2015《线性代数 I》期末考试卷(A)

使用专业、班级__________ 学号__________ 姓名__________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

本题得分	

一、选择题(每小题 4 分, 共 16 分)

(1) 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵, 则下列结论正确的是

(A) $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$.　(B) 若 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均可逆，则$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$.

(C) $(\boldsymbol{AB})^T=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}^T$.　(D) 若 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均可逆，则$\left[(\boldsymbol{AB})^T\right]^{-1}=\left(\boldsymbol{A}^T\right)^{-1}\left(\boldsymbol{B}^T\right)^{-1}$.　【　】

(2) 设 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$, 其中 $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵，则下列结论正确的是

(A) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{E}$.　(B) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 均可逆.

(C) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 均不可逆.　(D) 当 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{E}$ 时，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 不可逆.　【　】

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的充分必要条件是

(A) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关.　(B) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关.

(C) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关.　(D) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关.　【　】

(4) 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 则必有

(A) $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征向量.　(B) $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$ 且 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$.

(C) $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 与同一个对角矩阵相似.　(D) $\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}=\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E}$.　【　】

本题得分	

二、填空题(每小题 4 分, 共 24 分)

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶方阵, 且 $|\boldsymbol{A}|=\dfrac{1}{3}$, $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, 则 $\left|(3\boldsymbol{A})^{-1}-2\boldsymbol{A}^*\right|=$__________.

(2) 若向量组 $\alpha=(1,-3,2)^T$, $\beta=(2,-1,1)^T$, $\gamma=(1,k,5)^T$ 的秩为2, 则参数 $k=$________.

(3) 设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是四元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的三个解向量, 且 $R(\boldsymbol{A})=3$, $\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=(2,3,4,5)^{\mathrm{T}}$, 则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=$________________.

(4) 若 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 2, 则矩阵 $(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{E})$ 必有一特征值为________.

(5) 已知矩阵 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 相似, 则 $x=$______, $y=$______.

(6) 当 t 满足条件________时, 二次型 $f=x_1^2+(2+t)x_2^2+tx_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3-x_2x_3$ 是正定的.

本题得分	

三、计算题(每小题10 分, 共 20 分)

(1) 设 $D=\begin{vmatrix}2&7&3&6\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}$, 求 $3A_{11}+A_{12}-A_{13}+2A_{14}$.

考试形式开卷（）、闭卷（√），在选项上打（√）

开课教研室__大学数学部__ 命题教师__命题组__ 命题时间__2015-12__ 使用学期__15-16-1__ 总张数__3__ 教研室主任审核签字__________

(2) 设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,0,5)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,1,4)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,2,3)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(0,1,2,4)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_5=(1,-3,0,-7)^T$，求此向量组的一个最大无关组, 并将其余向量用该最大无关组线性表示.

本题得分	

四、(本题10分) 设 $\boldsymbol{R}^3$ 中的两个基为 $\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(1,1,-1)^T,\alpha_3=(0,1,0)^T$ 和 $\beta_1=(1,-2,1)^T$, $\beta_2=(1,2,-1)^T,\beta_3=(0,1,-2)^T$，求 (1) 从基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1, β_2, β_3 的过渡矩阵; (2) 向量 $\eta=3\beta_1+2\beta_2$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标.

本题得分	

五、(本题12分) 当 λ 为何值时, 线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1 - x_2 - x_3 = 1\\ x_1-\lambda x_2+x_3=\lambda\\ x_1+x_2-\lambda x_3=-\lambda^2\end{cases}$ 有唯一解、无解、有无穷多解？并在有无穷多解时求出其通解.

本题得分	

六、(本题12分) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&2\\2&2&a\end{pmatrix}$ 的秩为2，试确定常数 a，并求一个正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

本题得分	

七、(本题6分) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵 $(n\geq 3)$，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{A}^T$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，且 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^T$，证明：(1) $|\boldsymbol{A}|>0$；(2) $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵.