2016《线性代数 II》期末考试卷(A)

使用专业、班级__________ 学号____________ 姓名________________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

本题得分	

一、填空题(每小题 4 分, 共 20分)

1. 三阶行列式 $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = \underline{(x+2)(x-1)^2}$.

2. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, 则 $(A-2E)^{-1}=\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$.

3. 设 $\overrightarrow{\alpha_1}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\alpha_2}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\alpha_3}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 线性相关，则 $a=\underline{\frac{5}{3}}$.

4. 设 A 为三阶矩阵，且存在非零矩阵 B, 满足 $AB=O$，则 $R(A)\ \underline{<3}$.

5. 设 A 为三阶矩阵，其三个特征值分别为 $-\frac{1}{2}$、$\frac{1}{2}$、1，A^* 为 A 伴随矩阵，则 A^* 的所有特征值的绝对值之和为 $\underline{\frac{5}{4}}$.

本题得分	

二、选择题(每小题 4 分, 共 16 分)

1. 设 A 为 n 阶可逆矩阵，则下面各式恒正确的是（ D ）.

（A）$|2A|=2|A^T|$　　（B）$(2A)^{-1}=2A^{-1}$

（C）$[(A^{-1})^{-1}]^T=[(A^T)^T]^{-1}$　　（D）$[(A^T)^T]^{-1}=[(A^{-1})^T]^T$

2. 如果 $P\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}-3a_{31} & a_{12}-3a_{32} & a_{13}-3a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，则 $P=$（ B ）.

（A）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　（C）$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　（D）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

3. A、B 都是 n 阶方阵，则“$|A|=|B|$”是“A 与 B 相似”的（ C ）.

（A）充要条件　　（B）充分而非必要条件

（C）必要而非充分条件　　（D）既不充分也不必要条件

4. 已知 β_1,β_2 是非齐次线性方程组 $AX=b$ 的两个不同的解，α_1,α_2 是导出组 $AX=0$ 的基础解系，k_1,k_2 为任意常数，则 $AX=b$ 的通解是（ B ）.

（A）$k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+\frac{\beta_1-\beta_2}{2}$　　（B）$k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1-\alpha_2)+\frac{\beta_1+\beta_2}{2}$

（C）$k_1\alpha_1+k_2(\beta_1+\beta_2)+\frac{\beta_1-\beta_2}{2}$　　（D）$k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)+\frac{\beta_1+\beta_2}{2}$

本题得分	

三、（本题 10 分）

设 $\alpha=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$A=\alpha\beta^T$, 求 A^5 .

解：$A^5=\alpha(\beta^T\alpha)^4\beta^T \cdots\cdots(4') =\alpha\beta^T \cdots\cdots(6') = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdots\cdots(10')$

考试形式开卷（）、闭卷（√），在选项上打（√）

开课教研室 大学数学部　命题教师 命题组　命题时间 2017-5-1　使用学期 16-17-2　总张数 3　教研室主任审核签字 ____________

本题得分	

四、（本题 12 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&0&1\\0&2&0\\1&1&2\end{pmatrix}$，满足 $AX=A+X$，求 X.

解：$\because\ (A-E)X=A\cdots\cdots\cdots(2')$

由 $|A-E|=\begin{vmatrix}2&0&1\\0&1&0\\1&1&1\end{vmatrix}=1\neq0\Rightarrow A-E$ 可逆 $\Rightarrow X=(A-E)^{-1}A\cdots\cdots\cdots(5')$

$$(A-E\vdots A)=\begin{pmatrix}2&0&1&3&0&1\\0&1&0&0&2&0\\1&1&1&1&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&2&1&-1\\0&1&0&0&2&0\\0&0&1&-1&-2&3\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots(11')$$

$$\therefore X=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&2&0\\-1&-2&3\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots(12')$$

本题得分	

五、(本题12分)　当 λ 为何值时，非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=1\\2x_1+3x_2+(\lambda+2)x_3=3\\x_1+\lambda x_2-2x_3=0\end{cases}$

有唯一解、无解、无穷多解？并求出无穷解时的通解 .

解：系数行列式 $|A|=\begin{vmatrix}1&2&1\\2&3&\lambda+2\\1&\lambda&-2\end{vmatrix}=-(\lambda^2-2\lambda-3)=-(\lambda-3)(\lambda+1)\cdots\cdots\cdots\ (3')$

(1) 当 $|A|\neq0$ 即 $\lambda\neq3$ 且 $\lambda\neq-1$ 时，方程组有唯一解；　$\cdots\cdots\cdots(5')$

(2) 当 $\lambda=-1$ 时，$B=(A\vdots b)=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\2&3&1&3\\1&-1&-2&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&1&1&-1\\0&0&0&-4\end{pmatrix}$

$\Rightarrow R(A)\neq R(B)\Rightarrow$ 方程组无解；$\cdots\cdots\cdots(8'')$

(3) 当 $\lambda=3$ 时，$B=(A\vdots b)=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\2&3&5&3\\1&3&-2&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&7&3\\0&1&-3&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow R(A)=R(B)=2<3\Rightarrow$ 方程组有无穷解；且通　解为 $c\begin{pmatrix}-7\\3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$，　$c\in R$.$\cdots\cdots\cdots\ (12')$

本题得分	

六、(本题 12 分)

已知 5 个向量分别为 $\overrightarrow{\alpha_1}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\4\end{pmatrix}$、$\overrightarrow{\alpha_2}=\begin{pmatrix}2\\1\\5\\6\end{pmatrix}$、$\overrightarrow{\alpha_3}=\begin{pmatrix}1\\2\\5\\2\end{pmatrix}$、$\overrightarrow{\alpha_4}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\0\end{pmatrix}$、$\overrightarrow{\alpha_5}=\begin{pmatrix}3\\0\\7\\14\end{pmatrix}$，　求：

（1）该向量组的秩；（2）该向量组的一个最大无关组，并将其余向量用该最大无关组线性表示.

$$\text{解：}\left(\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3},\overrightarrow{\alpha_4},\overrightarrow{\alpha_5}\right)=\begin{pmatrix}1&2&1&1&3\\-1&1&2&-1&0\\0&5&5&-2&7\\4&6&2&0&14\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&2&1&1&3\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots(4')$$

$$\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots(6')$$

$\Rightarrow$ 该向量组的秩为 3 $\cdots\cdots\cdots(8')$

$\Rightarrow$ 最大无关组为 $\left(\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\ \overrightarrow{\alpha_4}\right)\cdots\cdots\cdots(10')$

$\Rightarrow\overrightarrow{\alpha_3}=-\overrightarrow{\alpha_1}+\overrightarrow{\alpha_2}$，$\overrightarrow{\alpha_5}=2\overrightarrow{\alpha_1}+\overrightarrow{\alpha_2}-\overrightarrow{\alpha_4}\cdots\cdots\cdots(12')$

本题得分	

七、(本题12分)

设 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\2&0&1\end{pmatrix}$，求正交矩阵 P 和对角阵 Λ， 使得 $P^{-1}AP=\Lambda$.

解: $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&2\\0&2-\lambda&0\\2&0&1-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+1)=0\Rightarrow$ 特征值为2、3、−1 …(3')

当 $\lambda=2$ 时，$(A-\lambda E)=\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&0&0\\2&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\xi_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$； ……(5')

当 $\lambda=3$ 时，$(A-\lambda E)=\begin{pmatrix}-2&0&2\\0&-1&0\\2&0&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$； ……(7')

当 $\lambda=-1$ 时，$(A-\lambda E)=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&3&0\\2&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$； ……(9')

$\Rightarrow P=\begin{pmatrix}0&\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt2}{2}\\1&0&0\\0&\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}$……(11')； $\Lambda=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，$P^{-1}AP=\Lambda$……(12')

本题得分	

八、(本题6分)

已知向量组 $\overrightarrow{\alpha_1}$、$\overrightarrow{\alpha_2}$、$\overrightarrow{\alpha_3}$ 线性无关， 证明：

$\overrightarrow{\alpha_1}+\overrightarrow{\alpha_2}+\overrightarrow{\alpha_3}$ 、$\overrightarrow{\alpha_1}+2\overrightarrow{\alpha_2}+3\overrightarrow{\alpha_3}$ 、$\overrightarrow{\alpha_1}+4\overrightarrow{\alpha_2}+9\overrightarrow{\alpha_3}$ 线性无关 .

证明： 设 $k_1(\overrightarrow{\alpha_1}+\overrightarrow{\alpha_2}+\overrightarrow{\alpha_3})+k_2(\overrightarrow{\alpha_1}+2\overrightarrow{\alpha_2}+3\overrightarrow{\alpha_3})+k_3(\overrightarrow{\alpha_1}+4\overrightarrow{\alpha_2}+9\overrightarrow{\alpha_3})=\overrightarrow{O}$

$\Rightarrow(k_1+k_2+k_3)\overrightarrow{\alpha_1}+(k_1+2k_2+4k_3)\overrightarrow{\alpha_2}+(k_1+3k_2+9k_3)\overrightarrow{\alpha_3}=\overrightarrow{O}$………(2')

因为 $\overrightarrow{\alpha_1}$、$\overrightarrow{\alpha_2}$、$\overrightarrow{\alpha_3}$ 线性无关 $\Rightarrow\begin{cases}k_1+k_2+k_3=0\\k_1+2k_2+4k_3=0\\k_1+3k_2+9k_3=0\end{cases}$………(3')

而 $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}=2\neq0\Rightarrow k_1=k_2=k_3=0$………(5')

所以 $\overrightarrow{\alpha_1}+\overrightarrow{\alpha_2}+\overrightarrow{\alpha_3}$、$\overrightarrow{\alpha_1}+2\overrightarrow{\alpha_2}+3\overrightarrow{\alpha_3}$、$\overrightarrow{\alpha_1}+4\overrightarrow{\alpha_2}+9\overrightarrow{\alpha_3}$ 线性无关.………(6')