2017 级《线性代数 II》期末考试卷(A)评分标准

使用专业、班级__________ 学号____________ 姓名_________________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

本题得分	

一、填空题(每小题 4 分, 共 24 分)

(1) 设 A, B 为三阶方阵, 且 $|A|=-2$, $|B|=3$, 则 $\left||A|B^*\right|=$ <u>-72</u>.

(2) 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A^{-1}=$ <u>$\begin{pmatrix} 0 & -9 & 4 \\ 0 & 7 & -3 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$</u>.

(3) 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2+3A+E=O$, 则 $(A+E)^{-1}=$ <u>$A+2E$</u>.

(4) 设 n 阶方阵 A 的每行元素之和为 2 , 则 $3A^{-1}+E$ 有一个特征值为 <u>$5/2$</u>.

(5) 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & x & 4 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ 相似，则 $x=$ <u>-1</u>, $y=$ <u>-2</u>

(6) 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$ 正定, 则 t 满足 <u>$0<t<2$</u>.

本题得分	

二、选择题(每小题 4 分, 共 16 分)

(1) 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵, 则下列结论成立的是 [B]

(A) $AB\neq O \Leftrightarrow A\neq O$ 且 $B\neq O$　　(B) $|AB|=0 \Leftrightarrow |A|=0$ 或 $|B|=0$

(C) $(AB)^m=A^mB^m$ (m 为正整数)　　(D) $(AB)^T=A^TB^T$.

(2) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，向量 b_1 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，而 b_2 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，则对任意常数 k, 必有 [A]

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, kb_1+b_2$ 线性无关;　　(B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, kb_1+b_2$ 线性相关;

(C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, b_1+kb_2$ 线性无关;　　(D) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, b_1+kb_2$ 线性相关

(3) 设矩阵 $A_{m\times n}$ 的秩 $R(A)=m<n$, B 为 n 阶方阵，则下列结论正确的是 [D]

(A) A 的任意 m 个列向量线性无关 ;　　(B) 齐次线性方程组 $Ax=O$ 只有零解 ;

(C) $|A^TA|\neq 0$;　　(D) 当 $R(B)=n$ 时，有 $R(AB)=m$.

(4) 设 A, B 为 n 阶方阵, 则下列结论错误的是 [B]

(A) 若 A 与 B 相似，则 $|A|=|B|$;　　(B) 若 A 与 B 相似，则 A, B 与同一个对角阵相似 ;

(C) 若 A, B 为实对称矩阵且有相同的特征值，则 A 与 B 相似;

(D) 若 A, B 有相同的特征值且 n 个特征值互不相同，则 A 与 B 相似 .

本题得分	

三、解答题(每小题 8 分, 共 16 分)

(1) 解矩阵方程 $X\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

解: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}X^T=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ ……($2'$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_3\times(-1) \\ r_2\leftrightarrow r_3 \\ r_3-2r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 6 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1-2r_3 \\ r_2-r_3 \\ r_1-r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & -8 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdots\cdots(4')$$

$X=\begin{pmatrix} 2 & 9 & -5 \\ -2 & -8 & 6 \\ -4 & -14 & 9 \end{pmatrix}$ ……($2'$)

考试形式开卷（ ）、闭卷（√），在选项上打（√）

开课教研室 <u>大学数学部</u> 命题教师________ 命题时间 <u>2018-5-18</u> 使用学期 <u>17-18-2</u> 总张数 <u>3</u> 教研室主任审核签字 ______________

(2) 设矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，且 $\alpha_4=2\alpha_1-\alpha_2$，$b=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$ 求方程 $AX=b$ 的通解.

解：$n=4$

由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，且 $\alpha_4=2\alpha_1-\alpha_2$ 可知

$R(A)=3$，

对应齐次线性方程组 $AX=O$ 的基础解系含有一个解向量 $(2,-1,0,-1)^T$ ……$(4')$

由 $b=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$ 可知 $AX=b$ 有一个特解 $(1,1,1,1)^T$ ……$(2')$

$AX=b$ 的通解为

$X=k(2,-1,0,-1)^T+(1,1,1,1)^T$　　其中 k 为任意常数.……$(2')$

本题得分	

四、(本题12分) 设向量组 $\alpha_1=(1,1,4,2)^T$，$\alpha_2=(1,-1,-2,4)^T$，$\alpha_3=(0,2,6,-2)^T$，$\alpha_4=(3,1,-3,-4)^T$，$\alpha_5=(2,2,26,28)^T$，求该向量组的秩以及一个最大无关组，并将其余向量用该最大无关组线性表示.

解：
$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&1&0&3&2\\1&-1&2&1&2\\4&-2&6&-3&26\\2&4&-2&-4&28\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-4r_1}}\begin{pmatrix}1&1&0&3&2\\0&-2&2&-2&0\\0&-6&6&-15&18\\0&2&-2&-10&24\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[r_2\div(-2)]{\substack{r_3-3r_2\\r_4+r_2}}\begin{pmatrix}1&1&0&3&2\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&-9&18\\0&0&0&-12&24\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_3]{\substack{r_3\div(-9)\\r_4\div(-12)}}\begin{pmatrix}1&1&0&3&2\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1-r_2]{\substack{r_1-3r_3\\r_2-r_3}}\begin{pmatrix}1&0&1&0&6\\0&1&-1&0&2\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\cdots(6')$$

$\therefore R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=3$；……$(2')$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 为最大无关组；……$(2')$

$\alpha_3=\alpha_1-\alpha_2$；

$\alpha_5=6\alpha_1+2\alpha_2-2\alpha_4$.……$(2')$

本题得分	

五、(本题12分) 问 λ 为何值时，线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=1\\2x_1+2x_2-\lambda x_3=5\\-2x_1-2\lambda x_2+\lambda x_3=5\lambda-10\end{cases}$ 有惟一解，无解，无穷多解？并求其通解.

解：
$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&-1\\2&2&-\lambda\\-2&-2\lambda&\lambda\end{vmatrix}=2(\lambda-1)(2-\lambda)\cdots\cdots(4')$$

$\therefore \lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq2$ 时，方程组有惟一解；……$(2')$

$$\lambda=2\text{时},B=\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\2&2&-2&5\\-2&-4&2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\0&-2&0&3\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

$R(A)=2$，$R(B)=3$，方程组无解；……$(2')$

$$\lambda=1\text{时},B=\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\2&2&-1&5\\-2&-2&1&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&4\\0&-2&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$R(A)=R(B)=2<3$，方程组有无穷多解；

此时得同解方程组 $\begin{cases}x_1=4\\-2x_2+x_3=3\end{cases}$

令 $x_2=k$，得通解 $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}$　　其中 k 为任意常数……$(4')$

本题得分	

六、(本题12分) 设 $A=\begin{pmatrix}3&4&-2\\4&3&2\\-2&2&6\end{pmatrix}$，求正交阵 Q 和对角阵 Λ，使 $Q^TAQ=\Lambda$.

解：$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda&4&-2\\4&3-\lambda&2\\-2&2&6-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+2)(\lambda-7)^2$

$\therefore \lambda_1=\lambda_2=7,\lambda_3=-2$ ……(3′)

当 $\lambda_1=\lambda_2=7$ 时，解 $(A-7E)X=O$

$(A-7E)=\begin{pmatrix}-4&4&-2\\4&-4&2\\-2&2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\therefore 2x_1-2x_2+x_3=0$

得正交基础解系 $\xi_1=(1,1,0)^T,\xi_2=(-1,1,4)^T$

单位化得 $q_1=\left(\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2,0\right)^T,q_2=\left(-\sqrt{2}/6,\sqrt{2}/6,2\sqrt{2}/3\right)^T$ ……(5′)

当 $\lambda_3=-2$ 时，解 $(A+2E)X=O$

$(A+2E)=\begin{pmatrix}5&4&-2\\4&5&2\\-2&2&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\therefore\begin{cases}x_1-2x_3=0\\x_2+2x_3=0\end{cases}$

得基础解系 $\xi_3=(2,-2,1)^T$，

单位化得 $q_3=\left(2/3,-2/3,1/3\right)^T$， ……(2′)

令 $Q=(q_1,q_2,q_3)=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2&-\sqrt{2}/6&2/3\\\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/6&-2/3\\0&2\sqrt{2}/3&1/3\end{pmatrix}\quad\Lambda=\begin{pmatrix}7&&\\&7&\\&&-2\end{pmatrix}$

则 Q 正交，且 $Q^TAQ=\Lambda$. ……(2′)

本题得分	

七、(本题8分) 设 η^* 为非齐次线性方程组 $AX=b$ 的一个解，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为对应齐次线性方程组的一个基础解系，证明：$\eta^*,\eta^*+\xi_1,\cdots,\eta^*+\xi_{n-r}$ 线性无关.

证明：设 $\lambda_0\eta^*+\lambda_1(\eta^*+\xi_1)+\cdots+\lambda_{n-r}(\eta^*+\xi_{n-r})=0$

整理得 $(\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-r})\eta^*+\lambda_1\xi_1+\cdots+\lambda_{n-r}\xi_{n-r}=0$ ……(2′)

左乘 A 得 $(\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-r})A\eta^*+\lambda_1A\xi_1+\cdots+\lambda_{n-r}A\xi_{n-r}=0$

又由题意可得 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关，$A\eta^*=b,A\xi_1=\cdots=A\xi_{n-r}=0$

故 $(\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-r})b=0$

因此 $\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-r}=0$

即得 $\lambda_1\xi_1+\cdots+\lambda_{n-r}\xi_{n-r}=0$

由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关可得 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-r}=0$

即得 $\lambda_0=0$

因此 $\eta^*,\eta^*+\xi_1,\cdots,\eta^*+\xi_{n-r}$ 线性无关. ……(6′)