2022级《线性代数II》期末考试卷(B)

班级________ 学号________ 姓名________

题 号	一	二	三	总分
得 分				

本题得分	

一、填空题(1~10小题，每小题5分，共50分).

1. 行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}=$ ___6___.

2. 设 A 为三阶方阵，$|A|=3$，则 $|-2A^*|=$ ___-72___.

3. 设四阶方阵 A 的秩为2，则其伴随矩阵 A^* 的秩 $R(A^*)=$ ___0___.

4. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2+A-3E=O$，则 $(A-2E)^{-1}=$ ___$-\dfrac{A+3E}{3}$___.

5. 矩阵方程 $X\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ 的解 $X=$ ___$\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -13 & 5 \end{pmatrix}$___.

6. 设三阶方阵 A 满足 $|A+E|=|A+2E|=|A+3E|=0$，则 $|A+4E|=$ ___6___.

7. 已知 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 3-t \\ 1 \end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ 线性相关，则 $t=$ ___17___.

8. 设四元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵 A 的秩为2，已知它的三个解向量为 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$，则该方程组的通解为 ___$x=k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$___.

9. 已知向量 $\alpha=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$，若矩阵 $\alpha\beta^T$ 相似于矩阵 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $k=$ ___2___.

10. 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(2-t)x_1^2+x_2^2+(t+3)x_3^2+2x_1x_2$ 是正定的，则 t 的取值范围是 ___$-3<t<1$___.

本题得分	

二、解答题(11~13小题，每小题12分，共36分)

11. 讨论当参数 λ 为何值时，方程组 $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=3 \\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda-1 \end{cases}$ 无解？有唯一解？有无穷多个解？并在有无穷多个解时求出方程组的通解.

解：$B=(A\vdots b)=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 & 3 \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda-1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda-1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 4-\lambda \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & (2-\lambda)(2+\lambda) \end{pmatrix}\cdots\cdots(4')$

(1) $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq-2$ 时，$R(A)=R(B)=3$，方程组有唯一解；……$(6')$

(2) $\lambda=1$ 时，$R(A)=1$，$R(B)=2$，方程组无解；……$(8')$

(3) $\lambda=-2$ 时，$R(A)=R(B)=2<3$，方程组有无穷多解，$B\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

通解为：$x=c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$，其中 c 为任意常数.……$(12')$

考试形式开卷（ ）、闭卷（√），在选项上打（√）

开课教研室___大学数学部___ 命题教师________ 命题时间___2023.05.18___ 使用学期___2022-2023-2___ 总张数___2___ 教研室主任审核签字___

12. 已知向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\2\\-6\\-4\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\-2\\7\\6\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}3\\7\\-9\\1\end{pmatrix}$，求该向量组的秩及一个最大无关组，并将其余向量用该最大无关组线性表示.

解:$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&0&0&3\\1&2&-2&7\\1&-6&7&-9\\3&-4&6&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\cdots\cdots(6')$

$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3,\cdots\cdots(8')$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为所求的一个极大无关组,$\cdots\cdots(10')$

$\alpha_4=3\alpha_1+2\alpha_2\cdots\cdots(12')$

13. 设 $A=\begin{pmatrix}3&-2&0\\-2&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,求正交阵 P 和对角阵 Λ，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$.

解：$|A-\lambda E|=(\lambda-1)^2(5-\lambda)$

$\therefore\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=5,\cdots\cdots(4')$

当 $\lambda_1==\lambda_2=1$时,解$(A-E)x=O$，得基础解系 $\xi_1=(1\ \ 1\ \ 0)^T$，$\xi_2=(0\ \ 0\ \ 1)^T$，

单位化得 $p_1=\left(1/\sqrt{2}\ \ 1/\sqrt{2}\ \ 0\right)^T$，$p_2=(0\ \ 0\ \ 1)^T\cdots\cdots(8')$

当 $\lambda_3=5$时,解$(A-5E)x=O$，得基础解系 $\xi_3=(-1\ \ 1\ \ 0)^T$，单位化得 $p_3=\left(-1/\sqrt{2}\ \ 1/\sqrt{2}\ \ 0\right)^T\cdots\cdots(10')$

令 $P=(p_1,\ p_2,\ p_3)=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&0&-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\\0&1&0\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&5\end{pmatrix}$,

则 P 为正交阵，且 $P^{-1}AP=\Lambda.\cdots\cdots(12')$

本题	
得分	

三、证明题(第14 题6分，第15 题8分)

14. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，令 $b_1=\alpha_1$，$b_2=\alpha_1+2\alpha_2$，$b_3=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3$，证明:$b_1,b_2,b_3$ 线性无关.

证明：$\because$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\therefore R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3\cdots\cdots(1')$

又 $(b_1,b_2,b_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{pmatrix},\cdots\cdots(3')$

由 $\begin{vmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{vmatrix}=6\neq0$ 可知 $\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$ 可逆$\cdots\cdots(4')$

故 $R(b_1,b_2,b_3)=R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3\cdots\cdots(5')$

因此 b_1,b_2,b_3 线性无关.$\cdots\cdots(6')$

15. 设 A 是 $2n+1$ 阶正交矩阵，证明:$|A^2-E|=0$.

证明：由 A 正交可知 $A^TA=E$

两边取行列式可得 $|A|^2=1(2')$

$$|A^2-E|=|A-E||A+E|=|A-A^TA||A+A^TA|=|(E-A^T)A||(E+A^T)A|$$

$$=|A|^2|E-A||E+A|=|E-A^2|=(-1)^{2n+1}|A^2-E|=-|A^2-E|$$

$\therefore|A^2-E|=0\cdots\cdots(8')$