2020级高等数学I（2）期末考试（A 卷）参考答案

本题得分	

一、填空题(1~ 4 小题，每小题 4 分，共 16 分)

1. 设 $f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, x^2+y^2\neq 0, \\ 0, \qquad x^2+y^2=0, \end{cases}$ 则 $f''_{xy}(0,0)=$ ______________.

解： $f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0-0}{x}=0$

当 $y\neq 0$ 时，

$$f'_x(0,y)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{xy(x^2-y^2)}{x(x^2+y^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2}=-y$$

(注：这一步也可以先求出 $f'_x(x,y)$ 的一般形式，再将 $(0,y)$ 代入得到 $f'_x(0,y)=-y$)

$$f''_{xy}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f'_x(0,y)-f'_x(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{-y-0}{y}=-1$$

2. 设 $P(x_0,y_0)$ 是圆 $C:x^2+y^2=1$ 上的一点，n 为 C 在 P 点处的外法线向量，

函数 $u=x+y$ 在 P 点处沿方向 n 的方向导数为________.

解：$\dfrac{\partial f}{\partial n}=\nabla f\cdot n=(1,1)\cdot(x_0,y_0)=x_0+y_0$

3. 设 C 是圆周 $x^2+y^2=2x$，则第一类曲线积分 $\int_C(x^2+y^2+y)ds=$ ________.

解：根据质心的定义 $\int_C xds=\bar{x}\cdot\int_C ds=2\pi\bar{x}=2\pi.$

$\int_C yds=\bar{y}\int_C ds=0$，$\int_C(x^2+y^2+y)ds=\int_C(2x+y)ds=2\int_C xds+\int_C yds=4\pi$

4. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\ (-1<x<1)$ 的麦克劳林级数展开式为 ______________.

（只要写出前三项）

解：$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}=(1-x)^{-\frac{1}{2}}=1+\dfrac{1}{2}x+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ 2\end{pmatrix}(-x)^2+\cdots=\boxed{1+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{8}x^2+\cdots}$

本题得分	

二、选择题（5~8 小题，每小题 4 分，共16 分）

5. 函数 $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极大值点为【 】

(A) (1,0)　　(B) (-1,0)　　(C) (0,0)　　(D) (1,1)

解： $f_x=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}-x^2e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$，$f_y=-xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

于是驻点为(1,0)和(-1,0)

$$f_x=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}-x^2e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},\quad f_y=-xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$\Rightarrow f_{xx}=-2xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}-x(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=(x^3-3x)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$f_{xy}=-y(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},\quad f_{yy}=-xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}+xy^2e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=x(y^2-1)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

在点 (1,0) 处，$A=f_{xx}(1,0)=-2e^{-\frac{1}{2}}<0$，$B=f_{xy}(1,0)=0$，$C=f_{yy}(1,0)=-e^{-\frac{1}{2}}$，

$AC-B^2>0$,在该点取得极大值。

在点 (-1,0) 处，$A=f_{xx}(-1,0)=2e^{-\frac{1}{2}}>0$，$B=f_{xy}(-1,0)=0$，$C=f_{yy}(-1,0)=e^{-\frac{1}{2}}$，

$AC-B^2>0$ 在该点取得极小值。选 A

6. 曲面 $2xy+4z-e^z=3$ 在点 $(1,2,0)$ 处的法线与直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-2}$ 的夹角为【 】

(A) $\dfrac{\pi}{4}$　　(B) $\dfrac{\pi}{3}$　　(C) $\dfrac{\pi}{2}$　　(D) 0

解： 法线的方向向量为 $n=(F_x,F_y,F_z)|_{(1,2,0)}=(2y,2x,4-e^z)|_{(1,2,0)}=(4,2,3)$

$\cos\theta=\dfrac{n\cdot s}{|n||s|}=\dfrac{(4,2,3)\cdot(1,1,-2)}{\sqrt{29}\sqrt{6}}=0$ 所以选 C

7. 二次积分 $\int_0^2 dy\int_2^{y+2} f(x,y)dx$ 交换积分次序后得【 】

(A) $\int_0^2 dx\int_{x-2}^2 f(x,y)dy$　　(B) $\int_2^4 dx\int_0^{x-2} f(x,y)dy$

(C) $\int_2^4 dx\int_2^{x-2} f(x,y)dy$　　(D) $\int_2^4 dx\int_{x-2}^2 f(x,y)dy$

答案：D

8. 设数列 a_n 单调减，$\lim\limits_{n\to 0}a_n=0$，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ $(n=1,2,\cdots)$ 无界，则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的收敛域是【 】

(A) $(-1,1]$　　　(B) $[-1,1)$　　　(C) $[0,2)$　　　(D) $(0,2]$

解：对于幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$，由题意可知，当$x=1$时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散（部分和无界），当$x=-1$时，为交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$，由条件，此级数收敛（Leibniz 判别法）。由 Abel 定理，可知收敛域为$[-1,1)$，从而幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$的收敛域为$[0,2)$，选 C

本题得分	

三、计算题(9~ 13小题，每小题 8 分，共40 分)

9. 求过点$(1,2,3)$且与两平面$3x-y+z+6=0$, $x+2y-3z-7=0$都平行的直线的参数方程。

解：所求直线的方向向量为

$$s=(3,-1,1)\times(1,2,-3)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}=(1,10,7).$$ ....4 分

故所求的直线为参数方程为 $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+10t \\ z=3+7t \end{cases}$ ....4 分

10. 设$z=z(x,y)$是由方程$x^2-2z=f\left(y^2-3z\right)$所确定的隐函数，其中$f$可微，求$2y\frac{\partial z}{\partial x}+3x\frac{\partial z}{\partial y}$.

解：令$F(x,y,z)=x^2-2z-f\left(y^2-3z\right)$

$F_x=2x,\ F_y=-2yf',F_z=-2+3f'$ ....4 分

$$2y\frac{\partial z}{\partial x}+3x\frac{\partial z}{\partial y}=2y\left(-\frac{F_x}{F_z}\right)+3x\left(-\frac{F_y}{F_z}\right)$$

$$=2y\cdot\frac{-2x}{-2+3f'}+3x\cdot\frac{2yf'}{-2+3f'}=\frac{-4xy+6xyf'}{-2+3f'}=2xy$$

....................4 分

11. 计算曲线积分$\oint_L \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$ ，其中L为正方形$|x|+|y|=1$，取逆时针方向。

解： $P(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}, Q(x,y)=\frac{-x}{x^2+y^2}$ 。当$(x,y)\neq O$时，

$$P_y=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=Q_x$$ ....**2 分**

在正方形L内围绕原点作一个小圆$l^-: x^2+y^2=r^2$，取顺时针方向，则P,Q在正方形L和小圆l所围成的区域内满足 Green 公式的条件。

$$\oint_{L+l^-}\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=\iint_D(Q_x-P_y)dxdy=0$$

............................**2 分**

$$\oint_{l^-}\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=-\int_0^{2\pi}\frac{r\sin\theta d(r\cos\theta)-r\cos\theta d(r\sin\theta)}{r^2}=\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi$$

............................**3 分**

$$\oint_{L}\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=\oint_{L+l^-}\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}-\oint_{l^-}\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=-2\pi$$ ....**1 分**

12. 计算对面积的曲面积分$\iint_\Sigma(x+y+z)dS$ ，其中Σ为球面$x^2+y^2+z^2=4$上$z\geq\sqrt{3}$的部分。

解：

$$\begin{aligned}
&\iint_\Sigma(x+y+z)dS\\
&=\iint_{\Sigma_{xy}}(x+y+\sqrt{4-x^2-y^2})\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}dxdy\\
&=\iint_{\Sigma_{xy}}\sqrt{4-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}dxdy \quad \cdots\cdots\cdots\cdots 4'\\
&=\iint_{\Sigma_{xy}}\sqrt{4-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)^2}dxdy\\
&=\iint_{\Sigma_{xy}}2dxdy=2A(\Sigma_{xy})=2\pi \quad \cdots\cdots\cdots\cdots 4'
\end{aligned}$$

13. 设曲面S为曲线$\begin{cases} z = e^y, \\ x = 0 \end{cases}$ $(1 \le y \le 2)$ 绕z轴旋转一周所成的曲面下侧，计算曲面积分

$$I = \iint_S 4xzdydz - 2zdzdx + (1 - z^2)dxdy$$

解： S的方程为$z = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$ $(1 \le x^2 + y^2 \le 4)$，补充平面

$S_1 : z = e \ \ (x^2 + y^2 \le 1)$,取下侧；

$S_2 : z = e^2 \ \ (x^2 + y^2 \le 4)$,取上侧； ……………………2'

则

$$\oiint_{S+S_1+S_2} 4xzdydz - 2zdzdx + (1 - z^2)dxdy \overset{Gauss}{=} \iiint_V 2zdV$$

……………………2'

$$= 2\int_e^{e^2} zdz \iint_{D_z} d\sigma = 2\pi \int_e^{e^2} z \ln^2 zdz = \frac{5\pi}{2}e^4 - \frac{\pi}{2}e^2$$

而

$$\iint_{S_1} 4xzdydz - 2zdzdx + (1 - z^2)dxdy$$

$$= \iint_{S_1} (1 - e^2)dxdy = -\iint_{(S_1)_{xy}} (1 - e^2)dxdy = \pi(e^2 - 1)$$ ……………………2'

$$\iint_{S_2} 4xzdydz - 2zdzdx + (1 - z^2)dxdy$$

$$= \iint_{S_2} (1 - e^4)dxdy = \iint_{(S_2)_{xy}} (1 - e^4)dxdy = 4\pi(1 - e^4)$$ ……………………1'

所以

$$I = \iint_S 4xzdydz - 2zdzdx + (1 - z^2)dxdy$$

……………………1'

$$= \oiint_{S+S_1+S_2} - \iint_{S_1} - \iint_{S_2} = \frac{13}{2}\pi e^4 - \frac{3}{2}\pi e^2 - 3\pi$$

本题得分	

四、证明（14~15 小题，每小题5分，共10 分）

14. 证明正项级数$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{\ln n}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$发散。

证明：$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{\ln n}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$与$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$具有相同的敛散性。........................**2'**

考虑级数$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$，其部分和

$$S_n=\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k\ln k}=\sum_{k=3}^{n+2}\int_k^{k+1}\frac{1}{k\ln k}dx\geq\sum_{k=3}^{n+2}\int_k^{k+1}\frac{1}{x\ln x}dx=\int_3^{n+3}\frac{1}{x\ln x}dx=\ln\ln(n+3)-\ln\ln 3\to+\infty$$

所以$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$发散，（亦可用积分判别法直接得到$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$发散的结论）

从而$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{\ln n}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$发散。 ....**3'**

15. 设$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，证明：若$\rho\in(0,+\infty)$，则幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$的收敛区间为$\left(-\frac{1}{\rho},\frac{1}{\rho}\right)$.

证明：当$|x|<\frac{1}{\rho}$时，$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x|=\rho|x|<1$.

因此，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$绝对收敛，从而级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$收敛。........................**2'**

当$|x|>\frac{1}{\rho}$时，$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x|=\rho|x|>1$.

因此，当n充分大时，$|a_{n+1}x^{n+1}|>|a_nx^n|$，从而通项$a_nx^n$不收敛于零，从而级数级数

$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$发散。........................**2'**

综上可得，幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$的收敛区间为$\left(-\frac{1}{\rho},\frac{1}{\rho}\right)$。 ....**1'**

本题得分	

五、解答题(16~17 小题，每小题9分，共18分)

16. 已知曲线 C：$\begin{cases} x^2+y^2-2z^2=0 \\ x+y+3z=5 \end{cases}$，求曲线 C 上距离 XOY 面最远和最近的点.

解： 依题意可得如下条件极值问题

$$\max(\min)\ \ z^2$$

$$s.t\begin{cases} x^2+y^2-2z^2=0 \\ x+y+3z=5 \end{cases}$$ ....2‘

作 Lagrange 函数 $L(x,y,z;\lambda,\mu)=z^2+\lambda(x^2+y^2-2z^2)+\mu(x+y+3z-5)$ ....2‘

其极值点必满足如下驻点方程组 $\begin{cases} L_x=2\lambda x+\mu=0 \\ L_y=2\lambda y+\mu=0 \\ L_z=2z-4\lambda z+3\mu=0 \\ L_\lambda=x^2+y^2-2z^2=0 \\ L_\mu=x+y+3z-5=0 \end{cases}$

解得：$x=1,y=1$，$z=1$ 与 $x=-5,y=-5,z=5$。.........................3‘

因此，曲线 C 上距离 XOY 面最远和最近的点分别为 $(-5,-5,5)$ 和 $(1,1,1,)$ ....2‘

17. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(3n+1)x^n$ 的和函数.

解： 收敛域为 $(-1,1)$， ....2‘

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(3n+1)x^n=3\sum_{n=0}^{\infty}nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n=3\sum_{n=1}^{\infty}nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n=3x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$ .....3‘

$$=3x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'+\sum_{n=0}^{\infty}x^n=3x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'+\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$=3x\left(\frac{x}{1-x}\right)'+\frac{1}{1-x}=\frac{3x}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x}=\frac{1+2x}{(1-x)^2},x\in(-1,1).$$ ....4‘