2022级《线性代数II》期末考试卷(A)参考答案

班级______________ 学号______________ 姓名______________

题 号	一	二	三	总分
得 分				

本题得分	

一、填空题(1~10小题，每小题5分，共50分).

1. 若行列式 $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=2$，则行列式 $\begin{vmatrix} 3b_1 & 2a_1+b_1 & c_1 \\ 3b_2 & 2a_2+b_2 & c_2 \\ 3b_3 & 2a_3+b_3 & c_3 \end{vmatrix}=$ $\underline{\ -12\ }$.

2. 设行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$，则行列式 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=$ $\underline{\ 6\ }$.

3. 设 A 为三阶方阵，$|A|=\frac{1}{3}$，则 $\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|=$ $\underline{\ -\frac{1}{9}\ }$.

4. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2-A-2E=O$，则 $(A+2E)^{-1}=$ $\underline{\ -\frac{1}{4}(A-3E)\ }$.

5. 矩阵方程 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}X\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ 的解 $X=$ $\underline{\begin{pmatrix} -10 & 4 \\ -17 & 6 \\ -11 & 4 \end{pmatrix}}$.

6. 设 A 为二阶方阵，α_1，α_2 为线性无关的2维列向量，$A\alpha_1=0$，$A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$，则 $|A+2E|=$ $\underline{\ 6\ }$.

7. 已知 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix} 5 \\ a \\ 5 \end{pmatrix}$ 线性相关，则 $a=$ $\underline{\ 5\ }$.

8. 设四元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵 A 的秩为2，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为它的三个线性无关的解，则该方程组的通解为 $\underline{\ x=k_1(\alpha_1-\alpha_2)+k_2(\alpha_1-\alpha_3)+\alpha_1\ }$.

9. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$ 相似，则 $x=$ $\underline{\ 2\ }$.

10. 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+t\,x_2^2+x_3^2+2t\,x_1x_3$ 是正定的，则 t 的取值范围是 $\underline{\ 0<t<1\ }$.

本题得分	

二、解答题(11~13小题，每小题12分，共36分)

11. 讨论当参数 a,b 为何值时，方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+2x_3+2x_4=1 \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$ 无解？有唯一解？有无穷多个解？并在有无穷多个解时求出方程组的通解.

解：$B=(A\vdots b)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\cdots(4')$

(1) $a\neq1$ 时，$R(A)=R(B)$，方程组有唯一解；$\cdots\cdots(6')$

(2) $a=1$，$b\neq-1$ 时，$R(A)=2$，$R(B)=3$，方程组有无解；$\cdots\cdots(8')$

(3) $a=1$，$b=-1$ 时，$R(A)=R(B)=2<3$，方程组有无穷多解，$B\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

通解为：$x=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，其中 c_1,c_2 为任意常数 $\cdots\cdots(12')$

考试形式开卷（ ）、闭卷（√），在选项上打（√）

开课教研室__大学数学部__ 命题教师______ 命题时间__2023.05.18__ 使用学期__2022-2023-2__ 总张数__2__ 教研室主任审核签字__

12. 已知向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\5\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\8\\1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\3\\-7\\7\end{pmatrix}$，求该向量组的秩及一个最大无关组，并将其余向量用该最大无关组线性表示.

解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&1&3&1\\-1&1&-1&3\\5&-1&8&-7\\-1&3&1&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\cdots\cdots(6')$

$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3,\cdots\cdots(8')$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为所求的一个极大无关组，$\cdots\cdots(10')$

$\alpha_4=-\alpha_1+2\alpha_2\cdots\cdots(12')$

13. 设 $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&2&0\\1&0&2\end{pmatrix}$，求正交阵 P 和对角阵 Λ，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$.

解：$|A-\lambda E|=-(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4)$

$\therefore\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=4,\cdots\cdots(4')$

当 $\lambda_1=1$ 时，解 $(A-E)x=O$，得基础解系 $\xi_1=(-1\ \ 1\ \ 1)^T$，单位化得 $p_1=\left(-1/\sqrt{3}\ \ 1/\sqrt{3}\ \ 1/\sqrt{3}\right)^T\cdots\cdots(6')$

当 $\lambda_2=2$ 时，解 $(A-2E)x=O$，得基础解系 $\xi_2=(0\ \ -1\ \ 1)^T$，单位化得 $p_2=\left(0\ \ -1/\sqrt{2}\ \ 1/\sqrt{2}\right)^T\cdots\cdots(8')$

当 $\lambda_3=4$ 时，解 $(A-4E)x=O$，得基础解系 $\xi_3=(2\ \ 1\ \ 1)^T$，单位化得 $p_3=\left(2/\sqrt{6}\ \ 1/\sqrt{6}\ \ 1/\sqrt{6}\right)^T\cdots\cdots(10')$

令 $P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{3}&0&2/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&4\end{pmatrix}$，

则 P 为正交阵，且 $P^{-1}AP=\Lambda.\cdots\cdots(12')$

本题得分	

三、证明题（第14题6分，第15题8分）

14. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，令 $b_1=\alpha_1+2\alpha_2$，$b_2=\alpha_2+2\alpha_3$，$b_3=\alpha_3+2\alpha_1$，证明：b_1,b_2,b_3 线性无关.

证明：$\because$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\therefore R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3\cdots\cdots(1')$

又 $(b_1,b_2,b_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&0\\0&2&1\end{pmatrix},\cdots\cdots(3')$

由 $\begin{vmatrix}1&0&2\\2&1&0\\0&2&1\end{vmatrix}=9\neq0$ 可知 $\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$ 可逆$\cdots\cdots(4')$

故 $R(b_1,b_2,b_3)=R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3\cdots\cdots(5')$

因此 b_1,b_2,b_3 线性无关.$\cdots\cdots(6')$

15. 设 A 为 n 阶方阵（$n\geq3$），A^* 为 A 的伴随矩阵，证明：

(1) 若 $R(A)=n$，则 $R(A^*)=n$.

(2) 若 $R(A)=n-1$，则 $R(A^*)=1$.

(3) 若 $R(A)<n-1$，则 $R(A^*)=0$.

证明：(1) 若 $R(A)=n$，则 $|A|\neq0$，$A^*=|A|A^{-1}$，故 $R(A^*)=n.\cdots\cdots(2')$

(2) 若 $R(A)=n-1$，则 $|A|=0$，故 $AA^*=O$，有 $R(A)+R(A^*)\leq n$，因此 $R(A^*)\leq1$；

又 A 中至少有一个 $(n-1)$ 阶子式不为零，所以 $A^*\neq O$，因此 $R(A^*)\geq1$，

故 $R(A^*)=1.\cdots\cdots(6')$

(3) 若 $R(A)=n-1$，则 A 中所有 $(n-1)$ 阶子式均为零，所以 $A^*=O$，因此 $R(A^*)=0.\cdots\cdots(8')$