一、计算题（1-6 小题，共 36 分）

1. （6 分）计算行列式 $\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ e & f & 1 & 2 \\ g & h & 3 & 4 \end{vmatrix}$

解：$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ e & f & 1 & 2 \\ g & h & 3 & 4 \end{vmatrix} = -2(ad-bc)$

2. （6 分）设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$， 求 A^{2022}

解： $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$， $A^{2021}=2^{2021}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. （6 分）设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，$P_1=\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 求 $P_1AP_2^2$.

解：$P_1AP_2^2=\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 31 & 42 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

4. （6 分）设 $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$， 且满足 $AB=A+3B$， 求矩阵 B .

解：$AB=A+3B \Rightarrow AB-3B=A \Rightarrow (A-3E)B=A \Rightarrow B=(A-3E)^{-1}A$

$(A-3E\,|\,A)=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right)$ $B=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

5. （6 分）设五元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵 A 的秩为 4， β_1,β_2,β_3 是它的三个解且满足 $\beta_1+\beta_2=(3,1,-1,2,2)^T$， $\beta_1+\beta_3=(2,0,-2,2,2)^T$，求 $Ax=b$ 的通解.

解：因为系数矩阵 A 的秩为 4，所以 $(\beta_1+\beta_2)-(\beta_1+\beta_3)=\beta_2-\beta_3=(1,1,1,0,0)^T$ 是齐次方程的基础解系. 又 $A(\beta_1+\beta_3)=2b$，所以 $\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_3)=(1,0,-1,1,1)^T$ 是 $Ax=b$ 的特解.

故通解为 $A=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$

6.（**6** 分）已知 $\mathbb{R}^2$ 的两组基：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ 和 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$，求从基 α_1,α_2 到基 β_1,β_2 的过渡矩阵.

解：设过渡矩阵为 P，则 $(\beta_1,\beta_2)=(\alpha_1,\alpha_2)P\Rightarrow(\alpha_1,\alpha_2)^{-1}(\beta_1,\beta_2)=P$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&-1&1&2\\1&1&2&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&-1&1&2\\0&2&1&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&-1&1&2\\0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\\0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

$\therefore\quad P=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

二、解答题（**7-9** 小题，共 **40** 分）

7.（**12** 分） 讨论线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1\\x_1+ax_2+a^2x_3=2\\x_1+bx_2+b^2x_3=4\end{cases}$ 解的情况。

解：$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&a^2\\1&b&b^2\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$

$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&a^2\\1&b&b^2\end{vmatrix}=(a-1)(b-1)(b-a)$ ……………………………6 分

当 $|A|\neq 0$ 时，即 $a\neq 1,b\neq 1$ 且 $a\neq b$ 时，方程组有唯一解。

当 $a=1$ 时，$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&2\\1&b&b^2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&1\\1&b&b^2&4\end{pmatrix}$,方程组无解。

当 $b=1$ 时，$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&a&a^2&2\\1&1&1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&a^2&2\\0&0&0&3\end{pmatrix}$,方程组无解。

当 $a=b$ 时，$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&a&a^2&2\\1&b&b^2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&a&a^2&2\\0&0&0&2\end{pmatrix}$,方程组无解。

……………………………6 分

8.（**12** 分） 已知向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\ \alpha_3=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$,求此向量组的所有极大线性无关组。

解：先求得向量组的秩为 2，……………………………6 分

因此极大无关组中有两个向量，从而任意两个向量都是极大无关组，共有 6 组。

……………………………6 分

9. （**16** 分）判断二次型 $f(x_1,x_2)=x_1{}^2+2x_1x_2+x_2{}^2$ 的正定性，并用正交变换将其化成标准形。

解：二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$， 各阶顺序主子式分部为 1，0，因此矩阵不正定，从而二次型不正定.

……………………………4 分

解得 A 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=2$.

λ_1 对应的特征向量为： $p_1=(-1,1)^T$,单位化得 $q_1=(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})^T$.

λ_2 对应的特征向量为： $p_2=(1,1)^T$,单位化得 $q_1=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})^T$. ……………………………8 分

令 $Q=\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$，则 $Q^T AQ = diag\{0,2\}$，正交变换 $x = Qy$ 将二次型化成：

$f(x,y) = 2{y_2}^2$ ……………………………4 分

三、证明题（10-12，每小题 8 分，共 24 分）

10. （8 分） 已知方阵 A，若 $A^3 = O$，证明：$E - A$ 可逆，且 $(E-A)^{-1} = E + A + A^2$.

直接验证即可

11.（8 分）已知正交阵 Q 和两单位向量 α，β，设 $\alpha_1 = Q\alpha$，$\beta_1 = Q\beta$，证明：向量 $\alpha_1 + \beta_1$ 与 $\beta_1 - \alpha_1$ 正交

证明：
$$[\alpha_1+\beta_1, \beta_1-\alpha_1] = (\alpha_1+\beta_1)^T(\beta_1-\alpha_1) = (\alpha+\beta)^T Q^T Q(\beta-\alpha)$$
$$= (\alpha+\beta)^T(\beta-\alpha) = \alpha^T\beta - \alpha^T\alpha + \beta^T\beta - \beta^T\alpha = 0$$
$$(\because \alpha^T\beta = \beta^T\alpha, \alpha^T\alpha = \beta^T\beta = 1)$$

故向量 $\alpha_1 + \beta_1$ 与 $\beta_1 - \alpha_1$ 正交.

12. （8 分） 设 $b \neq 0$，β 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的一个解，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系，证明：向量组 $\beta, \beta+\alpha_1, \beta+2\alpha_2, \beta+3\alpha_3$ 线性无关.

证明：设 $k_0\beta + k_1(\beta+\alpha_1) + k_2(\beta+2\alpha_2) + k_3(\beta+3\alpha_3) = 0$， 即

$(k_0+k_1+2k_2+3k_3)\beta + k_1\alpha_1 + 2k_2\alpha_2 + 3k_3\alpha_3 = 0$

于是

$0 = A((k_0+k_1+2k_2+3k_3)\beta + k_1\alpha_1 + 2k_2\alpha_2 + 3k_3\alpha_3) = (k_0+k_1+2k_2+3k_3)A\beta = (k_0+k_1+2k_2+3k_3)b$

又 $b \neq 0$，所以 $k_0+k_1+2k_2+3k_3 = 0$，从而 $k_1\alpha_1 + 2k_2\alpha_2 + 3k_3\alpha_3 = 0$.

再由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，可得 $k_1 = 2k_2 = 3k_3 = 0$. 即：$k_1 = k_2 = k_3 = 0$

再由 $k_0+k_1+2k_2+3k_3 = 0$ 可得 $k_0 = 0$， 从而 $k_0 = k_1 = k_2 = k_3 = 0$，

故向量组 $\beta, \beta+\alpha_1, \beta+2\alpha_2, \beta+3\alpha_3$ 线性无关.................................**3** 分