2016 级高等数学 I(2) 考试卷(A)

解答及评分标准

使用专业、班级__________ 学号__________ 姓名____________

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得 分								
阅卷人								

本题得分	

一、填空题(每小题 4 分, 共 20 分)

(1) 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,-3,1)$, $\boldsymbol{b}=(1,-1,3)$, $\boldsymbol{c}=(1,-2,0)$, 则 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=$ ___2___

(2) 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $z^3-3xyz=a^3$ 所确定的隐函数, 则 $\mathrm{d}z=$ ___$\dfrac{yz\mathrm{d}x+zx\mathrm{d}y}{z^2-xy}$___

(3) 交换积分次序: $\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{2-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y=$ ___$\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^{\sqrt{2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{2-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$___

(4) 设 C 是圆周 $x^2+y^2=2x$, 则曲线积分 $\oint_C(x^2+y^2)\mathrm{d}s=$ ___4π___

(5) 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(n+1)^2\cdot 4^{n+1}}$ 的收敛区间为 ___$(-2,2)$___

本题得分	

二、选择题(每小题 4 分, 共 20 分)

(1) 母线平行于 x 轴且通过曲线 $\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16\\ x^2-y^2+z^2=0\end{cases}$ 的柱面方程为 【 C 】

(A) $3x^2+2z^2=16$. (B) $x^2+2y^2=16$.

(C) $3y^2-z^2=16$. (D) $3y^2+z^2=16$.

(2) 若 $f_x(x_0,y_0)$ 和 $f_y(x_0,y_0)$ 都存在, 则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处 【 D 】

(A) 连续且可微. (B) 连续但不一定可微.

(C) 可微但不一定连续. (D) 不一定连续也不一定可微.

(3) 函数 $z=x^2-xy+y^2$ 在点 $(-1,1)$ 处沿方向 $\boldsymbol{l}=(2,1)$ 的方向导数是 【 C 】

(A) -3. (B) 3. (C) $-\dfrac{3}{\sqrt{5}}$. (D) $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$.

(4) 设在上半平面 $y>0$ 内 $\dfrac{ax\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{(x+y)^2}$ 是某二元函数的全微分, 则常数 a 等于 【 B 】

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

(5) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛, λ 为常数, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda^2}}$ 【 A 】

(A) 绝对收敛. (B) 条件收敛. (C) 发散. (D) 收敛性与 λ 有关.

本题得分	

三、计算题(每小题 8 分, 共 32 分)

(1) 求过点 $(3,0,2)$ 且与平面 $3x-y+z=1$ 和 $x-z=3$ 都平行的直线的方程.

解 所求直线的方向向量取

$$\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&-1&1\\1&0&-1\end{vmatrix}=(1,4,1), \qquad \cdots\cdots(4')+(2')$$

故所求直线方程为 $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-2}{1}$. ……(2′)

(2) 已知函数 f,g 具有二阶导数, $z=yf\left(\dfrac{x}{y}\right)+xg\left(\dfrac{y}{x}\right)$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'\left(\dfrac{x}{y}\right)-\dfrac{y}{x}g'\left(\dfrac{y}{x}\right)+g\left(\dfrac{y}{x}\right)$, ……(4′)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{x}{y^2}f''\left(\frac{x}{y}\right)-\cancel{\frac{1}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right)}-\frac{y}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right)+\cancel{\frac{1}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$=-\frac{x}{y^2}f''\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{y}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right). \qquad \cdots\cdots(4')$$

考试形式开卷( )、闭卷(√),在选项上打(√)

开课教研室__大学数学部__ 命题教师__命题组__ 命题时间__2017-05-30__ 使用学期_2016-2017-2_ 总张数__3__ 教研室主任审核签字__________

(3) 计算二重积分 $\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是由上半圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 与三条直线 $x=0, x=2$ 及 $y=2$ 所围成的闭区域.

解1 $\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2 x\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^2\mathrm{d}y=\int_0^2 x\left(2-\sqrt{2x-x^2}\right)\mathrm{d}x$ ……(4′)+(2′)

$=4-\int_0^2 x\sqrt{1-(x-1)^2}\mathrm{d}x \overset{x=1+\sin t}{=\!=\!=} 4-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin t)\cos^2 t\mathrm{d}t=4-\frac{\pi}{2}.$ ……(2′)

解2 $\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D+D_1} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_1} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2 x\mathrm{d}x\int_0^2\mathrm{d}y-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho\cos\theta\cdot\rho\mathrm{d}\rho$ ……(2′)+(4′)

$=4-\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=4-\frac{\pi}{2}.$ ……(2′)

解3 $\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\bar{x}\cdot A$ ……(6′)

$=4-\frac{\pi}{2}.$ ……(4′)

(4) 利用Gauss 公式计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma} xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2-z^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 是圆锥体 $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$的整个表面的外侧.

解1 $I=\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_\rho^1 z^2\mathrm{d}z$ ……(4′)+(2′)

$=2\pi\cdot\frac{1}{3}\int_0^1\rho(1-\rho^3)\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{5}.$ ……(2′)

解2 $I=\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}v=\int_0^1 z^2\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\le z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ……(4′)+(2′)

$=\pi\int_0^1 z^4\mathrm{d}z=\frac{\pi}{5}.$ ……(2′)

本题得分	

四、(8分) 设函数 $\varphi(y)$ 具有连续导数, 且 $\varphi(0)=1$, 计算曲线积分

$$I=\int_L\left[\varphi(y)\mathrm{e}^x-\pi y\right]\mathrm{d}x+\left[\varphi'(y)\mathrm{e}^x-\pi\right]\mathrm{d}y,$$

其中 L 是曲线 $y=\sin x$ 上从点 $O(0,0)$ 到点 $A(\pi,0)$ 的有向弧段.

解1 $\oint\limits_{L+\overline{AO}}\left[\varphi(y)\mathrm{e}^x-\pi y\right]\mathrm{d}x+\left[\varphi'(y)\mathrm{e}^x-\pi\right]\mathrm{d}y=-\iint\limits_D\pi\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\pi\int_0^\pi\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}\mathrm{d}y=-2\pi,$ ……(5′)

$\int\limits_{\overline{AO}}\left[\varphi(y)\mathrm{e}^x-\pi y\right]\mathrm{d}x+\left[\varphi'(y)\mathrm{e}^x-\pi\right]\mathrm{d}y=\int_\pi^0\varphi(0)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^\pi,$ ……(2′)

故 $I=\oint\limits_{L+\overline{AO}}-\int\limits_{\overline{AO}}=\mathrm{e}^\pi-1-2\pi.$ ……(1′)

解2 $\int_L\varphi(y)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\left[\varphi'(y)\mathrm{e}^x-\pi\right]\mathrm{d}y=\left[\varphi(y)\mathrm{e}^x-\pi y\right]_{(0,0)}^{(\pi,0)}=\mathrm{e}^\pi-1,$ ……(5′)

$\int_L-\pi y\mathrm{d}x=-\pi\int_0^\pi\sin x\mathrm{d}x=-2\pi,$ ……(2′)

故 $I=\mathrm{e}^\pi-1-2\pi.$ ……(1′)

本题得分	

五、(8分) 将函数 $f(x)=\ln(2+x)$ 展开成 x 的幂级数, 并求级数 $\sum\limits_{n=1}^\infty\frac{1}{n\cdot 2^n}$ 的和.

解1 因 $f'(x)=\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{2}}$ ……(2′)

$=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^\infty\left(-\frac{x}{2}\right)^{n-1}=\sum\limits_{n=1}^\infty\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}x^{n-1},\ -2<x<2,$ ……(2′)

故 $f(x)=f(0)+\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x=\ln 2+\sum\limits_{n=1}^\infty\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}x^n,\ -2<x\le 2.$ ……(3′)

令 $x=-1$ 得 $0=\ln 2-\sum\limits_{n=1}^\infty\frac{1}{n\cdot 2^n}$, 即 $\sum\limits_{n=1}^\infty\frac{1}{n\cdot 2^n}=\ln 2.$ ……(1′)

解2 $\ln(2+x)=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)$ ……(2′)

$=\ln 2+\sum\limits_{n=1}^\infty\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\ln 2+\sum\limits_{n=1}^\infty\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}x^n,\ -2<x\le 2.$ ……(5′)

令 $x=-1$ 得 $0=\ln 2-\sum\limits_{n=1}^\infty\frac{1}{n\cdot 2^n}$, 即 $\sum\limits_{n=1}^\infty\frac{1}{n\cdot 2^n}=\ln 2.$ ……(1′)

本题得分	

六、(7分) 求球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上到点 $(1,2,2)$ 距离最近和最远的点.

解 设 (x,y,z) 是球面上的任一点, 则问题归结为求

$$d^2(x,y,z)=(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2$$

在约束条件 $x^2+y^2+z^2=1$ 的最小值和最大值. ……(3′)

作 Lagrange 函数 $L(x,y,z,\lambda)=(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$, ……(1′)

令
$$\begin{cases} L_x=2(x-1)+2\lambda x=0 \\ L_y=2(y-2)+2\lambda y=0 \\ L_z=2(z-2)+2\lambda z=0 \\ L_\lambda=x^2+y^2+z^2-1=0 \end{cases}$$
……(2′)

解得驻点 $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ 和 $\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$.

因
$$d\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)=2,\ d\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)=4,$$

故最近点为 $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$, 最远点为 $\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$. ……(1′)

本题得分	

七、(5分) 设 $0\le u_n\le v_n$, $n=1,2,\cdots$, 证明:

(1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛;

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散.

证 (1) 设 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛于和 σ, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和

$$s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n\le v_1+v_2+\cdots+v_n\le\sigma,\ n=1,2,\cdots,$$

即部分和数列 $\{s_n\}$ 有界, 故 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛. ……(3′)

(2) 用反证法. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛, 由 (1) 得 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 与假设矛盾. 故 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散. ……(2′)