2021 级高等数学 I(2)期末试题　A 卷参考答案

1．(5 分) 设 $\vec{a}=(2,-1,2)$, 若 $\vec{x}$ 与 $\vec{a}$ 平行，且 $\vec{x}\bullet\vec{a}=-18$, 求 $\vec{x}$.

解：由平行条件，设 $\vec{x}=k(2,-1,2)$,　（2 分）又 $\vec{x}\bullet\vec{a}=k(2^2+1^2+2^2)=-18$,

从而 $k=-2$,　(4 分)　$\vec{x}=(-4,2,-4)$,　(5 分)

2．(5 分) 求平行于 x 轴，且经过点 $P=(4,0,-2)$ 和点 $Q=(5,1,7)$ 的平面方程.

解：平面平行于 x 轴，可设平面的一般式方程为 $by+cz+d=0$,　（2 分）

将点 $P=(4,0,-2)$，$Q=(5,1,7)$ 的坐标代入平面方程，得

$$\begin{cases}-2c+d=0,\\ b+7c+d=0,\end{cases}$$

从而得 $d=2c,\quad b=-9c$.　（4 分）所求平面方程为 $9y-z-2=0.$　（5 分）

3．(5 分) 求直线 $L_1:\begin{cases}3x-y+2z=0,\\ x-y+z=0\end{cases}$ 与 $L_2:\begin{cases}x=0,\\ y=0\end{cases}$ 的夹角.

解：$\vec{s}_1=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=(1,-1,-2)$ 或可取为 (-1,1,2);　$\vec{s_2}=(0,0,1)$.（2 分）

$\cos\alpha=\dfrac{s_1\bullet s_2}{|s_1||s_2|}=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　或 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,　（4 分）

$\alpha=arc\cos\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, 或 $\alpha=\pi-\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.　（5 分）

4．(5 分) 求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ z=x^2\end{cases}$ 在 yoz 面上的投影.

解：$\begin{cases}y^2+z=1,\\ x=0,\end{cases}$ $(-1\le y\le 1)$.　（5 分）

5．(5 分) 写出 yoz 面上的椭圆 $\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所得曲面方程.

解：$\dfrac{x^2+y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.$　（5 分）

6．(5 分) 已知函数 $u(x,y,z)=3x^2y^2-2y+4x+6z$， 求函数 u 在原点处沿方向 $\overrightarrow{OA}=(2,3,1)$ 的方向导数 .

解：$\left.\dfrac{\partial f}{\partial \overrightarrow{OA}}\right|_{(0,0,0)}=(6xy^2+4,6x^2y-2,6)\big|_{(0,0,0)}\bullet \vec{e}_{OA}=(4,-2,6)\bullet\dfrac{1}{\sqrt{14}}(2,3,1)=\dfrac{8}{\sqrt{14}}$.（5 分）

7．(6 分) 已知 $z=f(x^2-y^2,xy)$, 且 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'+yf_2'$,　（2 分）

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x(f_{11}''(-2y)+xf_{12}'')+f_2'+y(f_{21}''(-2y)+xf_{22}'')$$　（6 分）

$$=f_2'-4xy\,f_{11}''+2(x^2-y^2)f_{12}''+xyf_{22}''.$$

8．(6 分) 求单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{16}=1$ 上的点 $M_0(2,3,4)$ 处的切平面方程.

解：$\vec{n}\big|_{(2,3,4)}=(\dfrac{x}{2},\dfrac{2y}{9},-\dfrac{z}{8})\Big|_{(2,3,4)}=(1,\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{2})$,　（3 分）

切平面方程：$(x-2)+\dfrac{2}{3}(y-3)-\dfrac{1}{2}(z-4)=0$，

即：$6x+4y-3z=12$.　（6 分）

9．(6 分) 计算二重积分 $\iint\limits_D xy^2dxdy$，其中 D 是由 $x=1, y=x$ 及 x 轴所围区域.

解：原式=$\int_0^1 xdx\int_0^x y^2dy=\int_0^1\dfrac{1}{3}x^4dx=\dfrac{1}{15}$,（本题积分次序也可以先 x 后 y）（6 分）

10．(6 分) 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z^2dxdydz$，其中 Ω 是由 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$ 与 $z=4$ 所围区域.

解：用截面法计算：原式=$\int_0^4 z^2dz\iint\limits_{D_z}dxdy=\int_0^4 2\pi z^3dz=128\pi$,（本题也可用投影法计算，利用柱坐标）（6 分）

11．(6 分) 已知正数 x,y,z 之和为 10，问 x,y,z 应怎样取值才能使 $u=x^2yz$ 取最大值.

解：
$$\begin{aligned}&\max\quad f=x^2yz,\\&S.t.\quad x=y+z=10.\end{aligned}$$

做拉格朗日函数：$L(x,y,z;\lambda)=x^2yz+\lambda(x+y+z-10)$，　（2 分）

由$\begin{cases} L_x=2xyz+\lambda=0, \\ L_y=x^2z+\lambda=0, \\ L_z=x^2y+\lambda=0, \\ L_\lambda=x+y+z-10=0, \end{cases}$ 得 $x=2y=2z=5$,　（5 分）

由实际问题解的存在性知，当 $x=5, y=z=\dfrac{5}{2}$ 时，$u=x^2yz$ 取最大值为 $\dfrac{625}{4}$.　（6 分）

12．(6 分) 计算曲线积分 $\int_L xydx+(y-x)dy$，其中 $L=\overline{OM}\bigcup\overline{MN}$ 为联结 $O(0,0), M(1,1), N(1,2)$ 的有向折线段.

解：$\displaystyle\int_{\overline{OM}} xydx+(y-x)dy=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$,　（2 分）

$$\int_{\overline{MN}} xydx+(y-x)dy=\int_1^2 (y-1)dy=\frac{1}{2}y^2\Big|_1^2-1=\frac{1}{2},$$　（5 分）

原式$=\dfrac{5}{6}$.　（6 分）

13．(6 分) 计算曲面积分 $\oiint\limits_\Sigma (x+y^2+y^2\sin z)dS$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=2$.

解：由对称性，$\oiint\limits_\Sigma xdS=0, \oiint\limits_\Sigma y^2\sin zdS=0$;　（2 分）

原式$=\displaystyle\oiint\limits_\Sigma y^2dS=\frac{1}{3}\oiint\limits_\Sigma (x^2+y^2+z^2)dS=\frac{2}{3}\oiint\limits_\Sigma 1dS=\frac{16\pi}{3}$.　（6 分）

14．(6 分) 计算 $\oiint\limits_\Sigma (x+y+z)dxdy$，其中 Σ 是由 $z=\sqrt{1-\dfrac{x^2+y^2}{4}}$ 与 $z=0$ 所围立体的表面外侧.

解：由高斯公式，

$$\text{原式}=\iiint\limits_\Omega 1dxdydz=\int_0^1 dz\iint\limits_{D_z} dxdy=\int_0^1 4\pi(1-z^2)dz$$　（5 分）

$$=4\pi(1-\frac{1}{3})=\frac{8\pi}{3}.$$

其中 $D_z: x^2+y^2\le 4(1-z^2)$.　（6 分）

15．(4 分) 判断级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+2022)}}$ 的敛散性.

解∵ $\dfrac{1}{\sqrt{n(n+2022)}} \geq \dfrac{1}{n+2022}$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+2022}$ 发散，从而原级数发散。（4 分）

16.（4 分）判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{2022}{\sqrt{n^{2}+\lambda}}$ 的敛散性，其中 $\lambda>0$ 为常数，若收敛，是条件收敛还是绝对收敛.

解：原级数作为交错级数，满足：（1）$u_{n}=\dfrac{2022}{\sqrt{n^{2}+\lambda}}$ 单调减；（2）

$\lim\limits_{n\to\infty}u_{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2022}{\sqrt{n^{2}+\lambda}}=0$; 从而原级数收敛.（2 分）

对于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n}\dfrac{2022}{\sqrt{n^{2}+\lambda}}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2022}{\sqrt{n^{2}+\lambda}}$，由 $\dfrac{2022}{\sqrt{n^{2}+\lambda}}\geq\dfrac{2022}{\sqrt{n^{2}+n^{2}}}=\dfrac{2022}{n\sqrt{2}}$ 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2022}{\sqrt{n^{2}+\lambda}}$ 发散，从而原级数条件收敛.（4 分）

17.（4 分）将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^{2}}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数.

解：
$$f(x)=\frac{1}{x^{2}}=-\left(\frac{1}{x}\right)'=-\left(\frac{1}{1+(x-1)}\right)'=-\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}(x-1)^{n}\right)' \qquad （4 分）$$
$$=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}n(x-1)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n(x-1)^{n-1}.$$

18.（10 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(2x-1)^{n}$ 的和函数.

解：设 $t=2x-1$，则

$$s(t)=\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n}=t\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}=t\sum_{n=1}^{\infty}(t^{n})'=t\left(\sum_{n=1}^{\infty}t^{n}\right)'=t\left(\frac{t}{1-t}\right)'=\frac{t}{(1-t)^{2}}, \qquad （8 分）$$

从而原级数的和函数为

$$s(x)=\frac{2x-1}{(1-2x+1)^{2}}=\frac{2x-1}{4(1-x)^{2}}. \qquad （10 分）$$