《线性代数 II》 期末考试卷（B）参考答案

1.（**5** 分） 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2011 & 2012 & 2013 & 2014 \\ 2015 & 2016 & 2017 & 2018 \\ 2019 & 2020 & 2021 & 2022 \end{vmatrix}$

解：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2011 & 2012 & 2013 & 2014 \\ 2015 & 2016 & 2017 & 2018 \\ 2019 & 2020 & 2021 & 2022 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2011 & 2012 & 2013 & 2014 \\ 2015 & 2016 & 2017 & 2018 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2011 & 2012 & 2013 & 2014 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

2.（**5** 分） 已知行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 2019 & 2020 & 2021 & 2022 \end{vmatrix}$，$A_{ij}$ 表示 a_{ij} 的代数余子式，求

$A_{41}+A_{42}+A_{43}$.

解：$A_{41}+A_{42}+A_{43} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4.$

3.（**5** 分） 设 $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，求 $P_1^{2022} A P_2^{2021}$.

解：

$$P_1^{2022} A P_2^{2021} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{2022} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{2021} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4044 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4045 & 8090 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8090 & 4045 \end{pmatrix}$$

4.（5 分） 设 $A=\begin{pmatrix}2021 & 2022\\ 2021 & 2022\end{pmatrix}$，求 A^5.

解： $A=\begin{pmatrix}2021 & 2022\\ 2021 & 2022\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2021 & 2022\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}2021 & 2022\\ 2021 & 2022\end{pmatrix}^5$$
$$=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2021 & 2022\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2021 & 2022\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2021 & 2022\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2021 & 2022\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2021 & 2022\end{pmatrix}$$
$$=4043^4\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2021 & 2022\end{pmatrix}=4043^4\begin{pmatrix}2021 & 2022\\ 2021 & 2022\end{pmatrix}$$

5.（5 分） 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2025 & 7\\ 2 & 2027\end{pmatrix}$，若矩阵 B 满足 $AB=A+2022B$，求 B.

解：

$$AB=A+2022B\Rightarrow (A-2022E)B=A$$
$$\Rightarrow B=(A-2022E)^{-1}A$$
$$=\begin{pmatrix}3 & 7\\ 2 & 5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2025 & 7\\ 2 & 2027\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10111 & -14154\\ -4044 & 6067\end{pmatrix}.$$

6.（5 分） 已知 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，$\alpha_i$（$i=1,2,3,4$）是四维列向量，其中 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，$\alpha_1=2021\alpha_3+\alpha_4$，$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$)，求方程组 $Ax=\beta$ 的通解。

解：通解为 $(1,1,1,1)^T+k(1,0,-2021,-1)^T$.

7.（5 分） 设 $Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，$\alpha=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$，求向量 $Q^3\alpha$ 的模 $\|Q^3\alpha\|$.

解：Q 是正交阵，故 $\|Q^3\alpha\|=\|\alpha\|=5$

8.（5 分） 已知二次型 $f(x,y,z)=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$，写出表示此二次型的对称矩阵，并判断二次型是否正定.

解： 表示矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$，二次型非正定。

9.（**12** 分） 讨论含有参数 a,b 的方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=3\\ 2x_1+3x_2+4x_3=9\\ 2x_1+ax_2+2x_3=b\end{cases}$ 解的情况，并在有解的情况下求出通解.

解： $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 3\\ 2 & 3 & 4 & 9\\ 2 & a & 2 & b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & a-2 & 0 & b-6\end{pmatrix}$ ....**2 分**

当 $a\neq 2$ 时，$rank(A)=rank(Ab)=3$，方程组有唯一解；..............................**2 分**

当 $a=2$，$b\neq 6$ 时，$rank(A)=2<rank(Ab)=3$，方程组无解；..............................**2 分**

当 $a=2$， $b=6$时，$rank(A)=rank(Ab)=2<3$，方程组有无穷多解，通解为

$$\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$ ....**6 分**

10.（**12** 分） 求向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}5\\7\\9\end{pmatrix}$，$\alpha_5=\begin{pmatrix}10\\14\\18\end{pmatrix}$ 的极大线性无关组，并将其余向量用极大线性无关组表示.

解： 向量组的秩为 2, ...**4 分**

极大无关组可取为α_1,α_2, ...**2 分**

$\alpha_3=2\alpha_1+\alpha_2$,

$\alpha_4=3\alpha_1+2\alpha_2$,

$\alpha_3=6\alpha_1+4\alpha_2$,

……………………………….6 分

11.（**12** 分） 设 $A=\begin{pmatrix}0.8&0.1&0.1\\0.1&0.8&0.1\\0.1&0.1&0.8\end{pmatrix}$， 求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

解：$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}0.8-\lambda&0.1&0.1\\0.1&0.8-\lambda&0.1\\0.1&0.1&0.8-\lambda\end{vmatrix}=0$，解得

$\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=0.7$ ……………………………….4 分

$\lambda_1=1$ 对应的特征向量为 $p_1=(1,1,1)^T$.

λ_2 对应的特征向量为 $p_2=(-1,1,0)^T$， $p_3=(-1,0,1)^T$，……………………………….6 分

令 $P=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&0.7&\\&&0.7\end{pmatrix}$. ……………………………….2 分

三、证明题（**12-15**，每小题 **6** 分，共 **24** 分）

12.（**6** 分） 设向量组 α_1,α_2 是方程组 $Ax=0$ 的基础解系，证明向量组 $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_1+2\alpha_2$ 仍是方程组 $Ax=0$ 的基础解系.

证明： 第一步证向量组是解，……………………………….3 分

第二步证向量组线性无关。……………………………….3 分

13.（**6** 分）设 A,B 为n阶方阵，用矩阵相似的定义证明：若 A 与 B 相似，则 A^3+2A^2 与 B^3+2B^2 相似.

证明：A 与 B 相似，所以存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$. ……………………………….2 分

于是

$$B^3+2B^2=(P^{-1}AP)^3+2(P^{-1}AP)^2=P^{-1}(A^3+2A^2)P$$

所以 A^3+2A^2 与 B^3+2B^2 相似. ……………………………….4 分

14.（**6** 分） 设 $A=\begin{pmatrix}a&c\\c&b\end{pmatrix}$，证明：若 A 正定，则 $b>0$.

证明：因为 A 正定，所以对任意非零向量x，$x^TAx>0$. ……………………………….2 分

取 $x_0=(0,1)^T$，则 $x_0^T a x_0>0$. 而 $x_0^T a x_0=b$,故 $b>0$ ....4 分

15.（**6** 分） 设 A 为 n 阶方阵，α_1,α_2 是 A 对应于特征值 λ 的两个线性无关的特征向量, β_1,β_2,β_3 是 A 对应于特征值 μ 的三个线性无关的特征向量，证明：若 $\lambda\neq\mu$，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 线性无关.

证明：设 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+y_1\beta_1+y_2\beta_2+y_3\beta_3=0$ ....(1)...2 分

用 A 作于于等式(1)的两边，可得

$x_1\lambda\alpha_1+x_2\lambda\alpha_2+y_1\mu\beta_1+y_2\mu\beta_2+y_3\mu\beta_3=0$.................(2)

(1)的两边乘以 λ，得

$x_1\lambda\alpha_1+x_2\lambda\alpha_2+y_1\lambda\beta_1+y_2\lambda\beta_2+y_3\lambda\beta_3=0$.................(3)

(2)-(3)，得

$$(\mu-\lambda)(y_1\beta_1+y_2\beta_2+y_3\beta_3)=0$$

由于 β_1,β_2,β_3 线性无关，且 $\lambda\neq\mu$，所以 $y_1=y_2=y_3=0$.

再由(1)及 α_1,α_2 线性无关，可得 $x_1=x_2=0$.

故向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 线性无关. ....4 分