《线性代数 I》 期末考试卷（A）参考答案

一、计算题（1-8，每小题 5 分，共 40 分）

1.（5 分） 求四阶行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

答案：$\underline{\quad -3 \quad}$.

2.（5 分） 设四阶矩阵 A 有特征值 0，1，2，3，若 B 与 A 相似，求行列式 $|B+E|$

答案：24

3.（5 分） 若五阶矩阵 A 的秩 $r(A)=3$，求其伴随矩阵 A^* 的秩 $r(A^*)$。

答案 $\underline{\quad 0 \quad}$.

4.（5 分） 设 $P_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，若 $P_1^5 P_2^2 A P_2^{10} P_1^{10}=\begin{pmatrix} 3 & 34 \\ 7 & 80 \end{pmatrix}$，求 A.

答案：$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

5.（5 分） 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，且 $A^2-AB=E$，其中 E 是三阶单位矩阵，求矩阵 B。

答案：$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6.（5 分） 已知三维向量空间的两组基：$\alpha_1=(1,0,1)^T$，$\alpha_2=(1,1,-1)^T$，$\alpha_3=(1,-1,1)^T$ 和 $\beta_1=(3,0,1)^T$，$\beta_2=(2,0,0)^T$，$\beta_3=(0,2,-2)^T$， 求从 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到 β_1，β_2，β_3 的过渡矩阵。

答案：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

7.（5 分） 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$ 正定，求 t 的取值范围。

答案：$-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$

8.（5 分） 设 A 是三阶正交矩阵，$\alpha=(1,2,3)^T$, 求向量 $A^2\alpha$ 的模$\|A^2\alpha\|$。

答案：$\|A^2\alpha\|=\sqrt{14}$

二、解答题

9.（12 分） 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a^2-1 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$,若线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多个解，求 a 的值以及此时方程组的通解。

解：$(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a^2-1 & a \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-1 & a-1 \end{array}\right)$

$a=1$ 时，$rank(Ab)=rank(A)=2<3$，方程组有无穷多个解，

$a=-1$ 时，$3=rank(Ab)>rank(A)=2$，方程组无解。

当 $a=1$ 时

$$(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a^2-1 & a \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-1 & a-1 \end{array}\right)\to\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

方程组的特解为 $\xi_0=(0,1,0)^T$,基础解系为 $\xi=(1,0,1)^T$,故方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

10. （12 分） 求向量组 $\alpha_1=(1,0,2,1)^T$， $\alpha_2=(2,2,2,1)^T$， $\alpha_3=(3,4,2,3)^T$， $\alpha_4=(4,2,6,3)^T$ $\alpha_5=(1,2,0,1)^T$ 的秩和极大线性无关组，并将其余向量用极大无关组表示。

解：

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&1\\0&2&4&2&2\\2&2&2&6&0\\1&1&3&3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&4&1\\0&2&4&2&2\\0&-2&-4&-2&-2\\0&-1&0&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&4&1\\0&1&2&1&1\\0&1&2&1&1\\0&1&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&3&4&1\\0&1&2&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&-2&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&4&1\\0&1&2&1&1\\0&0&2&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&4&0\\0&1&0&1&0\\0&0&2&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&1&2&0\\0&1&0&1&0\\0&0&2&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

向量组的秩为 3；取 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$ 作为极大无关组；

$\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_5$； $\alpha_4=2\alpha_1+\alpha_2$。

或取 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 作为极大无关组；

$\alpha_5=-\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_3$； $\alpha_4=2\alpha_1+\alpha_2$。

11. （12 分） 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，求 A^5

解 由 $|\lambda E-A|=0$ 得到特征值为 $0,-1,-2$，

$\lambda=0$ 对应的特征向量为 $r_1=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$，

$\lambda=-1$ 对应的特征向量为 $r_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，

$\lambda=-2$ 对应的特征向量为 $r_3=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$，

设 $P=(r_1,r_2,r_1)=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}$，则有 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$，因此可得

$$A^5=P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}^5P^{-1}$$

根据矩阵 P 求得其逆矩阵 $P^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

因此有

$$A^5=P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}^5P^{-1}=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-32\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}30&-31&-14\\62&-63&30\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

三、证明题

12.（8 分） 设 A 是 n 阶非零矩阵，若 $A^3=O$，证明： A 不能相似对角化。

证明：反证法 若 A 能相似对角化，则存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=diag\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$.

于是 $O=P^{-1}A^3P=diag\{\lambda_1^3,\cdots,\lambda_n^3\}$，由此可得

$$\lambda_1^3=\cdots=\lambda_n^3=0,$$

从而 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$.

所以 $A=O$，这与条件 $A\neq O$ 矛盾，故 A 不能相似对角化。

13.（8 分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是方程组 $Ax=0$ 的基础解系，证明：$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 是方程组 $Ax=0$ 的基础解系。

证明：首先证明 $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 都是方程组 $Ax=0$ 的解。

其次证明：向量组 $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 线性无关。

14.（8 分） 设 a,b,c 是互不相同的实数， $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{pmatrix}$，证明：矩阵 A^TA 正定。

证明：因为 a,b,c 是互不相同的实数，所以行列式 $det(A)=(b-a)(c-a)(c-b)\neq 0$，从而方程组 $Ax=0$ 仅有零解。

于是当 $x\neq 0$ 时， $Ax\neq 0$，从而 $x^TA^TAx=\|Ax\|^2>0$，所以矩阵 A^TA 正定。