院、系领导审批并签名		B 卷

广州大学 2017-2018 学年第一学期考试卷及参考解答

课 程：高等数学Ⅰ(1)（80 学时）　　　　　考 试 形 式：闭卷考试

学院:______________ 专业班级:____________ 学号:______________ 姓名:_____________

题 次	一	二	三	四	五	六	总 分	评卷人
分 数	30	32	12	10	10	6	100	
得 分								

一、填空题（每空 3 分，本大题满分 30 分）

1．设 $f(x)=\dfrac{x^3}{x^3+1}$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\underline{\quad 1 \quad}$；当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是关于 x 的 k 阶无穷小，其中 $k=\underline{\quad 3 \quad}$.

2．曲线 $y=(1+\dfrac{2}{x})^x$ 有水平渐近线 $\underline{\quad y=e^2 \quad}$ 和铅直渐近线 $\underline{\quad x=-2 \quad}$.

3．若点 $(1,\ 2)$ 为曲线 $y=ax^3-6x^2+b$ 的拐点，则常数 $a=\underline{\quad 2 \quad}$，$b=\underline{\quad 6 \quad}$.

4．设 xe^x 为 $f(x)$ 的原函数，则 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\underline{\quad e \quad}$，$f^{(2015)}(0)=\underline{\quad 2016 \quad}$.

5．设 $f(x)=\int_{-1}^{x}\dfrac{6t^2+t}{t^6+1}\mathrm{d}t$，则 $f(1)=\underline{\quad \pi \quad}$，$f'(1)=\underline{\quad \dfrac{7}{2} \quad}$.

二、解答下列各题(每小题 8 分，本大题满分 32 分)

1．设 $f(x)=g(x)(x^2-1)$，其中 $g(x)$ 在点 $x=1$ 处连续且 $g(1)=2$，求 $f'(1)$.

解：由题设知 $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=g(1)=2$，------2 分

$$\therefore\quad f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)(x^2-1)}{x-1} \text{------5 分}$$

$$=\lim_{x\to 1} g(x)(x+1)=4. \text{------8 分}$$

更多考试真题
请扫码获取

2．求函数 $y=\sqrt{8+x^6}$ 的导数和微分，并利用微分计算 $\sqrt{8+(1.001)^6}$ 的近似值.

解：$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{8+x^6}}\cdot(8+x^6)'=\dfrac{3x^5}{\sqrt{8+x^6}}$，------3 分

$$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=\frac{3x^5}{\sqrt{8+x^6}}\mathrm{d}x\text{，}\quad\text{------5 分}$$

当 $x_0=1$，$\mathrm{d}x=\Delta x=0.001$ 时，

$$y(x_0)=\sqrt{8+1^3}=3\text{，}\quad \Delta y\approx \mathrm{d}y=\frac{3\cdot 1^5}{\sqrt{8+1^6}}\cdot 0.001=0.001\text{，}$$

$$\sqrt{8+(1.001)^6}=y(x_0+\Delta x)=y(x_0)+\Delta y\approx 3.001.\quad\text{------8 分}$$

3．求曲线 $x^3-xy+y^3=4$ 在点 $(2,\ -2)$ 处的切线方程.

解：曲线方程两边对 x 求导，得

$$3x^2-y-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+3y^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0\text{，}\quad\text{------4 分}$$

将 $x=2$，$y=-2$ 代入上式，得切线斜率 $k=\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=2,\ y=-2}=-\dfrac{7}{5}$，------6 分

所以切线方程为

$$y+2=-\frac{7}{5}(x-2)\text{，即 }7x+5y-4=0.\quad\text{------8 分}$$

4．设函数 $y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=2t^3+6t\\ y=3t^2-6t\end{cases}$ 确定，求 $y(x)$ 的单调区间和极值.

解：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{(3t^2-6t)'}{(2t^3+6t)'}=\dfrac{t-1}{t^2+1}$，------3 分

当 $t<1$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}<0$，所以 $y(x)$ 在 $(-\infty,\ 8]$ 上单调减少；

当 $t>1$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}>0$，所以 $y(x)$ 在 $[8,\ +\infty)$ 上单调增加. ------6 分

$y|_{t=1}=-3$ 为极小值. ------8 分

三、计算下列积分（每小题 6 分，本大题满分 12 分）

1. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

解：令 $x=\sin t$（$t=\arcsin x$），则

$$\text{原积分}=\int \frac{1}{\sin^2 t\cdot\cos t}\cdot\cos t\,\mathrm{d}t=\int \csc^2 t\,\mathrm{d}t \text{------3 分}$$

$$=-\cot t+C \text{------5 分}$$

$$=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C \text{------6 分}$$

2. $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$.

解：原式 $=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$ ------1 分

$$=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b \ln x\,\mathrm{d}(-\frac{1}{x})=\lim_{b\to+\infty}(-\frac{\ln x}{x}\Big|_1^b+\int_1^b\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x) \text{------3 分}$$

$$=\lim_{b\to+\infty}[-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}]_1^b=1. \text{------6 分}$$

四、（本题满分 10 分）

求抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=2-x$ 及 y 轴在第一象限所围成的平面图形的面积 A 及该平面图形绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积 V.

解：如图（略），$y=x^2$ 与 $y=2-x$ 在第一象限的交点为 $(1,\ 1)$，------2 分

所求面积为

$$A=\int_0^1(2-x-x^2)\mathrm{d}x \text{------4 分}$$

$$=[2x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3]_0^1=\frac{7}{6}; \text{------6 分}$$

所求体积为

$$V=\pi\int_0^1 y\,\mathrm{d}y+\pi\int_1^2(2-y)^2\mathrm{d}y \text{------8 分}$$

$$=\frac{\pi}{2}[y^2]_0^1-\frac{\pi}{3}[(2-y)^3]_1^2=\frac{5}{6}\pi. \text{------10 分}$$

五、（本题满分 10 分）

求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}\left(4\arctan\dfrac{1}{x}-\pi\right)$ 的间断点，并判别其类型.

解：由初等函数 $f(x)$ 在其定义域内处处连续，可知 $f(x)$ 的间断点为 $x=0$、$x=1$ 和 $x=-1$. ------3 分

$$\because\quad \lim_{x\to0^-}f(x)=3\pi,\quad \lim_{x\to0^+}f(x)=-\pi,$$

所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点. ------5 分

$$\because\quad \lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}4\cdot\frac{1}{1+x^{-2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\frac{1}{2x}=-1,$$

所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点. ------8 分

$$\because\quad \lim_{x\to-1}f(x)=\infty,$$

所以 $x=-1$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点. ------10 分

六、（本题满分 6 分）

已知函数 $f(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上连续，在 $(0,\ 1)$ 内可导，且 $f(0)=1$，$f(1)=0$. 证明：

（1）存在 $x_0\in(0,\ 1)$，使得 $f(x_0)=x_0$；

（2）存在两个不同的点 $x_1,\ x_2\in(0,\ 1)$，使得 $f'(x_1)f'(x_2)=1$.

证明：（1）令 $g(x)=f(x)-x$，则 $g(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上连续，

$$g(0)=f(0)-0=1,\quad g(1)=f(1)-1=-1,$$

由零点定理知，存在 $x_0\in(0,\ 1)$，使得 $g(x_0)=0$，即 $f(x_0)=x_0$. ------3 分

（2）由拉格朗日中值定理知，存在 $x_1\in(0,\ x_0)$ 和 $x_2\in(x_0,\ 1)$，使得

$$f'(x_1)=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=\frac{x_0-1}{x_0},$$

$$f'(x_2)=\frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}=\frac{-x_0}{1-x_0},$$

于是 $f'(x_1)f'(x_2)=1$. ------6 分