2014-2015(1)《复变函数与积分变换》期末考试卷（A）参考答案

一、求解下列各题　〖每小题 9 分，共计 18 分〗

1、 已知实函数 $y=y(x)=\ln(1+x^2)$，试求 $y(x)$ 在 $x_0=2$ 点展开成 Tayor 级数的收敛半径和收敛域的内部。

解： 作辅助函数 $w(z)=\ln(1+z^2)$，其奇点为 $z_{1,2}=\pm i$，以及虚轴上 $z_y=yi$（$|y|>1$）的点，记 $z_0=2$。于是，$R=\min\{|z_1-z_0|,|z_2-z_0|,|z_y-z_0|\,|\,|y|>1\}=\sqrt{5}$。因此，实函数 $y(x)$ 在 $x_0=2$ 点展开成 Tayor 级数的收敛半径 $R=\sqrt{5}$，且收敛域的内部是 $(2-\sqrt{5},2+\sqrt{5})$。

2、已知 $F(s)=\dfrac{s+3}{s^3+3s^2+6s+4}$，求其 Laplace 逆变换 $L^{-1}[F(s)]$。

解： 由 $F(s)=\dfrac{(s+1)+2}{(s+1)[(s+1)^2+3]}2$，因此

$$L^{-1}[F(s)]=e^{-t}\cdot L^{-1}\left[\frac{s+2}{s(s^2+3)}\right]=e^{-t}\cdot L^{-1}\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s}+\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{s^2+3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{s}{s^2+3}\right]$$

$$=\frac{e^{-t}}{3}[2+\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t)-2\cos(\sqrt{3}t)]$$

二、计算下列各题　〖每小题 10 分，共计 20 分〗

1、计算积分 $\displaystyle\oint_{C=C_1+C_2}\frac{\cos(2z)\cdot dz}{z^3}$，其中：曲线 $C_1:|z|=2$，取负方向；$C_2:|z|=3$，取正方向。

解： 由 $f(z)=\dfrac{\cos(2z)}{z^3}$ 在复平面上有奇点 $z_1=0$，且不在由 C_1 和 C_2 构成的复合边界 C 围成的区域内部，即 $f(z)$ 在 C 内解析，故有 原积分 $=0$。

2、计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2\cos(2x)}{16+x^4}dx$。

解： 由于 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2\cos(2x)}{16+x^4}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\cos(2x)}{16+x^4}dx$，作辅助函数 $f(z)=\dfrac{z^2}{16+z^4}e^{2iz}$。易知 $f(z)$ 满足: (1) $m-n=2\geq 1$; (2) 在实轴上无奇点。$f(z)$ 在上半平面的奇点为 $z_k=2e^{\frac{2k+1}{4}\pi i}$（$k=0,1$），且均为 1 级极点。于是 原积分 $=\dfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx\right)$。

而 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=2\pi i\left\{\mathrm{Re}\,s[f(z),z_0]+\mathrm{Re}\,s[f(z),z_1]\right\}$

$$=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}e^{-2\sqrt{2}}(\cos 2\sqrt{2}-\sin 2\sqrt{2})\text{。}$$

因此，原积分 $=\dfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx\right)=\dfrac{\sqrt{2}\pi}{8}e^{-2\sqrt{2}}(\cos 2\sqrt{2}-\sin 2\sqrt{2})$。

三、〖13 分〗求函数 $f(z)=\dfrac{(z-2)(z^2+1)^3}{\sin(\pi z)}$ 在扩充复平面内的孤立奇点及分类，并说明理由。如果是极点，请指出它的级数。

解：因为 $f(z)$ 在复平面内有奇点 $z_k=k$（$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$）和 ∞ 点，易见 $z_k=k$（$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$）为孤立奇点。由于 $\lim\limits_{k\to\infty} z_k=\infty$，因此 ∞ 点为非孤立奇点。

因 $\lim\limits_{z\to z_2} f(z)=\lim\limits_{z\to 2}\left[\dfrac{\pi(z-2)}{\sin\pi(z-2)}\cdot\dfrac{(z^2+1)^3}{\pi}\right]=\dfrac{125}{\pi}$，所以 $z_2=2$ 是 $f(z)$ 的可去奇点。

因 $z_k=k$（$k=0,\pm1,-2,\pm3,\cdots$）为 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 1 级零点，所以 $z_k=k$（$k\neq2$）为 $f(z)$ 的 1 级极点。

四、〖13 分〗验证 $v(x,y)=(x+y)\cdot(x^2-4xy+y^2)$ 为调和函数。进一步求解析函数 $f(z)=u+iv$，并满足 $f(0)=1$。

解：由 $v(x,y)=(x+y)\cdot(x^2-4xy+y^2)$，则 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=3x^2-6xy-3y^2$，

$\dfrac{\partial v}{\partial y}=-3x^2-6xy+3y^2$，$\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=6x-6y$，$\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-6x+6y$

因为 $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\equiv0$，所以 $v(x,y)$ 为调和函数。

由解析函数的微分性质知：

$$\begin{aligned}f'(z)&=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}=(-3x^2-6xy+3y^2)+i(3x^2-6xy-3y^2)\\&=3(i-1)\cdot(x+yi)^2=3(i-1)z^2\end{aligned}$$

因此 $f(z)=(i-1)z^3+C$。再由 $f(0)=1$，可得 $C=1$，即 $f(z)=(i-1)z^3+1$。

五、〖12 分〗求函数 $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z-2)}$ 在以 $z_0=1$ 为中心的圆环域内的 **Laurent** 展开式。

解：因 $f(z)$ 有奇点 $z_0=1$ 和 $z_1=2$，则以 z_0 为中心可将整个复平面分成以下两个圆环域：

$$(1)\ 0<|z-1|<1；(2)\ 1<|z-1|<+\infty。$$

由 $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)\cdot(z-2)}=\dfrac{2}{z-2}-\dfrac{1}{z-1}$：

（1）当 $0<|z-1|<1$ 时，$\dfrac{2}{z-2}=-\dfrac{2}{1-(z-1)}=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}2(z-1)^n$，因此

$$f(z)=-\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{\infty}2(z-1)^n；$$

（1）当 $1<|z-1|<+\infty$ 时，

$$\frac{2}{z-2}=\frac{2}{z-1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z-1}}=2\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^{-n-1}=2\sum_{n=-\infty}^{-1}(z-1)^{n}$$

因此，$f(z)=\frac{1}{z-1}+2\sum_{n=-\infty}^{-2}(z-1)^{n}$ 。

六、〖**12 分**〗**利用 Laplace 变换求解微分初值问题：**

$$\begin{cases} y'''+6y''+12y'+8y=t \\ y''(0)=y'(0)=0,y(0)=1 \end{cases}。$$

解：记$Y(s)=L[y(t)]$，对方程两边施行 Laplace 变换可得：

$$[s^3Y(s)-s^2]+6[s^2Y(s)-s]+12[sY(s)-1]+8Y(s)=\frac{1}{s^2}$$

整理可得：

$$Y(s)=\frac{1}{s^2(s+2)^3}+\frac{s^2+6s+12}{(s+2)^3}=\frac{1}{s^2(s+2)^3}+\frac{1}{s+2}+\frac{2}{(s+2)^2}+\frac{4}{(s+2)^3}$$

因$L^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]=e^{-2t}$，$L^{-1}\left[\frac{2}{(s+2)^2}\right]=2te^{-2t}$，$L^{-1}\left[\frac{4}{(s+2)^3}\right]=2t^2e^{-2t}$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s+2)^3}\right]=\mathrm{Re}\,s\left[\frac{e^{st}}{s^2(s+2)^3},0\right]+\mathrm{Re}\,s\left[\frac{e^{st}}{s^2(s+2)^3},-2\right]$$

$$=\frac{2t-3}{16}+\frac{2t^2+4t+3}{16}e^{-2t}$$

因此 $$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=\frac{2t-3}{16}+\frac{2t^2+4t+3}{16}e^{-2t}+e^{-2t}+2te^{-2t}+2t^2e^{-2t}$$

$$=\frac{2t-3}{16}+\frac{34t^2+36t+19}{16}e^{-2t}。$$

七、〖**12 分**〗**求标准正态分布**$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$**的 Fourier 变换及相应的积分表达式，并给出它的频谱。**

解：由$f(t)$的 Fourier 变换为：

$$F(w)=F[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2+2iwt}{2}}dt=e^{-\frac{w^2}{2}}\int_{wi-\infty}^{wi+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du=e^{-\frac{w^2}{2}}$$

由于$f(t)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，则由 Fourier 逆变换可得：

$$f(t)=F^{-1}[F(w)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(w)\cdot e^{iwt}dw=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{w^2}{2}}\cdot e^{iwt}dw$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}e^{-\frac{w^2}{2}}\cos wt dw$$

从而$f(t)$相应的积分表达式为$\int_{0}^{+\infty}e^{-\frac{w^2}{2}}\cos wt dw=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$。且$f(t)$的频谱为

$$|F(w)|=e^{-\frac{w^2}{2}}。$$