第四篇 图论

图论（Graph Theory）

图论是个应用十分广泛而又极其有趣数学分支, 物理学、生物、经济、管理科学、信息论、计算机等各个领域都可以找到图论的足迹. 历史上很多数学家对图论的形成作出过贡献, 特别要提到的欧拉(Euler)、基尔霍夫(Kirchhoff)与凯莱(Cayley).

欧拉在1736年发表了第一篇图论的论文, 解决了著名的七桥问题.

拓扑学中著名的欧拉公式,也是图论中的重要公式.

基尔霍夫对电路网络的研究(基尔霍夫定律)以及凯莱在有机化学计算中应用了树和生成树等概念.

很多有趣的数学游戏也促进了图论的发展,如汉米尔顿周游世界游戏, 四色定理等, 都促进了图论的发展.

图论（Graph Theory）

研究欧拉的著作永远是了解数学的最好方法。

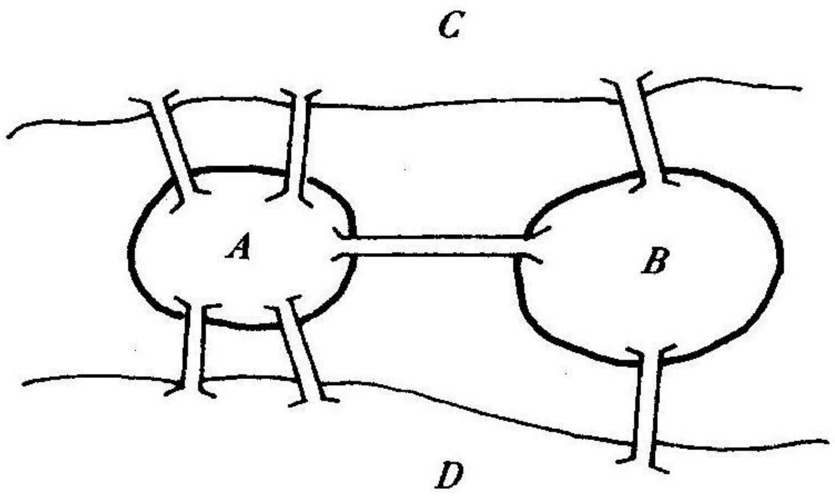
------ Johann Carl Friedrich Gauss （卡尔·弗里德里希·高斯）

读读欧拉吧，他是我们所有人的导师。

-------Pierre-Simon Laplace（法国数学家皮埃尔-西蒙·拉普拉斯）

图论（Graph Theory）

历史上的哥尼斯堡七桥问题是著名的图论问题。
问题是这样的： 18世纪的东普鲁士有个哥尼斯堡城， 在横贯全城的普雷格尔河两岸和两个岛之间架设了7座桥,它们把河的两岸和两个岛连接起来（如图）。
每逢假日，城中居民进行环城游玩，人们对此提出了一个“遍游”问题， 即能否有这样一种走法， 使得从某地出发通过且只通过每座桥一次后又回到原地呢?



后来欧拉证明这样的路径根本不存在

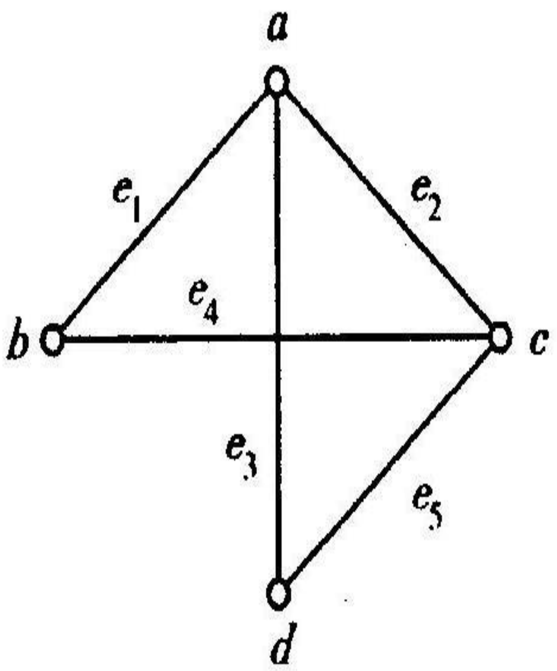
第七章 图论

7-1 图的基本概念

图

现实世界中许多现象能用某种图形表示,这种图形是由一些点和一些连接两点间的连线所组成。

【例】a， b， c， d 4个篮球队进行友谊比赛。为了表示4个队之间比赛的情况， 我们作出的图形。 在图中4个小圆圈分别表示这4个篮球队， 称之为结点。 如果两队进行过比赛， 则在表示该队的两个结点之间用一条线连接起来，称之为边。 这样利用一个图形使各队之间的比赛情况一目了然。



图

如果图中的4个结点a，b，c，d分别表示4个人，当某两个人互相认识时，则将其对应点之间用边连接起来。这时的图又反映了这4个人之间的认识关系。

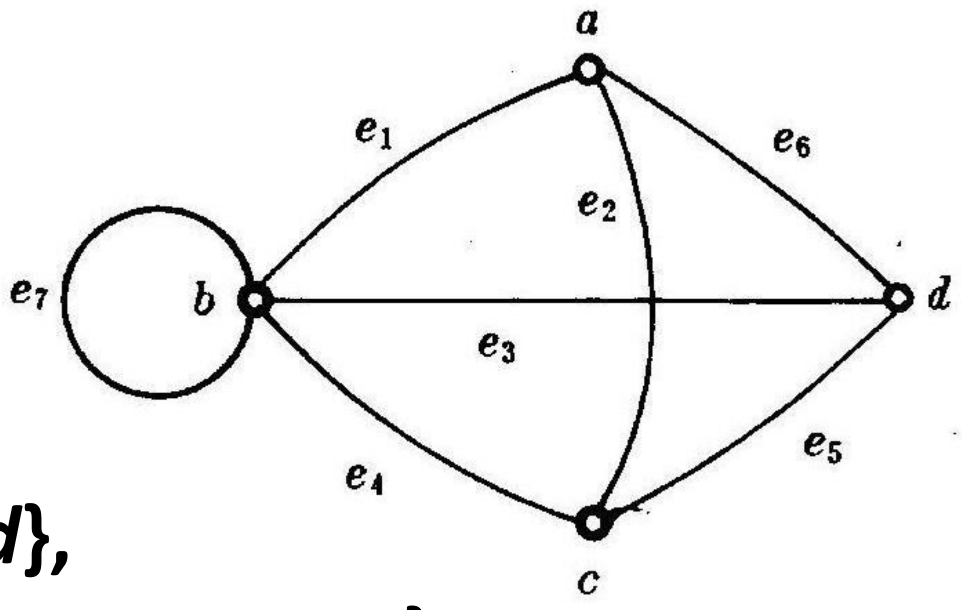
我们也可以点代表工厂,以连接两点的连线表示这两工厂间有业务往来关系。这样便可用图形表示某一城市中各工厂间的业务往来关系。

这种用图形来表示事物之间的某种关系的方法我们也曾经在第三章中使用过。对于这种图形,我们的兴趣在于有多少个点和哪些点对间有线连接,至于连线的长短曲直和点的位置都无关紧要。对它们进行数学抽象我们就得到以下作为数学概念的图的定义。

图

定义7-1.1 图

一个被称为图的结构是一个**三元组**〈$V(G)$，$E(G)$，ψ_G〉，其中$V(G)$是一个**非空**的结点集合，$E(G)$是边的集合，ψ_G为边集E到结点无序偶（有序偶）集合上的函数。



$V(G)=\{a,b,c,d\}$,

$E(G)=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7\}$,

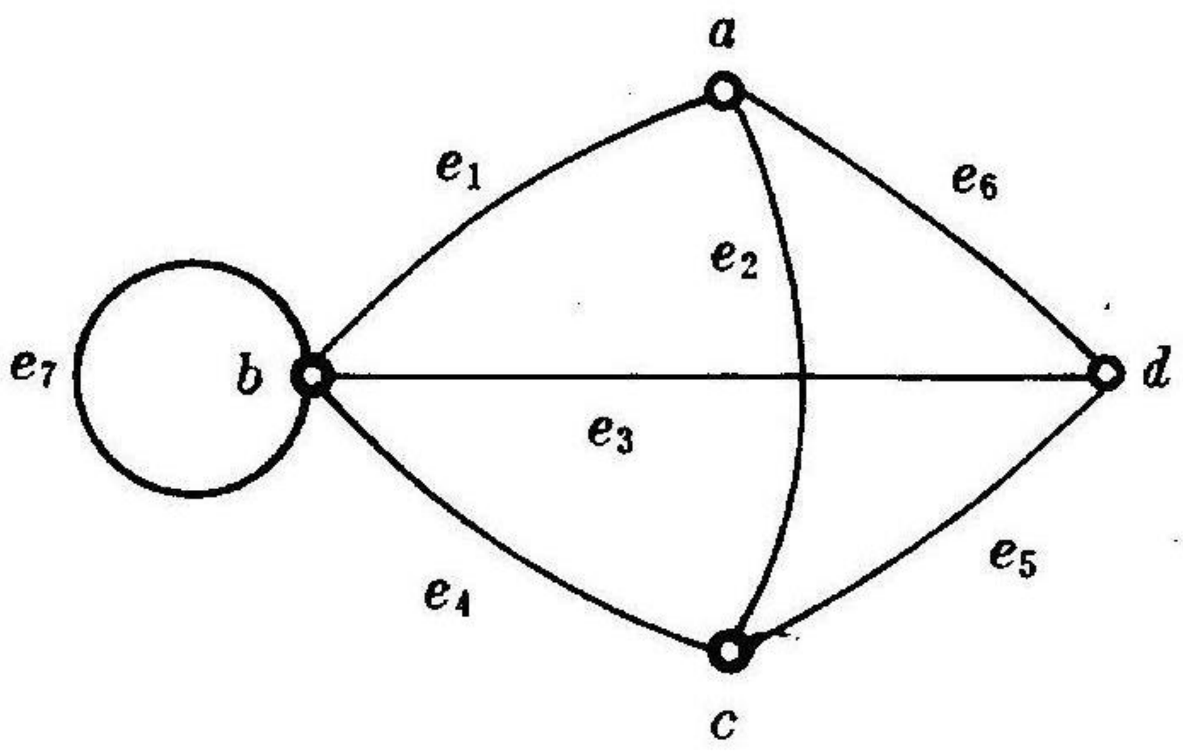
$\psi_G(e_1)=(a,b)$，$\psi_G(e_2)=(a,c)$，$\psi_G(e_3)=(b,d)$，

$\psi_G(e_4)=(b,c)$，$\psi_G(e_5)=(d,c)$，$\psi_G(e_6)=(a,d)$，

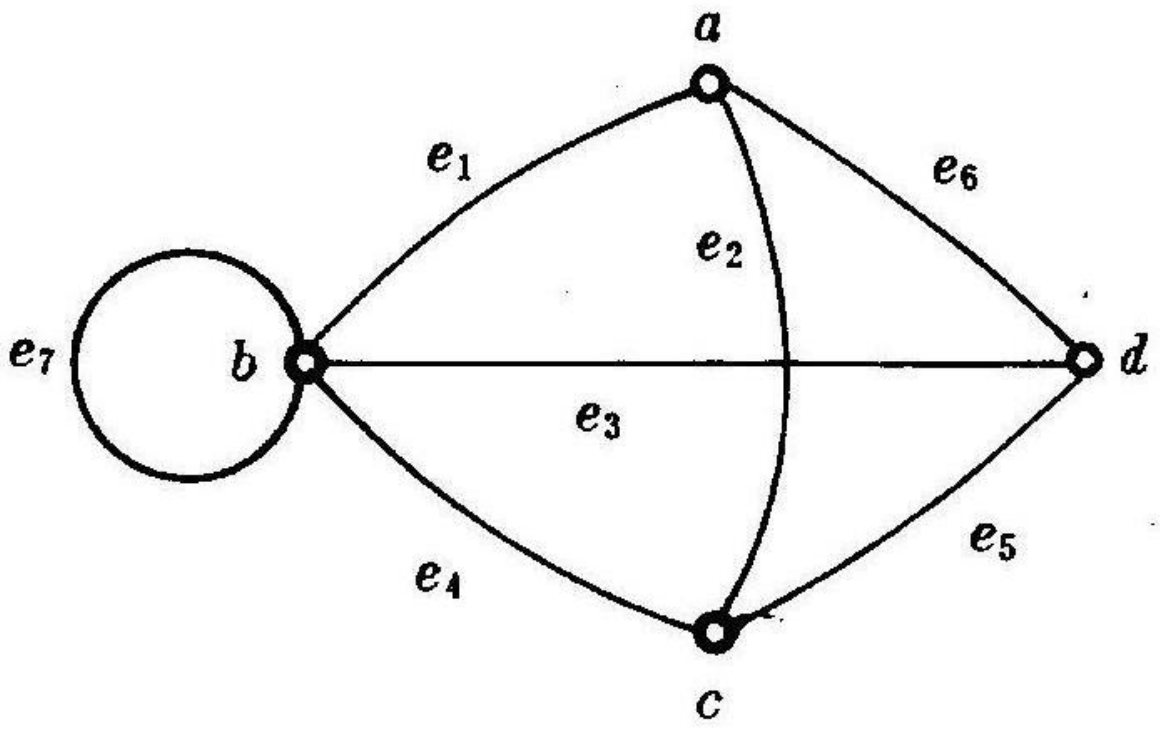
$\psi_G(e_7)=(b,b)$

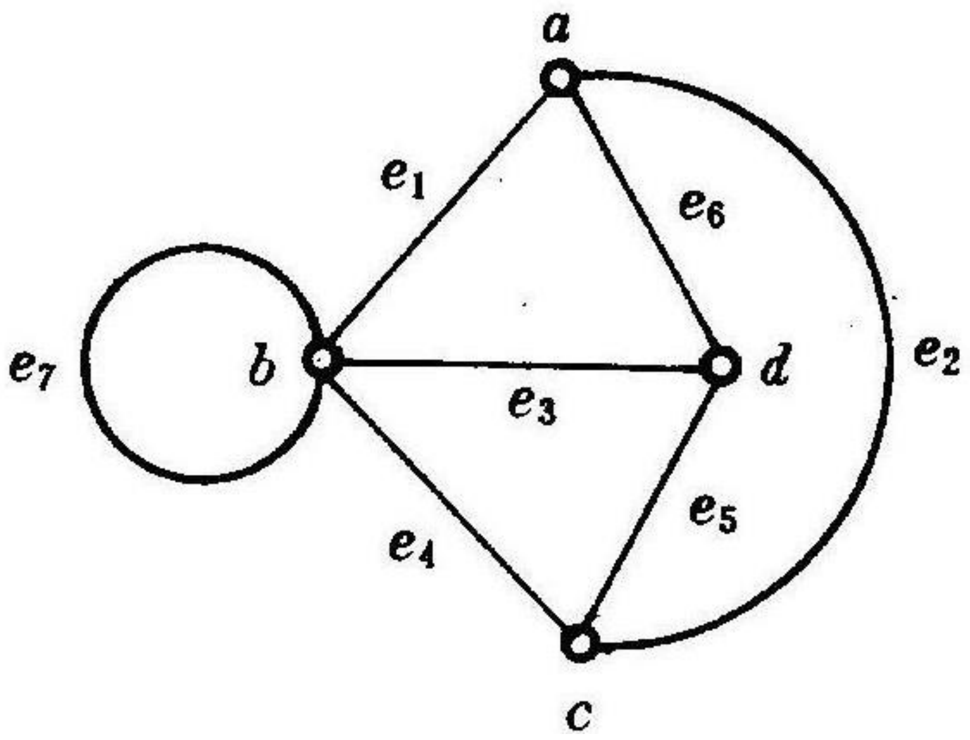
图

若把图中的边看作总与两个结点关联，集合$E(G)$的元素e可表示为序偶〈v_i，v_j〉，在不强调边的方向时（即为无向边时，〈v_i，v_j〉又可表示为(v_i, v_j)）。在这样的约定下，可将图的定义简化为二元组〈$V(G)$，$E(G)$〉。



举例说明：





不同形状的图形表示同一图

无向边和有向边

定义：无向边和有向边

若边e_i与无序偶(v_j,v_k)相关联,则称边为无向边。

若边e_i与有序偶$\langle v_j,v_k \rangle$ 相关联,则称边为有向边。其中v_j称为e_i的起始结点; v_k称为e_i的终止结点。

无向图、有向图、混合图

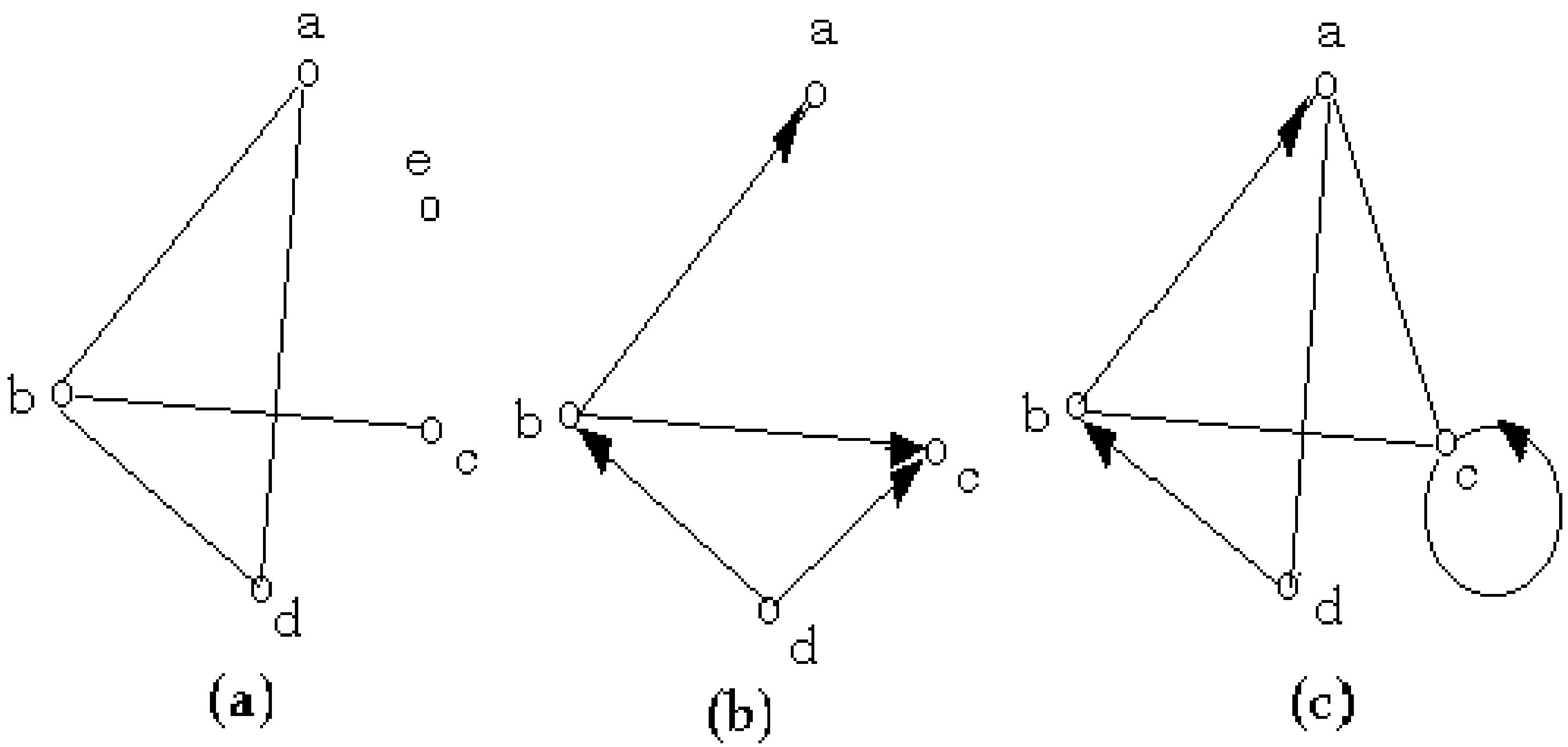


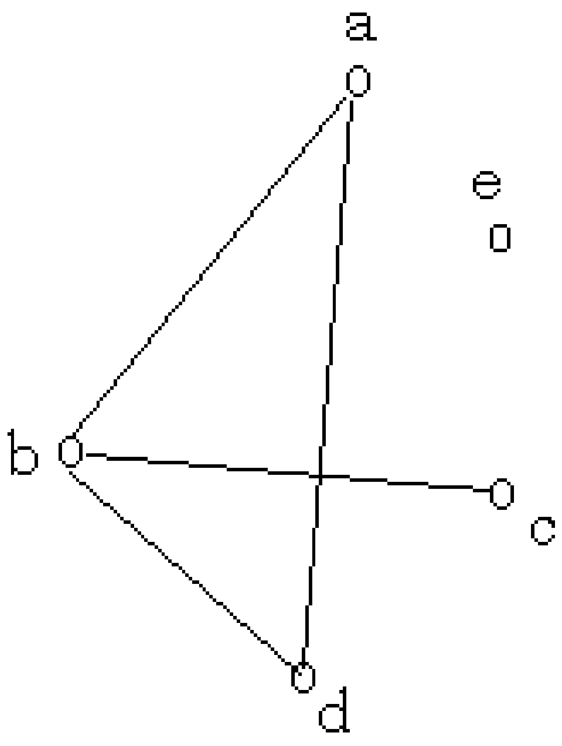
图7-1.2 无向图、有向图和混合图

无向图

[定义] 无向图

每一条边都是无向边的图称为无向图,如图7-1.2(a)所示，表示为:

G=<V,E>=<{a,b,c,d,e},{(a,b),(a,d),(b,c),(b,d)}>



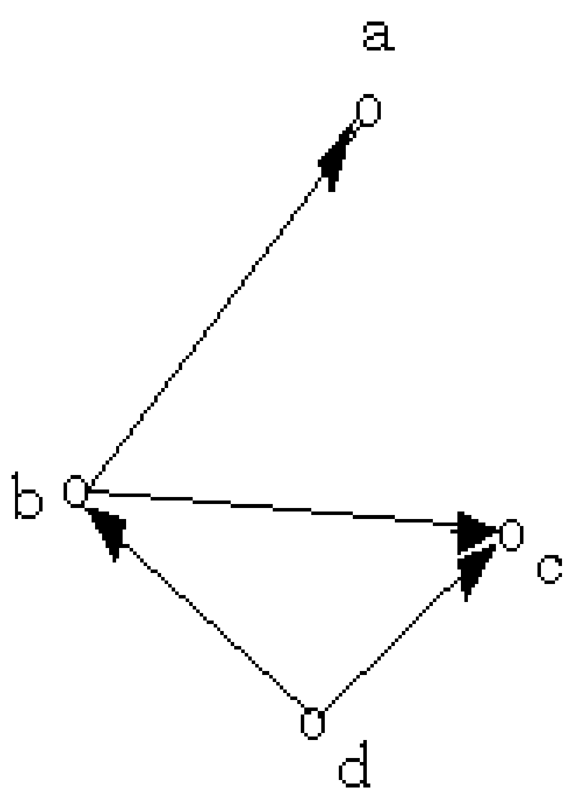
(a)

有向图

[定义] 有向图

每一条边都是有向边的图称为有向图,如图7-1.2 (b)所示，表示为：

G’ =<V,E>=<{a,b,c,d},{<b,a>, <b,c>,<d,b>,<d,c>}>



(b)

混合图

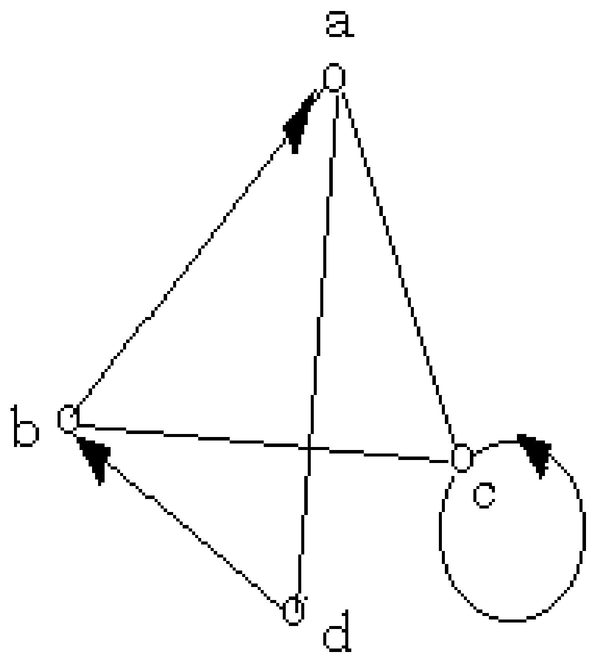
[定义] 混合图

- 如果在图中一些边是有向边,另一些边是无向边,这个图称为混合图,如图7-1.2 (c)所示，表示为:

G” =<V,E>=< {a,b,c,d},

{ (a,d),(a,c),(b,c),

<c,c>,<b,a>,<d,b> }>



(c)

邻接点、邻接边和孤立点

[定义] 邻接点

在一个图中，两个结点由一条有向边或无向边关联，则这两个结点称为邻接点。

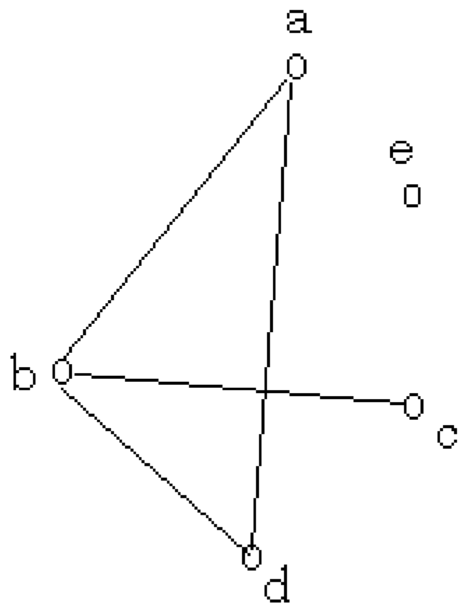
[定义] 邻接边

在一个图中，关联于同一个结点的两个边称为邻接边。

[定义] 孤立点

在一个图中不与任何结点相邻接的结点，称为孤立点。

如图7-1.2(a)中的结点*e*。



(a)

零图、平凡图、自回路或环

[定义] 零图

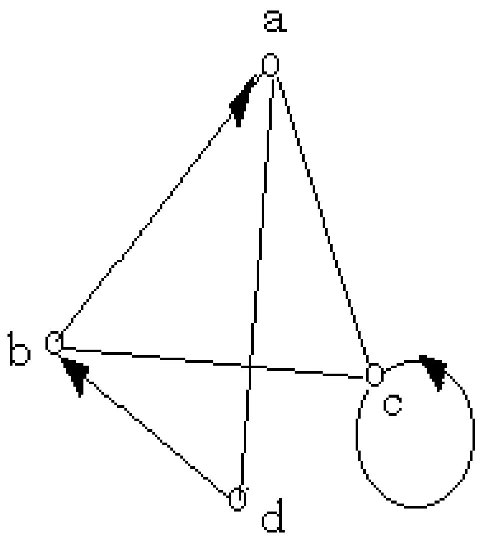
仅由孤立结点组成的图（E=∅）称为零图

[定义] 平凡图

仅由一个孤立点构成的图(|V|=1)称为平凡图。

[定义] 自回路或环

关联于同一结点的一条边称为自回路或环。



(c)

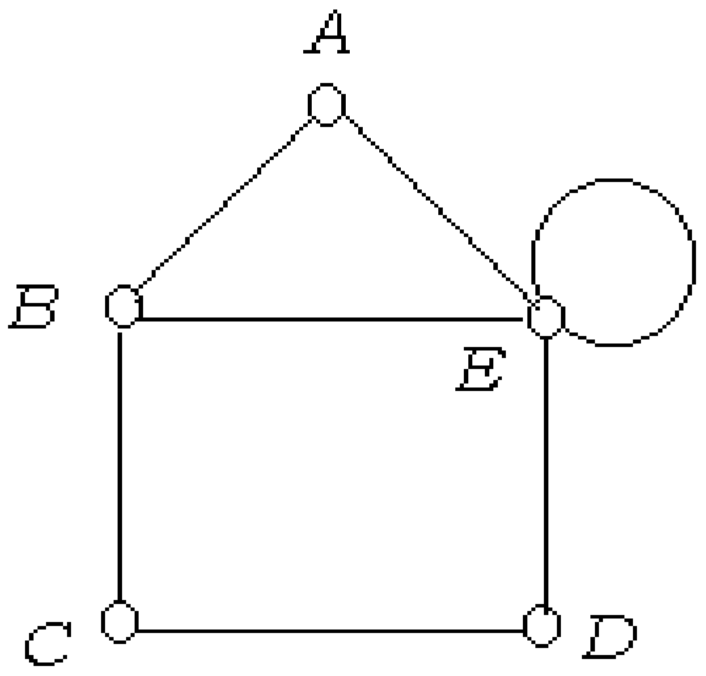
如图7-1.2中(*c*,*c*)是环。环的方向是没有意义的，它既可以作为有向边，也可以作为无向边。

结点的度数

[定义]结点的度数

在图*G*＝〈*V*，*E*〉中，与结点*v*(*v*∈*V*)关联的边数称为该结点的度数，记作deg(*v*)。

例如在图中，结点*A*的度数为2，结点*B*的度数为3，我们约定：每一个环在其对应的结点上的度数增加2。故图中结点*E*的度数为5。



(b)

结点的度数

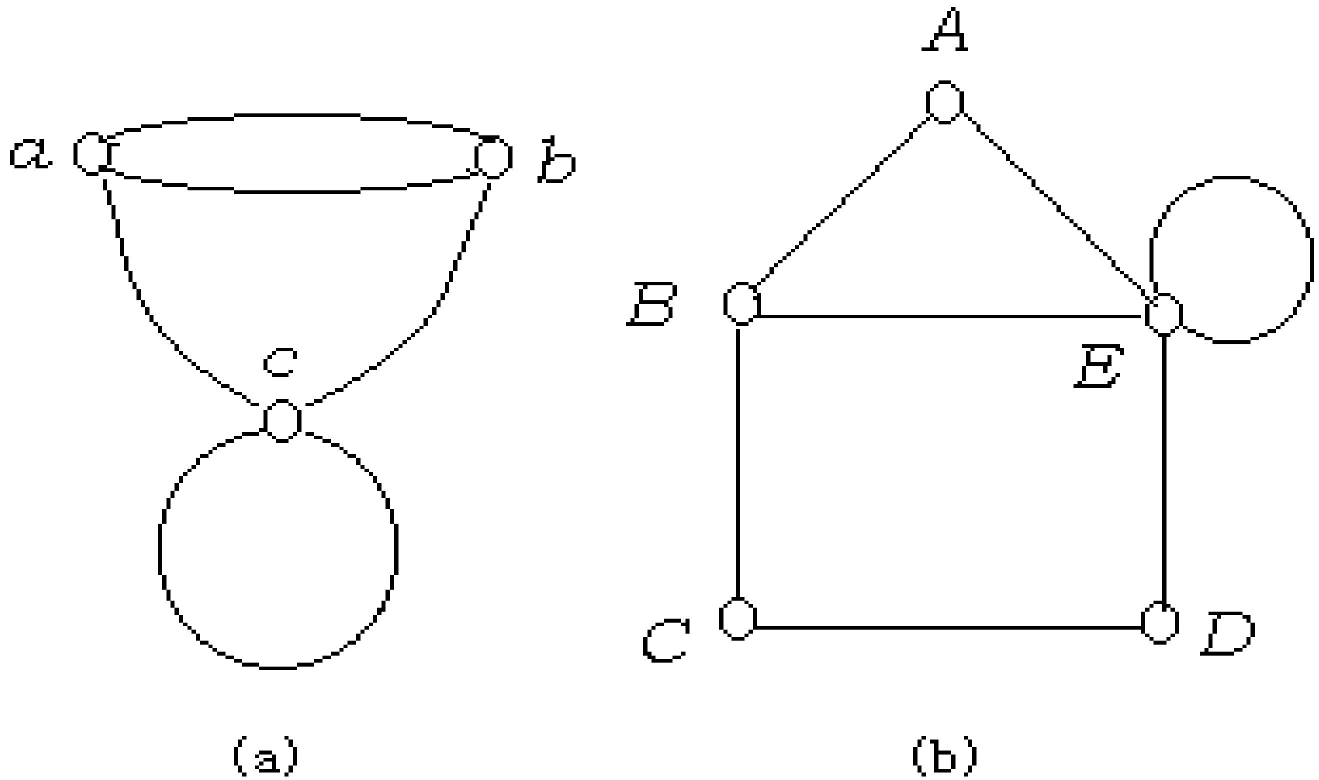


图7-1.3 度数示意图

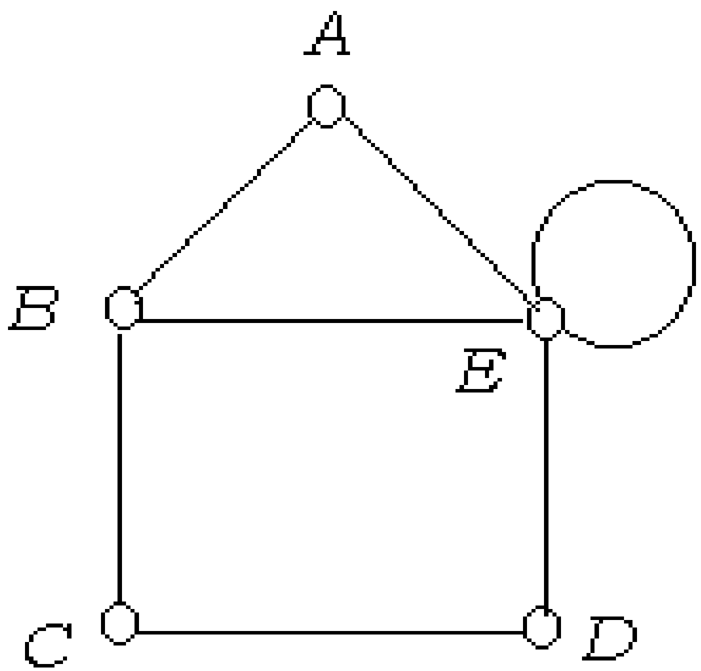
最大度和最小度

[定义] 图G的最大度和最小度

$\Delta(G)=\max\{\deg(v) \mid v\in V(G)\}$,

$\delta(G)=\min\{\deg(v) \mid v\in V(G)\}$,

分别称$G=\langle V,E\rangle$的**最大度**和**最小度**。



(b)

如图中, $\Delta(G)=5$, $\delta(G)=2$。

握手定理

[定理7-1.1] 握手定理

每一个图结点度数的总和等于边数的两倍。

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

证明　因为每条边关联着两个结点,而每条边分别给这两个结点的度数为1。因此在一个图中，结点度数的总和等于边数的两倍。

定理

[定理7-1.2] 在任意图中,度数为奇数的结点,必定是偶数个。

证明　设V_1为图G中度数为奇数的结点集,而V_2为图G中度数为偶数的结点集,则根据定理7-1.1,有

$$\sum_{v\in V_1}\deg(v)+\sum_{v\in V_2}\deg(v)=2|E|$$

由于 $\sum_{v\in V_2}\deg(v)$ 为偶数之和，是偶数, 又 2|E| 为偶数,

所以 $\sum_{v\in V_1}\deg(v)$ 必为偶数，所以$|V_1|$为偶数。

结点的入度、出度和度数

[定义] 结点的入度，结点的出度，结点的度数

- 在有向图中,射入一个结点的边数称为该结点的入度,
- 由一个结点射出的边数称为该结点的出度。
- 结点的出度和入度之和就是该结点的度数。

定理

[定理7-1.3] 在任意有向图中，所有结点出度之和等于所有结点入度之和，都等于边数。

$$\sum_{i=1}^{n} \deg^{+}(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \deg^{-}(v_i) = |E|$$

证明 因为每一条有向边必对应一个出度和一个入度,若一个结点具有一个出度或入度,则必关联一条有向边,所以,有向图中各结点出度之和等于边数,各结点入度之和也等于边数。因此任何有向图中,出度之和等于入度之和。

平行边、多重图

在上面所讲的图的概念中，一个结点的度数可能大于 1，但是任何一对结点间常常不多于一条边。

[定义] 平行边

连接于同一对结点间的多条边称为平行边。

[定义] 多重图

含有平行边的任何一个图称为多重图。

多重图

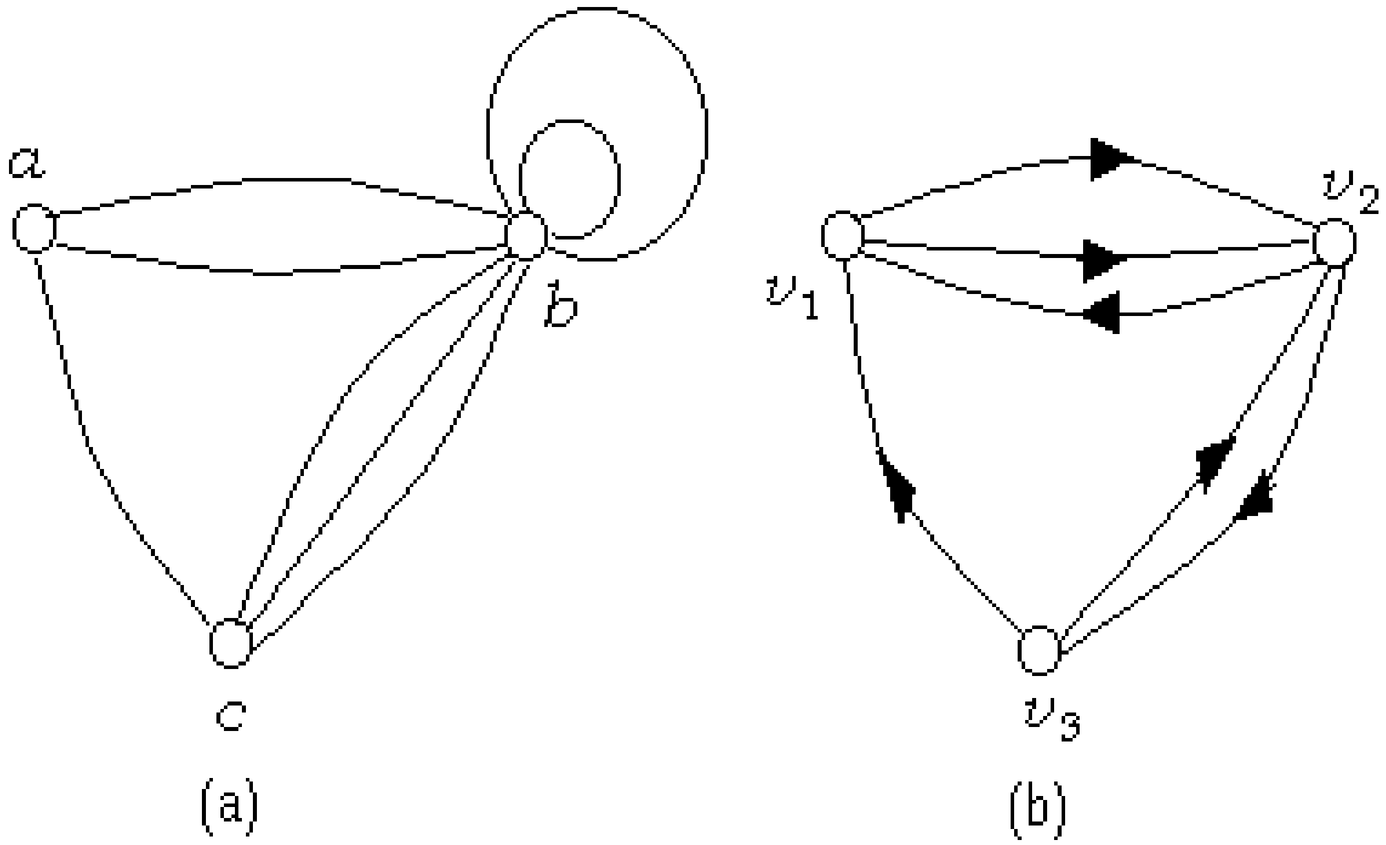


图7-1.4 多重图

简单图与完全图

[定义]简单图

把**不含有平行边和环**的图称为**简单图**。

[定义] 完全图

简单图G＝〈V,E〉中若每一对结点间都有边相连,则称该图为**完全图**。

有n个结点的无向完全图记作K_n。

定理

定理7-1.4 n个结点的无向完全图 K_n 的边数为$n(n-1)/2$。

证明: 在 K_n 中,任意两个结点都有边相连,n个结点中任两个点的组合数为

$$\frac{1}{2}n(n-1)$$

故K_n的边数为

$$|E| = \frac{1}{2}n(n-1)$$

结点与边的添加和删除

什么叫做给一个图添加或删除一个结点和边呢？

添加一个结点，即集合*V*增加一个元素，在图形中画上一个点；

添加一条边即现有的图形中的两个结点加上一条边。

在现有的图中删除一条边是将图形中的一条边删除；

而删除一个结点不仅仅将此结点删去，而且要删去由此结点连接的所有边。

图

给定任意含有*n*个结点的图*G*,总可以把它补成一个具有同样结点的完全图,

方法是把那些没有联上边的结点添加上边。

相对于完全图的补图

[定义] 相对于完全图的补图

给定一个图G,由G中所有结点和所有能使G成为完全图的添加边组成的图,称为G的相对于完全图的**补图**,或简称为G的补图,记作$\overline{G}$。

相对于完全图的补图

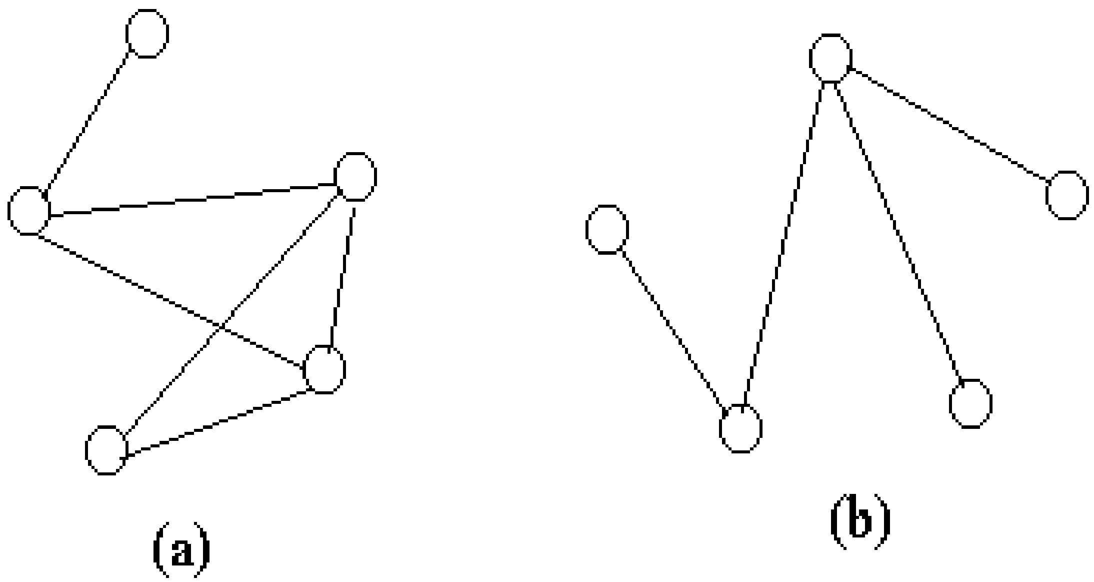


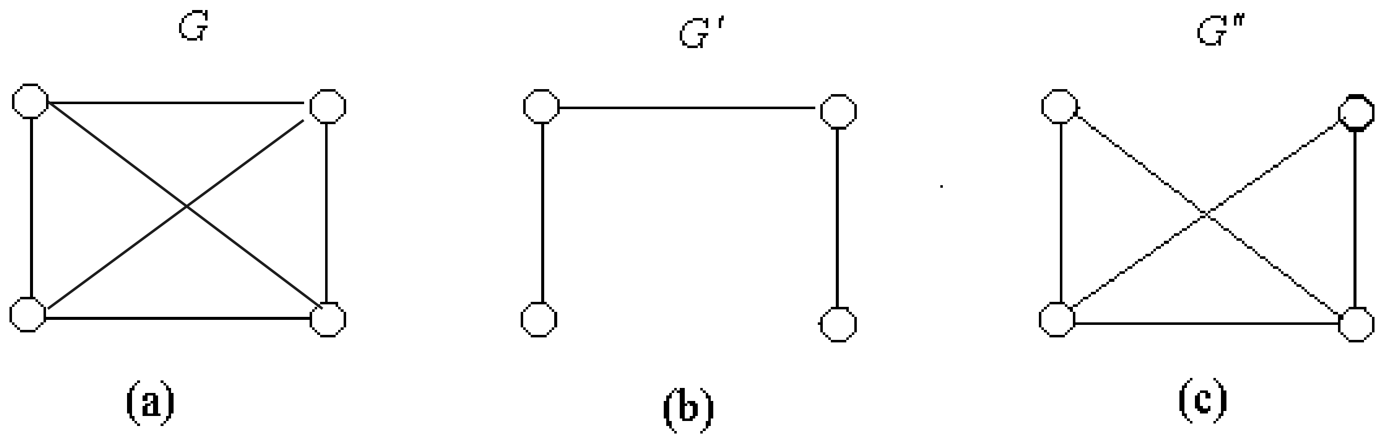
图7-1.6 相对于完全图的补图

如图7-1.6中的(a)和(b)互为补图。

子图、生成子图

[定义] 子图 设图G=<V,E>，如果有图G’ = <V’ ,E’ >，若有V’ ⊆ V ， E’ ⊆ E，则称图G’是图G的子图。

[定义] 生成子图 如果图*G*的子图G’包含*G*的所有结点,则称该图G’为*G*的生成子图。



如图7-1.8中*G*'和*G*"都是*G*的生成子图。

相对于图G的补图

[定义] 相对于图G的补图

设图G'＝〈V',E'〉是图G＝〈V,E〉的子图,若给定另外一个图G''＝〈V'',E''〉使得$E''=E-E'$,且V''中仅包含E''的边所关联的结点。则称G''是子图G'的相对于图G的补图。

相对于图G的补图

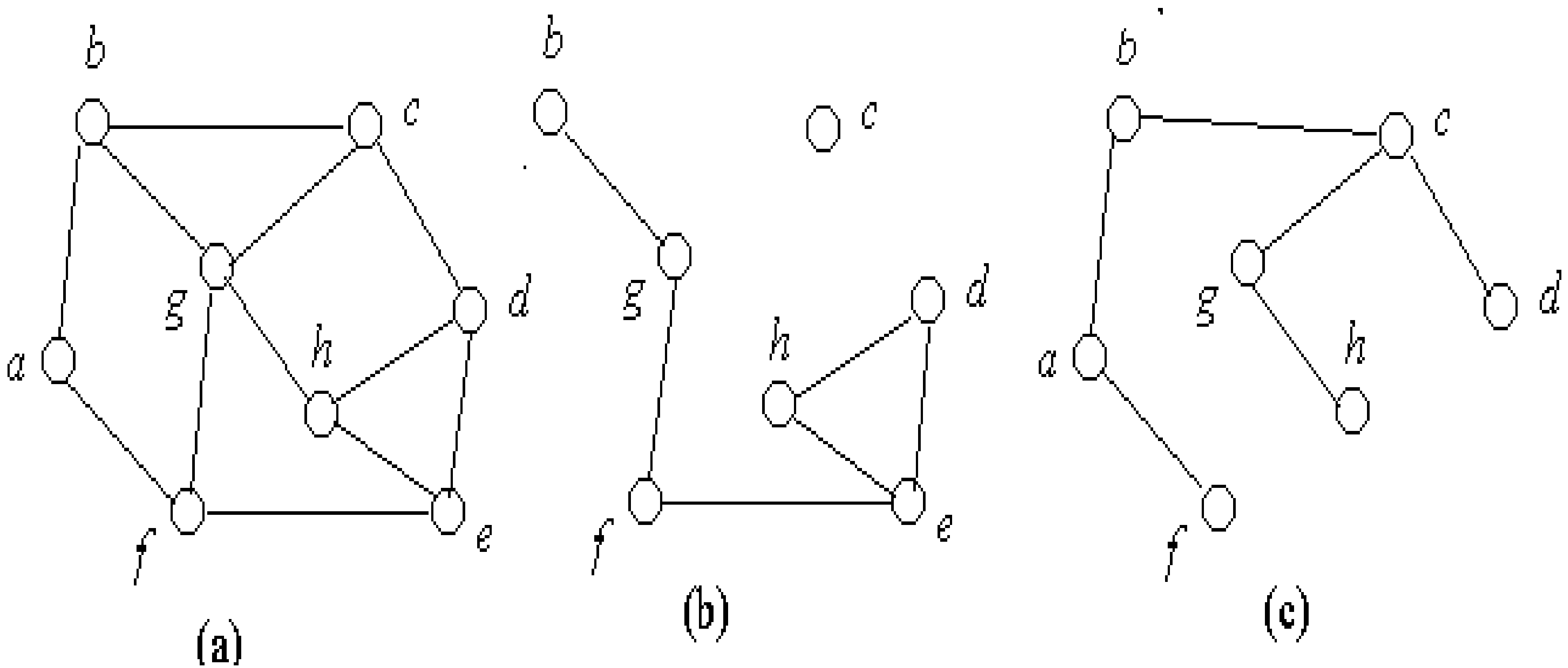
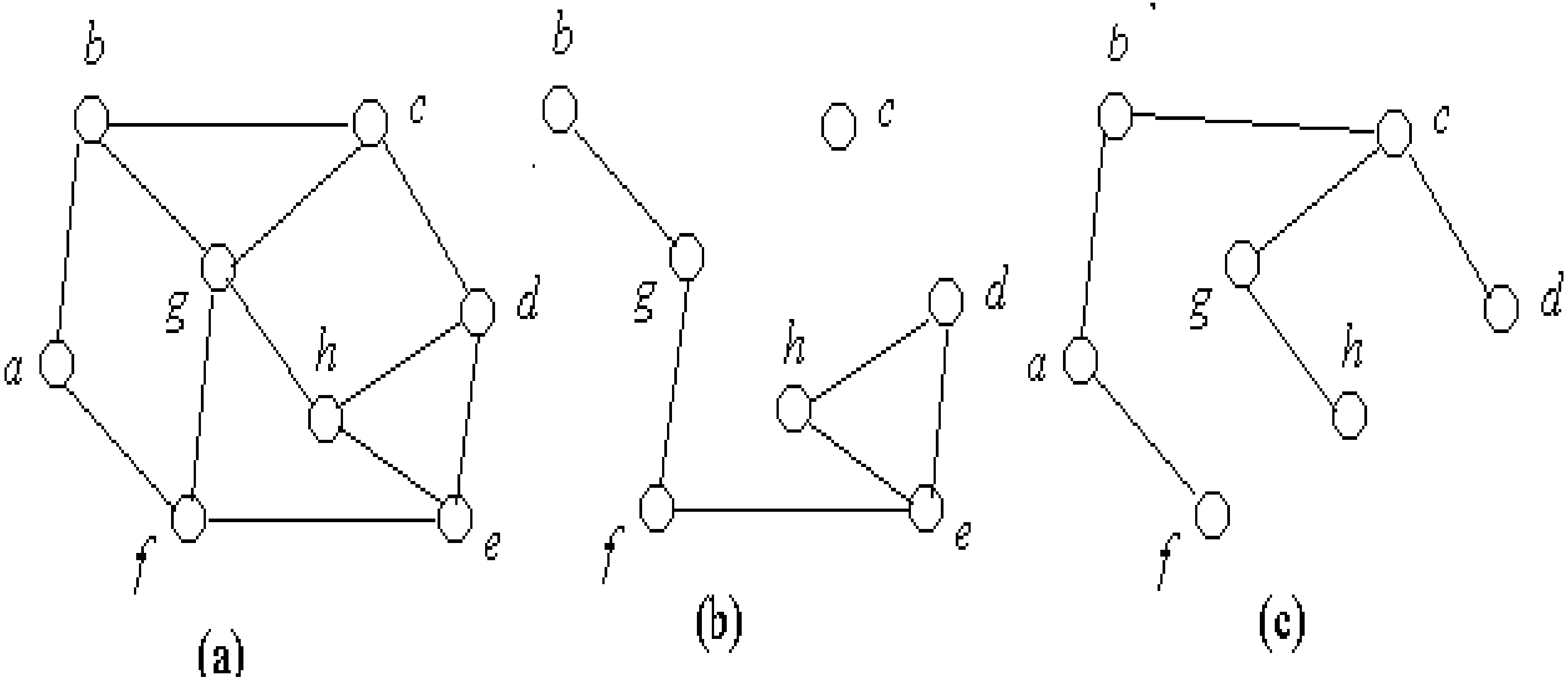


图7-1.7 (c)为(b)相对于(a)的补图

相对于图G的补图

如图7-1.7中的图(c)是图(b)相对于图(a)的补图。而图(b)不是图(c)相对于图(a)的补图,因为图(b)中有结点c。



补图

【例】（拉姆齐问题）试证在任何一个有 6 个人的组里，存在 3 个人互相认识，或者存在 3 个人互相不认识。

我们用 6 个结点来代表人，并用邻接性来代表认识关系。这样一来，该例就是要证明：任意一个有 6 个结点的图G中，或者有 3 个互相邻接的点，或者有 3 个互相不邻接的点。即，对任何一个有 6 个结点的图G，G或 $\overline{G}$ 中含有一个三角形（即K_3）。

补图

证明：设$G=\langle V,E\rangle$，$|V|=6$，v是G中一结点。因为v与G的其余 5 个结点或者在$\overline{G}$中邻接，或者在G中邻接。故不失一般性可假定，至少有 3 个结点v_1，v_2，v_3在G中与v邻接。

如果这 3 个结点中有两个结点（如v_1，v_2）邻接，则它们与v_3就是G中一个三角形的 3 个顶点。如果这3个结点中任意两个在G中均不邻接，则v_1，v_2，v_3就是$\overline{G}$中一个三角形的 3 个顶点。

同构

在上面的一些基本概念中,一个图由一个图形表示,由于图形的结点的位置和连线长度都可任意选择,故一个图的图形表示并不是唯一的。下面我们讨论图的**同构**的概念。

图的同构

[定义] 图的同构

设图$G=\langle V,E\rangle$和图$G'=\langle V',E'\rangle$，

如果存在一一对应的映射$g:V\rightarrow V'$

且$e=(v_i,v_j)$(或$\langle v_i,v_j\rangle$) $\in E$,当且仅当

$e'=(g(v_i),g(v_j))$(或$\langle g(v_i),g(v_j)\rangle$) $\in E'$，

则称G和G'同构,记作$G\cong G'$。

图的同构

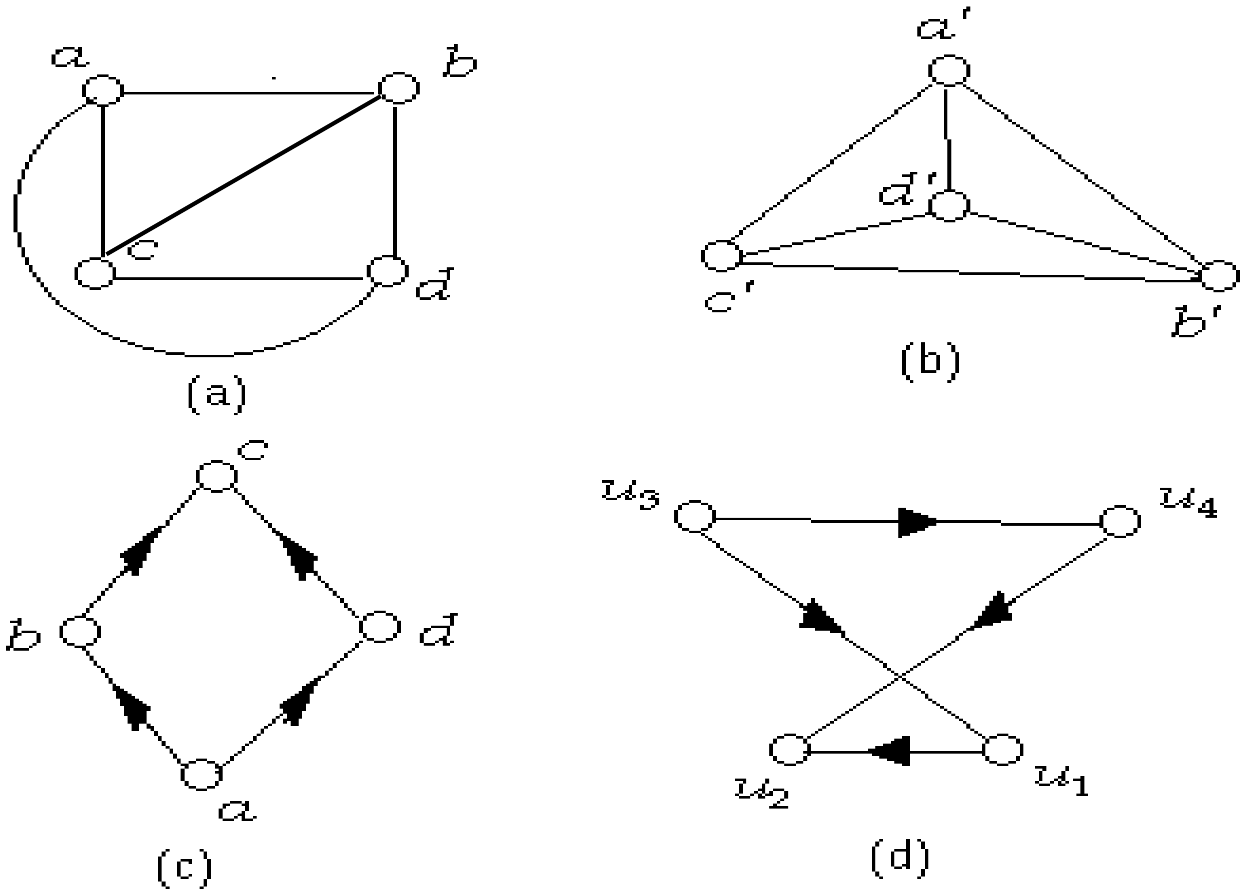


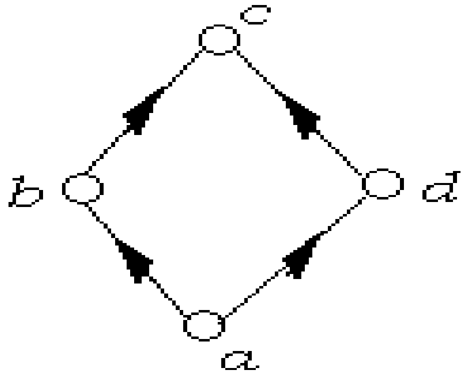
图7-1.8 图的同构

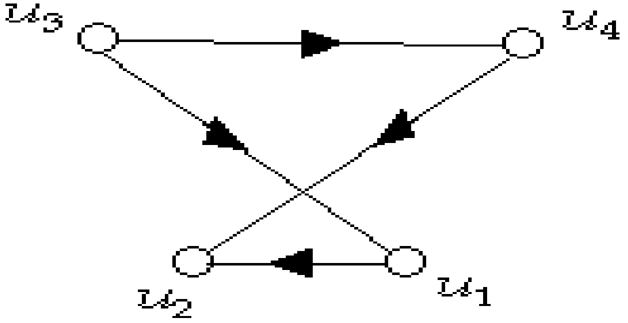
图的同构

从这个定义可以看出,若G与G'同构,它的充要条件是:两个图的结点和边分别存在着一一对应,且保持关联关系。

例如图7-1.8中,(a)与(b)是同构的,(c)与(d)也是同构的。

从下图可以看出此两图在结点间存在着一一对应的映射f:$f(a)=u_3$, $f(b)=u_4$, $f(d)=u_1$, $f(c)=u_2$,且有:$\langle a,b\rangle$,$\langle b,c\rangle$,$\langle d,c\rangle$,$\langle a,d\rangle$分别与$\langle u_3,u_4\rangle$,$\langle u_4,u_2\rangle$,$\langle u_1,u_2\rangle$,$\langle u_3,u_1\rangle$一一对应。





图的同构

表7-1.1

结点	a	b	c	d	结点	v_1	v_2	v_3	v_4
出度	2	1	0	1	出度	1	0	2	1
入度	0	1	2	1	入度	1	2	0	1

分析本例还可以知道,此两图结点的度数也分别对应相等,如表7-1.1所示。

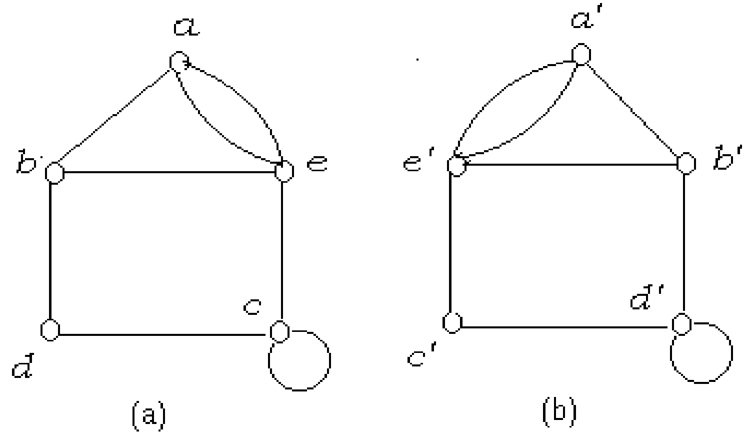
图的同构

两图同构的一些必要条件:

1.结点数目相等;

2.边数相等;

3.度数相等的结点数目相等。



- 需要指出的是这几个条件不是两个图同构的充分条件
- 例如图中的(a)和(b)满足上述的三个条件,但此两个图并不同构。

图的同构

- 一般来说，证明两个图是同构的，不是轻而易举的事情，往往需要花些力气。
- 寻找一种简单易行的方法来证明图的同构，至今仍然是图论中悬而未决的难题！

谢 谢