回顾

- 自反闭包 $r(R)=R\cup I_A$
- 对称闭包 $s(R)=R\cup R^C$
- 传递闭包 $t(R) = R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots\cup R^n$ ，$|A|=n$

3-9 集合的划分和覆盖

覆盖

定义 [覆盖cover]：若把一个集合A分成若干个叫做分块的非空子集，使得A中每个元素至少属于一个分块，这些分块的全体叫做A的一个覆盖。

即：设A为非空集合，$S=\{S_1,S_2,\ldots,S_m\}$，

其中$S_i \subseteq A$，$S_i \neq \varnothing (i=1,2,\ldots,m)$

且$S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_m = A$，

则集合S称作集合A的覆盖。

覆盖

例:判断以下集合是否为集合A的覆盖？　其中A={ a,b,c,d,e,f}

（1）S_1= {∅, {a,b},{c,d},{f}}　　不是

（2）S_2= {{a,b},{c,d},{f,g}}　　不是

（3）S_3= {{a,b},{c,d},{f} }　　不是

（4）S_4= { {a,b},{c,d,e},{e,f} }　　是

（5）S_5= { {a,b,c,d,e,f} }　　是

（6）S_6= { {a}, {b},{c}, {d}, {e}, {f} }　　是

划分

定义 [划分partition] ：给定集合A的一个覆盖S，若A中的每个元素属于且仅属于S的一个分块，则S称作是A的一个划分。

即：若S是集合A的覆盖，

且满足$S_i \cap S_j = \varnothing$，（这里$i \neq j$），

则称S是A的划分。

划分一定是覆盖；但覆盖，不一定是划分。

划分

例 $X=\{1,2,3\}$，$A_1=\{\{1,2,3\}\}$，$A_2=\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$，

$A_3=\{\{1,2\},\{3\}\}$，$A_4=\{\{1,2\},\{2,3\}\}$，$A_5=\{\{1\},\{3\}\}$

A_1, A_2, A_3, A_4 是覆盖。

A_1, A_2, A_3 也是划分。

最小划分与最大划分

最小划分：划分块最少的划分，即只有一个划分块的划分，这个划分块就是X本身。如上例A_1={{1,2,3}}。

最大划分：划分块最多的划分，即每个划分块里只有一个元素的划分。如上例A_2={{1},{2},{3}}。

划分

例: 判断以下集合是否为集合A的划分? 其中A={ a,b,c,d,e,f}

（1）$S_1= \{\varnothing, \{a,b,c,d\},\{f\}\}$ 不是

（2）$S_4= \{ \{a,b\},\{c,d,e\},\{e,f\}\}$ 不是

（3）$S_5= \{ \{a,b\},\{c,d\},\{e,f\}\}$ 是

（4）$S_6= \{ \{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{e\},\{f\}\}$ 是 最大划分

（5）$S_7= \{ \{a,b, c,d, e,f\}\}$ 是 最小划分

我们看到对于一个给定集合, 划分不唯一

交叉划分

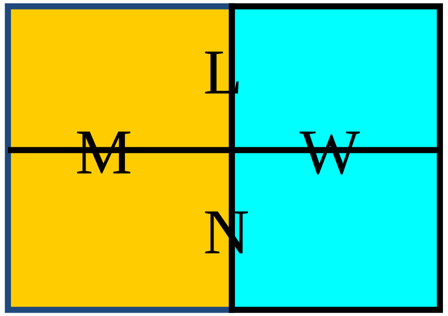
定义 [交叉划分]：若$\{A_1,A_2, \ldots,A_r\}$与$\{B_1,B_2, \ldots,B_s\}$是同一集合A的两种划分，则其中所有$A_i \cap B_j$组成的非空集合，称为原来两种划分的交叉划分。

交叉划分

例 X是江南大学学生集合，A和B都是X的划分：

$A=\{M,W\}$，$M\subseteq X$， $W\subseteq X$，$M=\{$男生$\}$，$W=\{$女生$\}$

$B=\{L,N\}$，$L\subseteq X$，$N\subseteq X$，$L=\{$江苏人$\}$，$N=\{$非江苏人$\}$



$L\cap M$	$L\cap W$
$N\cap M$	$N\cap W$

$C=\{L\cap M\ ,\ L\cap W\ ,\ N\cap M\ ,\ N\cap W\ \}$ 称C是X的交叉划分。

江苏男生 江苏女生 非江苏男生 非江苏女生

加细

定义 [加细]：给定X集合的任意两个划分$\{A_1,A_2, \ldots,A_r\}$和$\{B_1,B_2, \ldots,B_s\}$，若对于每一个A_j，均有B_k使$A_j \subseteq B_k$，则称$\{A_1,A_2, \ldots,A_r\}$为$\{B_1,B_2, \ldots,B_s\}$的加细。

定理

定理:设$\{A_1,A_2, \ldots,A_r\}$与$\{B_1,B_2, \ldots,B_s\}$是同一集合X的两种划分，则其交叉划分仍是原集合的一种划分。

证明见书129页。

定理

定理: 任何两种划分的交叉划分，都是原来各划分的一种加细。

证明见书130页。

谢 谢