏导数不连续，则全微分必不存在 (B) 偏导数连续，则全微分一定存在
- (C) 全微分存在，则偏导数必连续 (D) 全微分存在的充要条件：偏导数存在.

(4) 设 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x+y)\sin xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0, \end{cases}$ 则 ()

- (A) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不连续; (B) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续，可微;
- (C) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续，不可微; (D) $f(0,1)=1$.

本题 得分	
----------	--

 三、计算题 〔每小题 6 分，共计 36 分〕

- (1) 求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x - 5} dx$ 的值.
- (2) 判断反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^p} dx$ (其中 $p \geq 0$) 是否收敛? 如果是收敛的，是绝对收敛还是条件收敛?

(3) 判断极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x+y+1}-1}$ 的存在性, 若存在, 求其值; 若不存在, 请说明理由.

(4) 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin \frac{n}{2} \pi}{3^n}$ 是否收敛? 如果是收敛的, 是绝对收敛还是条件收敛?

(5) 设 $u = f(xy, \frac{y}{x})$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

(6) 将函数 $f(x) = \arctan x$ 展开成 x 的幂级数, 并求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

本题	
得分	

四、(本题 8 分) 证明: 级数 $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^2 \sqrt[3]{n}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且导函数连续.

本 题 得 分	
------------------	--

五、（本题 8 分）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的收敛域与和函数.

本 题 得 分	
------------------	--

六、（本题 8 分）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续， $f(x)>0$ ，

$F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x \frac{1}{f(t)}dt$ ，证明：（1） $F'(x)\geq 2$ ；（2） $F(x)=0$ 在 $[a,b]$ 中有且仅有一个根.

本 题 得 分	
------------------	--

七、（本题 8 分）设函数 $f(x,y)=\begin{cases}y\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$,

证明： $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，并讨论其偏导数的存在性及 $f(x,y)$ 的可微性.