线性代数1B参考答案

本题得分	

一、计算题（1~ 7小题，每小题 6 分，共 42分）

1. 计算四阶行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

解：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= 3\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$

2. 设 $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ，$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，求 $P_2^{2021} A P_1^{2021}$

解：$P_2^{2021} A P_1^{2021} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4043 & -4041 \end{pmatrix} P_1^{2021} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4041 & 4043 \end{pmatrix}$

3. 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ，矩阵 B 满足等式 $AB = A + 2B$,求 B .

解：$AB = A + 2B \Rightarrow (A-2E)B = A \Rightarrow B = (A-2E)^{-1} A$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$B=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\4&-3&-2\\-2&2&3\end{pmatrix}$$

4. 设三阶方阵 A 的特征值分别为 $2,3,5$，若 B 与 A 相似，求 $|B+2E|$.

解：方阵 A 的特征值分别为 $2,3,5$，因 B 与 A 相似，所以B特征值亦为 $2,3,5$

从而 $B+2E$ 特征值为 $4,5,7$ 所以 $|B+2E|=140$.

5. 给定三维空间 V 的两组基：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，

$\beta_1,=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ 求从基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵。

解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}^{-1}=(e_1,e_2,e_3)$，

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}1&2&2\\2&2&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&2&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$$

所以，过渡矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&2&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4&-3&3\\2&3&3\\2&1&-5\end{pmatrix}$$

6. 设四元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵的秩为 3， η_1,η_2,η_3 是它的三个解，且

$\eta_1+\eta_2=\begin{pmatrix}2\\0\\2\\2\end{pmatrix}$，$3\eta_2+\eta_3=\begin{pmatrix}3\\-2\\-7\\0\end{pmatrix}$，求该方程组的通解。

解：依题意，$rank(A)=3$，未知数个数为 4，因此齐次线性方程组 $Ax=0$

的基础解系中只有一个向量。令$\xi = 2(\eta_1+\eta_2)-(3\eta_2+\eta_3)=\begin{pmatrix}1\\2\\11\\4\end{pmatrix}$，则

$$A\xi = A\big(2(\eta_1+\eta_2)-(3\eta_2+\eta_3)\big)=2A\eta_1-A\eta_2-A\eta_3=2b-b-b=0.$$

这表明ξ是导出组的解，因此可取作基础解系中的向量。

令$\eta=\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$,则

$$A\eta = A\left(\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)\right)=\frac{1}{2}(A\eta_1+A\eta_2)=\frac{1}{2}(b+b)=b.$$

这表明η是方程组$Ax=b$的解，将其作为特解。于是方程组的通解为

$$x=\eta+k\xi=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\2\\11\\4\end{pmatrix},$$

7. 给定二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2kx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$，问$k$取何值时，二次型$f$正定。

解：二次型的矩阵为$\begin{pmatrix}1&k&-1\\k&4&2\\-1&2&4\end{pmatrix}$

计算各阶顺序主子式

$$D_1=1>0,D_2=4-k^2,D_3=-4(k-1)(k+2)$$

故当$-2<k<1$时，各阶顺序主子式大于零，从而f正定。

本题得分	

二、解答题（8~10 小题，每小题10分，共30分）

8. λ取何值时线性方程组

$$\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=\lambda\\ x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda^2\end{cases}$$

有唯一解, 无解, 有无穷解？有无穷多解时，求出通解。

解： 系数行列式$|A|=(3+\lambda)\lambda^2$ ....3 分

当$|A|\neq 0$，即$\lambda\neq 0$且$\lambda\neq -3$时，行列式非零，方程组有唯一解. ....2 分

当 $\lambda=0$ 时， $rank(A)=rank(A\,|\,b)=1<3$，方程组有无穷多解， 通解为 $k_1(1,-1,0)^T+k_2(1,0,-1)^T$ ....3 分

当$\lambda=-3$时， $rank(A)=2<rank(A\,|\,b)=3$, 方程组无解. ....2 分

9. 设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$， $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(1,2,3)$， $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\3\\t\end{pmatrix}$. 问当 t 为何值时，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关？

并将α_3用α_1,α_2线性表示。

解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&t\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&2&t-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&t-5\end{pmatrix}$ ....3 分

当$t=5$时， $rank(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2<3$，当$t\neq 5$时$rank(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3=3$ 。 ....3 分

所以当$t=5$时向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，当$t\neq 5$时向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关。

$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$ ....4 分

所以$\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$,

10. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ ，求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

解：解特征方程

$$0=|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 2-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4-\lambda & 4-\lambda & 4-\lambda\\ 1 & 2-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=(4-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)(1-\lambda)^2.$$

得特征值为 $\lambda_1=4,\lambda_2=\lambda_3=1$. ....3 分

解线性方程组 $(A-4E)x=0$，

$$\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & -3 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,

解线性方程组 $(A-E)x=0$，

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得 $\xi_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$， ....5 分

令 $P=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}4 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}$. ....2 分

本题得分	

三、证明（11 ~ 14 小题，每小题 7分，共28 分）

11. 设 A 是 $n\times m$ 矩阵，B 是 $m\times n$ 矩阵，$n<m$，若 $AB=E$，证明 B 的列向量组线性无关.

证明： 设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 B 的列向量组，

假设存在 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得 $k_1B_1+k_2B_2+\cdots+k_nB_n$=0，则...............3 分

$$A(k_1B_1+k_2B_2+\cdots+k_nB_n)=0,$$

从而

$$k_1AB_1+k_2AB_2+\cdots+k_nAB_n=0. \quad ①$$

因为 $AB=I$，所以 $AB_j=e_j$，（j=1，⋯，n）

代入①可得

$$k_1e_1+k_2e_2+\cdots+k_ne_n=0.$$

因为$e_1,\cdots,e_n$线性无关，所以$k_1=k_2=\cdots=k_n=0$，从而$B_1,B_2,\cdots,B_n$线性无关.
..............4 分

12. 已知三阶矩阵A的每行元素的和为 3，且满足$AB=O$，其中$B=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\\-2&0\end{pmatrix}$.

证明：矩阵A可以相似对角化.

证明：设$\alpha=(1,1,1)^T$，由题设可得

$$A\alpha=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}+a_{12}+a_{13}\\a_{21}+a_{22}+a_{23}\\a_{31}+a_{32}+a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}=3\alpha.$$

这表明 3 是矩阵A的特征值，$\alpha=(1,1,1)^T$是其对应的特征向量. ....3 分

又

$$O=AB=A\begin{pmatrix}1&2\\0&1\\-2&0\end{pmatrix}=(AB_1,AB_2)\Rightarrow AB_1=0,AB_2=0,$$

这表明 0 是矩阵A的特征值，B_1,B_2是其对应的特征向量.

可以验证B_1,B_2，α三个向量线性无关（只要计算一下行列式即可），从而矩阵A可以相似对角化...............4 分

13. 设A,B 都是 n 阶可逆方阵，证明：若A相似于B，则A^{-1}相似于B^{-1}

证明：由于A相似于B，所以存在可逆矩阵P使得$P^{-1}AP=B$ ....3 分

于是

$$\left(P^{-1}AP\right)^{-1}=B^{-1}\Rightarrow P^{-1}A^{-1}(P^{-1})^{-1}=B^{-1}\Rightarrow P^{-1}A^{-1}P=B^{-1}$$

因此A^{-1}相似于B^{-1} ....4 分

14. 设 A 为 n 阶方阵， $rank(A)$ 表示 A 的秩， 证明：若 $A^2=E$ ，则 $rank(A+E)+rank(A-E)=n$

证明：$A^2=E \Rightarrow A^2-E=O \Rightarrow (A-E)(A+E)=O \Rightarrow rank(A+E) \le n-rank(A-E)$
$\Rightarrow rank(A+E)+rank(A-E) \le n$

…………..3 分

$$n=rank(2E)=rank(A+E+E-A) \le rank(A+E)+rank(E-A)=rank(A+E)+rank(A-E)$$

所以 $rank(A+E)+rank(A-E)=n$

…………..4 分