《线性代数 I》 期末考试卷 (B)参考答案

一、计算题

1.（**4** 分） 求四阶行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$

解：$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 0 & b & a \\ b & 0 & 0 \end{vmatrix} = a^2\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} - b^2\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = (a^2-b^2)^2$

2.（**4** 分） 设五阶矩阵 A 的行列式 $|A|=5$，求其伴随矩阵 A^* 的行列式 $|A^*|$.

解：$AA^* = |A|E = 5E \Rightarrow |A||A^*| = 5^5 \Rightarrow |A^*| = 5^4 = 625$

3.（**4** 分） 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$，求其伴随矩阵 A^* 的秩。

解：$rank(A) = 2 \Rightarrow AA^* = |A|E = O \Rightarrow rank(A^*) \le 1$

又 $rank(A^*) \ne 0$,所以 $rank(A^*) = 1$.

4.（**4** 分） 设二阶矩阵 A, B 满足矩阵方程 $A^{-1}BA = 6A + BA$，其中 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$,求 B .

解：$A^{-1}BA = 6A + BA \Rightarrow (A^{-1} - E)BA = 6A \Rightarrow (A^{-1} - E)B = 6E \Rightarrow B = 6(A^{-1} - E)^{-1}$

$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

5.（**4** 分） 设 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 55 & 12 \end{pmatrix}$，求 X .

解

$$\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}^2 X\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}9&2\\55&12\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0\\4&1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1&0\\4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&2\\55&12\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1&0\\4&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}9&2\\55&12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\4&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\-4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9&2\\55&12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&2\\19&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$$

6.（4 分） 求 $\mathbb{R}^2$ 中的基 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 到另一组基 $\beta_1=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 的过渡矩阵。

解：$(\beta_1,\beta_2)=(\alpha_1,\alpha_2)P\Rightarrow P=(\alpha_1,\alpha_2)^{-1}(\beta_1,\beta_2)=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3&1\\5&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\2&0\end{pmatrix}$

7.（4 分） 设 A 为三阶矩阵，1,2,3 是 A 的特征值，若 B 与 A 相似，求行列式 $|B+3E|$.

解：由题设，1,2,3 是 B 的特征值，从而 4，5，6 是 $B+3E$ 的特征值，所以 $|B+3E|=4*5*6=120$

8.（4 分） 设三阶矩阵 A 的每一行的元素之和都为零，且秩 $r(A)=2$，求方程组 $Ax=0$ 的通解。

解：因为行和是 0，所以 $(1,1,1)^T$ 是方程组的解。由 $r(A)=2$，可得解空间的维数是 1，所以

通解为 $k(1,1,1)^T$, k 为任意常数。

9.（4 分） 设 $Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，$\alpha=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，求向量 $Q\alpha$ 的模 $\|Q\alpha\|$。

解：Q 为正交矩阵，所以 $\|Q\alpha\|=\|\alpha\|=\sqrt{5}$

10.（4 分） 判断二次型 $f(x,y,z)=(x-2y)^2+(y-2z)^2+(z-2x)^2$ 的正定性。

解：显然 $f\geq 0$.

若 $f=0$，则 $x-2y=0$, $y-2z=0$, $z-2x=0$，可以验证此方程组只有零解，

$x=y=z=0$。从而

f 正定。

二、解答题

11.（**12** 分） 讨论含参数 λ 的方程组 $\begin{cases} x_1+x_3=\lambda \\ 4x_1+x_2+2x_3=\lambda+2 \\ 6x_1+x_2+4x_3=2\lambda+3 \end{cases}$ 解的情况，并在有无穷多解的情况下求出通解。

解：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \lambda \\ 4 & 1 & 2 & \lambda+2 \\ 6 & 1 & 4 & 2\lambda+3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -2 & 2-3\lambda \\ 0 & 1 & -2 & 3-4\lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -2 & 2-3\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

当 $\lambda \neq 1$ 时，$rank(Ab)=3>rank(A)=2$，方程组无解；

当 $\lambda=1$ 时，$rank(Ab)=2=rank(A)=2$，方程组有无穷多解，通解为 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

12.（**12** 分） 求向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 的所有极大无关组。

解：向量组的秩为 2,共有三组

α_1,α_3，　　α_1,α_4，　　α_3,α_4，

13.（**12** 分） 设 $A=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$，求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。

解：$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

所以 $\lambda_1=1$ 是 A 的特征值，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是对应的特征向量。

又 $\lambda_1+\lambda_2=0.5+0.6=1.1$，所以 $\lambda_2=0.1$

计算得 λ_2 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$。

令 $P=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 1 & 4\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & \\ & 0.1\end{pmatrix}$

三、证明题

14.（**8** 分） 设 A 为实对称矩阵，证明：若 $A^3=E$，则 $A=E$

证明： A 为实对称矩阵，所以存在正交阵 Q,使得

$$\begin{aligned}&Q^TAQ=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}\Rightarrow Q^TA^3Q=diag(\lambda_1{}^3,\cdots,\lambda_n{}^3\}\\&\Rightarrow Q^TEQ=diag(\lambda_1{}^3,\cdots,\lambda_n{}^3\}\Rightarrow diag(\lambda_1{}^3,\cdots,\lambda_n{}^3\}=E\\&\Rightarrow\lambda_1=\cdots=\lambda_n=1\Rightarrow A=E.\end{aligned}$$

15.（**8** 分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是方程组 $Ax=0$ 的基础解系，证明：$\alpha_1,\alpha_1-\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$ 是方程组 $Ax=0$ 的基础解系。

证明： 首先证明 $\alpha_1,\alpha_1-\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$ 都是方程组 $Ax=0$ 的解。

其次证明：向量组 $\alpha_1,\alpha_1-\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$ 线性无关。

16.（**8** 分） 设 $A=\begin{pmatrix}a & d & e\\ d & b & f\\ e & f & c\end{pmatrix}$，证明：若 A 正定，则 $c>0$.

证明：因为 A 正定，所以对任意 $x\neq 0$, $x^TAx>0$.

取 $x_0=(0,0,1)^T$，则 $x_0^TAx_0>0$. 又 $x_0^TAx_0=c$,从而 $c>0$.