《数学分析Ⅰ(2)》期末考试卷参考答案

一、判断下列命题是否正确，并说明理由　〖每题 5 分，共计 20 分〗

1. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

答：不正确，因为通项趋于零只是级数收敛的必要条件.

2. 若幂级数 $\sum a_n x^n$ 在点 $a \neq 0$ 收敛，则它在任一 $x \in [-|a|, |a|]$ 处收敛.

答：不正确，如 $\sum \frac{1}{n} x^n$ 在 $x = -1$ 处收敛，但在 $x = 1 \in [-1,1]$ 处不收敛.

3. 若 $\sum |a_n|$ 收敛，则 $\sum a_n^2$ 收敛.

答：正确，因为 $\sum |a_n|$ 收敛，则 $\exists N$,当n>N,$|a_n| < 1$,从而$a_n{}^2 < |a_n|$,收敛，所以 $\sum a_n^2$ 收敛.

4. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域的任一内闭子区间上必一致收敛.

答：正确，因为幂级数具有内闭一致收敛性.

二、计算题　〖每个 7 分，共计 70 分〗

1. 求函数

$$\boldsymbol{f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{|x|}}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin(x^2+y^2), & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}}$$

在原点的偏导数，并判定函数在原点的可微性.

解：$f_x(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{|x|}\sin x^2}{|x|x} = 0,\ f_y(0,0) = 0,$

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\Delta z - \left[f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y \right]}{\rho} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\sqrt{|\Delta x|}}{\rho^2} \sin \rho^2 = 0\ ,$$

由此可见，函数在原点的可微.

2. $f(x,y) = (a^2-c^2)x^2 + (b^2-c^2)y^2 + c^2 - \left[(a-c)x^2 + (b-c)y^2 + c \right]^2$ 在闭圆盘 $x^2 + y^2 \le 1$ 上的最大值和最小值，其中 $a > b > c > 0$.

解：$f_x(x,y)=(a^2-c^2)2x-2\left[(a-c)x^2+(b-c)y^2+c\right](a-c)2x=0$

$f_y(x,y)=(b^2-c^2)2y-2\left[(a-c)x^2+(b-c)y^2+c\right](b-c)2y=0$

解得$\begin{cases}x=0,\\y=0,\end{cases}(f=0),\begin{cases}x=0,\\y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\end{cases}(f=\dfrac{1}{4}(b-c)^2,\begin{cases}y=0,\\x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\end{cases}(f=\dfrac{1}{4}(a-c)^2,$

在边界$x^2+y^2=1$上，

$f(x,y)=g(x)=(a^2-c^2)x^2+b^2-\left[(a-b)x^2+b\right]^2,x\in[-1,1],$

$g'(x)=2(a-b)^2x(1-2x^2)$得稳定点

$x=0,(g(0)=0),x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},(g(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}})=\dfrac{1}{4}(a-b)^2)$, 在端点$x=\pm1$处，$g(\pm1)=0,$

比较这些函数值：$f=0,f=\dfrac{1}{4}(b-c)^2,f=\dfrac{1}{4}(a-c)^2,f=\dfrac{1}{4}(a-b)^2$最小值是 0，最大值是$\dfrac{1}{4}(a-c)^2$，最小值点是：$(0,0),(0,1),(\pm1,0)$，最大值点是：$(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},0)$.

3. 将累次积分

$$\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{x+y}f(x,y,z)dz$$

化为按x,z,y　次序的累次积分.

解：原式$=\int_0^1 dy\int_0^{1-y}dx\int_0^{x+y}f(x,y,z)dz$

$$=\int_0^1 dy\left[\int_0^y dz\int_0^{1-y}f(x,y,z)dx+\int_y^1 dz\int_{z-y}^{1-y}f(x,y,z)dx\right]$$

$$=\int_0^1 dy\int_0^y dz\int_0^{1-y}f(x,y,z)dx+\int_0^1 dy\int_y^1 dz\int_{z-y}^{1-y}f(x,y,z)dx.$$

4. 计算曲线积分：

$$I=\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2},$$

其中 L 是实平面上光滑封闭曲线.

解.若L为任一不包含原点的闭区域的边界线.

因为 $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

在上述区域D上连续且相等，故由格林公式

$$I=\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

$$=\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\right]=0.$$

若L为任一包含原点的闭区域的边界线，以原点为中心，作圆周

$Co: x^2+y^2=\varepsilon^2$，使$Co$在$L$内部，由格林公式

$$I=\oint_{Co^+}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{Co^+}xdy-ydx$$

$$=\frac{2}{\varepsilon^2}\cdot\varepsilon^2\cdot\pi=2\pi.$$

5. 判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}}$ $(-\infty<x<+\infty)$的敛散性.

解 $\left|\sum_{k=1}^{\infty}\cos\frac{2n\pi}{3}\right|\le\frac{1}{\left|\sin\frac{\pi}{3}\right|}=\frac{2}{\sqrt{3}}$. 又 $\frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}}$ 对于每一个 $-\infty<x<+\infty$

都是单调递减的，并且$\frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}}\le\frac{1}{n}$ 是一致趋于零的.

因此，由狄利克雷判别法知，原级数是一致收敛的.

6. 设$f(x,y)$为可微函数，

$f(1,1)=1, f_x(1,1)=a, f_y(1,1)=b, \varphi(x)=f(x, f(x, f(x,x)))$，求$\varphi'(1)$.

解 令 $\varphi(x) = f(x, y),\ y = f(x, z),\ z = f(x, u),\ u = x,$

则有 $\varphi'(x) = f_x + f_y \cdot \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f_x + f_y \cdot \left(f_x + f_z \cdot \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \right)$

$$= f_x + f_y \cdot \left[f_x + f_z \cdot \left(f_x + f_u \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \right) \right].$$

由 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1,\ f_x(1,1) = a,\ f_y(1,1) = f_z(1,1) = f_u(1,1) = b,$

因此 $\varphi'(1) = a + b\,[a + b(a + b)] = a + ab + ab^2 + b^3.$

7. 求 $u = x - 2y + 2z$ 在条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 下的极值.

解 设 $F(x, y, z) = x - 2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$. 解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = -2 + 2\lambda y = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = 2 + 2\lambda z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

可得

$$x = \pm \frac{1}{3}, \qquad y = \mp \frac{2}{3}, \qquad z = \pm \frac{2}{3}.$$

相应地, $u = \pm 3$.

由于所给函数在闭球面上连续且不为常数, 故必取得最大值及最小值并且最大值与最小值不相等. 这里可疑点仅两个, 于是, 当 $x = \dfrac{1}{3},\ y = -\dfrac{2}{3},\ z = \dfrac{2}{3}$ 时, 函数 u 取得最大值 $u = 3$, 因而也是极大值; 当 $x = -\dfrac{1}{3},\ y = \dfrac{2}{3},\ z = -\dfrac{2}{3}$ 时, 函数 u 取得最小值 $u = -3$, 因而也是极小值.

8. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ 的收敛半径，收敛区间，收敛域以及和函数.

解 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$，故收敛半径为 1. 当 $x=1$ 时，级数发散；当 $x=-1$ 时，级数收敛. 因此，级数的收敛域为 $[-1,1)$.

当 $x\in[-1,1)$ 时，令 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$. 当 $|x|<1$ 时，逐项微分之，得

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}.$$

由于 $f(0)=0$，故得

$$f(x)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t}=\ln\frac{1}{1-x}\ (|x|<1). \tag{1}$$

由上述幂级数在 $x=-1$ 的收敛性，且其和为 $-\ln 2=\ln\dfrac{1}{2}$，利用亚伯耳定理知，上述结果(1)当 $-1\leqslant x<1$ 时成立.

9. 求函数 $z=1-(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2})$ 在 $M(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{b}{\sqrt{2}})$ 点沿方向 l 的方向导数，其中方向 l 是曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 在 $M(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{b}{\sqrt{2}})$ 点的内法线方向.

解：曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的法向量 $n=\sqrt{2}(\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{b})$，内法线方向

$$n=-\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}(\frac{1}{a},\frac{1}{b})=-\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b,a)$$

$$f_l(M)=\frac{\sqrt{2}}{a}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{\sqrt{2}}{b}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{2}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$$

10. 求由曲线 $x=a(t-\sin t),,y=a(1-\cos t),(a>0),0\le t\le 2\pi,$ 与 x 轴所围平面图形绕 y 轴旋转所得立体的体积.

解：

$$S=\int_0^{2\pi x}2\pi yxdx=2\pi\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2a(t-\sin t)dt$$
$$=2\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2(t-\sin t)dt$$
$$=2\pi a^3\left[\frac{1}{2}(1-\cos t)(t-\sin t)^2\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{2}(t-\sin t)^2\sin tdt\right]$$
$$=6\pi^3a^3$$

三、证明论述题 〖每个 5 分，共计 10 分〗

1. 叙述并证明二元函数极限的局部有界性定理.

答：局部有界性定理：设 f 是定义在 $D\subset R^2$ 的二元函数，P_0 是 D 的聚点，若极限 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)$ 存在，则存在邻域 $U(P_0)$，使得 f 在 $U(P_0)\cap D$ 上有界.

证明：设 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)=A$，则对 $\varepsilon=1,\exists\delta>0,$ 当 $P\in U(P_0,\delta)\cap D$ 时，$|f(P)-A|<1$

从而 $|f(P)|<1+|A|$. 结论得证.

2. 二元函数极限的存在性与累次极限的存在性之间有何关系？试依据定理等相关结论和实例予以说明.

答：由定理 16. 6 知，如果二重极限和累次极限都存在，则二者必相等. 一般来说，二者的存在性没有什么必然的联系，如：

$f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在原点处的两个类此极限存在，但是重极限不存在.

$f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}$ 在原点处的两个类此极限不存在，但是重极限存在.