2016级《线性代数I》期末考试卷(B)参考答案与评分标准

班级_______________ 学号__________________ 姓名__________________

题 号	一	二	三	四	总分
得 分					

本题得分	

一、填空题(每小题4分,共20分)

(1) 在分块矩阵 $A=\begin{pmatrix} O & B \\ C & O \end{pmatrix}$ 中，若 B,C 逆，则 $A^{-1}=$ $\underline{\begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}}$

(2) 已知 η_1,η_2,η_3 是四元方程组 $AX=b$ 的三个解，若 A 的秩 $r(A)=3$ 且

$$\eta_1+\eta_2=(1,2,3,4)^T,\quad \eta_2+\eta_3=(4,4,4,4)^T$$

则方程组 $AX=b$ 的通解为 $\underline{k(3,2,1,0)^T+(2,2,2,2)^T, k\text{为任意常数}}$

(3) n 阶方阵 A 满足 $A^2-3A-E=0$，则 $A^{-1}=$ __A－3E__

(4) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & t \end{pmatrix}$ 为正定矩阵，则 t 的取值范围是__t>10______.

(5) $\mathbb{R}^2$ 的一组基 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 到另一组基 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的过渡矩阵是 $\underline{\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}}$

本题得分	

二、选择题(每小题4分,共20分)

(1) 设A为三阶方阵,将A的第2行加到第1行得矩阵B，再将B的第1列的 -1 倍加到第2列得矩阵C，记矩阵 $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则【 B 】

(A) $C=P^{-1}AP$. (B) $C=PAP^{-1}$. (C) $C=P^TAP$. (D) $C=PAP^T$.

(2) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$，$A^*$ 表示 A 的伴随矩阵，则 $\left(\frac{1}{2}A^*\right)^{-1}=$【B】

(A) $\frac{1}{2}A$ (B) $\frac{1}{4}A$ (C) $\frac{1}{8}A$ (D) $\frac{1}{16}A$

(3) 设有线性方程组 (I): $AX=O$，(II): $A^TAX=O$，则【A】

(A) (II)的解是(I)的解，(I)的解也是(II)的解;

(B) (II)的解是(I)的解，但(I)的解不是(II)的解;

(C) (I)的解不是(II)的解，(II)的解也不是(I)的解;

(D) (I)的解是(II)的解，但(II)的解不是(I)的解;.

(4) 设 A，B 均为n 阶方阵，下面结论正确的是【B】

(A) 若 A，B 均可逆，则 $A+B$ 可逆 (B) 若 A，B 均可逆，则 AB 可逆

(C) 若 $A+B$ 可逆，则 $A-B$ 可逆 (D) 若 $A+B$ 可逆，则 A，B 均可逆

(5) 下列命题中正确的是【C】。

(A) 任意 n 个 $n+1$ 维向量线性相关 (B) 任意 n 个 $n+1$ 维向量线性无关

(C) 任意 $n+1$ 个 n 维向量线性相关 (D) 任意 $n+1$ 个 n 维向量线性无关

本题得分	

三、解答题(53分)

(1) (本题8分) 计算行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$

解：4'

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 3 & 2 & \lambda \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix} = \lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4\text{。}$$

4'

考试形式开卷（ ）、闭卷（√），在选项上打（√）

开课教研室__大学数学部__ 命题教师_______ 命题时间__2017-5-20__ 使用学期__16-17-2__ 总张数__3__ 教研室主任审核签字

（2）（本题 15 分）a, b取何值时, 线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -a & -1 \\ 1 & 4 & -4 & a-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ b+3 \end{pmatrix}$$

有唯一解、无解、有无穷多解?并在有无穷多解时,求出该方程组的结构式通解.

解： 增广矩阵 $(A,b) \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 & b+1 \end{pmatrix}$, (4′)

（1） 当$a \neq 2$时，$r(A) = r(\bar{A}) = 4$，方程组有唯一解，........................（3'）

（2） 当$a = 2$，且$b \neq -1$时，$r(A) = 2, r(\bar{A}) = 3$，方程组无解.............（3'）

（3） 当$a = 2$且$b = -1$时，, $r(A) = r(\bar{A}) = 2$ 该方程组有无穷多解,

其结构式通解为, $x = (-2,1,0,0)^T + c_1(-4,2,1,0)^T + c_2(-4,1,0,1)^T$ ....(5')

（3）（本题 15 分） 设$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix}$. 求此向量组的秩和一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示。

解：

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & 0 & 10 \\ 1 & -1 & -3 & -7 \\ 0 & -3 & -1 & -7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & -10 \\ 0 & -3 & -1 & -7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -16 & -16 \\ 0 & 0 & -13 & -13 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ 6′

则 $r(a_1, a_2, a_3, a_4) = 3$， 3′

a_1, a_2, a_3 构成极大无关组， 3′

$a_4 = -2a_1 + 2a_2 + a_3$ 3′

（4）（本题 15 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$，求 A 的特征值及对应的特征向量。

解：

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\0&\lambda-1&0\\0&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3=0$

特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$，. . . . . 6'

对于 $\lambda_1=1$，$\lambda_1E-A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&-2&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，

特征向量为 $k\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+l\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$，其中 k,l 是常数。. . . . . 9'

本题得分	

四、**（本题 7 分）** 证明题

若 A 是 n 阶方阵，且 $AA^{\mathrm{T}}=E$，$|A|=-1$，证明 $|A+E|=0$，其中 E 为单位矩阵。

证明：

3' 3'

$$|A+E|=|A+AA^{\mathrm{T}}|=|A||E+A^T|=-|(E+A)^T|=-|E+A|$$

所以 $|A+E|=0$ 1'