2018级《线性代数I》期末考试卷 (A)

班级__________ 学号__________ 姓名______________

题 数	一	二	三	四	总 分
得 分					

本题得分	

一、选择题〖1~5小题，每小题4分，共计20分〗

1. 设 A, B, C 为 n 阶方阵，则下列运算一定正确的是（ B ）

（A） $AB=BA$ （B）$(AB)C=A(BC)$

（C） $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ （D）$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

2. 下列叙述中不正确的是（A ）

（A）若向量组 a_1,a_2,a_3,a_4，a_5 线性相关，则向量组 a_1,a_2,a_3,a_4 线性相关。

（B）若向量组 a_1,a_2,a_3,a_4，a_5 线性无关，则向量组 a_1,a_2,a_3,a_4 线性无关。

（C）若向量组 a_1,a_2,a_3 线性无关，则向量组 $a_1,a_1+a_2,a_1+a_2+a_3$ 线性无关。

（D）若向量组 a_1,a_2,a_3 线性无关，则向量组 a_1+a_2,a_2+a_3,a_3+a_1 线性无关。

3. 下列矩阵中不是初等矩阵的是（ B ）

（A）$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ （B）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，（C）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$ （D）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

4. 设 A 是 $s\times n$ 矩阵， 齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系中有 t 个解向量，则齐次线性方程组 $A^Ty=0$ 的基础解系中解向量的个数是（ C ）

（A） $s+n-t$ （B） $s+n+t$ （C） $s-n+t$ （D） $s-n-t$

5. n 阶矩阵 A 具有 n 个不同的特征值是 A 与对角矩阵相似的（B）

（A）充分必要条件 （B）充分而非必要条件

（C）必要而非充分条件 （D）即非充分有也必要条件

本题得分	

二、填空题〖6~10小题，每题4分，共计20分〗

6. 若二阶行列式 $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=6$，则三阶行列式 $\begin{vmatrix}a_{12}&2a_{11}&0\\a_{22}&2a_{21}&0\\0&-2&-1\end{vmatrix}=$ __12__.

7. 设 $a=b=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, 则 $a^Tb=$ __2__，$(ab^T)^{2019}=$ __$2^{2018}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$__ .

8. 若3阶矩阵 A 的特征值为 $1,2,3$，则 $|A^{-1}|=$ __$\frac{1}{6}$__ .

9. 设 $x=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, Q是二阶正交矩阵，则 x 的长度 $\|x\|=$ __$\sqrt{5}$__，Qx 的长度 $\|\mathrm{Q}x\|=$ __$\sqrt{5}$__ .

10. 已知4阶矩阵 A 的秩为3，设 h_1,h_2,h_3 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解，且 $h_1+h_2=\begin{pmatrix}2\\3\\5\\7\end{pmatrix}$, $3h_2-2h_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，则齐次线性方程组 $Ax=0$ 的通解为 __$k\begin{pmatrix}0\\1\\3\\5\end{pmatrix}$__

考试形式开卷（ ）、闭卷（ √），在选项上打（√）

开课教研室__大学数学部__ 命题教师______ 命题时间__2018.12.5__ 使用学期__2018-2019-1__ 总张数__3__ 教研室主任审核签字______

三、解答题 〖11~14题，共计44分〗

11.（本题10分）解矩阵方程 $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}$.

解：

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^{-1} \quad \mathbf{L\,L}\,3'$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} \quad \mathbf{L\,L}\,4'$$

$$=\begin{pmatrix}2&5&8\\1&4&7\\3&6&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&8&5\\1&7&4\\3&9&6\end{pmatrix} \quad \mathbf{L\,L}\,3'$$

12. （本题10分） 在线性空间 R^2 中，求从基 $a_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $a_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ 到另一组基 $b_1=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$, $b_2=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$的过渡矩阵，并求向量 $g=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$在这两组基下的坐标。

解：设过渡矩阵为 P， 则 $(b_1,b_2)=(a_1,a_2)P$，即

$$\begin{pmatrix}0&1\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}P$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&0&1\\1&-1&2&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&0&1\\0&-2&2&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&0&1\\0&1&-1&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&2\\0&1&-1&-1\end{array}\right)$$

所以过渡矩阵 $P=\begin{pmatrix}1&2\\-1&-1\end{pmatrix}$……………………………………..**5'**

注意到 $g=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}=b_1+b_2=(b_1,b_2)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，于是向量$g$ 在基 b_1,b_2 下的坐标为$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$。……**2'**

由于$g=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}=b_1+b_2=(b_1,b_2)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=(a_1,a_2)\mathrm{P}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，所以向量$g$ 在基 a_1,a_2 下的坐标为

$$P\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}。$$ ……………**3'**

13. （本题12分）

求向量组 $a_1=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $a_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\7\\10\end{pmatrix}$, $a_3=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\-2\end{pmatrix}$, $a_4=\begin{pmatrix}8\\5\\9\\11\end{pmatrix}$ 的秩和极大线性无关组，并将其余向量用极大无关组表示。

解：用初等行变换将矩阵(a_1,a_2,a_3,a_4)化成行最简形：

$$\begin{pmatrix}2&-1&3&8\\1&1&1&5\\1&7&-1&9\\1&10&-2&11\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&5\\2&-1&3&8\\1&7&-1&9\\1&10&-2&11\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&5\\0&-3&1&-2\\0&6&-2&4\\0&9&-3&6\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&5\\0&1&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{4}{3}&\frac{13}{3}\\0&1&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以**秩为2**，极大线性无关组可取 a_1,a_2. ………………………………….**8'**

$a_3=\frac{4}{3}a_1-\frac{1}{3}a_2$,

$a_4=\frac{13}{3}a_1+\frac{2}{3}a_2$. ………………………………..**4'**

14.（本题 12 分）用正交变换 $x=Qy$ 将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$$

化成标准形，并判断其正定性。

解：$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3\ =(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$…………**1’**

解特征方程 $|A-lE|=\begin{vmatrix}1-l&1&1\\1&3-l&1\\1&1&1-l\end{vmatrix}=0$ 得特征值 $l_1=0,l_2=1,l_3=4$……**3’**

解齐次方程 $Ax=0$ 得基础解系 $x_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\Rightarrow p_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\0\\\frac{-1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$

解齐次方程 $(A-E)x=0$ 得基础解系 $x_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\ \Rightarrow p_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{-1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$;

解齐次方程 $(A-4E)x=0$ 得基础解系 $x_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\ \Rightarrow p_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{2}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}$;

令 $Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt6}\\0&-\frac{1}{\sqrt3}&\frac{2}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}$，……………**6’**则有

$$Q^{-1}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}Q=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&4\end{pmatrix}$$

由对角形可知该二次型不正定。………………………………………………**2’**

本题得分	

四、证明题〖15~16 题，共计 16 分〗

15.（本题 8 分）设 $a_1,a_2,\mathbf{L},a_k$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，向量 b 满足 $Ab\neq0$，证明：向量组 $a_1+b,a_2+b,\mathbf{L},a_k+b$ 线性无关.

证明： 设 $t_1(a_1+b)+t_2(a_2+b)+\mathbf{L}+t_k(a_k+b)=0$，则

$t_1a_1+t_2a_2+\mathbf{L}+t_ka_k+(t_1+t_2+\mathbf{L}+t_k)b=0$　　（*）

（*）式左乘 A，得 $t_1Aa_1+t_2Aa_2+\mathbf{L}+t_kAa_k+(t_1+t_2+\mathbf{L}+t_k)Ab=0$

因为 $a_1,a_2,\mathbf{L},a_k$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系

因而，$Aa_j=0$，所以 $(t_1+t_2+\mathbf{L}+t_k)Ab=0$, 但 $Ab\neq0$

从而 $t_1+t_2+\mathbf{L}+t_k=0$，继而 $t_1a_1+t_2a_2+\mathbf{L}+t_ka_k=0$，………………**5’**

又 $a_1,a_2,\mathbf{L},a_k$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系。

推得 $t_1=t_2=\mathbf{L}=t_k=0$，证毕. ……………..**3’**

16.（本题 8 分）设 n 阶方阵 A 满足 $A^2=A$,证明:

$$r(A)+r(E-A)=n,$$

这里 $r(A)$ 表示矩阵 A 的秩。

证明： $A^2=A\Rightarrow A(\mathrm{E}-A)=0$。将 $E-A$ 按列分块成 $E-A=\left(b_1\ b_2\ \mathbf{L}\ b_n\right)$，则有

$$A(E-A)=A\left(b_1\ b_2\ \mathbf{L}\ b_n\right)=\left(Ab_1\ Ab_2\ \mathbf{L}\ Ab_n\right)=(0\ 0\ \mathbf{L}\ 0)$$

$$\Rightarrow Ab_1=0,\ Ab_2=0,\ \mathbf{L},\ Ab_n=0$$

所以 $r(E-A)=r\left(b_1\ b_2\ \mathbf{L}\ b_n\right)\le n-r(A)\Rightarrow r(A)+r(E-A)\le n$ ………………………**5’**

另一方面，$n=r(E)=r(A+E-A)\le r(A)+r(E-A)$.…………………….**3’**

所以 $r(A)+r(E-A)=n$