7-2 路与回路

主要内容

- 路与回路
- 图的连通性
  - ✓ 无向图的连通性
  - ✓ 有向图的连通性

路

在现实世界界中,常常要考虑这样的一个问题:

如何从一个图G中的给定的结点出发,沿着一些边连续移动, 达到另一个指定的结点,这种依次由点和边组成的序列, 就形成路的概念。

路

定义7-2.1

[定义] **路**

给定图$G=\langle V,E\rangle$,设v_0，v_1，…，$v_n \in V$，e_1，e_2，…，$e_n \in E$,其中e_i 是关联结点v_{i-1},v_i的边,交替序列$v_0e_1v_1e_2\ldots e_nv_n$称为联结$v_0$到$v_n$ 的路。

路:$v_1e_2v_3v_2e_3v_3e_4v_2e_6v_5e_7v_3$

路的长度、回路

[定义] 路的长度

v_0和v_n 分别称作路的起点和终点，边的数目n称作路的长度。

[定义] 回路

当v_0=v_n 时，这条路称作回路。

迹、通路、圈

[定义] 迹

若一条路中所有的边e_1，e_2，…，e_n均不相同,称作迹。

(边不相同，但结点可以重复)迹:$v_5e_8v_4e_5v_2e_6v_5e_7v_3e_2v_4$

[定义] 通路

若一条路中所有的结点v_0，v_1，…，v_n 均不同,则称作通路。

(1)通路:$v_4e_8v_5e_6v_2e_1v_1e_2v_3$

(2)在简单图中的一条通路必定也是迹

[定义] 圈

闭的通路,即除v_0=v_n 外,其余的结点均不相同的路,就称作圈。

圈:$v_2e_1v_1e_3v_3e_7v_5e_6v_2$

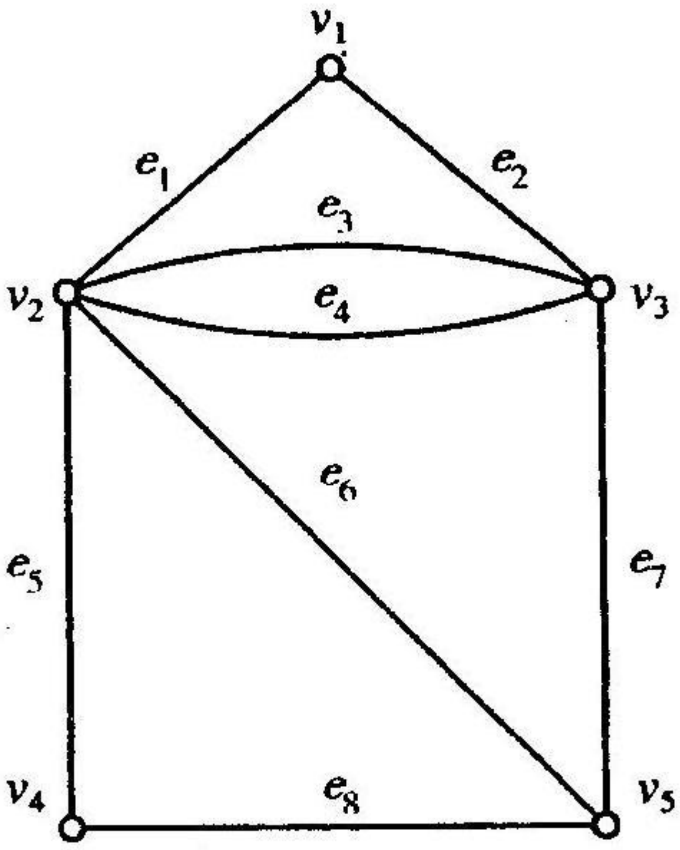
路的表示

在简单图中一条路$v_0e_1v_1e_2\ldots e_nv_n$，由它的结点序列$v_0v_1\ldots v_n$确定,所以简单图的路,可由其结点序列$[v_0v_1\ldots v_n]$表示。

在有向图中,结点数大于1的一条路可由边序列$[e_1e_2\ldots e_n]$表示。

举例

例如在图 7.2.1中， 有连接v_5到v_3的路$v_5e_8v_4e_5v_2e_6v_5e_7v_3$， 这也是一条迹； 路$v_1e_1v_2\ e_3v_3$是一条通路； 路$v_1e_1v_2e_3v_3e_4v_2e_1v_1$是一条回路， 但不是圈； 路$v_1e_1v_2e_3v_3e_2v_1$是一条回路， 也是圈。



下面我们利用通路的概念解决一个古老的著名问题。

通路的例子

【例7.2.1】（渡河问题） 一个摆渡人， 要把一只狼、 一只羊和一捆干草运过河去， 河上有一只木船， 每次除了人以外， 只能带一样东西。 另外， 如果人不在旁时， 狼就要吃羊， 羊就要吃干草。 问这人怎样才能把它们运过河去？

【游戏】

解 用 F表示摆渡人， W表示狼， S表示羊， H表示干草。

通路的例子

解: 用*F*表示摆渡人， *W*表示狼， *S*表示羊， *H*表示干草。

若用*FWSH*表示人和其它 3 样东西在河的左岸的状态。这样在左岸全部可能出现的状态为以下16种：

FWSH	*FWS*	*FWH*	*FSH*
WSH	*FW*	*FS*	*FH*
WS	*WH*	*SH*	*F*
W	*S*	*H*	φ

这里φ表示左岸是空集， 即人、 狼、 羊、 干草都已运到右岸去了。

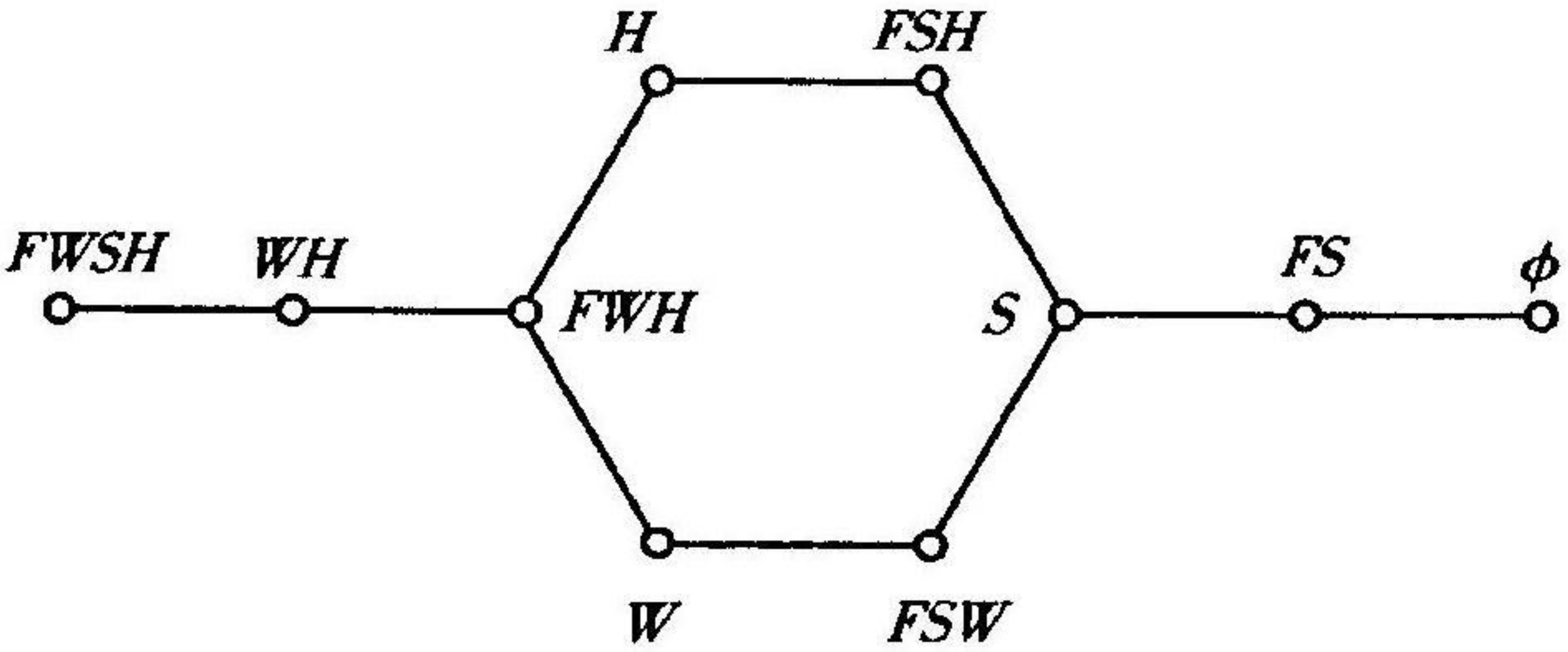
通路的例子

根据题意检查一下就可以知道，这16种情况中有 6 种情况是不允许出现的。它们是：***WSH***、***FW***、***FH***、***WS***、***SH***、***F***。如***FH***表示人和干草在左岸，而狼和羊在右岸，这当然是不行的。因此，允许出现的情况只有10种。

通路的例子

我们构造一个图， 它的结点就是这**10**种状态。 若一种状态可以转移到另一种状态， 就在表示它们的两结点间连一条边， 这样就画出图**7.2.2** 。 本题就转化为找结点***FWSH*** 到结点***φ***的通路。 从图中得到两条这样的通路， 即有两种渡河方案。

通路的例子



定理

定理7-2.1 **在一个具有n个结点的图中，如果从结点v_j到结点v_k存在一条路，则从结点v_j到结点v_k存在一条不多于n-1条边的路。**

证明　如果从结点v_j到结点v_k存在一条路，则该路上的结点序列是$[v_j \ldots v_i \ldots v_k]$，如果在这路上有$l$条边，则序列中必有$l+1$个结点，若$l>n-1$，结点数>n，则必有结点$v_s$，它在序列中不止一次出现，即必有序列$[v_j \ldots v_s \ldots v_s \ldots v_k]$，在路中去掉从$v_s$到$v_s$的这些边，仍然得到一条从结点$v_j$到结点$v_k$的路，但此路比原来的路的边数要少。如此重复进行下去，必得到一条从结点v_j到结点v_k不多于n-1条边的路。

推论

推论 设图G＝〈V ,E〉，|V|＝n，则G中任一圈长度不大于n。

图的连通性

图的连通性

定义7-2.2 连通

在无向图*G*中，结点*u*和*v*之间若存在一条路，则结点*u*和*v*称为是连通的。否则是不连通的。

结点*u*和*v*之间连通，用[*u*，*v*]表示。

连通图

[定义] 连通图

- 若图G=〈*V*,*E*〉的任意两个结点皆有路连通，则G称为连通图。

无向连通图

定理7-2.2

在一个简单无向连通图中，以下结论成立：

(1)[u，u]为真。

(2)若[u，v]为真，则[v，u]为真。

(3)若[u，v]为真且[v，w]为真，则[u，w]为真。

定理的证明可以由连通性的定义直接推出。

反过来，设结点集V上的连通性定义一个关系$R=\{\langle u, v\rangle \mid u, v \in V\}$，对于$\langle u, v\rangle \in R$，当且仅当[$u$，$v$]为真。显然$R$是一个等价关系，根据等价关系$R$进行关于$V$的等价分类，则关于$V$的等价类为关于$V$的一个划分。

连通分支

定义7-2.3 连通分支

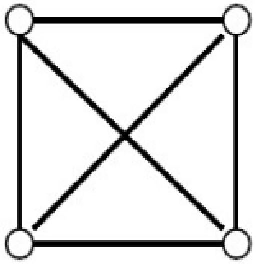
根据图G中的一个结点v定义图G的子图$[v]_G$如下：

$$[v]_G = \langle V(v), E(v)\rangle,$$

其中$V(v)=\{x \mid [v, x]$为真$\}$；$E(v)$包含所有连结$V(v)$中结点的边。$[v]_G$ 为$V(v)$的一个等价类，称它为G的一个连通分支。

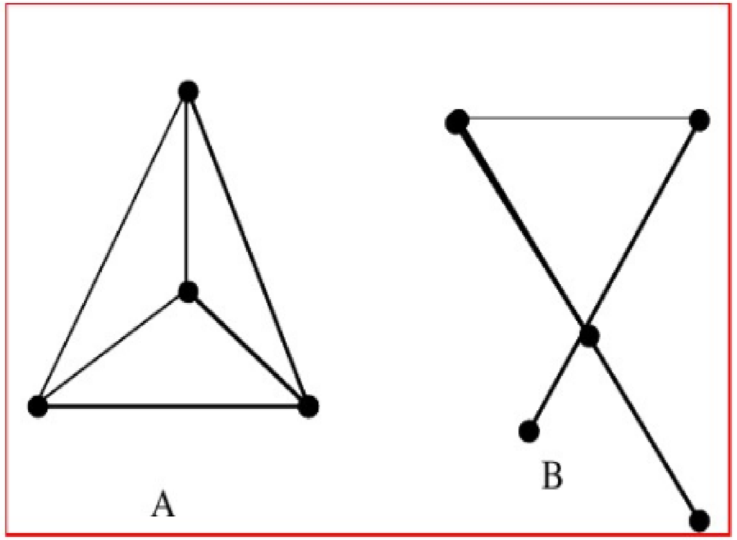
连通分支数

图$G=\langle V, E\rangle$可以分解为若干个连通分支$G_i=\langle V_i, E_i\rangle$ (i=1，2，…，k)，G的连通分支数用$W(G)$来表示。



k_4

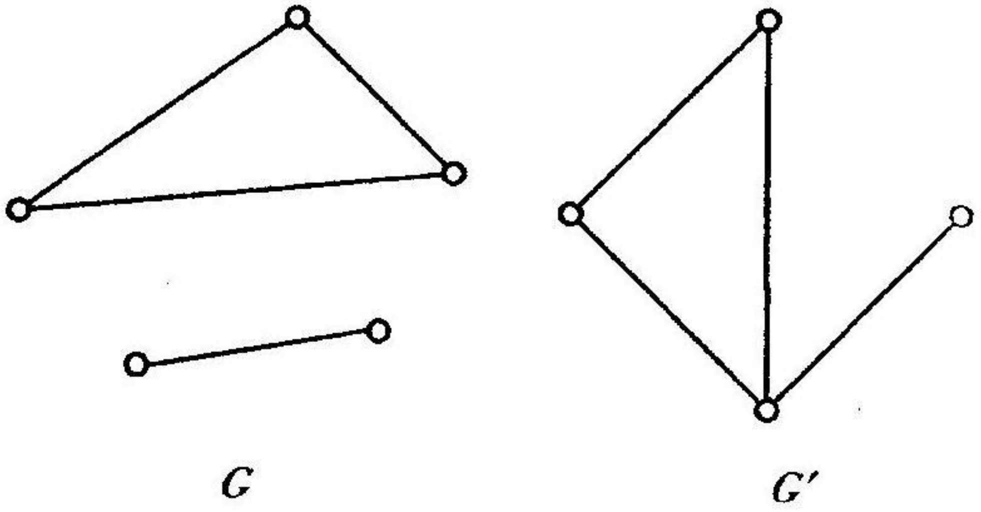
W（G）=1



W（G）=2

连通分支

- 有一个平凡的结论：图G=〈V, E〉是连通的，当且仅当G只有唯一个连通分支。
- G是不连通的， $W(G) = 2$，而G'是连通的， $W(G') = 1$。
- 任何一个图都可划分为若干个连通分支。 显然， 仅当图G的连通分支数$W(G) = 1$时， 图G是连通的。



连通分支与V的划分

定理7-2.3

图*G*的不同的连通分支构成一个关于集合*V*的划分,即。

①对于任意$v \in V$，$[v]_G \neq \varnothing$。

②$[a]_G \neq [b]_G$且$[a]_G \cap [b]_G = \varnothing$。

③ $\bigcup_{v \in V} [v]_G = V$ 。

连通分支与V的划分

定理7-2.3

图*G*的不同的连通分支构成一个关于集合*V*的划分,即。

①对于任意$v \in V$，$[v]_G \neq \varnothing$。

证明 **因为$v \in [v]_G$，所以①成立。**

连通分支与V的划分

定理7-2.3

图G的不同的连通分支构成一个关于集合V的划分,即。

②$[a]_G \neq [b]_G$且$[a]_G \cap [b]_G = \Phi$。

证明 **②：假定$[a]_G \cap [b]_G \neq \Phi$，则需证明$[a]_G = [b]_G$。令$x \in [a]_G \cap [b]_G$，则结点$x$与结点$a$和$b$都连通，则在$a$和$b$之间存在着一条$G$的路，则$b \in [a]_G$，这意味着$[b]_G \subseteq [a]_G$。**

同样的方法证明$[a]_G \subseteq [b]_G$。即$[a]_G = [b]_G$。

结点间的距离

在连通分支中两个存在着通路[u，v]的结点u和v之间定义它们的距离：

1. 用l[u，v]表示从结点u到v之间存在某一条路的长度
2. 结点u和v之间的距离用d(u，v)来表示，并d(u， v)=min l[u，v]。
3. 结点u和v之间的距离是从u到v的最短迹的长度。

结点间的距离

对于距离有如下明显的结果：

①$d(u，u)=0$，若$u≠v$，则$d(u，v) > 0$。

②$d(u，v)= d(v，u)$。

③$d(u，v)+ d(v，w) ≥d(u，w)$。

因此在连通分支上的结点的距离是可测的。

对称

[定义]

令$G=\langle V,E\rangle$为任意图，如果对于任意$(u, v)\in E$，皆有$(v, u)\in E$，则G称为是对称的。

- 任何一个无向图都是对称的。
- 对称的有向图，相邻的两个结点，必然存在着两条方向相反的连结它们的边。
- 因此，任何一个对称的有向图，可以用一个无向图来表示，相反，任何一个无向图都可以将它变换成对称的有向图。

关节点

[定义] 关节点

设无向图$G=\langle V,E\rangle$为连通的，若对于图G中的两个结点x，y的任何通路，皆通过结点a，则称结点a为结点x，y的关节点。换言之，

$$\cap\{[x, y]\}=\{a\}。$$

这样在图中连通的两个结点，当删除它们的关节点后，它们将不连通。

点割集与割点

定义7-2.4 点割集和割点

- 设无向图$G=\langle V,E\rangle$为连通的，若有结点集$V_1 \subset V$，使得图G删除了V_1所有结点后，所得的子图是不连通的，而删除了V_1的任意真子集后，所得的子图仍然是连通图。则称集合V_1为图G的点割集。
- 若某一结点就构成点割集，则称该结点为割点。

这样，一个连通图，将删除它的一个点割集后，将分成两个或多于两个连通分支。

点连通度

【定义】点连通度

若G不是完全图，我们定义$k(G)$=min{ V_1是G的点割集}为G的点连通度(或连通度)。连通度$k(G)$是为了产生一个不连通图需要删去的点的最少数目。

点连通度

- 一个不连通图的连通度等于0
- 存在着割点的连通图的连通度为1
- 完全图K_p中删去任何m个($m < p$-1)点后仍然连通，但是删去了p-1个结点后产生一个平凡图，故$k(K_p) = p-1$。

边割集、割边

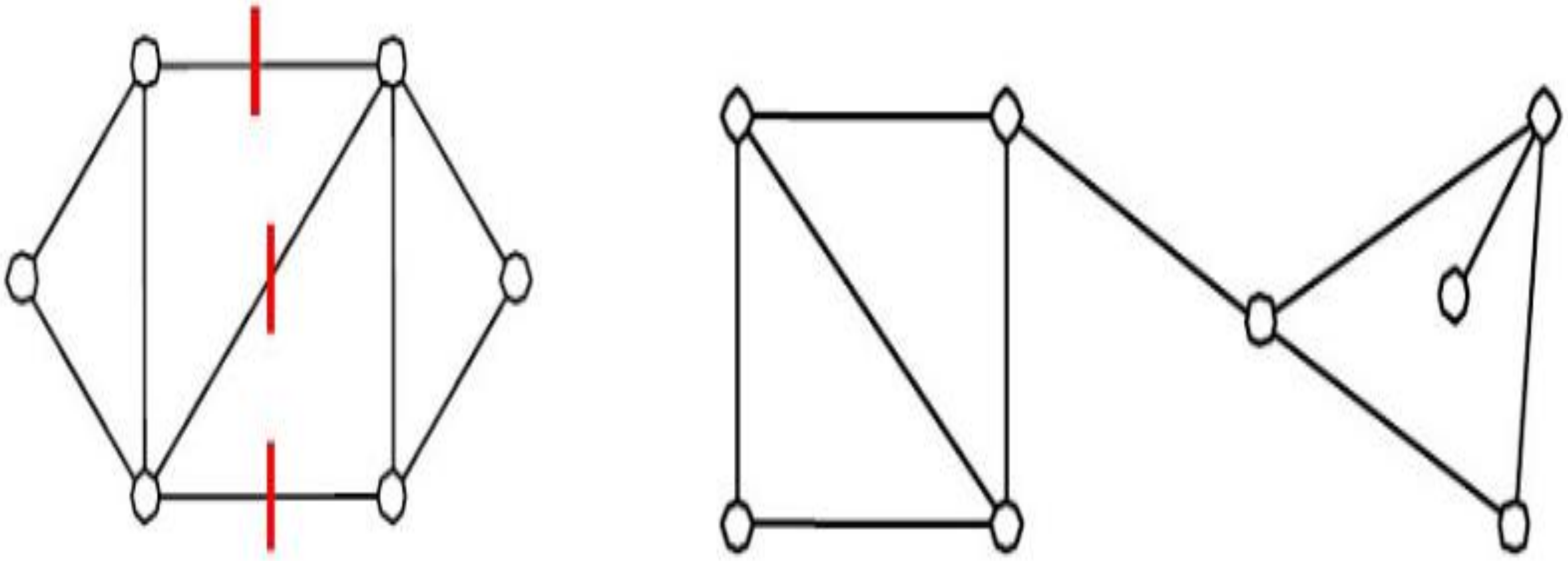
定义7-2.5 边割集、割边

设无向图$G=\langle V,E\rangle$为连通的，若有边集$E_1 \in E$，使得图G删除了E_1所有边后，所得的子图是不连通的，而删除了E_1的任意真子集后，所得的子图仍然是连通图。则称集合E_1为图G的边割集。若某一边构成边割集，则称该边为割边(或桥)。

边连通度

- G的割边也就是G中的一条边e使得$W(G-e) > W(G)$。与点连通度相似，我们定义非平凡图G的边连通度为：$\lambda(G)=\min\{E_1$是G的边割集}，边连通度$\lambda(G)$是为了产生一个不连通图需要删去边的最少数目。
- 对于平凡图$\lambda(G)=0$，此外一个不连通图也有$\lambda(G)=0$。

边割集、割边



定理

定理7-2.2 对于任何一个图$G=\langle V,E\rangle$，有$k(G)\le\lambda(G)\le\delta(G)$

证明

1）若G不连通，则$k(G)=\lambda(G)=0$，故上式成立。

2）若G连通，

①证明$\lambda(G)\le\delta(G)$。若G是平凡图，则$\lambda(G)=0\le\delta(G)$，若G是非平凡图，则因每一结点的所有关连边构成一个边割集，故$\lambda(G)\le\delta(G)$。

定理

②再证$k(G)\le\lambda(G)$

a）设$\lambda(G)=1$，即G有一割边，显然此时$k(G)=1$，上式成立。

b）设$\lambda(G)\ge 2$，则必可删去某$\lambda(G)$条边，使G不连通，而删除$\lambda(G)-1$条边，它仍然连通，而且有一条桥$e=(u，v)$。对$\lambda(G)-1$条边中每一条边都选取一个不同于u，v的端点，将这些端点删去必至少删去$\lambda(G)-1$条边。若这样产生的图是不连通的，则$k(G)\le\lambda(G)-1\le\lambda(G)$，若这样产生的图是连通的，则$e=(u，v)$仍然是桥，此时再删去$u$，$v$，就必产生一个不连通图，故$k(G)\le\lambda(G)$。

由此得$k(G)\le\lambda(G)\le\delta(G)$。

定理

定理7-2.3

一个连通无向图$G=\langle V,E\rangle$的某一点v是图G的割点，当且仅当它是某对结点u，w的关节点。

证明　必要性：若结点v是G的割点，则删去它后，必然有两个以上的连通分支。u和w分别在不同的连通分支上取，显然v是结点u，w的关节点。

充分性：若是结点u，w的关节点，则u到w的每一条路都通过v，删除v后u到w已不连通，故v是图G的割点。

有向图的连通性--可达

无向图的连通性不能直接推广到有向图。

【定义】可达

在有向图$G=\langle V,E\rangle$中，从结点u到v有一条路，称为从u可达v。

可达性是有向图的二元关系，它是自反的和传递的，但一般来说它不是对称的。

有向图的结点的距离

关于有向图的结点的距离与无向图类似定义，它有:

①$d(u，u)=0$，若$u \neq v$，则$d(u，v) > 0$。

②$d(u，v)+ d(v，w) \geq d(u，w)$。

从u不可达v，则通常写成$d(u，v)= \infty$

但是若从u可达v而且从v可达u时，以下的等式$d(u，v)= d(v，u)$不一定成立。

今后我们将

$$D = \max_{u,v \in V} d\langle u,v \rangle$$

称作图G的直径。

强连通、单侧连通、弱连通

定义7-2.6 强连通、单侧连通、弱连通

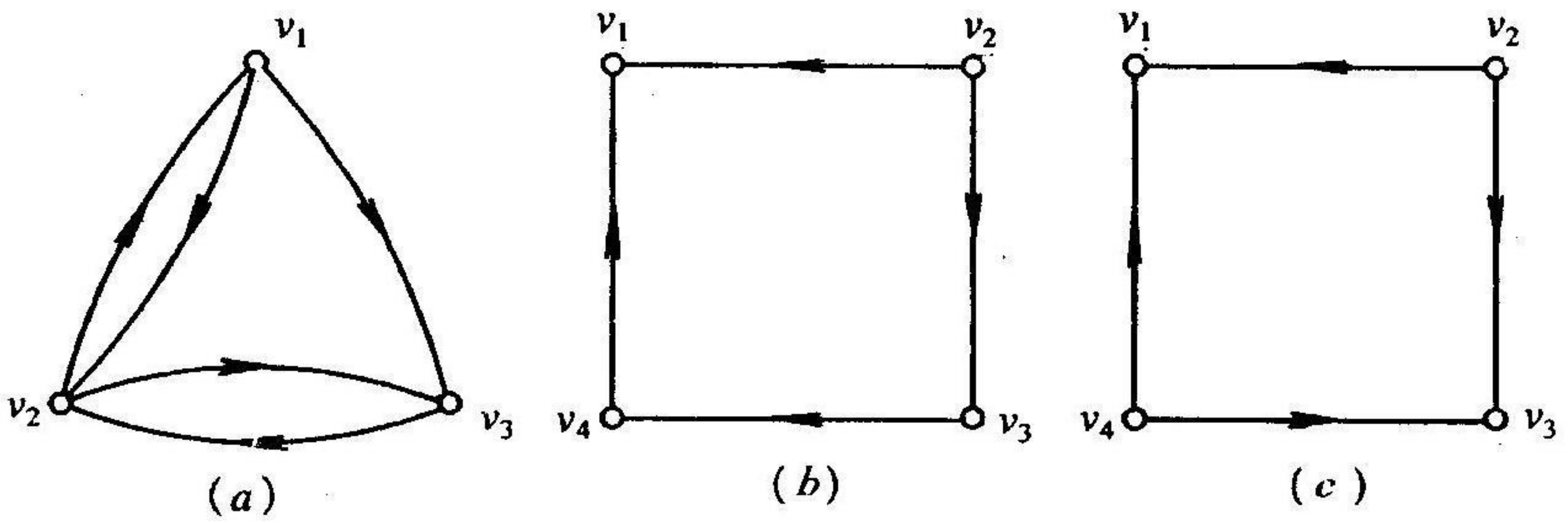
简单有向图$G=\langle V,E\rangle$中，任意一对结点间，至少有一个结点到另一个结点是可达的，则称这个图为**单侧连通**。如果对于图G中的任意两个结点两者之间是互相可达的，则称这个图为**强连通**的。如果在图G中略去方向，将它看成是无向图，图是连通的，则称该有向图为**弱连通**的。

强连通、单侧连通、弱连通

从前面的定义可以看出

- 强连通图必是单侧连通的
- 单侧连通必是弱连通的。
- 它们的逆命题都不真。

强连通、单侧连通、弱连通



(*a*)是强连通的　(*b*)是单侧连通的　(*c*)是弱连通的

定理

定理7-2.4 一个有向图是强连通的，当且仅当G中有一个回路，它至少包含每个结点一次。

证明 充分性：如果图中有一条回路，它至少包含每个结点一次，则G中任意两个结点都是相互可达的，故G是强连通的。

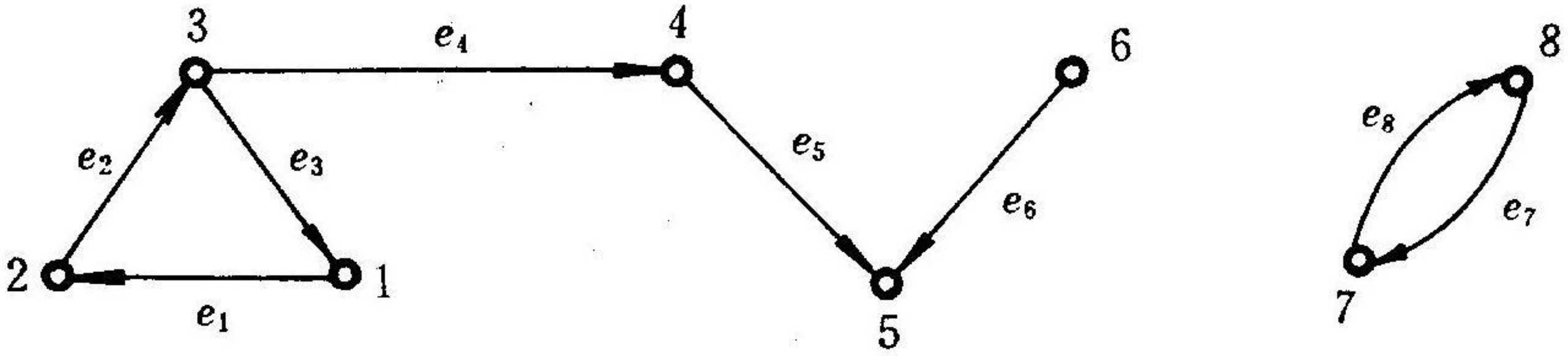
必要性：若有向图G是强连通的，则任意两个结点都是可达的故必可作一回路经过图中的所有各点。若不然则必有一回路不包含某一结点v，因此，v与回路上的各结点就不是相互可达的了，与强连通的条件矛盾。

强分图、单侧分图、弱分图

定义7-2.7

设在简单有向图中，具有强连通性质的最大子图，称为**强分图**；具有单侧连通性质的最大子图，称为**单侧分图**；具有弱连通性质的最大子图，称为**弱分图**。

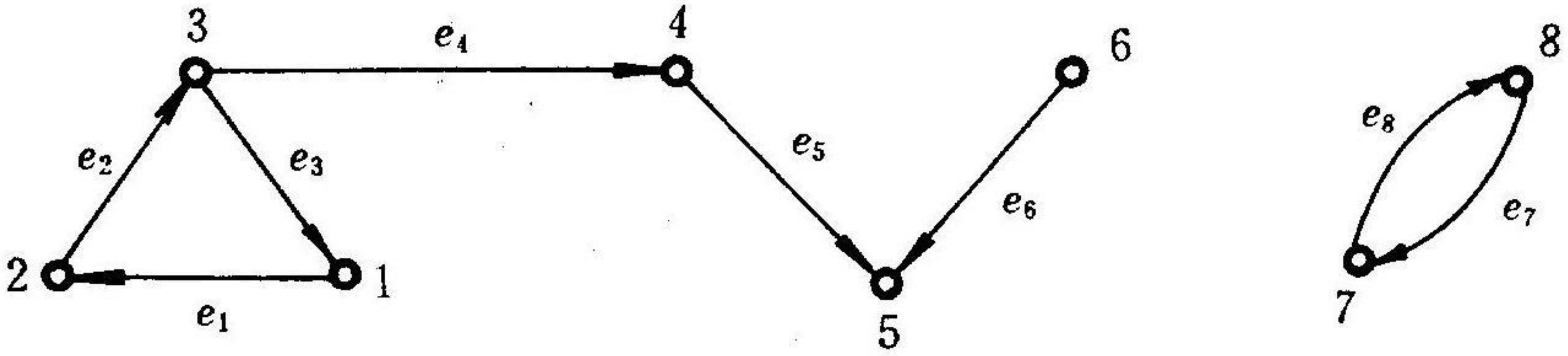
举例



强分图集合是:

$\{\langle\{1,2,3\},\{e_1,e_2,e_3\}\rangle, \langle\{4\},\varnothing\rangle, \langle\{5\},\varnothing\rangle, \langle\{6\},\varnothing\rangle,$
$\langle\{7,8\},\{e_7,e_8\}\rangle\}$

举例

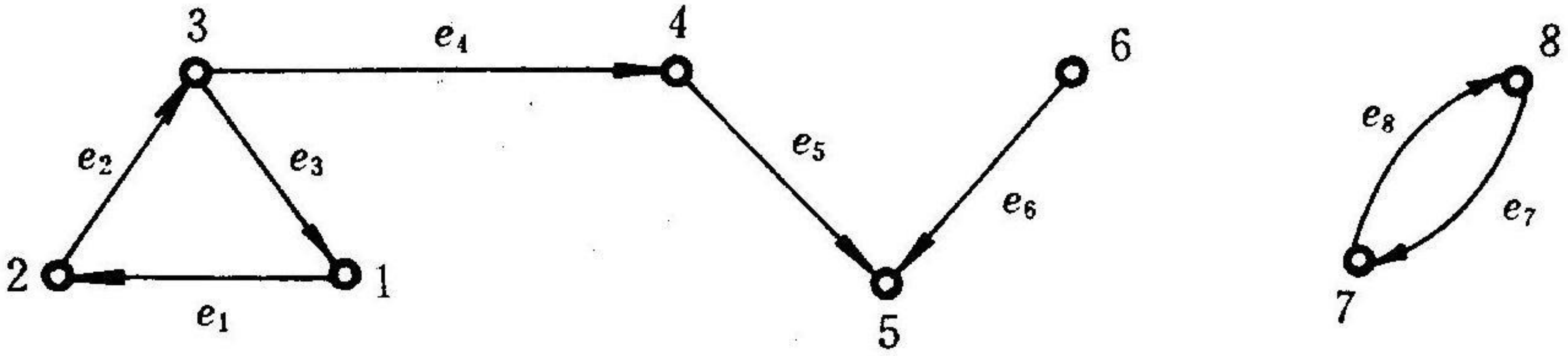


单侧分图集合是:

{〈{1,2,3,4,5},{*e*1,*e*2,*e*3,*e*4,*e*5}〉,〈{6,5},{e_6}〉,

〈{7,8},{e_7,e_8}〉}

举例

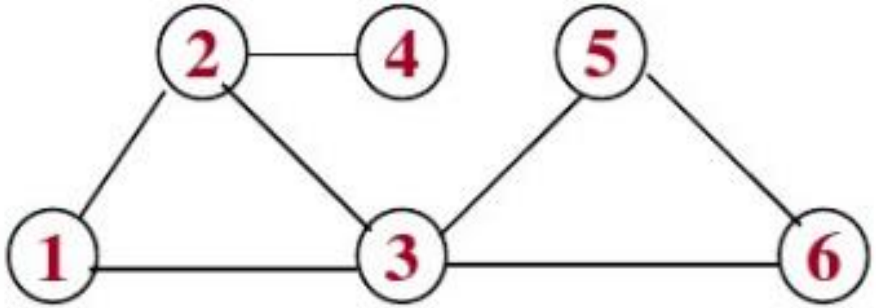


弱分图集合是:

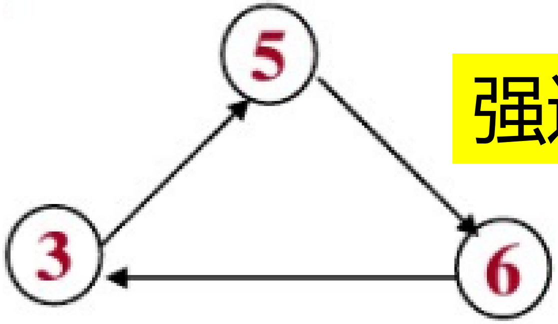
$\{\langle\{1,2,3,4,5,6\},\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}\rangle,$

$\langle\{7,8\},\{e_7,e_8\}\rangle\}$

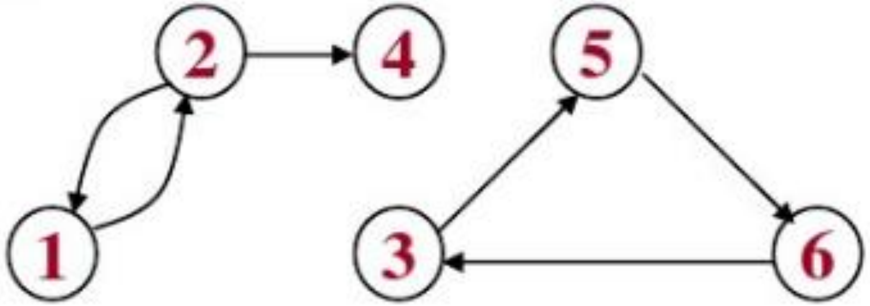
举例



连通图



强连通图



不连通图
左边：单侧分图
右边：强分图

强分图应用举例

下面给出简单有向图的一个应用——资源分配图。

在多道程序的计算机系统中，可以同时执行多个程序。实际上，程序共享计算机系统中的资源，如磁带机、磁盘设备、*CPU*、主存贮器和编译程序等。操作系统对这些资源负责分配给各个程序。当一个程序要求使用某种资源，它要发出请求，操作系统必须保证这一请求得到满足。

强分图应用举例

对资源的请求可能发生冲突。如程序A控制着资源r_1，请求资源r_2；但程序B控制着资源r_2，请求资源r_1。这种情况称为处于死锁状态。然而冲突的请求必须解决，资源分配图有助发现和纠正死锁。

假设某一程序对一些资源的请求，在该程序运行完之前必须都得到满足。在请求的时间里，被请求的资源是不能利用的，程序控制着可利用的资源，但对不可利用的资源则必须等待。

强分图应用举例

令$P_t=\{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$表示计算机系统在时刻$t$的程序集合，$Q_t \subseteq P_t$是运行的程序集合，或者说在时刻$t$至少分配一部分所请求的资源的程序集合。

$R_t=\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$是系统在时刻$t$的资源集合。

资源分配图$G_t=<R_t, E>$是有向图，它表示了时刻t系统中资源分配状态。把每个资源r_i看作图中一个结点，其中$i=1, 2, \ldots, n$。$<r_i, r_j>$表示有向边，

$<r_i, r_j> \in E$当且仅当程序$p_k \in Q_t$已分配到资源r_i且等待资源r_j。

强分图应用举例

例如，令$R_t=\{r_1,r_2,r_3,r_4\}$，$Q_t=\{p_1,p_2,p_3,p_4\}$。资源分配状态是:

p_1占用资源r_4且请求资源r_1;

p_2占用资源r_1且请求资源r_2和r_3;

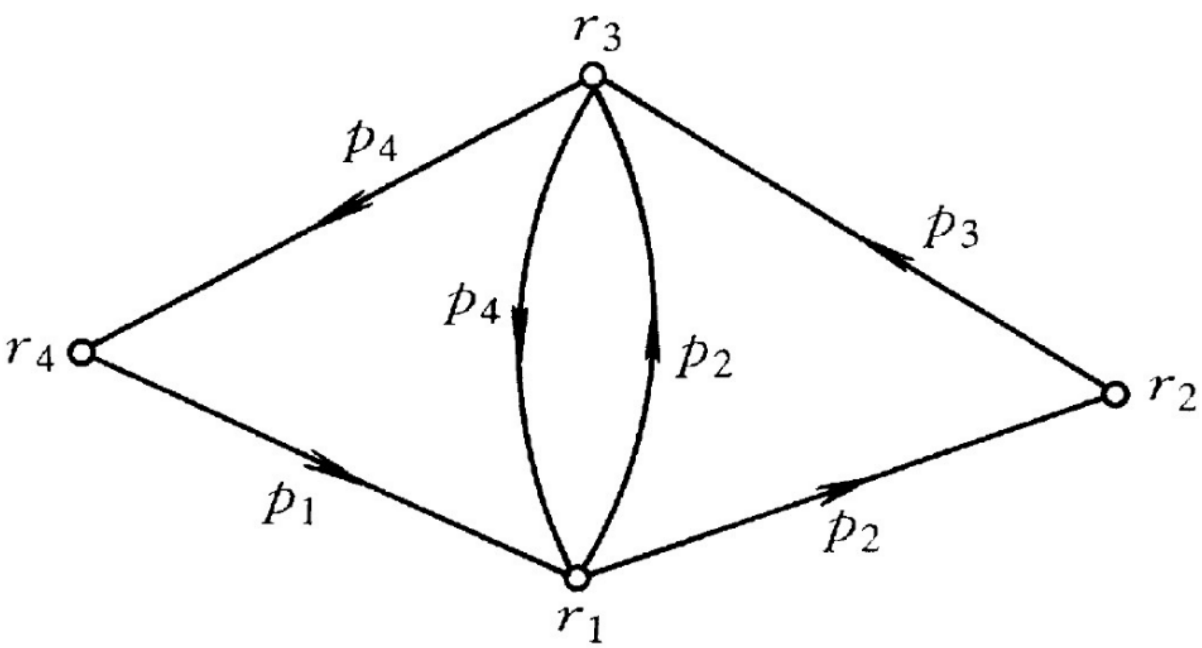
p_3占用资源r_2且请求资源r_3;

p_4占用资源r_3且请求资源r_1和r_4。

强分图应用举例

于是，可得到资源分配图G_t=<R_t,E>，如图10.2.7所示。

能够证明，在时刻t计算机系统处于死锁状态⇔资源分配图G_t中包含强分图。于是，对于图10.2.7，G_t是强连通的，即处于死锁状态。



定理

定理7-2.5　在有向图$G=\langle V,E\rangle$中，它的每一个结点位于且仅位于一个强分图内。

证明　(1)设任意$v \in V$，令S是G中所有与v相互可达的结点的集合，当然S也包括v，而S是G中的一个强分图，因此G中的每一个结点必位于一个强分图中。

定理

(2)设v位于两个不同的强分图S_1和S_2中，因为S_1中的每一个结点与v可达，而v与S_2中的每一个结点也相互可达，S_1中的每一个结点与S_2中的每一个结点通过v都相互可达，这与题设S_1为强分图矛盾，故G的每一个结点只能位于一个强分图中。

谢 谢