《线性代数 II》 期末考试卷（A）参考答案

一、计算题（1-8，每小题 5 分，共 40 分）

1.（**5** 分） 计算行列式 $\begin{vmatrix} 2007 & 2008 & 2009 & 2010 \\ 2011 & 2012 & 2013 & 2014 \\ 2015 & 2016 & 2017 & 2018 \\ 2019 & 2020 & 2021 & 2022 \end{vmatrix}$.

解：$\begin{vmatrix} 2007 & 2008 & 2009 & 2010 \\ 2011 & 2012 & 2013 & 2014 \\ 2015 & 2016 & 2017 & 2018 \\ 2019 & 2020 & 2021 & 2022 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2007 & 2008 & 2009 & 2010 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 2019 & 2020 & 2021 & 2022 \end{vmatrix} = 0$

2.（**5** 分） 已知行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 2019 & 2020 & 2021 & 2022 \end{vmatrix}$，$A_{ij}$ 表示 a_{ij} 的代数余子式，求 $A_{41}+A_{43}+A_{44}$.

解：

$$A_{41}+A_{43}+A_{44} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} == \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} == \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -4 & -8 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -8 \end{vmatrix} = 12$$

3.（**5** 分） 设 $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，求 $P_1^{10} A P_2^{2022}$.

解：$P_1^{10} A P_2^{10} = P_1^{10} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{10} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 20 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 21 & 42 \end{pmatrix}$

4.（**5** 分） 设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2a & 2b \end{pmatrix}$，求 A^5.

解：$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2a & 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$

$$A^5=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}$$
$$=(a+2b)^4A$$
$$=(a+2b)^4\begin{pmatrix}a & b\\2a & 2b\end{pmatrix}$$

5.（**5** 分） 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}5 & 7\\2 & 7\end{pmatrix}$，若矩阵 B 满足 $AB=A+2B$，求 B.

解 $AB=A+2B\Rightarrow(A-2E)B=A\Rightarrow B=(A-2E)^{-1}A$

$$(A-2E|A)=\left(\begin{array}{cc|cc}3 & 7 & 5 & 7\\2 & 5 & 2 & 7\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1 & \frac{7}{3} & \frac{5}{3} & \frac{7}{3}\\1 & \frac{5}{2} & 1 & \frac{7}{2}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1 & \frac{7}{3} & \frac{5}{3} & \frac{7}{3}\\0 & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{7}{6}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1 & \frac{7}{3} & \frac{5}{3} & \frac{7}{3}\\0 & 1 & -4 & 7\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 11 & -14\\0 & 1 & -4 & 7\end{array}\right)$$

$B=\begin{pmatrix}11 & -14\\-4 & 7\end{pmatrix}$.

6.（**5** 分）设 A 是行和为 0 的 3 阶非零矩阵，若 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}$ 是非齐次方程组 $Ax=b$ 的两个解，求齐次方程组 $Ax=0$ 的通解.

解 $\alpha_1-\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ 为齐次方程的解. 由于行和为 0，所以 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 是齐次方程的解.

齐次方程的通解为：$c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

7.（**5** 分） 设 $Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，$\alpha=\begin{pmatrix}5\\12\end{pmatrix}$，求向量 $Q^2\alpha$ 的模 $\|Q^2\alpha\|$.

解 因为 Q^2 是正交矩阵，所以 $\|Q^2\alpha\|=\|\alpha\|=13$.

8.（**5** 分） 已知二次型 $f(x,y,z)=(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2$，写出表示此二次型的对

称矩阵，并判断二次型是否正定.

解 二次型的矩阵为$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，该二次型正定.

二、解答题（9-11，每小题 12 分，共 36 分）

9.（12 分） 讨论含有参数a,b的方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3 \\ 2x_1+3x_2+4x_3=9 \\ 3x_1+4x_2+ax_3=b \end{cases}$解的情况，并在有无穷多解的情况下求出通解.

解:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 9 \\ 3 & 4 & a & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & a-3 & b-9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & a-5 & b-12 \end{pmatrix}$$

当$a\neq 5$时，方程组有唯一解；

当$a=5,b\neq 12$时，方程组无解；

当$a=5,b=12$时，方程组有无穷多解

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & a-5 & b-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

此时通解为

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

10.（12 分） 求向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$，$\alpha_5=\begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix}$的极大线性无关组，并将其余向量用极大线性无关组表示.

解:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 6 & 10 \\ 1 & 3 & 5 & 8 & 13 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

此向量组的秩为 2，极大线性无关组可取 α_1,α_2.

$\alpha_3=2\alpha_1+\alpha_2$， $\alpha_4=2\alpha_1+2\alpha_2$， $\alpha_5=4\alpha_1+3\alpha_2$.

11.（**12** 分） 设 $A=\begin{pmatrix}2&0\\2&1\end{pmatrix}$，求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵，并求 A^5.

解：特征值为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=1$，对应的特征向量为 $p_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，$p_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，

令 $P=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$，则有 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&\\&1\end{pmatrix}$.

所以 $P^{-1}A^5P=\begin{pmatrix}2&\\&1\end{pmatrix}^5=\begin{pmatrix}32&\\&1\end{pmatrix}$

又 $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}$，所以

$$P^{-1}A^5P=\begin{pmatrix}2&\\&1\end{pmatrix}^5=P\begin{pmatrix}32&\\&1\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}32&\\&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}32&0\\62&1\end{pmatrix}$$

三、证明题（**12-14**，每小题 **8** 分，共 **24** 分）

12.（**8** 分） 设向量组 α_1,α_2 是方程组 $Ax=0$ 的基础解系，证明向量组 $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_1-\alpha_2$ 仍是方程组 $Ax=0$ 的基础解系.

证明： 有条件得到解空间的维数是 2.
第一步证明这两个向量是方程的解
第二步证明它们线性无关.

13.（**8** 分） 设三阶矩阵 A 的三个特征值分别为 1，2，3，证明矩阵 A^2-2E 可逆.

证明：由条件可得 A^2-2E 的特征值为$-1,2,7$,

故 $\left|A^2-2E\right|=-14\neq 0$，所以 A^2-2E 可逆.

14.（**8** 分） 设 A 为 n 阶方阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 A 对应于特征值 λ 的三个线性无关的特征向量，β_1,β_2 是 A 对应于特征值 μ 的两个线性无关的特征向量，证明：若 $\lambda\neq\mu$，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 线性无关.

证明：设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+l_1\beta_1+l_2\beta_2=0$ ………………(1)

于是 $A\left(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+l_1\beta_1+l_2\beta_2\right)=0$，左边展开可得

$k_1\lambda\alpha_1 + k_2\lambda\alpha_2 + k_3\lambda\alpha_3 + l_1\mu\beta_1 + l_2\mu\beta_2 = 0$ ....(2)

$(2)-(1)*\mu$ 得

$$(\lambda-\mu)\left(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3\right) = 0$$

由于$\lambda \neq \mu$，所以 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$.

由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关可得 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

同理可证$l_1 = l_2 = 0$.

故向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$线性无关.