3-8 关系的闭包运算

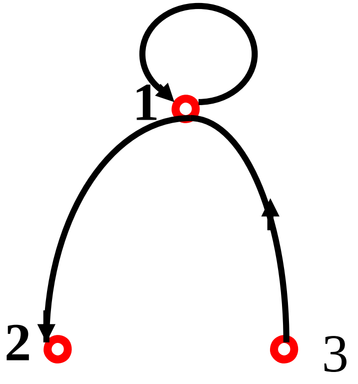
主要内容

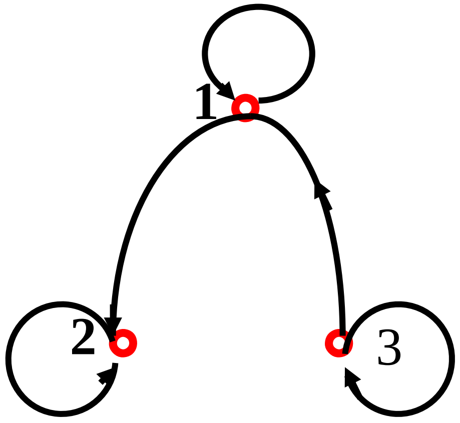
- 自反闭包r(R) (reflexivity closure)
- 对称闭包s(R) (symmetry closure)
- 传递闭包t(R) (transitivity closure)

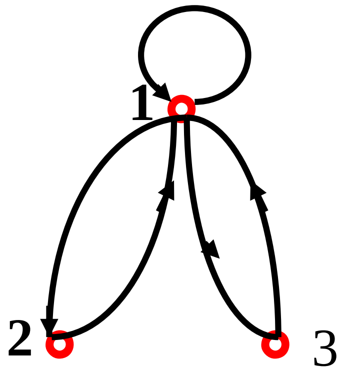
关系的闭包

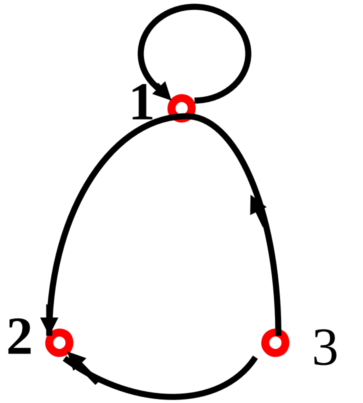
一、例子

给定 A上的关系R，如图所示，分别求A上的另一个关系R′，使得它是包含R的“最小的”(序偶尽量少) 具有自反 (对称、传递)性的关系。









这三个关系图分别是R的自反、对称、传递闭包

关系的闭包定义

二、定义：给定 A上的关系R，若A上另一个关系R′ 满足:

(1) $R \subseteq R'$；

(2) R' 是自反的(对称的、传递的)；

(3) R′ 是“最小的”，即对于任何A上自反(对称、传递) 的关系R"，如果 $R \subseteq R''$，就有 $R' \subseteq R''$。

则称R′ 是R的自反(对称、传递)闭包。

记作 r(R)、(s(R) 、t(R))。

(reflexive、symmetric、transitive)

计算方法-自反闭包

三、计算方法

定理1 给定 A中关系R，则 $r(R)=R \cup I_A$。

证明：令$R'=R \cup I_A$，显然R'是自反的且$R \subseteq R'$，

下面证明R'是“最小的”：

如果有A上任意自反关系R''且$R \subseteq R''$，于是$I_A \subseteq R''$，

所以 $R \cup I_A \subseteq R''$，即 $R' \subseteq R''$。

因此 R'就是R的自反闭包。即 $r(R)=R \cup I_A$ 。

计算方法-对称闭包

定理2 给定 A中关系R，则 $s(R)=R\cup R^{c}$ 。

证明方法与定理1 类似。

计算方法-传递闭包

定理3 给定 A中关系R，则

$t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$。

证明：令$R'= R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$, 显然有 $R\subseteq R'$；

再证R'是传递的。

任取$x,y,z\in A$，设有$\langle x,y\rangle\in R'$且$\langle y,z\rangle\in R'$，由R'定义得必存在正整数 i,j 使得$\langle x,y\rangle\in R^i$， $\langle y,z\rangle\in R^j$，根据关系的复合得 $\langle x,z\rangle\in R^{i+j}$，又因$R^{i+j}\subseteq R'$，所以$\langle x,z\rangle\in R'$，因此 R'传递。

计算方法-传递闭包

再证R'是“最小的”：

如果有A上传递关系R"且 $R\subseteq R''$，（求证 $R'\subseteq R''$）

任取 $\langle x,y\rangle \in R'$，则由R'定义得必存在正整数i，使得 $\langle x,y\rangle \in R^i$ ，

根据关系的复合定义，A中必存在i-1个元素 $e_1, e_2,\dots,e_{i-1}$，使得

$$\langle x, e_1\rangle \in R \wedge \langle e_1,e_2\rangle \in R \wedge \dots \wedge \langle e_{i-1},y\rangle \in R。$$

因 $R\subseteq R''$，所以有 $\langle x, e_1\rangle \in R'' \wedge \langle e_1,e_2\rangle \in R'' \wedge \dots \wedge \langle e_{i-1},y\rangle \in R''$。

由于R"传递，所以有 $\langle x,y\rangle \in R''$。因此 $R'\subseteq R''$。

综上所述，R'就是R的传递闭包，即

$$t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup \dots=\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$$

计算方法-传递闭包

用上述公式的无穷计算t(R)，要计算R大次幂？

A={1,2,3}， R_1, R_2, R_3是A上的关系，计算三个关系的传递闭包：

$R_1=\{<1,2>,<1,3>,<3,2>\}$ $R_1^2=\{<1,2>\}$， $R_1^3=R_1^4=\Phi$，

$t(R_1)=R_1 \cup R_1^2 \cup R_1^3=R_1$

$R_2=\{<1,2>,<2,3>,<3,1>\}$, $R_2^2=\{<1,3>,<2,1>,<3,2>\}$,

$R_2^3=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>\}=I_A$, $R_2^4=R_2$， ...

$t(R_2)=R_2 \cup R_2^2 \cup R_2^3$

$R_3=\{<1,2>,<2,3>,<3,3>\}$， $R_3^2=\{<1,3>,<2,3>,<3,3>\}$ ， $R_3^3=R_3^2$

$t(R_3)=R_3 \cup R_3^2$

计算方法-传递闭包

定理4　给定 A中关系R，如果A是有限集合，|A|=n 则

则存在一个正整数$k \le n$，使得

$$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^k$$

证明：见P122

计算方法-传递闭包

例题: 设 $A = \{ a,b,c,d \}$,

$R = \{ <a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d> \}$.

求 $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$.

解: $r(R)=R\cup I_A =\{ <a,a>,<b,b>,<c,c>,<d,d>,$

$<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d> \}$

$s(R)=R \cup R^c= \{ <a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,b>, <c,d> <d,c> \}$

$t(R)= R\cup R^2\cup R^3\cup R^4 =\{<a,a>,<a,b>,<a,c>,$

$<a,d>,<b,a>,<b,b>,<b,c>,<b,d>,<c,d>\}$

t(R)见P123

计算方法-传递闭包

求t(R)的矩阵**Warshall算法**：|X|=n, R⊆X×X,

令M_R=A, R^2的矩阵为A^2,…,R^k的矩阵为A^k。于是

t(R)的矩阵记作M_{R+}=A+A^2+…+A^k+… (+是逻辑加)

(1)置新矩阵 A :=M_R ;

(2)置 i=1;

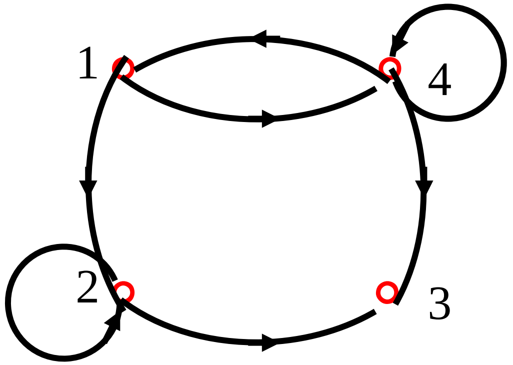
(3)对所有 j ,如果A[j,i] =1 ,则对k=1,2,…,n

A[j,k]:=A[j,k]+A[i,k]; /*第j行+第i行,送回第j行*/

(4) i加1;

(5) 如果i≤n, 则转到步骤(3)，否则停止。

下面举例，令X={1,2,3,4},
X上的关系R如下图所示：
运行该算法求t(R)的关系矩阵：



计算方法-传递闭包

i=1 (i---列, j---行)

A[4,1]=1

4行+1行→4行

$$A的初值: A=M_R=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\1&0&1&1\end{bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\1&\underline{1}&1&1\end{bmatrix}$$

i=2 A[1,2]=1 ,1行+2行→1行

A[2,2]=1 ,2行+2行→2行 A不变

A[4,2]=1 ,4行+2行→4行,4行全1, A不变

$$A=\begin{bmatrix}0&1&\underline{1}&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

i=3 A[1,3]=1,1行+3行→1行, 3行全0, A不变

A[2,3]=1,2行+3行→2行, 3行全0, A不变

A[4,3]=1,4行+3行→4行, 3行全0, A不变

i=4 A[1,4]=1 ,1行+4行→1行

A[4,4]=1 ,4行+4行→4行 A不变,最后 $A=M_{t(R)}$

$$A=\begin{bmatrix}\underline{1}&1&1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

闭包的性质

四、性质

定理5 R是 A 上的关系，则

(1) R是自反的，当且仅当 $r(R)=R$。

(2) R是对称的，当且仅当 $s(R)=R$。

(3) R是传递的，当且仅当 $t(R)=R$。

证明： 由闭包定义可得。

闭包的性质

定理6 R是A上的关系，则

⑴ R是自反的，则s(R)和t(R)也自反。

⑵ R是对称的，则r(R)和t(R)也对称。

⑶ R是传递的，则r(R)也传递。

闭包的性质

证明(1) R是自反的，则s(R)也自反

因为R自反，由定理5 得 $r(R)=R$，即 $R \cup I_A=R$，

$r(s(R)) = s(R) \cup I_A = (R \cup R^C) \cup I_A$

$= (R \cup I_A) \cup R^C = r(R) \cup R^C = R \cup R^C = s(R)$

所以 s(R)自反。

类似可以证明：当 R自反，t(R) 也自反。

闭包的性质

证明(2) 若R对称，则 t(R) 也对称。

$$(t(R))^C = (R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n \cup \ldots)^C$$
$$= R^C \cup (R^2)^C \cup \ldots \cup (R^n)^C \cup \ldots$$
$$= R^C \cup (R^C)^2 \cup \ldots \cup (R^C)^n \cup \ldots$$
$$= R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n \cup \ldots$$
$$= t(R)$$

所以 t(R) 也对称。

类似可以证明 r(R) 也对称。

闭包的性质

证明(3) 若R传递，则 r(R)也传递。

$$t(r(R)) = t(R \cup I_A)$$
$$= (R \cup I_A) \cup (R \cup I_A)^2 \cup (R \cup I_A)^3 \cup \ldots$$
$$= (I_A \cup R) \cup (I_A \cup R \cup R^2) \cup (I_A \cup R \cup R^2 \cup R^3) \cup \ldots$$
$$= I_A \cup R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$$
$$= I_A \cup t(R)$$
$$= I_A \cup R \qquad \text{(由R传递，} t(R) = R\text{)}$$
$$= r(R)$$

所以 r(R) 也传递。 $(R \cup I_A)^i = I_A \cup R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^i$

闭包的性质

定理7 设R_1、R_2是A上关系，如果$R_1 \subseteq R_2$，则

(1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$ (2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$

(3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$

证明(1)： $r(R_1) = I_A \cup R_1 \subseteq I_A \cup R_2 = r(R_2)$

(2)，(3)类似可证。

闭包的性质

定理8 设R是A上关系，则

(1) $sr(R) = rs(R)$ (2) $tr(R) = rt(R)$ (3) $st(R) \subseteq ts(R)$

证明：(1) $sr(R) = rs(R)$

$sr(R) = r(R) \cup r(R)^c = (R \cup I_A) \cup (R \cup I_A)^c$

$= (R \cup I_A) \cup (R^c \cup I_A{}^c) = R \cup I_A \cup R^c \cup I_A$

$= (R \cup R^c) \cup I_A = s(R) \cup I_A = rs(R)$

(2) $tr(R) = rt(R)$

用前边证明的结论：

$(R \cup I_A)^k = I_A \cup R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^k$

很容易证明，略。

闭包的性质

(3) 证明 $st(R) \subseteq ts(R)$

因 $R \subseteq s(R)$，由定理7得

$t(R) \subseteq ts(R)$，$st(R) \subseteq sts(R)$，

因 $s(R)$对称，由定理6得 $ts(R)$ 也对称，

于是 $sts(R) = ts(R)$

所以有 $st(R) \subseteq ts(R)$。

谢 谢