

# Progetto di Fondamenti di Automatica

---

---

**Giorgio Ubbriaco**  
**209899**



UNIVERSITÀ DELLA CALABRIA

DIPARTIMENTO DI  
INGEGNERIA INFORMATICA,  
MODELLISTICA, ELETTRONICA  
E SISTEMISTICA

DIMES

---

# Indice

- **Traccia\_61**
- **Esercizio\_a**
- **Esercizio\_b**
- **Esercizio\_c**

a. Si consideri un sistema lineare e stazionario a tempo continuo descritto dalla seguente risposta al segnale  $u(t) = e^{-\frac{1}{8}t} 1(t)$

$$y(t) = \left( \frac{8}{3} e^{-2t} t + \frac{24e^{-t}t}{7} + \frac{256e^{-2t}}{45} - \frac{256e^{-t}}{49} - \frac{1024e^{-t/8}}{2205} \right) 1(t)$$

Determinare:

1. la funzione di trasferimento del sistema ed i suoi poli e zeri;
2. i modi di evoluzione libera del sistema;
3. la risposta all'impulso del sistema;
4. la risposta al gradino ed il suo grafico;
5. la risposta alla rampa;
6. un possibile modello ARMA la cui funzione di trasferimento è quella ottenuta nel primo punto dell'esercizio;
7. tenendo conto del modello determinato al punto precedente valutare determinare le condizioni iniziali che annullano il transitorio della risposta al segnale  $u(t) = \cos(t) 1(t)$

b. Disegnare e descrivere il Diagramma di Bode per la seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{40 (s + 10)}{3 s^2 (s - 4) (s - \frac{1}{3})}$$

c. Si consideri il seguente schema di controllo in retroazione algebrica ed unitaria.

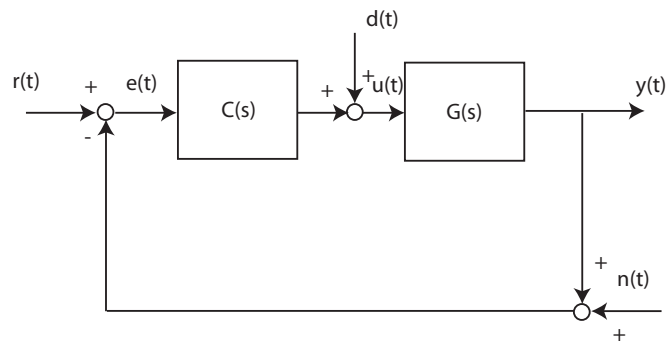


Figure 1:

dove  $G(s)$  rappresenta la f.d.t. del processo

$$G(s) = \frac{36(s+1)}{(s+3)(s+6)^2}$$

Si chiede di determinare un regolatore  $C(s)$  di struttura semplice che garantisca il soddisfacimento delle seguenti specifiche:

1. errore alla rampa non superiore al 15 %;
2. Picco di Risonanza  $M_{r,dB} \leq 3 \text{ dB}$ , banda passante  $7 \leq \omega_{BW} \leq 10 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$

## ESERCIZIO a:

restart :

with(intrans) : with(PolynomialTools) : with(DynamicSystems) : with(plots) :

a. Si consideri un sistema lineare e stazionario a tempo continuo descritto dalla seguente risposta al segnale  $u(t) = e^{-\frac{1}{8}t} 1(t)$

$$y(t) = \left( \frac{8}{3} e^{-2t} + \frac{24e^{-t}}{7} + \frac{256e^{-2t}}{45} - \frac{256e^{-t}}{49} - \frac{1024e^{-t/8}}{2205} \right) 1(t)$$

Determinare:

1. la funzione di trasferimento del sistema ed i suoi poli e zeri;
2. i modi di evoluzione libera del sistema;
3. la risposta all'impulso del sistema;
4. la risposta al gradino ed il suo grafico;
5. la risposta alla rampa;
6. un possibile modello ARMA la cui funzione di trasferimento è quella ottenuta nel primo punto dell'esercizio;
7. tenendo conto del modello determinato al punto precedente valutare determinare le condizioni iniziali che annullano il transitorio della risposta al segnale  $u(t) = \cos(t) 1(t)$

Per determinare la funzione di trasferimento del sistema in questione, devo inizialmente quantificare la risposta forzata:

la risposta forzata di un sistema lineare e stazionario è data dal prodotto algebrico tra la L-trasformata dell'ingresso  $U(s)$  ed una frazione algebrica di variabile complessa e a coefficienti reali. Quest'ultimo termine ( la frazione algebrica ) assume l'appellativo di **funzione di trasferimento del sistema  $G(s)$** . Inoltre, ricordo che la trasformata di Laplace e' un operatore funzionale lineare che associa ad una funzione di variabile reale una funzione di variabile complessa.

## 1. FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DEL SISTEMA ED I SUOI POLI E ZERI

Per soddisfare il primo punto mi limito ad utilizzare la trasformata di Laplace sulla risposta  $y(t)$  e sul segnale  $u(t)$ :

- definisco il segnale  $u(t)$

$$u_{input} := t \rightarrow e^{-\frac{1}{8} \cdot t} \cdot \text{Heaviside}(t) :$$

- definisco la risposta  $y(t)$ :

$$y_{output} := t \rightarrow \left( \frac{8}{3} \cdot e^{-2 \cdot t} + \frac{24 \cdot e^{-t} \cdot t}{7} + \frac{256 \cdot e^{-2 \cdot t}}{45} - \frac{256 \cdot e^{-t}}{49} - \frac{1024 \cdot e^{-\frac{t}{8}}}{2205} \right) \cdot \text{Heaviside}(t) :$$

- calcolo, ora, rispettivamente le L-trasformate del segnale  $u(t)$  e della risposta  $y(t)$ :

$$Y_{output} := s \rightarrow \text{laplace}(y_{output}(t), t, s) :$$

$$Y_{output}(s) = \frac{8(2s - 1)}{(s + 2)^2 (1 + s)^2 (8s + 1)} \quad (2.1)$$

$$U_{input} := s \rightarrow \text{laplace}(u_{input}(t), t, s) :$$

$$U_{input}(s) = \frac{8}{8s + 1} \quad (2.2)$$

- Pertanto, ora posso definire la funzione di trasferimento del sistema. Essa è il rapporto fra la L-trasformata della risposta forzata  $Y(s)$  ed il suo ingresso  $U(s)$  nel dominio di Laplace:

$$G := s \rightarrow \frac{Y_{output}(s)}{U_{input}(s)} :$$

$$G(s) = \frac{2s - 1}{(s + 2)^2 (1 + s)^2} \quad (2.3)$$

- Posso ora calcolare rispettivamente gli zeri e i poli della funzione di trasferimento del sistema lineare e stazionario a tempo continuo in questione:

$$\text{zeri} := \text{solve}(\text{numer}(G(s)))$$

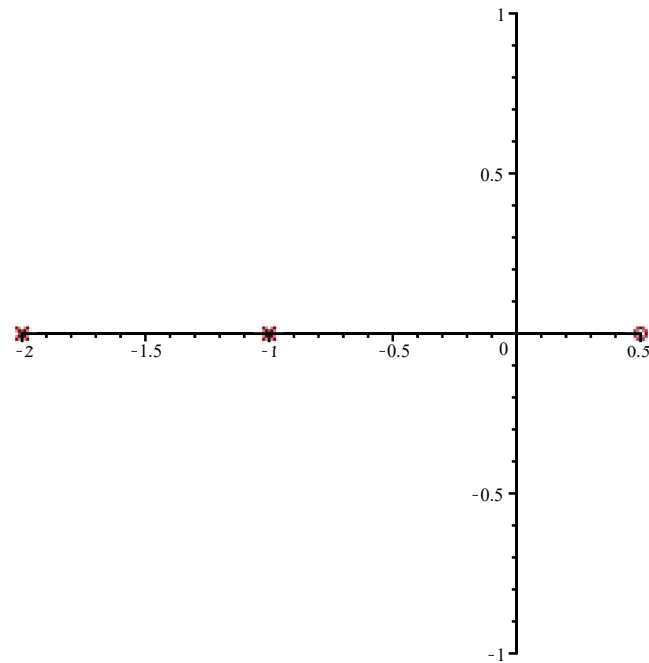
$$\text{zeri} := \frac{1}{2} \quad (2.4)$$

$$\text{poli} := \text{solve}(\text{denom}(G(s)))$$

$$\text{poli} := -2, -2, -1, -1 \quad (2.5)$$

Rappresento graficamente gli zeri e i poli del sistema ottenuti attraverso una funzione del DynamicSystems package di Maple:

$$\text{ZeroPolePlot}(\text{TransferFunction}(G(s)))$$



Gli zeri del sistema sono rappresentati dai "cerchietti" sul grafico, mentre i poli sono contrassegnati dalle "crocette".

## 2. I MODI DI EVOLUZIONE LIBERA DEL SISTEMA

I modi di evoluzione libera di un sistema lineare e stazionario a tempo continuo sono quelle componenti presenti nella risposta libera, nella risposta transitoria e nella risposta impulsiva. Tanto è vero che, quest'ultime possono essere riscritte come combinazione lineare dei modi di evoluzione libera del sistema. Il numero di tali modi è dato dal numero di poli che presenta il sistema. Pertanto, in questo caso, avendo 4 poli

$$n := \text{degree}(\text{denom}(G(s)), s)$$

$$n := 4 \quad (3.1)$$

Ovviamente, tali componenti ( i modi di evoluzione libera del sistema ) sono diversi tra di loro in base alla tipologia di polo che si sta considerando. In questo caso, mi trovo davanti a poli reali multipli; in particolare il polo "-2" avrà molteplicità pari a 2 e il polo "-1" avrà anch'esso molteplicità doppia.

Pertanto, verranno generati tanti modi quant'è la molteplicità per ogni polo considerato: calcolo l'anti-trasformata di Laplace ed "estraggo" i modi di evoluzione libera del sistema:

$$\text{invlaplace}(G(s), s, t)$$

$$-e^{-2t} (8 + 5t) - e^{-t} (3t - 8) \quad (3.2)$$

$$\text{expand}((3.2), \text{exp})$$

$$-8e^{-2t} - 5e^{-2t}t - 3e^{-t}t + 8e^{-t} \quad (3.3)$$

dove ogni termine dell'anti-trasformata ottenuta è un modo di evoluzione libera del sistema:

$$\text{op}(1, (3.3))$$

$$-8e^{-2t} \quad (3.4)$$

$$\text{op}(2, (3.3))$$

$$-5e^{-2t}t \quad (3.5)$$

$op(3, (3.3))$

$$-3 e^{-t} t \quad (3.6)$$

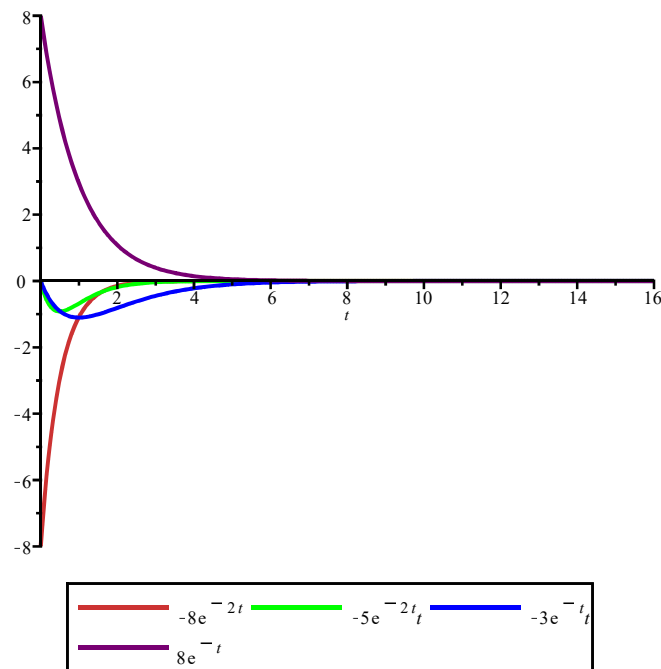
$op(4, (3.3))$

$$8 e^{-t} \quad (3.7)$$

Dopo aver calcolato i modi di evoluzione libera, posso effettuare un'ulteriore e più "profonda" analisi riguardo i poli del sistema lineare e stazionario a tempo continuo: posso notare che i poli del sistema in questione sono tutti a parte reale negativa e, pertanto, posso affermare che il sistema in questione è BIBO-STABILE. Quindi, essendo che il sistema è BIBO-STABILE, allora i modi, appena calcolati, convergono a zero, cioè, quindi, la risposta all'impulso, la risposta libera e la risposta transitoria convergono tutte a zero.

Rappresento, inoltre, graficamente i modi del sistema:

$plot([ (3.4), (3.5), (3.6), (3.7)], t=0..16, legend=[ (3.4), (3.5), (3.6), (3.7)], color=[orange, green, blue, purple])$



### 3. LA RISPOSTA ALL'IMPULSO DEL SISTEMA

La risposta all'impulso è l'anti-trasformata di Laplace della funzione di trasferimento del sistema. Pertanto:

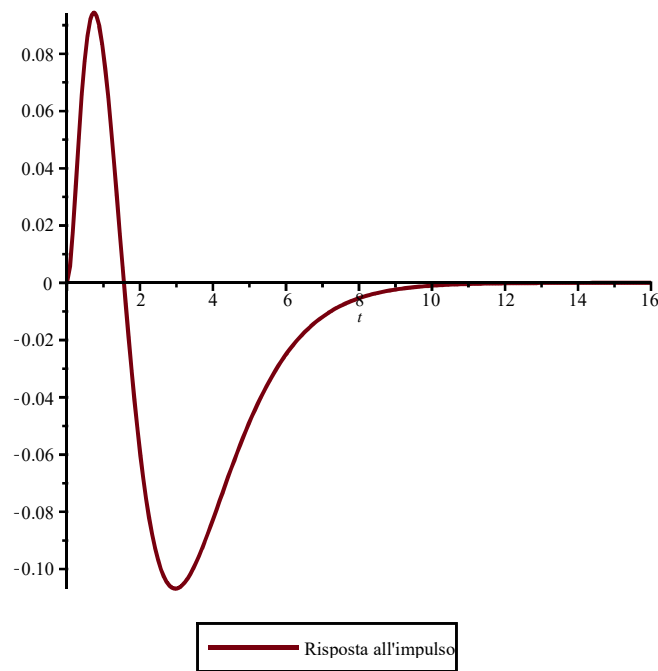
$g := t \rightarrow \text{invlaplace}(G(s), s, t) :$   
 $g(t)$

$$-e^{-2t} (8 + 5t) - e^{-t} (3t - 8) \quad (4.1)$$

Rappresento la risposta all'impulso ottenuta:

$plot(g(t), t=0..16, legend=["Risposta all'impulso"])$





Analizzando l'espressione analitica della risposta all'impulso ottenuta, posso affermare che se il limite per  $t$  che tende a  $+\infty$  della risposta all'impulso è pari a zero, allora il sistema LTI-TC, in questione, è BIBO-STABILE:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (g(t)) = 0 \quad (4.2)$$

Pertanto, essendo che il limite calcolato è pari a zero, il sistema LTI-TC considerato è BIBO-STABILE (è una ulteriore conferma riguardo la BIBO-STABILITA' studiata precedentemente nella sezione "I MODI DI EVOLUZIONE LIBERA DEL SISTEMA" !).

## 4. LA RISPOSTA AL GRADINO ED IL SUO GRAFICO

Il gradino unitario  $1(t)$  (o anche conosciuto come "scalino unitario") è una funzione right-sided, dove per funzione right-sided si intende una funzione definita per  $t \geq 0$  e che per  $t < 0$  vale zero, che ha le seguenti caratteristiche:

$$\text{funzione di Heaviside } 1(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Ricordando che la trasformata di Laplace della funzione di Heaviside è pari a:

$$U_{\text{gradino}} := s \rightarrow \text{laplace}(\text{Heaviside}(t), t, s) : \\ U_{\text{gradino}}(s) = \frac{1}{s} \quad (5.1)$$

si avrà che:

$$Y_{\text{gradino}} := s \rightarrow G(s) \cdot U_{\text{gradino}}(s) :$$

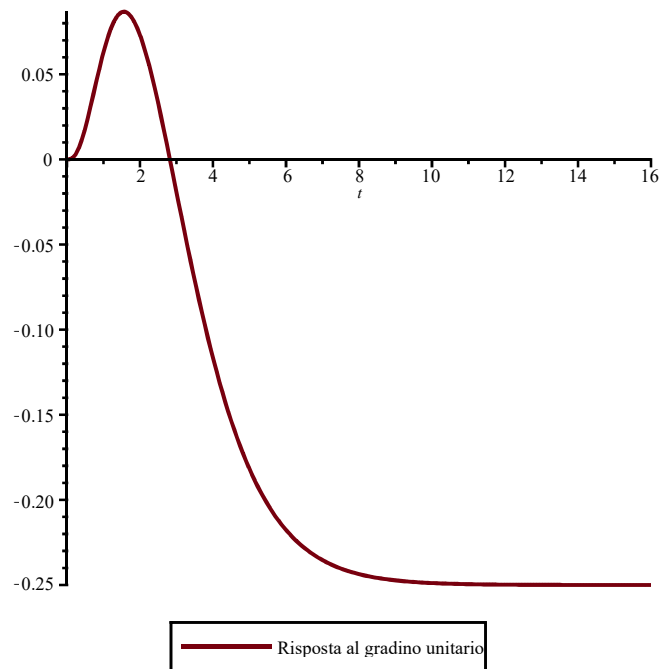
$$Y_{gradino}(s) = \frac{2s - 1}{(s + 2)^2 (1 + s)^2 s} \quad (5.2)$$

Pertanto, la risposta al gradino unitario sarà ottenuta applicando l'anti-trasformata di Laplace alla funzione  $Y_{gradino}(s)$ :

$$y_{gradino} := t \rightarrow \text{invlaplace}(Y_{gradino}(s), s, t) \cdot \text{Heaviside}(t) :$$

$$y_{gradino}(t) = \left( -\frac{1}{4} + \frac{e^{-2t} (21 + 10t)}{4} + (3t - 5) e^{-t} \right) \text{Heaviside}(t) \quad (5.3)$$

`plot( $y_{gradino}(t)$ ,  $t=0..16$ ,  $legend=["Risposta al gradino unitario"]$ )`

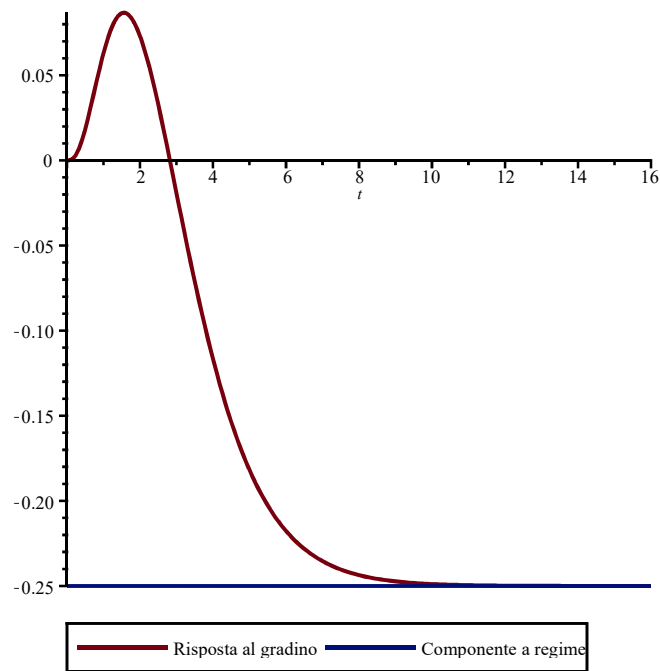


Osservando il grafico posso notare che la componente a regime in questione risulta coincidere con un'ordinata negativa. Per calcolarla, effettuo la seguente operazione:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y_{gradino}(t)) = -\frac{1}{4} \quad (5.4)$$

Rappresento nuovamente il grafico della risposta al gradino insieme alla componente a regime.

$$\text{plot}([y_{gradino}(t), (5.4)], t=0..16, legend=["Risposta al gradino", "Componente a regime"])$$



## 5. LA RISPOSTA ALLA RAMPA

La rampa unitaria (il termine "unitaria" è legato al coefficiente angolare) è un segnale utile a definire, nei problemi di controllo automatico, dei segnali-obiettivo che hanno derivata costante o velocità costante. Essa è denominata anche con l'appellativo di "segnale a deriva costante" proprio per il fatto che il coefficiente angolare (cioè la velocità di deriva) è costante. Inoltre, essa è una funzione right-sided e ha le seguenti caratteristiche:

$$F(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Pertanto, il segnale di rampa unitaria sarà:

$$u_{rampa} := t \rightarrow t \cdot \text{Heaviside}(t) :$$

$$u_{rampa}(t) = t \cdot \text{Heaviside}(t) \quad (6.1)$$

Ricordando che la trasformata di Laplace della funzione appena ottenuta è pari a:

$$U_{rampa} := s \rightarrow \text{laplace}(u_{rampa}(t), t, s) :$$

$$U_{rampa}(s) = \frac{1}{s^2} \quad (6.2)$$

si avrà che:

$$Y_{rampa} := s \rightarrow G(s) \cdot U_{rampa}(s) :$$

$$Y_{rampa}(s)$$

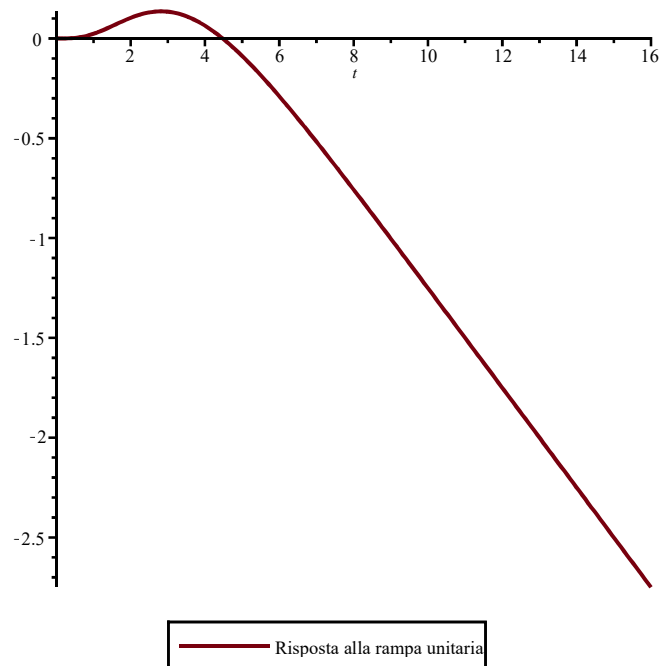
$$\frac{2s - 1}{(s + 2)^2 (1 + s)^2 s^2} \quad (6.3)$$

Pertanto, la risposta alla rampa unitaria sarà ottenuta applicando l'anti-trasformata di Laplace alla funzione  $Y_{rampa}(s)$ :

$$y_{rampa} := t \rightarrow \text{invlaplace}(Y_{rampa}(s), s, t) \cdot \text{Heaviside}(t) :$$

$$y_{rampa}(t) \left( \frac{5}{4} - \frac{t}{4} - \frac{e^{-2t}(13 + 5t)}{4} - e^{-t}(3t - 2) \right) \text{Heaviside}(t) \quad (6.4)$$

`plot(yrampa(t), t = 0..16, legend = ["Risposta alla rampa unitaria"])`



## 6. UN POSSIBILE MODELLO ARMA LA CUI FUNZIONE DI TRASFERIMENTO E' QUELLA OTTENUTA NEL PRIMO PUNTO DELL'ESERCIZIO

Per determinare un modello I-U a partire dalla funzione di trasferimento  $G(s)$  dobbiamo sempre ricordare la relazione che lega ingresso e uscita nel dominio della trasformata di Laplace:

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s).$$

Essendo  $G(s)$  pari a  $G(s)$

$$\frac{2s - 1}{(s + 2)^2 (1 + s)^2} \quad (7.1)$$

ed essendo una funzione di polinomi real-razionali posso scrivere:

$$Y(s) = \left( \frac{\text{num}G}{\text{den}G} \right) \cdot U(s)$$

da cui si ha:

$$\text{den}G \cdot Y(s) = \text{num}G \cdot U(s)$$

Pertanto, salvo in due variabili distinte rispettivamente il numeratore e il denominatore di G(s):

$$\text{numeratore}G := s \rightarrow \text{convert}(\text{numer}(G(s)), \text{parfrac}) : \\ \text{numeratore}G(s)$$

$$2s - 1 \quad (7.2)$$

$$\text{denominatore}G := s \rightarrow \text{convert}(\text{denom}(G(s)), \text{parfrac}) : \\ \text{denominatore}G(s)$$

$$(s + 2)^2 (1 + s)^2 \quad (7.3)$$

Ora, posso definire il modello I-U (come già anticipato sopra):

$$\text{denominatore}G(s) \cdot Y(s) = \text{numeratore}G(s) \cdot U(s)$$

$$(s + 2)^2 (1 + s)^2 Y(s) = (2s - 1) U(s) \quad (7.4)$$

$$\text{modello\_IU} := \text{expand}((7.4)) :$$

$$\text{modello\_IU}$$

$$Y(s) s^4 + 6 Y(s) s^3 + 13 Y(s) s^2 + 12 Y(s) s + 4 Y(s) = 2 U(s) s - U(s) \quad (7.5)$$

Effettuando ora l'antitrasformata di Laplace e tenendo conto del teorema della derivata ottengo la relazione ingresso-uscita nel dominio del tempo, ovvero un'equazione differenziale che ha la seguente forma:

$$IU := y''''(t) + 6 \cdot y'''(t) + 13 \cdot y''(t) + 12 \cdot y'(t) + 4 \cdot y(t) = 2 \cdot u'(t) - u(t)$$

$$IU := D^{(4)}(y)(t) + 6 D^{(3)}(y)(t) + 13 D^{(2)}(y)(t) + 12 D(y)(t) + 4 y(t) = 2 D(u)(t) - u(t) \quad (7.6)$$

Noto che l'equazione differenziale che rappresenta la relazione vigente tra ingresso e uscita è del quarto ordine, ma questo lo si poteva già capire dal fatto che l'equazione polinomiale ottenuta nel dominio di Laplace è di quarto grado.

## 7.TENENDO CONTO DEL MODELLO DETERMINATO AL PUNTO PRECEDENTE VALUTARE E DETERMINARE LE CONDIZIONI INIZIALI CHE ANNULLANO IL TRANSITORIO DELLA RISPOSTA AL SEGNALE $u(t) = \cos(t)$ 1(t)

Poichè devo tenere conto del modello ottenuto al punto precedente, cioè:

$$IU(t)$$

$$D^{(4)}(y)(t) + 6 D^{(3)}(y)(t) + 13 D^{(2)}(y)(t) + 12 D(y)(t) + 4 y(t) = 2 D(u)(t) - u(t) \quad (8.1)$$

trasformo l'equazione differenziale ottenuta in una equazione algebrica nel dominio della variabile complessa 's' (Trasformata di Laplace).

$IU\_s := s \rightarrow \text{laplace}(IU, t, s) :$

$IU\_s(s)$

$$\begin{aligned} s^4 \mathcal{L}(y(t), t, s) - D^{(3)}(y)(0) - s D^{(2)}(y)(0) - s^2 D(y)(0) - s^3 y(0) + 6 s^3 \mathcal{L}(y(t), t, s) \\ - 6 D^{(2)}(y)(0) - 6 s D(y)(0) - 6 s^2 y(0) + 13 s^2 \mathcal{L}(y(t), t, s) - 13 D(y)(0) \\ - 13 s y(0) + 12 s \mathcal{L}(y(t), t, s) - 12 y(0) + 4 \mathcal{L}(y(t), t, s) = 2 s \mathcal{L}(u(t), t, s) - 2 u(0) \\ - \mathcal{L}(u(t), t, s) \end{aligned} \quad (8.2)$$

$\text{eval}((8.2), u(0) = 0)$

$$\begin{aligned} s^4 \mathcal{L}(y(t), t, s) - D^{(3)}(y)(0) - s D^{(2)}(y)(0) - s^2 D(y)(0) - s^3 y(0) + 6 s^3 \mathcal{L}(y(t), t, s) \\ - 6 D^{(2)}(y)(0) - 6 s D(y)(0) - 6 s^2 y(0) + 13 s^2 \mathcal{L}(y(t), t, s) - 13 D(y)(0) \\ - 13 s y(0) + 12 s \mathcal{L}(y(t), t, s) - 12 y(0) + 4 \mathcal{L}(y(t), t, s) = 2 s \mathcal{L}(u(t), t, s) \\ - \mathcal{L}(u(t), t, s) \end{aligned} \quad (8.3)$$

Per non appesantire la notazione, faccio alcune sostituzioni:

$\text{subs}(\text{laplace}(y(t), t, s) = Y(s), \text{laplace}(u(t), t, s) = U(s), (8.3))$

$$\begin{aligned} Y(s) s^4 - D^{(3)}(y)(0) - s D^{(2)}(y)(0) - s^2 D(y)(0) - s^3 y(0) + 6 Y(s) s^3 - 6 D^{(2)}(y)(0) \\ - 6 s D(y)(0) - 6 s^2 y(0) + 13 Y(s) s^2 - 13 D(y)(0) - 13 s y(0) + 12 Y(s) s - 12 y(0) \\ + 4 Y(s) = 2 U(s) s - U(s) \end{aligned} \quad (8.4)$$

Risolvo l'equazione differenziale per ottenere la soluzione nel dominio della variabile complessa s:

$\text{solve}((8.4), Y(s))$

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^4 + 6 s^3 + 13 s^2 + 12 s + 4} (s^3 y(0) + s^2 D(y)(0) + 6 s^2 y(0) + 2 U(s) s + s D^{(2)}(y)(0) \\ + 6 s D(y)(0) + 13 s y(0) - U(s) + D^{(3)}(y)(0) + 6 D^{(2)}(y)(0) + 13 D(y)(0) \\ + 12 y(0)) \end{aligned} \quad (8.5)$$

Utilizzo il comando collect per dividere la risposta libera e la risposta forzata:

$\text{collect}((8.5), U(s))$

$$\begin{aligned} \frac{(2 s - 1) U(s)}{s^4 + 6 s^3 + 13 s^2 + 12 s + 4} + \frac{1}{s^4 + 6 s^3 + 13 s^2 + 12 s + 4} (s^3 y(0) + s^2 D(y)(0) \\ + 6 s^2 y(0) + s D^{(2)}(y)(0) + 6 s D(y)(0) + 13 s y(0) + D^{(3)}(y)(0) + 6 D^{(2)}(y)(0) \\ + 13 D(y)(0) + 12 y(0)) \end{aligned} \quad (8.6)$$

Posso notare che la componente legata all'ingresso è la prima:

$Y_{forzata} := s \rightarrow op(1, \mathbf{(8.6)}) :$

$Y_{forzata}(s)$

$$\frac{(2s - 1) U(s)}{s^4 + 6s^3 + 13s^2 + 12s + 4} \quad (8.7)$$

mentre la seconda descrive il comportamento sulla base delle condizioni iniziali:

$Y_{libera} := s \rightarrow op(2, \mathbf{(8.6)}) :$

$Y_{libera}(s)$

$$\frac{1}{s^4 + 6s^3 + 13s^2 + 12s + 4} (s^3 y(0) + s^2 D(y)(0) + 6s^2 y(0) + s D^{(2)}(y)(0) + 6s D(y)(0) + 13sy(0) + D^{(3)}(y)(0) + 6D^{(2)}(y)(0) + 13D(y)(0) + 12y(0)) \quad (8.8)$$

Considerando il segnale periodico elementare  $\cos(t) \cdot 1(t)$  come previsto dalla traccia:

$u_7 := t \rightarrow \cos(t) \cdot \text{Heaviside}(t) :$

$u_7(t)$

$$\cos(t) \text{Heaviside}(t) \quad (8.9)$$

calcolo la trasformata di Laplace di quest'ultimo:

$U_7 := s \rightarrow \text{laplace}(u_7(t), t, s) :$

$U_7(s)$

$$\frac{s}{s^2 + 1} \quad (8.10)$$

Pertanto, ora posso valutare la risposta forzata in corrispondenza del segnale periodico elementare  $\cos(t) \cdot 1(t)$ :

$\text{invlaplace}(\text{eval}(Y_{forzata}(s), U(s) = U_7(s)), s, t)$

$$\frac{\cos(t)}{5} + \frac{\sin(t)}{10} + \frac{e^{-2t}(19 + 10t)}{5} + \frac{e^{-t}(3t - 8)}{2} \quad (8.11)$$

Valuto ora la risposta al segnale periodico elementare  $\cos(t) \cdot 1(t)$  nel dominio della trasformata di Laplace:

$\text{eval}(Y_{forzata}(s), U(s) = U_7(s))$

$$\frac{(2s - 1)s}{(s^4 + 6s^3 + 13s^2 + 12s + 4)(s^2 + 1)} \quad (8.12)$$

$\text{convert}(\mathbf{(8.12)}, \text{parfrac})$

$$\frac{3}{2(1+s)^2} + \frac{2}{(s+2)^2} + \frac{19}{5(s+2)} + \frac{2s+1}{10(s^2+1)} - \frac{4}{1+s} \quad (8.13)$$

Sapendo che la risposta forzata di un sistema lineare e stazionario a tempo continuo puo' essere sempre scritta nella somma di una componente legata algebricamente all'ingresso ( risposta a regime ) e di una componente legata ai poli della funzione di trasferimento ( risposta transitoria ), posso identificare la risposta transitoria come la somma di quelle frazioni che presentano al denominatore i poli della  $G(s)$ . Inoltre, essendo che la  $G(s)$  e' :

$$G(s) = \frac{2s - 1}{(s + 2)^2 (1 + s)^2} \quad (8.14)$$

pertanto, la risposta transitoria sarà:

$$Y_{tr} := s \rightarrow op(1, (8.13)) + op(2, (8.13)) :$$

$$Y_{tr}(s) = \frac{3}{2(1+s)^2} + \frac{2}{(s+2)^2} \quad (8.15)$$

Sommando la componente transitoria della risposta forzata, a fronte dell'ingresso periodico elementare  $\cos(t) \cdot 1(t)$ , e la risposta libera del sistema, ottengo la risposta transitoria complessiva:

$$Y_{tr}(s) + Y_{libera}(s) = \frac{3}{2(1+s)^2} + \frac{2}{(s+2)^2} + \frac{1}{s^4 + 6s^3 + 13s^2 + 12s + 4} (s^3 y(0) + s^2 D(y)(0) + 6s^2 y(0) + s D^{(2)}(y)(0) + 6s D(y)(0) + 13s y(0) + D^{(3)}(y)(0) + 6 D^{(2)}(y)(0) + 13 D(y)(0) + 12 y(0)) \quad (8.16)$$

Per ottenere le condizioni iniziali per cui il transitorio della risposta al segnale periodico elementare  $\cos(t) \cdot 1(t)$  è nullo, la risposta transitoria complessiva deve essere identicamente nulla. Essendo quest'ultima una frazione, sarà identicamente nulla se il suo numeratore è nullo. Essendo il numeratore:

*numer*((8.16))

$$64 + 272s + 8 D^{(3)}(y)(0) + 48 D^{(2)}(y)(0) + 104 D(y)(0) + 96 y(0) + 476 s^2 + 7 s^6 + 62 s^5 + 152 s D^{(2)}(y)(0) + 490 s^2 D(y)(0) + 634 s^3 y(0) + 360 s D(y)(0) + 672 s^2 y(0) + 392 s y(0) + 2 y(0) s^7 + 24 y(0) s^6 + 2 D(y)(0) s^6 + 124 y(0) s^5 + 24 D(y)(0) s^5 + 2 D^{(2)}(y)(0) s^5 + 360 y(0) s^4 + 124 D(y)(0) s^4 + 24 D^{(2)}(y)(0) s^4 + 2 D^{(3)}(y)(0) s^4 + 336 D(y)(0) s^3 + 98 D^{(2)}(y)(0) s^3 + 12 D^{(3)}(y)(0) s^3 + 180 D^{(2)}(y)(0) s^2 + 26 D^{(3)}(y)(0) s^2 + 24 D^{(3)}(y)(0) s + 227 s^4 + 440 s^3 \quad (8.17)$$

*collect*((8.17), { $y(0)$ ,  $D(y)(0)$ ,  $D^{(2)}(y)(0)$ ,  $D^{(3)}(y)(0)$ ,  $D^{(4)}(y)(0)$ })

$$(2s^7 + 24s^6 + 124s^5 + 360s^4 + 634s^3 + 672s^2 + 392s + 96) y(0) + (2s^6 + 24s^5 + 124s^4 + 336s^3 + 490s^2 + 360s + 104) D(y)(0) + (2s^5 + 24s^4 + 98s^3 + 180s^2 + 152s + 48) D^{(2)}(y)(0) + (2s^4 + 12s^3 + 26s^2 + 24s + 8) D^{(3)}(y)(0) + 7s^6 + 62s^5 + 227s^4 \quad (8.18)$$



$$+ 440 s^3 + 476 s^2 + 272 s + 64$$

Il numeratore della risposta transitoria è un polinomio in funzione dei parametri

$y(0)$ ,  $D(y)(0)$ ,  $D^{(2)}(y)(0)$ ,  $D^{(3)}(y)(0)$ . Un polinomio e' nullo quando sono nulli i suoi coefficienti.

Quindi, estraggo i suoi coefficienti:

$$\text{coeff}(\text{numer}(\mathbf{(8.18)}), s, 0) \\ 64 + 8 D^{(3)}(y)(0) + 48 D^{(2)}(y)(0) + 104 D(y)(0) + 96 y(0) \quad (8.19)$$

$$\text{coeff}(\text{numer}(\mathbf{(8.18)}), s, 1) \\ 272 + 152 D^{(2)}(y)(0) + 360 D(y)(0) + 392 y(0) + 24 D^{(3)}(y)(0) \quad (8.20)$$

$$\text{coeff}(\text{numer}(\mathbf{(8.18)}), s, 2) \\ 476 + 490 D(y)(0) + 672 y(0) + 180 D^{(2)}(y)(0) + 26 D^{(3)}(y)(0) \quad (8.21)$$

$$\text{coeff}(\text{numer}(\mathbf{(8.18)}), s, 3) \\ 634 y(0) + 336 D(y)(0) + 98 D^{(2)}(y)(0) + 12 D^{(3)}(y)(0) + 440 \quad (8.22)$$

Le quattro relazioni che ho trovato devono essere nulle, le quali forniscono un sistema lineare a quattro equazioni e quattro incognite. Calcolo le soluzioni del sistema:

$$\text{soluzione} := \text{solve}(\{(\mathbf{8.19})=0, (\mathbf{8.20})=0, (\mathbf{8.21})=0, (\mathbf{8.22})=0\}, \{D^{(3)}(y)(0), D^{(2)}(y)(0), \\ D^{(1)}(y)(0), y(0)\}) \\ \text{soluzione} := \left\{ y(0)=0, D(y)(0)=-\frac{7}{2}, D^{(2)}(y)(0)=11, D^{(3)}(y)(0)=-\frac{57}{2} \right\} \quad (8.23)$$

Le soluzioni di questo sistema sono i valori delle condizioni iniziali per cui il transitorio della risposta al segnale periodico elementare  $\cos(t) \cdot 1(t)$  e' nullo.

$$\text{soluzione}[1] \\ y(0)=0 \quad (8.24)$$

$$\text{soluzione}[2] \\ D(y)(0)=-\frac{7}{2} \quad (8.25)$$

$$\text{soluzione}[3] \\ D^{(2)}(y)(0)=11 \quad (8.26)$$

$$\text{soluzione}[4] \\ D^{(3)}(y)(0)=-\frac{57}{2} \quad (8.27)$$

## ESERCIZIO **b**:

b. Disegnare e descrivere il Diagramma di Bode per la seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{40 (s + 10)}{3 s^2 (s - 4) (s - \frac{1}{3})}$$

*restart : with(intrans) : with(PolynomialTools) : with(DynamicSystems) : with(plots) :*

### Il diagramma di Bode

Il diagramma di Bode e' una rappresentazione del modulo della risposta in frequenza  $|G(j\omega)|$  e della sua fase  $\angle G(j\omega)$  al variare entrambi di  $\omega \in (-\infty, +\infty)$ . Mediante tale rappresentazione, si costruiscono, quindi, due diagrammi cartesiani la cui variabile indipendente e' la pulsazione  $\omega$  e le variabili dipendenti sono, rispettivamente, il modulo (**diagramma dei moduli**) e la fase di  $G(j\omega)$  (**diagramma delle fasi**).

Considero il sistema dinamico LTI-TC descritto dalla funzione di trasferimento:

$$G := s \rightarrow \frac{40 s + 400}{3 s^2 (s - 4) \left(s - \frac{1}{3}\right)} :$$

$G(s)$

$$\frac{40 s + 400}{3 s^2 (s - 4) \left(s - \frac{1}{3}\right)} \quad (1)$$

il sistema non e' BIBO stabile poiche' presenta due poli nel semi-piano destro. Calcolo poli e zeri della funzione di trasferimento e li rappresento in un apposito grafico:

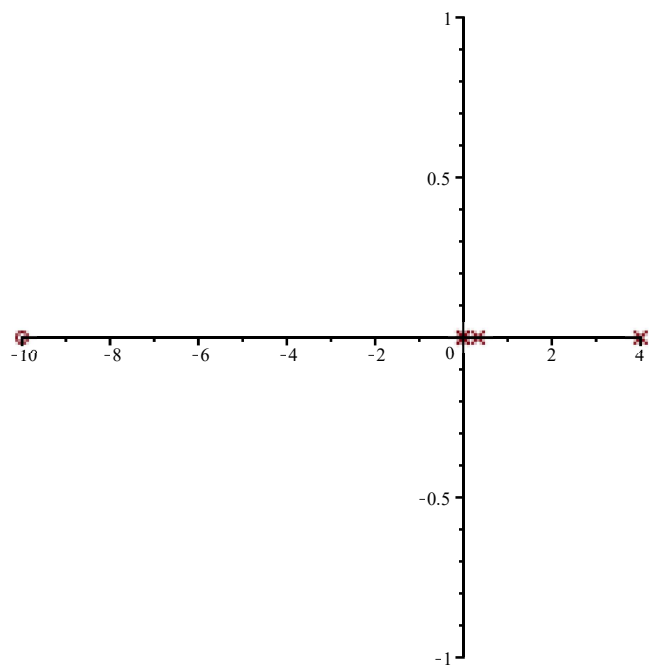
$$poliG0 := [solve(denom(G(s)), s)]$$

$$poliG0 := \left[4, \frac{1}{3}, 0, 0\right] \quad (2)$$

$$zeriG := [solve(numer(G(s)), s)]$$

$$zeriG := [-10] \quad (3)$$

$$ZeroPolePlot(TransferFunction(G(s)))$$



posso notare uno zero a fase minima, due poli nell'origine e due poli nel semi-piano destro

Inoltre, calcolo il numero di effetti integrali (poli nell'origine) presenti della funzione di trasferimento:

$$\mu := \text{numboccur}(\text{poliG0}, 0)$$

$$\mu := 2 \quad (4)$$

Elimino i poli nell'origine dalla lista dei poli per poter calcolare le pulsazioni di taglio dei rimanenti poli:

$$\text{poliG} := \text{remove}(x \rightarrow x = 0, \text{poliG0})$$

$$\text{poliG} := \left[ 4, \frac{1}{3} \right] \quad (5)$$

Pertanto, ora, posso calcolare **le pulsazioni di taglio rispettivamente degli zeri e dei poli della funzione di trasferimento** in questione, ricordando che esse sono quelle pulsazioni in corrispondenza delle quali il diagramma cambia pendenza ed, inoltre, da un punto di vista quantitativo tali pulsazioni descrivono il massimo scostamento tra il diagramma reale e quello approssimato:

$$\Omega_t := \text{abs}\sim(\text{zeriG})$$

$$\Omega_t := [10] \quad (6)$$

$$\omega_t := \text{abs}\sim(\text{poliG})$$

$$\omega_t := \left[ 4, \frac{1}{3} \right] \quad (7)$$

salvo in due variabili **il numero di zeri e poli** della funzione di trasferimento:

$$nz := \text{numelems}(\text{zeriG})$$

$$nz := 1 \quad (8)$$

$$np := \text{numelems}(\text{poliG})$$

$$np := 2 \quad (9)$$

Oltretutto, e' utile sfruttare la cosiddetta **approssimazione asintotica** cosi' da essere in grado di ricavare gli asintoti delle varie funzioni effettive dei moduli e delle fasi, corrispondenti alla risposta in frequenza in questione, in bassa e alta frequenza e successivamente "raccordarli" giudiziosamente. Tale procedimento e' importante perche' fa capire l'andamento qualitativo del diagramma dei moduli e delle fasi dei vari contributi.

Costruisco ora *la funzione che approssima i moduli*:

$$f_a := (\omega, \omega_c) \rightarrow \begin{cases} 0 & \frac{\omega}{\omega_c} < 1 \\ 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right) & \frac{\omega}{\omega_c} \geq 1 \end{cases} :$$

e definisco *la funzione che calcola effettivamente il modulo*:

$$f := (\omega, \omega_c) \rightarrow 20 \cdot \log_{10} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^2} \right) :$$

Costruisco ora *la funzione che approssima le fasi*:

$$g_a := (\omega, \omega_c) \rightarrow \begin{cases} 0 & \frac{\omega}{\omega_c} < \frac{1}{10} \\ \frac{\pi}{4} \cdot \log_{10} \left( \frac{\frac{\omega}{\omega_c}}{\frac{1}{10}} \right) & \frac{1}{10} \leq \frac{\omega}{\omega_c} < 10 \\ \frac{\pi}{2} & \frac{\omega}{\omega_c} \geq 10 \end{cases} :$$

e definisco *la funzione che calcola effettivamente le fasi*:

$$g := (\omega, \omega_c) \rightarrow \arg \left( 1 + I \cdot \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right) \right) :$$

In generale, la funzione di trasferimento di un sistema lineare e stazionario può essere scritta nella sua *forma fattorizzata*, cioè nella seguente forma (supponendo che m sia il numero di zeri ed n il numero di poli):

$$G(s) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

Nel nostro caso, la funzione di trasferimento è pari a:

$G(s)$

$$\frac{40s + 400}{3s^2(s - 4) \left(s - \frac{1}{3}\right)} \quad (10)$$

Per poter disegnare i diagrammi di Bode della risposta in frequenza di un sistema lineare e stazionario è necessario, invece, mettere in evidenza le peculiarità degli zeri e dei poli (se essi sono reali o complessi coniugati) sfruttando le costanti di tempo per i poli e zeri reali o lo smorzamento e la pulsazione naturale per i poli e zeri complessi coniugati e l'eventuale presenza di poli (o zeri) nell'origine. Pertanto, si definisce *forma di Bode* la seguente forma:

$$G(s) = K_b \cdot \frac{\prod_{i=1}^m \left(1 + \operatorname{sgn}(-z_i) \cdot \frac{s}{\Omega_i}\right)}{s^\nu \cdot \prod_{i=1}^r \left(1 + \operatorname{sgn}(-p_i) \cdot \frac{s}{\omega_i}\right)}$$

con  $\mu + r = n$ , dove  $\mu$  è il numero di poli nell'origine ed, inoltre:

- $K_b$  è il *guadagno di Bode* pari a:

$$K_b := \lim_{s \rightarrow 0} (s^\mu \cdot G(s))$$

- $\Omega_i = |z_i|$  e  $\omega_i = |p_i|$  denotano le pulsazioni di rottura, rispettivamente, di zeri e poli reali (non nell'origine)
- l'operatore  $\operatorname{sgn}$  tiene conto della locazione dello zero e del polo reale (non nell'origine) rispetto all'asse immaginario.

In questo caso, i poli reali (tranne quelli collocati nell'origine) si trovano nel semi-piano destro e proprio per questo motivo il sistema risulta non BIBO stabile (proprio perché si tratta di poli instabili avendo  $\operatorname{Re}(p_i) > 0$ ). L'unico zero della funzione di trasferimento del sistema in questione si trova nel semi-piano sinistro e proprio per questo motivo risulta essere uno zero a fase minima (proprio perché presenta  $\operatorname{Re}(z_i) < 0$ ).

Calcolo il *guadagno di Bode*:

$$K_b := \lim_{s \rightarrow 0} s^\mu \cdot G(s)$$

$$K_b := 100 \quad (11)$$

Pertanto, *la forma di Bode* corrispondente sarà:

$$G_{BODE} := s \rightarrow 100 \cdot \frac{\left(1 + \frac{s}{10}\right)}{s^2 \cdot \left(1 - \frac{s}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{s}{\frac{1}{3}}\right)} :$$

$$G_{BODE}(s)$$

$$\frac{100 \left(1 + \frac{s}{10}\right)}{s^2 \left(1 - \frac{s}{4}\right) (1 - 3s)} \quad (12)$$

## Contribuiti ai moduli e alle fasi

Ovviamente, prima di definire le funzioni per calcolare moduli e fasi di tale risposta in frequenza bisogna valutare i vari contributi ai moduli e alle fasi che si hanno per questa determinata risposta in frequenza:

- $K_b$ :

--contributo ai moduli-- : si avra' un'amplificazione (essendo che  $|K_b| > 1$ ) e, pertanto,  $|K_b|_{dB} > 0$

--contributo alle fasi-- : si avra' un contributo pari a 0 (essendo che  $K_b > 0$ )

- poli nell'origine ( $s=0$ ):

--contributo ai moduli-- : da  $\omega = 0$  in poi la pendenza e'  $-40 \frac{dB}{decade}$  (essendo presenti due poli nell'origine)

--contributo alle fasi-- : contributo costante pari a  $-\pi$  (essendo presenti due poli nell'origine)

- zero a fase minima:

--contributo ai moduli-- : In corrispondenza della pulsazione di rottura  $\Omega = 10$ , la pendenza del diagramma dei moduli aumentera' di  $+20 \frac{dB}{decade}$ .

--contributo alle fasi--: Considerando la pulsazione di rottura  $\Omega = 10$ , l'intervallo in cui si hanno variazioni di pendenza sara':  $0.1 \cdot 10 \leq 10 \leq 10 \cdot 10 \Rightarrow 1 \leq 10 \leq 100$ . In corrispondenza, quindi, di

$\Omega = 1$  la pendenza del diagramma delle fasi aumentera' di  $+\frac{\pi}{4} \frac{rad}{decade}$ , mentre in corrispondenza di

$\Omega = 100$  verra' dato un contributo al diagramma delle fasi pari a  $-\frac{\pi}{4} \frac{rad}{decade}$ .

- poli instabili:

--contributo ai moduli-- : In corrispondenza delle pulsazioni di rotture  $\omega = 4$  e  $\omega = \frac{1}{3}$ , verra' dato un contributo alla pendenza del diagramma dei moduli pari a  $-20 \frac{dB}{decade}$ .

--contributo alle fasi-- : Considerando che le pulsazioni di rottura dei due poli instabili sono  $\omega = 4$

e  $\omega = \frac{1}{3}$ , gli intervalli saranno rispettivamente  $0.4 \leq 4 \leq 40$  e  $0.033 \leq \frac{1}{3} \leq 3.333$ . Pertanto, in corrispondenza delle pulsazioni  $\omega = 0.4$  e  $\omega = 0.033$  si avra' un contributo al diagramma delle fasi pari a  $+\frac{\pi}{2} \frac{rad}{decade}$ , mentre in corrispondenza delle pulsazioni  $\omega = 40$  e  $\omega = 3.333$  si avra' un contributo al diagramma delle fasi pari a  $-\frac{\pi}{2} \frac{rad}{decade}$ .

A questo punto, definisco 4 funzioni:

• **funzione modulo con approssimazione:**

$$f_{G_a} := \omega \mapsto 20 \cdot \log_{10}(|K_b|) - \mu \cdot 20 \cdot \log_{10}(\omega) + \sum_{i=1}^{nz} f_a(\omega, \Omega_t[i]) - \sum_{i=1}^{np} f_a(\omega, \omega_t[i])$$

$$f_{G_a} := \omega \mapsto 20 \cdot \log_{10}(|K_b|) - 20 \cdot \mu \cdot \log_{10}(\omega) + \left( \sum_{i=1}^{nz} f_a(\omega, \Omega_{t_i}) \right) - \left( \sum_{i=1}^{np} f_a(\omega, \omega_{t_i}) \right) \quad (13)$$

• **funzione modulo senza approssimazione:**

$$f_G := \omega \mapsto 20 \cdot \log_{10}(|K_b|) - \mu \cdot 20 \cdot \log_{10}(\omega) + \sum_{i=1}^{nz} f(\omega, \Omega_{t_i}[i]) - \sum_{i=1}^{np} f(\omega, \omega_{t_i}[i])$$

$$f_G := \omega \mapsto 20 \cdot \log_{10}(|K_b|) - 20 \cdot \mu \cdot \log_{10}(\omega) + \left( \sum_{i=1}^{nz} f(\omega, \Omega_{t_i}) \right) - \left( \sum_{i=1}^{np} f(\omega, \omega_{t_i}) \right) \quad (14)$$

• **funzione fase con approssimazione:**

$$g_{G_a} := \omega \mapsto \frac{1 - \text{signum}(K_b)}{2} \cdot \pi - \frac{\mu \cdot \pi}{2} + \sum_{i=1}^{nz} \text{signum}(-\text{zeri}G[i]) \cdot g_a(\omega, \Omega_t[i]) - \sum_{i=1}^{np} \text{signum}(-\text{poli}G[i]) \cdot g_a(\omega, \omega_t[i])$$

$$g_{G_a} := \omega \mapsto \left( \frac{1}{2} - \frac{\text{signum}(K_b)}{2} \right) \cdot \pi - \frac{\mu \cdot \pi}{2} + \left( \sum_{i=1}^{nz} \text{signum}(-\text{zeri}G_i) \cdot g_a(\omega, \Omega_{t_i}) \right) - \left( \sum_{i=1}^{np} \text{signum}(-\text{poli}G_i) \cdot g_a(\omega, \omega_{t_i}) \right) \quad (15)$$

• **funzione fase senza approssimazione:**

$$g_G := \omega \mapsto \frac{1 - \text{signum}(K_b)}{2} \cdot \pi - \frac{\mu \cdot \pi}{2} + \sum_{i=1}^{nz} \text{signum}(-\text{zeri}G[i]) \cdot g(\omega, \Omega_{t_i}[i]) - \sum_{i=1}^{np} \text{signum}(-\text{poli}G[i]) \cdot g(\omega, \omega_{t_i}[i])$$

$$g_G := \omega \mapsto \left( \frac{1}{2} - \frac{\text{signum}(K_b)}{2} \right) \cdot \pi - \frac{\mu \cdot \pi}{2} + \left( \sum_{i=1}^{nz} \text{signum}(-\text{zeri}G_i) \cdot g(\omega, \Omega_{t_i}) \right) - \left( \sum_{i=1}^{np} \text{signum}(-\text{poli}G_i) \cdot g(\omega, \omega_{t_i}) \right) \quad (16)$$

$$- \left( \sum_{i=1}^{np} \text{signum}(-\text{poli}G_i) \cdot g(\omega, \omega_{t_i}) \right)$$

Determino **la pulsazione di taglio piu' a bassa frequenza sui moduli**:

$$\text{omegaleftmodulo} := \min(\min(\omega_t), \min(\Omega_t))$$

$$\text{omegaleftmodulo} := \frac{1}{3} \quad (17)$$

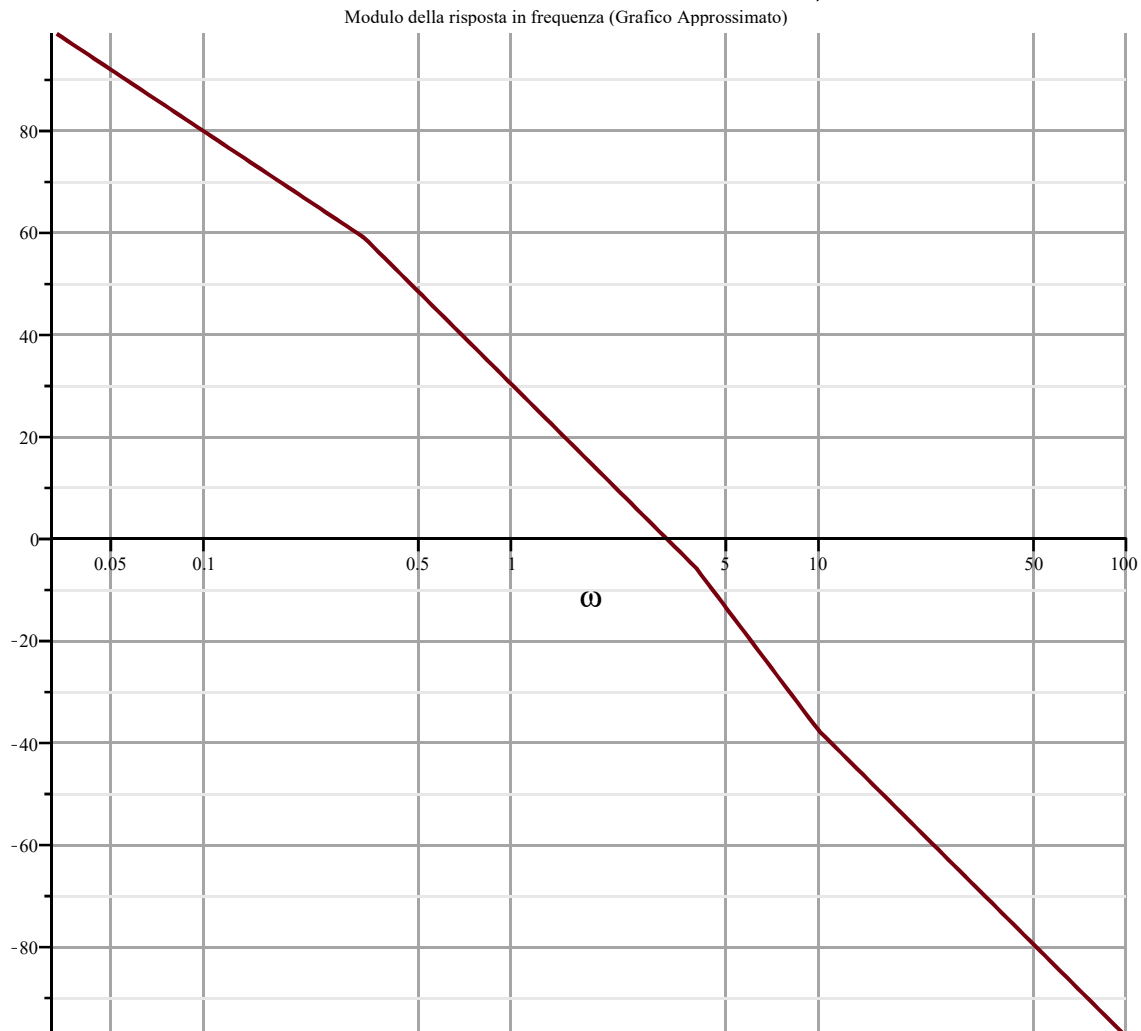
ed, inoltre, determino **la pulsazione di taglio piu' ad alta frequenza sui moduli**

$$\text{omegarightmodulo} := \max(\max(\omega_{a_t}), \max(\Omega_{a_t}))$$

$$\text{omegarightmodulo} := 10 \quad (18)$$

Ora, determino **la rappresentazione grafica approssimata dei moduli**:

$$\text{semilogplot}(f_{G_a}(\omega), \omega = 0.1 \cdot \text{omegaleftmodulo} .. 10 \cdot \text{omegarightmodulo}, \text{axis} = [\text{gridlines}], \text{title} = \text{"Modulo della risposta in frequenza (Grafico Approssimato)"})$$





Posso notare che:

- in **bassa frequenza**, la pendenza del diagramma dei moduli della risposta in frequenza e'  $-40 \frac{dB}{decade}$ , a causa della presenza di due poli nell'origine  $(s - 4)$  e  $\left(s - \frac{1}{3}\right)$  che danno contributo di  $-20 \frac{dB}{decade}$  ognuno, e dal contributo del guadagno di Bode che risulta essere pari a zero.
- nelle **frequenze intermedie**, la pendenza diminuisce a  $-60 \frac{dB}{decade}$ , a causa della presenza di un polo instabile  $\left(s - \frac{1}{3}\right)$ , in corrispondenza della pulsazione di taglio  $\omega = \frac{1}{3}$ . Inoltre, in corrispondenza della pulsazione di taglio  $\omega = 4$  la pendenza diminuisce di altri  $-20 \frac{dB}{decade}$  portandola, quindi, a  $-80 \frac{dB}{decade}$  a causa di un altro polo instabile  $(s - 4)$ .
- in **alta frequenza**, la pendenza aumenta di  $+20 \frac{dB}{decade}$  portandola, pertanto, a  $-60 \frac{dB}{decade}$  a causa di uno zero a fase minima  $(s + 10)$ . Tanto e' vero che la pendenza in alta frequenza del diagramma dei moduli e' data da:

$$20 \cdot (-\mu + n_z - n_p)$$

dove  $-20 \cdot \mu \frac{dB}{decade}$  e' il generico contributo dei poli nell'origine (in questo caso pari a  $-40 \frac{dB}{decade}$ ),  $+20 \cdot n_z$  e' il generico contributo degli zeri (in questo caso pari a  $+20 \frac{dB}{decade}$ ) ed, infine,  $-20 \cdot n_p$  e' il generico contributo dei poli (in questo caso pari a  $-40 \frac{dB}{decade}$ ).

Determino **la pulsazione di taglio piu' a bassa frequenza sulle fasi**:

$$\omega_{leftfase} := \min\left(\min\left(\frac{\omega_t}{10}\right), \min\left(\frac{\Omega_t}{10}\right)\right)$$

$$\omega_{leftfase} := \frac{1}{30} \quad (19)$$

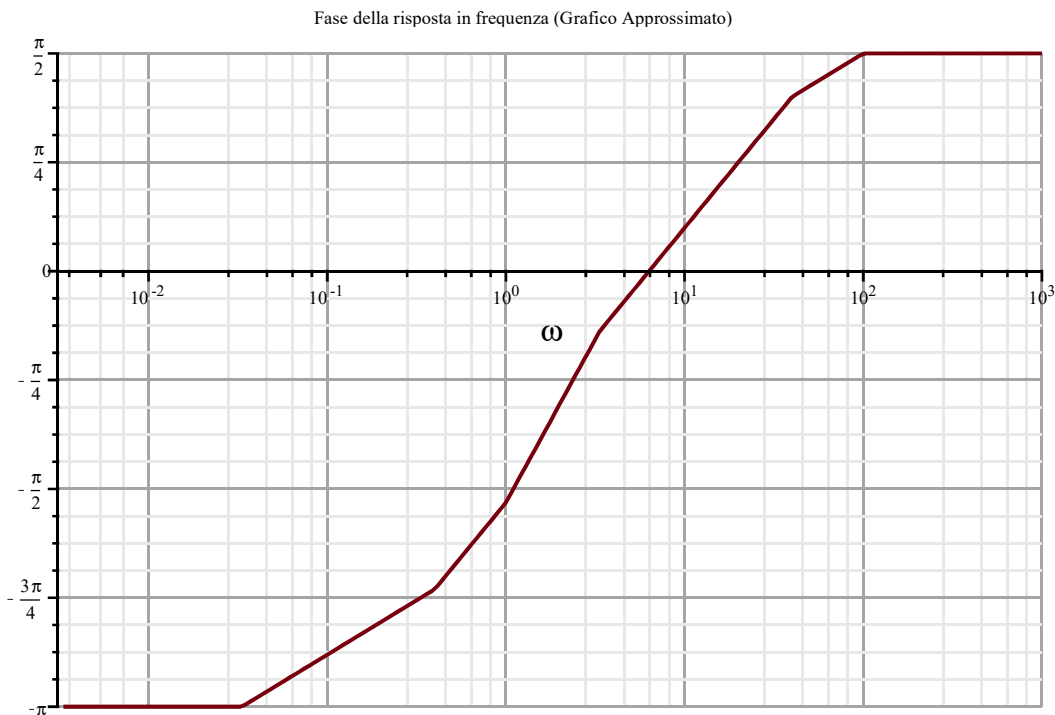
ed, inoltre, determino **la pulsazione di taglio piu' ad alta frequenza sulle fasi**:

$$\omega_{rightfase} := \max\left(\max(10 \cdot \omega_t), \max(10 \cdot \Omega_t)\right)$$

$$\omega_{rightfase} := 100 \quad (20)$$

Ora, determino **la rappresentazione grafica approssimata delle fasi**:

$$\text{semilogplot}\left(g_a(\omega), \omega = 0.1 \cdot \omega_{leftfase} : 10 \cdot \omega_{rightfase}, \text{axis} = [\text{gridlines}], \text{tickmarks} = [\text{default}, \text{piticks}], \text{title} = \text{"Fase della risposta in frequenza (Grafico Approssimato)"}\right)$$



Posso notare che:

- in **bassa frequenza**, il valore delle fasi corrisponde a  $-\pi$  poiché la fase iniziale sarà data da:

$$\frac{1 - \text{signum}(K_b)}{2} \cdot \pi - \mu \cdot \frac{\pi}{2}$$

dove  $\frac{1 - \text{signum}(K_b)}{2} \cdot \pi$  è il contributo generico del guadagno di Bode (in questo caso 0) e  $-\mu \cdot \frac{\pi}{2}$  è

il contributo generico di un polo nell'origine (in questo caso pari a  $-\pi$ ). Pertanto, la fase iniziale sarà pari a:

$$-\mu \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\pi$$

- nelle **frequenze intermedie**, il diagramma delle fasi, in corrispondenza della pulsazione

$$\omega = \frac{1}{30} \approx 0.033, \text{ riceve un contributo di } + \frac{\pi}{4} \frac{\text{rad}}{\text{decade}} \text{ da parte del polo instabile } \left(s - \frac{1}{3}\right).$$

Successivamente, nella pulsazione  $\omega = \frac{2}{5} \approx 0.4$ , la pendenza del diagramma delle fasi aumenta di

$+ \frac{\pi}{4} \frac{\text{rad}}{\text{decade}}$  grazie al contributo del polo instabile  $(s-4)$ . Inoltre, in corrispondenza della pulsazione  $\Omega = 1$ , verrà dato un contributo, da parte dello zero a fase minima  $(s+10)$ , alla pendenza pari a  $+ \frac{\pi}{4} \frac{\text{rad}}{\text{decade}}$ . Successivamente, in corrispondenza della pulsazione

$\omega = \frac{10}{3} \approx 3.333$  verrà dato un contributo, da parte del polo instabile  $\left(s - \frac{1}{3}\right)$ , alla pendenza pari

a  $-\frac{\pi}{4} \frac{\text{rad}}{\text{decade}}$ . Inoltre, in corrispondenza della pulsazione  $\omega = 40$ , verrà dato un contributo, da parte

del polo instabile  $(s - 4)$ , alla pendenza pari a  $-\frac{\pi}{4} \frac{rad}{decade}$ . Successivamente, in corrispondenza della pulsazione  $\Omega = 100$ , verrebbe dato un contributo, da parte dello zero a fase minima  $(s + 10)$ , alla pendenza pari a  $-\frac{\pi}{4} \frac{rad}{decade}$  facendo così stabilizzare il valore del diagramma delle fasi a  $+\frac{\pi}{2}$ .

Tutti i ragionamenti effettuati, sono stati fatti considerando le pulsazioni di rottura:  $\omega = \frac{1}{3}$ ,  $\omega = 4$  e

$\Omega = 10$  ed i rispettivi intervalli delle fasi:  $0.1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{30} = 0.033 \leq \frac{1}{3} \leq 10 \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{3} = 3.333$ ,

$0.1 \cdot 4 = \frac{2}{5} = 0.4 \leq 4 \leq 10 \cdot 4 = 40$  e  $0.1 \cdot 10 = 1 \leq 10 \leq 10 \cdot 10 = 100$ .

• in **alta frequenza**, infatti, il valore delle fasi si assesta a  $+\frac{\pi}{2}$  poiché la fase finale sarà data da:

$$\frac{1 - \text{signum}(K_b)}{2} \cdot \pi - \frac{\mu \cdot \pi}{2} + n_z^- \cdot \frac{\pi}{2} - n_z^+ \cdot \frac{\pi}{2} - n_p^- \cdot \frac{\pi}{2} + n_p^+ \cdot \frac{\pi}{2}$$

dove  $\frac{1 - \text{signum}(K_b)}{2} \cdot \pi$  è il contributo generico del guadagno di Bode (in questo caso 0),  $-\frac{\mu \cdot \pi}{2}$  è

il contributo generico di un polo nell'origine (in questo caso pari a  $-\pi$ ),  $+n_z^- \cdot \frac{\pi}{2}$  è il contributo

generico di uno zero a fase minima (in questo caso corrisponde a  $+\frac{\pi}{2}$ ),  $-n_z^+ \cdot \frac{\pi}{2}$  è il contributo

generico di uno zero a fase non minima (in questo caso essendo che non sono presenti zeri a fase non

minima, questo contributo è pari a zero),  $-n_p^- \cdot \frac{\pi}{2}$  è il contributo generico di un polo stabile (in questo

caso essendo che non sono presenti poli stabili, questo contributo è pari a zero) ed  $n_p^+ \cdot \frac{\pi}{2}$  è il

contributo generico di un polo instabile (in questo caso corrisponde a  $+\pi$ ). Pertanto, la fase finale sarà pari a:

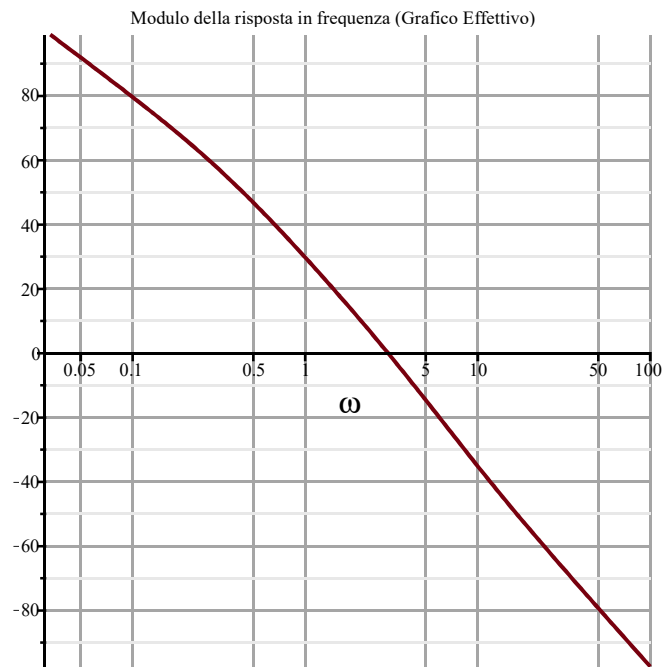
$$\frac{1 - \text{signum}(K_b)}{2} \cdot \pi - \pi + \frac{\pi}{2} + 0 + 0 + \pi = \frac{\pi}{2}.$$

Ovviamente, si può notare che lo sfasamento relativo è pari a  $+\frac{3\pi}{2}$ .

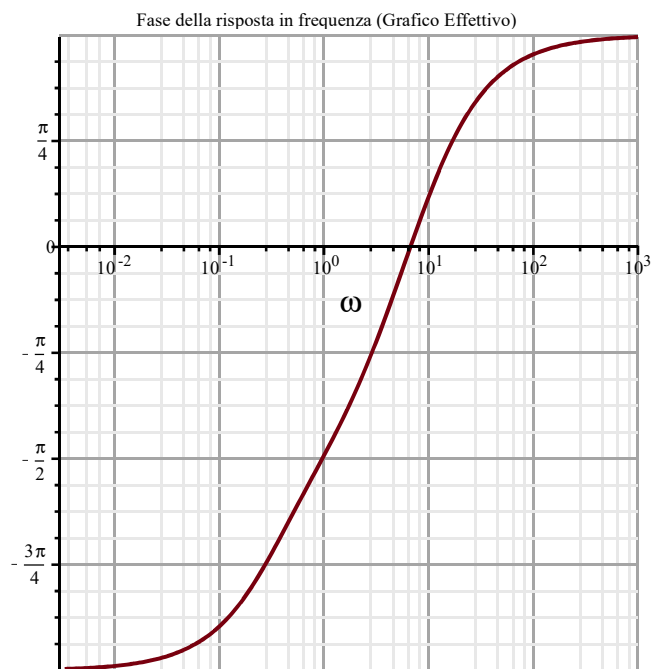
Rappresento, ora, rispettivamente **il diagramma dei moduli e il diagramma delle fasi effettivi**:

`semilogplot(f_G(omega), omega = 0.1 * omegaleftmodulo .. 10 * omegarightmodulo, axis = [gridlines], title`

`= "Modulo della risposta in frequenza (Grafico Effettivo)"`)



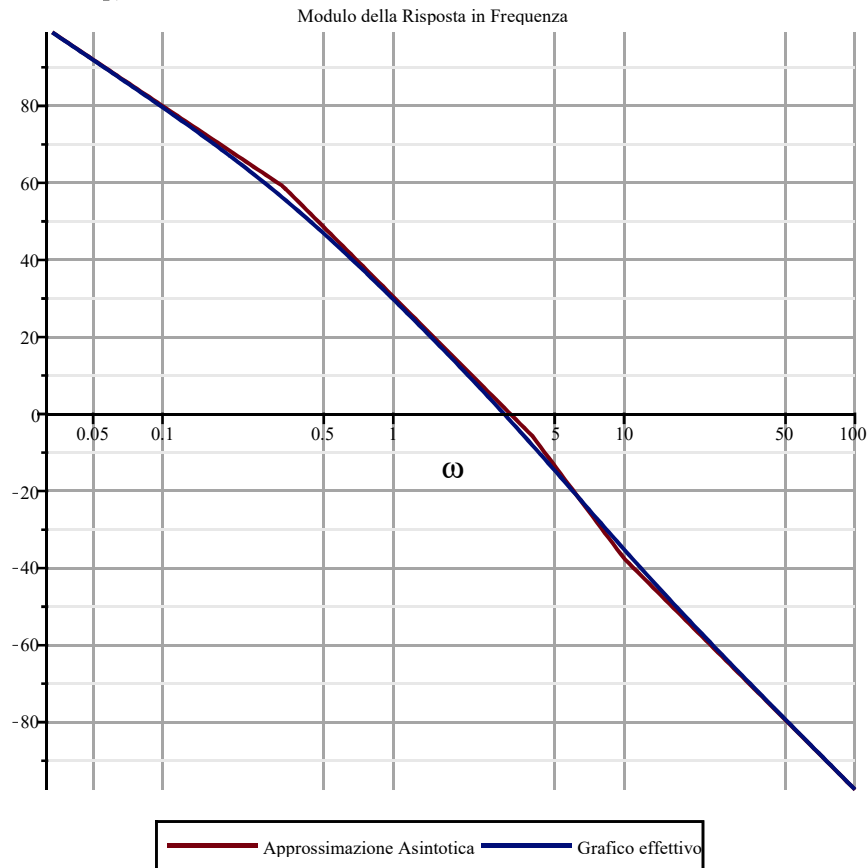
`semilogplot( $g_G(\omega)$ ,  $\omega = 0.1 \cdot \text{omegaleftfase} \dots 10 \cdot \text{omegarightfase}$ , axis = [gridlines], tickmarks = [default, piticks], title = "Fase della risposta in frequenza (Grafico Effettivo)")`



Rappresento sullo stesso grafico **il diagramma dei moduli approssimato ed il diagramma dei moduli effettivo:**

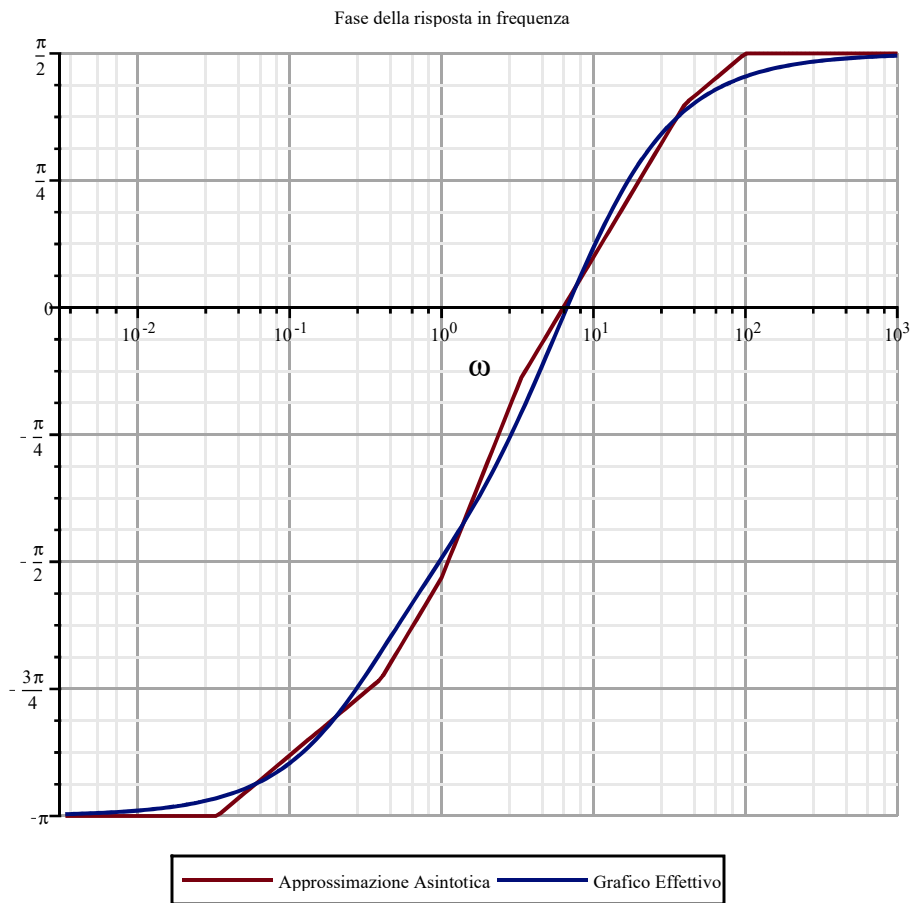
`semilogplot( $[f_{G_a}(\omega), f_G(\omega)]$ ,  $\omega = 0.1 \cdot \text{omegaleftmodulo} \dots 10 \cdot \text{omegarightmodulo}$ , axis = [gridlines], title = "Modulo della Risposta in Frequenza", legend = ["Approssimazione Asintotica",`

"Grafico effettivo" ])



Rappresento sullo stesso grafico il **diagramma delle fasi approssimato** ed il **diagramma delle fasi effettivo**:

```
semilogplot([gGa(ω), gG(ω)], ω = 0.1 · omegaleftfase .. 10 · omegarightfase, axis = [gridlines],
    tickmarks = [default, piticks], title = "Fase della risposta in frequenza", legend
    = ["Approssimazione Asintotica", "Grafico Effettivo"])
```



Ora, calcolo tutti i parametri che ho citato precedentemente durante i discorsi di analisi dei grafici:

- la pendenza "iniziale" e la pendenza "finale" sul diagramma dei moduli (misurata in dB/decade)

$$Pendenza\_iniziale := -20 \cdot \mu$$

$$Pendenza\_iniziale := -40 \quad (21)$$

$$Pendenza\_finale := -20 \cdot \mu + 20 \cdot (nz - np)$$

$$Pendenza\_finale := -60 \quad (22)$$

- il numero di zeri e poli (identificandoli in base a quale semi-piano appartengono) al netto dei poli nell'origine:

$$nz_{fase\_minima} := \text{numero di zeri a fase minima}$$

$$nz_{fase\_non\_minima} := \text{numero di zeri a fase non minima}$$

$$np_{stabili} := \text{numero di poli stabili}$$

$$np_{non\_stabili} := \text{numero di poli non stabili}$$

$$nz_{fase\_non\_minima} := \text{numelems}(\text{remove}(x \rightarrow \text{Re}(x) < 0, \text{zeriG}))$$

$$nz_{fase\_non\_minima} := 0 \quad (23)$$

$$nz_{fase\_minima} := \text{numelems}(\text{remove}(x \rightarrow \text{Re}(x) > 0, \text{zeriG}))$$

$$nz_{fase\_minima} := 1 \quad (24)$$

$$np_{non\_stabili} := \text{numelems}(\text{remove}(x \rightarrow \text{Re}(x) < 0, \text{poliG}))$$

$$np_{non\_stabili} := 2 \quad (25)$$

$$np_{stabili} := \text{numelems}(\text{remove}(x \rightarrow \text{Re}(x) > 0, \text{poliG}))$$

$$np_{stabili} := 0 \quad (26)$$

• la fase iniziale del diagramma delle fasi:

$$Fase\_iniziale := \frac{(1 - \text{signum}(K_b))}{2} \cdot \text{Pi} - \frac{\mu \cdot \pi}{2}$$

$$Fase\_iniziale := -\pi \quad (27)$$

• la fase finale del diagramma delle fasi:

$$Fase\_finale := Fase\_iniziale + \frac{(nz_{fase\_minima} - nz_{fase\_non\_minima}) \cdot \pi}{2} - \frac{(np_{stabili} - np_{non\_stabili}) \cdot \pi}{2}$$

$$Fase\_finale := \frac{\pi}{2} \quad (28)$$

• lo sfasamento relativo:

$$Sfasamento\_Relativo := Fase\_finale - Fase\_iniziale$$

$$Sfasamento\_Relativo := \frac{3\pi}{2} \quad (29)$$

Calcolo, ora, le **pendenze dei moduli** e delle **fasi** negli **intervalli "intermedi"** tenendo conto che per fare cio' bisogna accoppiare e mettere in ordine le pulsazioni in corrispondenza delle quali il diagramma dei moduli e il diagramma delle fasi cambiano pendenza :

• avro' che le **pulsazioni di taglio sul diagramma dei moduli** saranno:

$$Puls\_taglio\_moduli := \text{sort}(\text{convert}(\text{convert}(\Omega_r, \text{set}) \text{ union } \text{convert}(\omega_r, \text{set})), \text{list}))$$

$$Puls\_taglio\_moduli := \left[ \frac{1}{3}, 4, 10 \right] \quad (30)$$

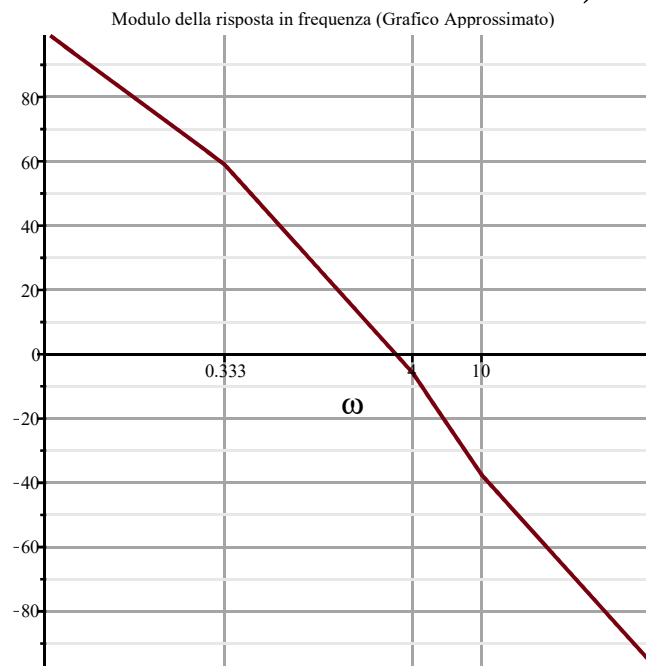
• e le **pulsazioni di taglio sul diagramma delle fasi** saranno:

$$Puls\_taglio\_fasi := \text{sort} \left( \text{convert} \left( \text{convert} \left( \frac{\Omega_t}{10}, \text{set} \right) \text{ union } \text{convert} \left( \frac{\omega_t}{10}, \text{set} \right) \text{ union } \text{convert} (10 \cdot \Omega_r,$$

$$set) \mathbf{union} \, convert(10 \cdot \omega_p \, set), list) \Big) \Big) \\ Puls\_taglio\_fasi := \left[ \frac{1}{30}, \frac{2}{5}, 1, \frac{10}{3}, 40, 100 \right] \quad (31)$$

Rappresento, nuovamente, per comodita' il diagramma dei moduli cosi' da osservare meglio le pulsazioni di taglio su di esso:

$semilogplot(f_{G_a}(\omega), \omega = 0.1 \cdot \text{omegaleftmodulo} .. 10 \cdot \text{omegarightmodulo}, axis = [gridlines], tickmarks$   
 $= [Puls\_taglio\_moduli, default], title$   
 $= "Modulo della risposta in frequenza (Grafico Approssimato)" )$



Definisco la "derivata" della funzione che calcola i moduli sulla scala logaritmica per individuare la pendenza:

$$df := (\omega, \omega_c) \rightarrow \begin{cases} 0 & \frac{\omega}{\omega_c} < 1 \\ 20 & \frac{\omega}{\omega_c} \geq 1 \end{cases} :$$

Calcolo le pendenze del diagramma dei moduli utilizzando la derivata logaritmica:



$$dmodulo := \omega \rightarrow -\mu \cdot 20 + \sum_{i=1}^{nz} df(\omega, \Omega_i[i]) - \sum_{i=1}^{np} df(\omega, \omega_i[i]) :$$

Considerando le pulsazioni di taglio sul diagramma dei moduli

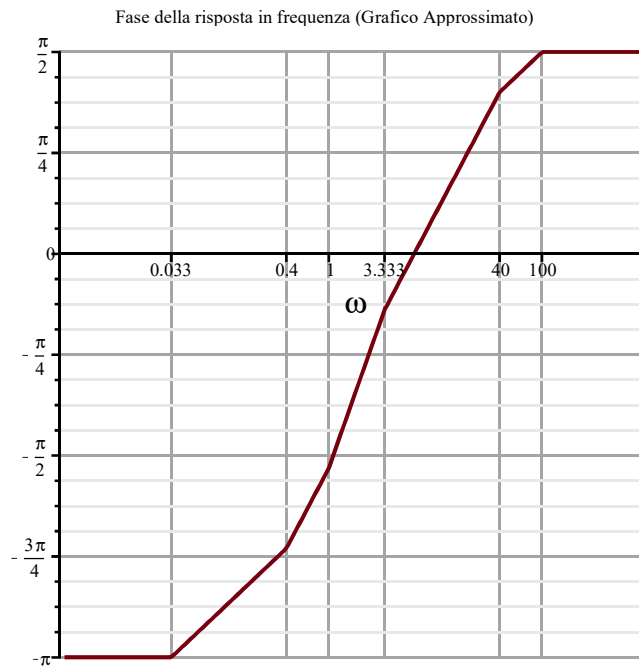
$$Y := Puls\_taglio\_moduli : l := numelems(Y) :$$

le pendenze del diagramma dei moduli per ogni sotto-intervallo nelle frequenza intermedie saranno:

$$seq\left(\left[\left[Y[k], Y[k+1]], dmodulo\left(\frac{(Y[k] + Y[k+1])}{2}\right)\right], k = 1 .. l - 1\right) \\ \left[\left[\frac{1}{3}, 4\right], -60\right], \left[[4, 10], -80\right] \quad (32)$$

Rappresento, nuovamente, per comodita' il diagramma delle fasi cosi' da osservare meglio le pulsazioni di taglio su di esso:

$$semilogplot\left(g_{G_a}(\omega), \omega = 0.1 \cdot \text{omegaleftfase} .. 10 \cdot \text{omegarightfase}, \text{axis} = [\text{gridlines}], \text{tickmarks} \right. \\ \left. = [Puls\_taglio\_fasi, \text{piticks}], \text{title} = \text{"Fase della risposta in frequenza (Grafico Approssimato)"} \right)$$



Definisco la "derivata" della funzione che calcola le fasi sulla scala logaritmica per individuare la pendenza:

$$dg := (\omega, \omega_c) \rightarrow \begin{cases} 0 & \frac{\omega}{\omega_c} < \frac{1}{10} \\ \frac{\pi}{4} & \frac{1}{10} \leq \frac{\omega}{\omega_c} < 10 \\ 0 & \frac{\omega}{\omega_c} \geq 10 \end{cases} :$$

Calcolo le pendenze del diagramma delle fasi utilizzando la derivata logaritmica

$$dfase := \omega \rightarrow \sum_{i=1}^{nz} \text{signum}(-\text{zeri}G[i]) \cdot dg(\omega, \Omega_i[i]) - \sum_{i=1}^{np} \text{signum}(-\text{poli}G[i]) \cdot dg(\omega, \omega_i[i]) :$$

Considerando le pulsazioni di taglio sul diagramma delle fasi

$$Y := Puls\_taglio\_fasi : l := \text{numelems}(Y) :$$

**le pendenze del diagramma delle fasi per ogni sotto-intervallo nelle frequenza intermedie saranno:**

$$seq\left(\left[ [Y[k], Y[k+1]], dfase\left(\frac{(Y[k] + Y[k+1])}{2}\right) \right], k=1..l-1\right) \\ \left[ \left[ \frac{1}{30}, \frac{2}{5} \right], \frac{\pi}{4} \right], \left[ \left[ \frac{2}{5}, 1 \right], \frac{\pi}{2} \right], \left[ \left[ 1, \frac{10}{3} \right], \frac{3\pi}{4} \right], \left[ \left[ \frac{10}{3}, 40 \right], \frac{\pi}{2} \right], \left[ [40, 100], \frac{\pi}{4} \right] \quad (33)$$

## ESERCIZIO C

restart :

c. Si consideri il seguente schema di controllo in retroazione algebrica ed unitaria.

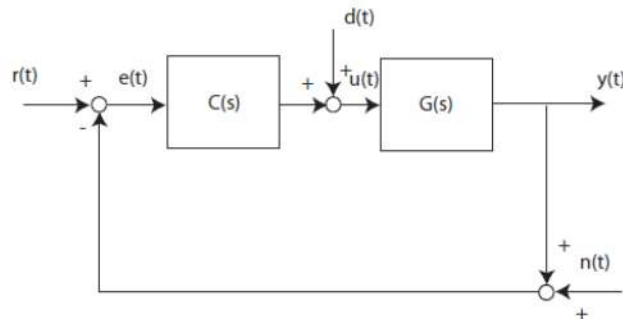


Figure 1:

dove  $G(s)$  rappresenta la f.d.t. del processo

$$G(s) = \frac{36(s+1)}{(s+3)(s+6)^2}$$

Si chiede di determinare un regolatore  $C(s)$  di struttura semplice che garantisca il soddisfacimento delle seguenti specifiche:

1. errore alla rampa non superiore al 15 %;
2. Picco di Risonanza  $M_{r,dB} \leq 3 \text{ dB}$ , banda passante  $7 \leq \omega_{BW} \leq 10 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$

Riscrivo il modello lineare e stazionario dell'impianto  $G(s)$ :

$$G := s \rightarrow \frac{36 \cdot (s+1)}{(s+3) \cdot (s+6)^2} :$$
$$G(s)$$

$$\frac{36s + 36}{(s+3)(s+6)^2} \quad (1)$$

Il problema in questione coincide con un problema di sintesi, cioè quello di determinare un controllore  $C(s)$  tale che le specifiche richieste siano soddisfatte. Le specifiche sono di due tipi:

- **specifiche statiche** (o a transitorio esaurito):

in questo caso bisogna determinare il controllore  $C(s)$  tale che esso soddisfi un errore alla rampa non superiore al 15%. Inizialmente bisogna analizzare l'errore alla rampa, cioè significa che il segnale da "inseguire", e quindi il riferimento da tenere in considerazione, è una rampa, cioè l'obiettivo del problema di controllo in questione sarà:

$$r(t) = R \cdot t \cdot 1(t)$$

dove  $R$  è il coefficiente angolare della rampa, la quale quest'ultima avrà trasformata di Laplace pari a :

$$R(s) = \frac{R}{s^2}$$

Un segnale a rampa puo' descrivere delle configurazioni temporali in cui ad esempio una certa grandezza evolve nel tempo con velocita' costante.

Essendo la rampa un segnale a deriva o a velocita' costante (la cui deriva e' il tasso di variazione dei valori assunti dal segnale), tale problema in questione e' denominato, infatti, problema di asservimento di velocita'. Posso valutare, pertanto, l'errore di inseguimento alla rampa definito anche come errore di velocita'  $e_{\infty, v}$ , cioe':

$$e_{\infty, v} = \lim_{t \rightarrow +\infty} (e(t))$$

applicando il teorema del valore finale, il quale afferma che  $\lim_{s \rightarrow 0} (s \cdot F(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} (s \cdot F(s))$ , avro' che:

$$\lim_{s \rightarrow 0} (s \cdot E_r(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} (s \cdot S(s) \cdot R(s)) \quad (\text{sapendo che } E(s) := S(s) \cdot R(s))$$

dove:

- $E_r(s) :=$  errore di inseguimento dovuto al riferimento  $r(t)$
- $S(s) :=$  sensitivita'
- $R(s) :=$  L-trasformata del riferimento

si avra' che:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} (s \cdot S(s) \cdot R(s)) &= \lim_{s \rightarrow 0} \left( s \cdot \frac{1}{1 + L(s)} \cdot \frac{R}{s^2} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{R}{s + s \cdot L(s)} \right) = \frac{R}{\lim_{s \rightarrow 0} (s + s \cdot L(s))} \\ &= \frac{R}{\lim_{s \rightarrow 0} (s \cdot L(s))} \end{aligned}$$

Quindi, si avra' che l'errore di velocita' sara' pari a:

$$e_{\infty, v} = \frac{R}{\lim_{s \rightarrow 0} (s \cdot L(s))}$$

definendo, inoltre,  $k_v$  come la costante di velocita' del sistema, avremo che l'errore di inseguimento alla rampa sara' pari a:

$$e_{\infty, v} = \frac{R}{k_v}$$

tale che:

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} (s \cdot L(s))$$

Calcolo, ora, la funzione di anello  $L(s)$  che per definizione e' pari a:

$$L(s) := C(s) \cdot G(s)$$

dove:

- $C(s)$  e' il controllore, cioe' rappresenta la funzione di trasferimento o il modello matematico dell'algoritmo di controllo. In generale esso e' pari a:

$$C(s) = \frac{K}{s^r} \cdot C_1(s) \cdot C_2(s) \cdot \dots \cdot C_l(s)$$

Bisogna tenere presente che il primo fattore

$\left( \frac{K}{s^r} \right)$  (guadagno e poli nell'origine) e' relativo al soddisfacimento delle specifiche statiche (bassa e alta frequenza). I termini  $C_i(s)$ , con  $i=1,...,l$ , rappresentano quelle componenti del regolatore tali da non "intaccare" il comportamento dell'azione di controllo in bassa e alta frequenza ed, inoltre, sono attive in corrispondenza della media frequenza per regolare in maniera opportuna la precisione dinamica dell'impianto in base alle specifiche richieste. Tali componenti del regolatore sono chiamate reti correttrici.

In questo caso il controllore e' pari a:

assume( $K > 0$ ) :

$$C := s \rightarrow \frac{K}{s} :$$

$$C(s)$$

$$\frac{K_{\sim}}{s} \quad (2)$$

( aggiungo l'effetto integrale poiche' essendo che ho bisogno di un valore di K finito, devo ricondurmi ad una funzione di anello  $L(s)$  di tipo 1, cioe':  $L(s) = \frac{1}{s} \cdot ( \dots )$ . Quindi, essendo che l'effetto integrale non e' presente nella funzione di trasferimento  $G(s)$ , ipotizzo che esso sia all'interno del controllore  $C(s)$  e, pertanto, cosi' da avere una "forma" del tipo:

$$L(s) = C(s) \cdot G(s) \Rightarrow L(s) = \frac{1}{s} \cdot ( \dots ) \cdot ( \dots )$$

pertanto, essendo K pari a:

$$K := \lim_{s \rightarrow 0} (s \cdot L(s)) \Rightarrow K := \lim_{s \rightarrow 0} \left( s \cdot \frac{1}{s} \cdot ( \dots ) \right) \Rightarrow K := ( \dots ) \Rightarrow K := \text{finito}$$

•  $G(s)$  funzione di trasferimento data.

Pertanto,  $L(s)$  sara' pari a:

$$L := s \rightarrow C(s) \cdot G(s) :$$

$$L(s)$$

$$\frac{K_{\sim} (36 s + 36)}{s (s + 3) (s + 6)^2} \quad (3)$$

Quindi, calcolo l'errore di inseguimento alla rampa  $e_{\infty, v}$ :

$$e_{\infty, v} := \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{1}{s \cdot L(s)} \right)$$

$$e_{\infty, v} := \frac{3}{K_{\sim}} \quad (4)$$

In questo caso pero' l'errore di velocita' (con riferimento a rampa unitaria) deve essere minore del 15% e, pertanto, minore di 0.15. Quindi, calcolo K rispetto alla relazione d'ordine appena trovata, cioe':

$$e_{\infty, v} \leq 15 \% \Rightarrow e_{\infty, v} \leq 0.15$$

cioe':

$$e_{\infty, v} \leq 0.15$$

$$\frac{3}{K_{\sim}} \leq 0.15 \quad (5)$$

Otterremo, quindi  $K \geq 20$ .

Pertanto, scelgo un valore di K pari a:

$$K := 20.1$$

$$K := 20.1 \quad (6)$$

ottenendo, quindi, un **controllore C(s)** pari a:

$$C := s \rightarrow \frac{K}{s} :$$

$$C(s)$$

$$\frac{20.1}{s} \quad (7)$$

Definisco, ora, la funzione di anello L(s) data dall'interconnessione in serie tra il controllore C(s) ottenuto e la funzione di trasferimento G(s) dell'impianto:

$$\mathbf{Lold} = \text{series}(C, G);$$

cioe':

$$Lold := s \rightarrow C(s) \cdot G(s) :$$

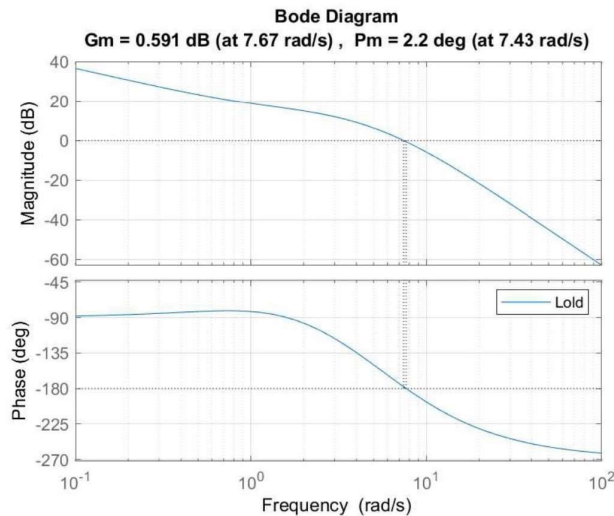
$$Lold(s)$$

$$\frac{20.1 (36 s + 36)}{s (s + 3) (s + 6)^2} \quad (8)$$

Rappresento graficamente il diagramma di Bode della funzione di anello Lold(s) appena ottenuta attraverso i comandi:

```
figure(1);
margin(Lold);
grid;
```

ottenendo:



• **specifiche dinamiche:**

in questo caso, si deve fare in modo che la funzione di trasferimento del sistema retroazionato  $T(s)$  presenti un picco di risonanza minore di 3 dB ed, inoltre, la pulsazione di banda passante sia compresa tra 7 e  $10 \frac{rad}{sec}$ .

In generale, tenere a bada il picco di risonanza garantisce "piattezza" della risposta in frequenza nella banda passante e garantisce una banda passante la più ampia possibile.

Inizialmente bisogna ipotizzare che la funzione di trasferimento del sistema retroazionato  $T(s)$  in media frequenza sia approssimabile da un sistema del II ordine con una coppia di poli complessi e coniugati, cioè':

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot \delta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2}$$

in base a tale ipotesi so che il picco di risonanza  $M_{r, dB}$  e' pari a:

$$M_{r, dB} = \frac{1}{2 \cdot \delta \cdot \sqrt{1 - \delta^2}}$$

Per avere un picco di risonanza minore o uguale a 3dB significa che 3dB e' il picco di risonanza "critico". Pertanto, calcolo lo smorzamento "critico"  $\delta_{cr}$  rispetto al valore "critico" del picco di risonanza pari a 3dB. Quindi, calcolo il valore di smorzamento "critico"  $\delta_{cr}$  considerando un picco di risonanza "critico" pari a 3dB:

$$M_{r, dB_{cr}} = \frac{1}{2 \cdot \delta_{cr} \cdot \sqrt{1 - \delta_{cr}^2}} \Rightarrow \frac{1}{2 \cdot \delta_{cr} \cdot \sqrt{1 - \delta_{cr}^2}} = 3 \text{ dB}$$

ottenendo così' un valore di **smorzamento "critico"** pari a:  
(utilizzando lo script su Matlab 'smorz\_Mr')

$\delta = \text{smorz}_{Mr(3)}$ ;

$$\delta_{cr} = 0.3832$$

$$\delta_{cr} = 0.3832$$

(9)

e sapendo che il picco di risonanza  $M_r$  e' inversamente proporzionale allo smorzamento  $\delta$ , si potra' affermare che per qualsiasi valore di smorzamento  $\delta$  maggiore dello smorzamento "critico"  $\delta_{cr}$  si otterra', di conseguenza, un picco di risonanza  $M_r$  minore dello smorzamento "critico"  $M_{r, dB_{cr}}$ :

$$\delta > \delta_{cr} \Rightarrow M_{r, dB} < 3 \text{ dB}$$

Inoltre, sapendo che il problema di sintesi si traduce nella taratura opportuna (cioe' modificando numericamente) della pulsazione di attraversamento  $\omega_c$  e del suo margine di fase  $\phi_m$ , indico con  $\omega_{c_{obiettivo}}$  la pulsazione di attraversamento obiettivo (cioe' quel valore in cui il transitorio o la risposta in frequenza del sistema retroazionato abbia determinate caratteristiche) e con  $\phi_{m_{obiettivo}}$  il margine di fase obiettivo. In generale,  $\omega_c \neq \omega_{c_{obiettivo}}$ , dove  $\omega_c$  e' la pulsazione di attraversamento della funzione di anello senza regolatore. Pertanto, il problema della sintesi del controllore per tarare la precisione dinamica si puo' tradurre nel soddisfacimento dei seguenti requisiti:

$$\begin{cases} \phi_m \approx \phi_{m_{obiettivo}} \\ \omega_c \approx \omega_{c_{obiettivo}} \end{cases}$$

Faccio alcuni ragionamenti cosi' da poter calcolare la pulsazione di attraversamento obiettivo e il margine di fase obiettivo utili per questo problema di sintesi.

Considero la relazione che lega lo smorzamento  $\delta$  con il margine di fase  $\phi_m^\circ$ , cioe':

$$\frac{\phi}{100} \approx \delta$$

potro' affermare che: per qualsiasi valore di margine di fase (in gradi) maggiore di  $\delta \cdot 100$ , e cioe' di  $0.3832 \cdot 100$ , quindi di 38.32, lo smorzamento  $\delta$  sara' maggiore del valore di soglia critica di 0.39, e pertanto, il picco di risonanza  $M_{r, dB}$  sara' minore di 3 dB, cioe':

$$\phi^\circ > 39^\circ \Rightarrow \delta > \delta_{cr} = 0.3832 \Rightarrow M_{r, dB} \leq 3 \text{ dB}$$

Pertanto, approssimando, cerchero' di ottenere un margine di fase  $\phi^\circ > 39^\circ$ .

Decido, quindi, di scegliere come **margine di fase obiettivo** un valore pari a  $50^\circ$ , cioe':

$$\phi_{m_{obiettivo}} = 50^\circ$$

Inoltre, l'altra specifica da rispettare e' che la pulsazione di banda passante (parametro a ciclo aperto), sia compresa in un intervallo avente estremo sinistro pari a



$7 \frac{rad}{sec}$  ed estremo destro pari a  $10 \frac{rad}{sec}$ , cioè:

$$7 \leq \omega_{Bw} \leq 10 \frac{rad}{sec}$$

Sapendo che la pulsazione di attraversamento  $\omega_c$  (parametro a ciclo aperto) e' un minorante della pulsazione di banda passante  $\omega_{Bw}$ , cioè:

$$\omega_c \leq \omega_{Bw}$$

allora mi bastera' scegliere un valore di  $\omega_c$  anche minore dell'estremo sinistro dell'intervallo di  $\omega_{Bw}$  (perche' comunque e' un minorante della pulsazione di banda passante e, pertanto, non e' necessario che anche  $\omega_c$  sia compresa nell'intervallo sovra-citato).

Decido, quindi, di scegliere come **pulsazione di attraversamento obiettivo** un valore pari a 4.5:

$$\omega_{c_{obiettivo}} = 4.5$$

Avendo scelto una pulsazione di attraversamento obiettivo  $\omega_{c_{obiettivo}}$  pari a 4.5, posso ora calcolare il modulo e la fase in corrispondenza di tale  $\omega_{c_{obiettivo}}$ . La funzione presente gia' in Matlab di default (bode) permette di calcolare, infatti, il valore del modulo e dell'argomento della funzione di anello in corrispondenza di una determinata pulsazione:

$$[modulo, argomento] = bode(Lold, \omega_c);$$

il modulo sara' pari a 2.4366 mentre l'argomento sara' pari a 37.4215 (effettuando ovviamente l'operazione  $180 - \text{abs}(\text{argomento})$ ). Pertanto, mi rendo conto di essere in una situazione in cui la rete correttiva da individuare deve essere di tipo sella, poiche' deve attenuare sul modulo (essendo maggiore dell'unita' poiche'  $|L(j\omega_c)|$  deve essere pari ad 1) ed, inoltre, deve amplificare sull'argomento (essendo quest'ultimo minore del margine di fase "minimo", cioè di  $39^\circ$ ). Quindi, devo effettuare un'attenuazione per abbassare il guadagno e un'operazione di anticipo sulla fase per recuperare i gradi necessari sul margine di fase. La rete a sella si ottiene combinando gli effetti di una rete attenuatrice ed anticipatrice e presenta la seguente struttura:

$$C_{lag-lead}(s) = \frac{1 + s \cdot \alpha \cdot T_1}{1 + s \cdot T_1} \cdot \frac{1 + s \cdot T_2}{1 + s \cdot \alpha \cdot T_2}$$

dove:

- $T_1$  e' la costante di tempo del polo della componente attenuatrice, tale che  $T_1 > 0$
- $T_2$  e' la costante di tempo dello zero della componente anticipatrice, tale che  $T_2 > 0$
- $\alpha$  e' un parametro adimensionale che soddisfa la seguente relazione:  $0 < \alpha < 1$

Inoltre, le due costanti di tempo sono legate dalla seguente relazione d'ordine:

$$T_1 > T_2$$

dove il rapporto di queste due quantita' definisce:

$$k = \frac{T_1}{T_2} \quad \text{tale che } k > 1$$

Quindi, significa che il polo della componente attenuatrice e' dominante rispetto allo zero della componente anticipatrice della rete a sella.

Inoltre, identificando i due zeri e i due poli della funzione di trasferimento impropria  $C_{lag-lead}(s)$ ,

cioe'  $z_1 = -\frac{1}{\alpha \cdot T_1}$ ,  $z_2 = -\frac{1}{T_2}$ ,  $p_1 = -\frac{1}{T_1}$ ,  $p_2 = -\frac{1}{\alpha \cdot T_2}$ , posso identificare 5 regioni frequenziali all'interno

del diagramma dei moduli, ottenute in corrispondenza delle pulsazioni di taglio degli elementi dinamici che compongono la rete:

- $\forall \omega < \frac{1}{T_1}$ , il modulo e' nullo e la fase e' nulla.
- $\forall \omega$  tale che  $\frac{1}{T_1} < \omega < \frac{1}{\alpha \cdot T_1}$ , il modulo e' decrescente e la fase e' in ritardo.
- $\forall \omega$  tale che  $\frac{1}{\alpha \cdot T_1} < \omega < \frac{1}{T_2}$ , il modulo in dB e' negativo (approssimativamente costante) e la fase e' crescente ed interseca  $0^\circ$  in corrispondenza di una pulsazione all'interno di questo intervallo.
- $\forall \omega$  tale che  $\frac{1}{T_2} < \omega < \frac{1}{\alpha \cdot T_2}$ , il modulo in dB e' negativo ma crescente e la fase e', invece, positiva ed assume il massimo valore possibile in anticipo.
- $\forall \omega > \frac{1}{\alpha \cdot T_2}$ , il modulo e' nullo e la fase e' nulla.

Dopo aver definito le varie componenti della rete a sella, scelgo un valore di  $k$  che sia maggiore di 1. Scelgo, ad esempio,  $k=20$ . Inoltre, definisco l'amplificazione  $m$  che la rete correttiva deve fornire e definisco anche il guadagno in fase che mi serve per raggiungere il margine di fase obiettivo

$\omega_{c_{obiettivo}} = 50^\circ$ . Quindi:

$k = 20$ ;

$m = 1/\text{modulo}$ ;

$\theta = 50 - (180 - \text{abs}(\text{argomento}))$ ;

Otengo, di conseguenza, una  $m$  pari a 0.4104 e un  $\theta$  pari a 12.5785.

Pertanto, ora sono in grado di calcolare, attraverso la funzione 'sella', i parametri  $\alpha$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  caratteristici della rete correttiva di tipo sella:

$[\alpha, T_1, T_2] = \text{sella}(\omega_c, m, \theta, k)$ ;

Otengo un parametro adimensionale  $\alpha$  pari a 0.3439, una costante di tempo del polo  $T_1$  pari a 2.9378 e una costante di tempo dello zero

$T_2$  pari a 0.1469. Pertanto, ora sono in grado di costruire la **struttura della rete correttrice di tipo sella**:

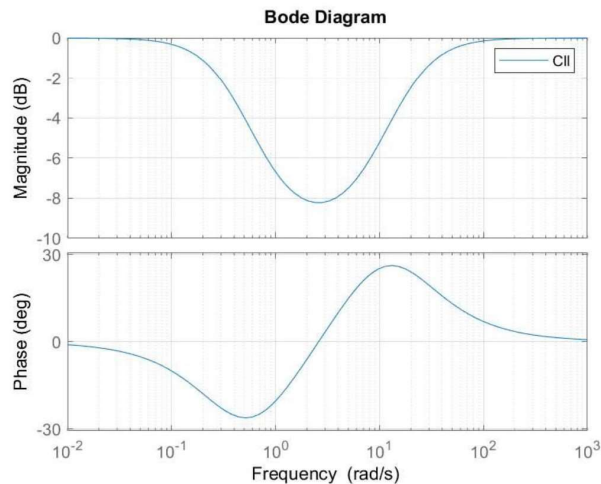
$$CII = ((1+s*\alpha*T1)/(1+s*T1))*((1+s*T2)/(1+s*\alpha*T2));$$

Otengo, quindi, una rete a sella pari a:

$$CII = \frac{(s + 0.9898) \cdot (s + 6.808)}{(s + 0.3404) \cdot (s + 19.8)}$$

Rappresento, ora, graficamente il diagramma dei moduli e il diagramma delle fasi della rete correttrice appena ottenuta:

*figure(2);*  
*bode(CII);*



Considerando i risultati ottenuti, precedentemente, ( $T_1 = 2.9378$ ,  $T_2 = 0.1469$ ), posso notare che in corrispondenza della regione frequenziale, data da tutte quelle pulsazioni  $\omega < \frac{1}{T_1} = \frac{1}{2.9378}$ , il modulo e' nullo e la fase e' nulla, quindi la rete e' trasparente alle basse frequenze. Sulle pulsazioni successive, precisamente per tutte quelle pulsazioni  $\omega$  comprese nell'intervallo  $\left( \frac{1}{2.9378}, \frac{1}{\alpha \cdot 2.9378} \right)$ , possiamo notare che il modulo e' decrescente e la fase e' in ritardo. Nell'intervallo successivo, costituito da tutte quelle pulsazioni  $\omega$  comprese nell'intervallo  $\left( \frac{1}{\alpha \cdot 2.9378}, \frac{1}{0.1469} \right)$ , il modulo in dB e' negativo (approssimativamente costante) e la fase e' crescente ed interseca 0° in corrispondenza di una pulsazione all'interno di questo intervallo. Nell'intervallo costituito da tutte quelle pulsazioni  $\omega$  comprese nell'intervallo  $\left( \frac{1}{0.1469}, \frac{1}{\alpha \cdot 0.1469} \right)$ , il modulo in dB e' negativo ma crescente e la fase e', invece, positiva ed assume il massimo valore possibile in anticipo. Infine, per tutte le pulsazioni  $\omega > \frac{1}{\alpha \cdot 0.1469}$ , il modulo e' nullo e la fase e' nulla e, pertanto, la rete e' trasparente alle alte frequenze.

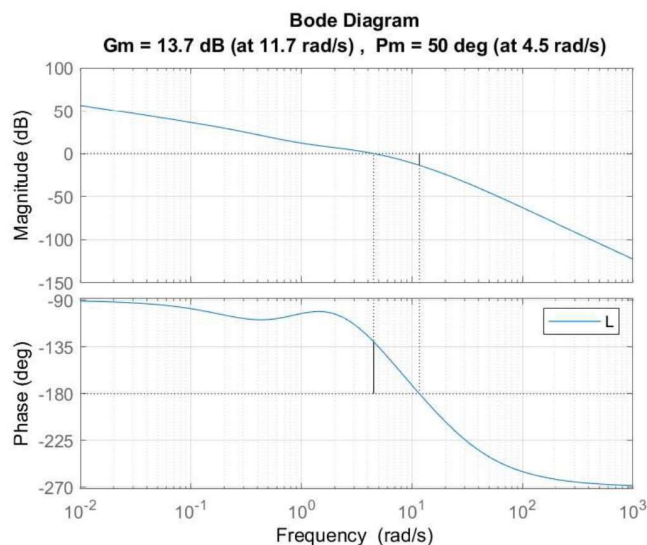
Pertanto, dopo aver definito la struttura della rete a sella, posso effettuare l'interconnessione in serie tra il controllore  $C(s)$  e la rete corretttrice  $Cll$  ottenuta e poi, successivamente, effettuare l'interconnessione in serie, di quello ottenuto, con la funzione di trasferimento  $G(s)$  dell'impianto:

```
 $L = \text{series}(\text{series}(C, Cll), G);$ 
```

$$L(s) = \frac{723.6 (s + 1) (s + 0.9898) (s + 6.808)}{s (s + 3) (s + 6)^2 (s + 19.8) (s + 0.3404)}$$

Rappresento graficamente la funzione di anello ottenuta:

```
figure(3);
margin(L);
grid;
```



Posso notare che il margine di fase e' pari al margine di fase obiettivo  $\phi_{m_{obiettivo}} = 50^\circ$  in corrispondenza della pulsazione di attraversamento  $\omega_{c_{obiettivo}} = 4.5 \frac{rad}{s}$  desiderata.

Possiamo verificare che la taratura e' avvenuta con successo invocando su Matlab i comandi:

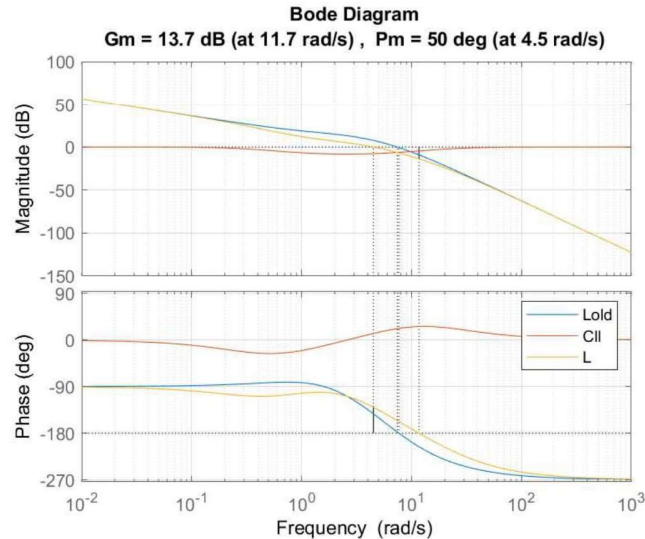
```
[modulo_finale, argomento_finale] = bode(L, wc);
```

Otterremo che il  $modulo\_finale = 1.0000$  e l' $argomento\_finale = 50$ .

Rappresento graficamente il  $\text{margin}(Lold)$ , il  $\text{bode}(Cll)$  ed il  $\text{margin}(L)$  cosi' da fare ulteriori considerazioni sul risultato ottenuto:

```
figure(4);
margin(Lold);
hold on;
bode(Cll);
margin(L);
legend;
```

grid;



Posso notare che, la rete attenuatrice-anticipatrice, in maniera selettiva, abbassa il diagramma dei moduli della L fra  $\frac{1}{T_1}$  e  $\frac{1}{\alpha \cdot T_2}$ . Inoltre, in alta frequenza la funzione di anello originale (Lold) e la funzione di anello compensata (L) sono praticamente le stesse. Per quanto riguarda la fase, la fase della funzione di anello compensata L si abbassa, poichè abbiamo lo stadio di attenuazione, e poi, successivamente, si rialza, poichè abbiamo lo stadio di anticipo in corrispondenza della pulsazione di attraversamento

$\omega_{c_{obiettivo}} = 4.5 \frac{rad}{s}$  in maniera tale da avere il margine di fase  $\phi_{m_{obiettivo}} = 50^\circ$  desiderato.

Pertanto, ora, costruisco la **funzione di trasferimento del sistema retroazionato T(s)**:

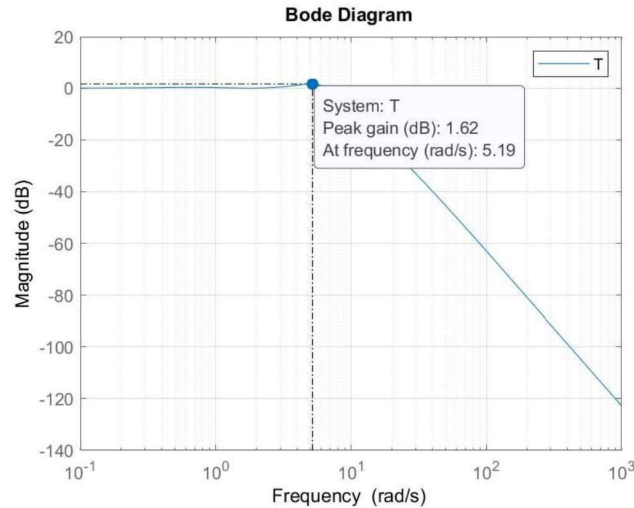
$T = feedback(L, 1);$

Essa sarà pari a:

$$T(s) = \frac{723.6 (s + 6.808) (s + 1) (s + 0.9898)}{(s + 21.91) (s + 6.757) (s^2 + 1.711 s + 0.8607) (s^2 + 4.758 s + 38.26)}$$

Rappresento graficamente la T(s) così da analizzare se il picco di risonanza e la pulsazione di banda passante rispettano le specifiche richieste:

figure(5);  
bodemag(T);  
grid;



Posso notare che il picco di risonanza  $M_{r, dB} \leq 3 \text{ dB}$ . Tanto e' vero che calcolandolo tramite la funzione  $\text{mag2db}(\text{getPeakGain}(T))$  posso notare che esso e' pari a 1.6254:

$$\text{PICCO\_RISONANZA} = \text{mag2db}(\text{getPeakGain}(T));$$

Inoltre, calcolo anche la pulsazione di banda passante  $\omega_{Bw}$  tramite la funzione  $\text{bandwidth}(T)$  e noto che essa e' pari a 7.8708:

$$\text{PULSAZIONE\_BANDA\_PASSANTE} = \text{bandwidth}(T);$$

Pertanto, noto che le due specifiche richieste ( $M_{r, dB} \leq 3 \text{ dB}$  e  $7 \leq \omega_{Bw} \leq 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ) sono state soddisfatte.

Ora, analizzo la situazione in cui approssimo il sistema di ordine maggiore al 2 (T) con un sistema di ordine 2. Pertanto, normalizzo la funzione di trasferimento del sistema retroazionato T cosi' da ottenere la T ridotta. Come fare in questo caso? Essendo che la f.d.t. del sistema retroazionato e' pari a:

$$T(s) = \frac{723.6 (s + 6.808) (s + 1) (s + 0.9898)}{(s + 21.91) (s + 6.757) (s^2 + 1.711 s + 0.8607) (s^2 + 4.758 s + 38.26)}$$

posso notare che al denominatore sono presenti due termini trinomi. Pertanto, dovro' scegliere il trinomio dominante fra i due, cioe' quello che presenta parte reale dominante. Quindi, la T ridotta

presentera' soltanto il termine trinomio avente  $-\frac{\delta \cdot \omega_n}{2}$  piu' vicina all'asse immaginario. In questo caso il trinomio dominante e'  $s^2 + 1.711 \cdot s + 0.8607$ . Pertanto, la T ridotta sara' pari a:

$$T_{ridotta} = 0.8607 / (s^2 + 1.711 \cdot s + 0.8607);$$

$$T_{ridotta}(s) = \frac{0.8607}{(s^2 + 1.711 s + 0.8607)}$$

Calcolo, anche in questo caso, il picco di risonanza e la pulsazione di banda passante per la T ridotta. Essi saranno pari a:

```
PICCO_RISONANZA = mag2db(getPeakGain(Tridotta));
PULSAZIONE_BANDA_PASSANTE = bandwidth(Tridotta);
```

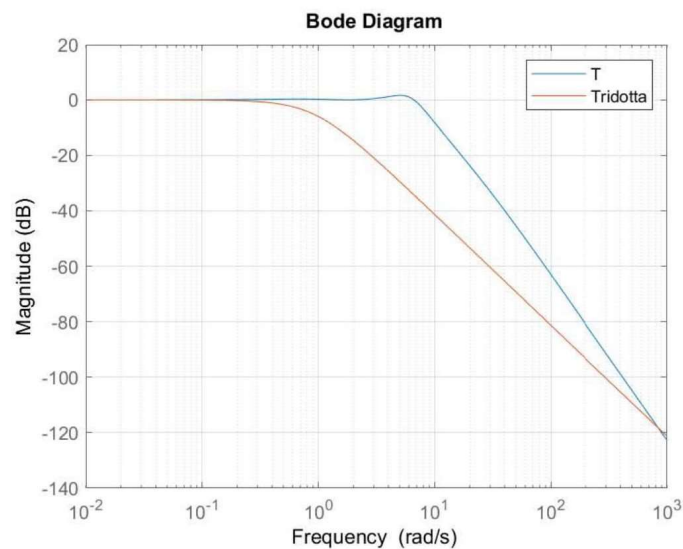
$$M_{r, dB_{ridotta}} = 0 \text{ dB}$$

$$\omega_{Bw_{ridotta}} = 0.6680 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Quindi, noto che il picco di risonanza e la pulsazione di banda passante appena trovati (in riferimento alla T ridotta) sono i valori ideali. Tanto e' vero che la funzione di trasferimento del sistema retroazionato T e' la f.d.t. effettiva mentre la T ridotta e' la f.d.t. ideale.

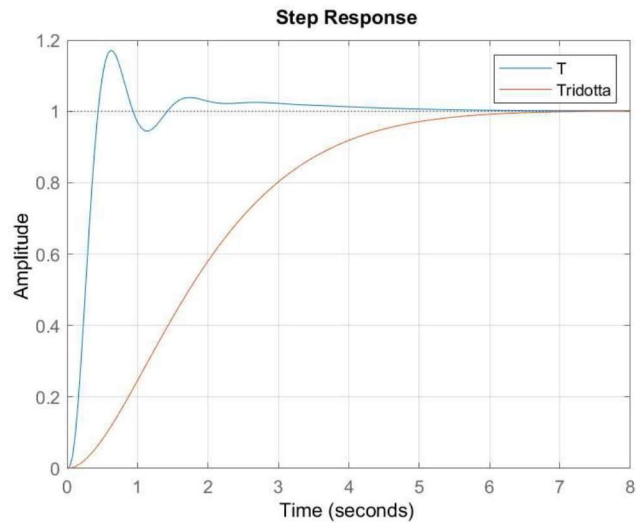
Rappresento nello stesso grafico sia il diagramma dei moduli della T sia il diagramma dei moduli della T ridotta:

```
figure(6);
bodemag(T);
hold on;
bodemag(Tridotta);
grid;
```



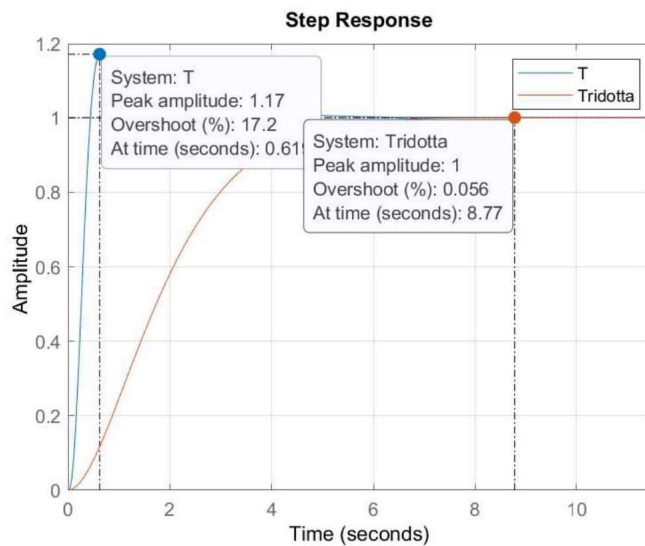
Rappresento, ora, e analizzo la risposta al gradino della funzione di trasferimento del sistema retroazionato T e la f.d.t. ideale Tridotta:

```
figure(7);
step(T);
hold on;
step(Tridotta);
grid;
```

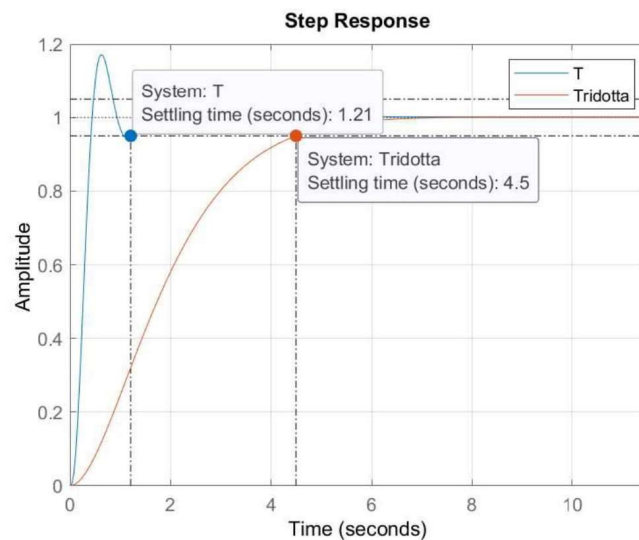
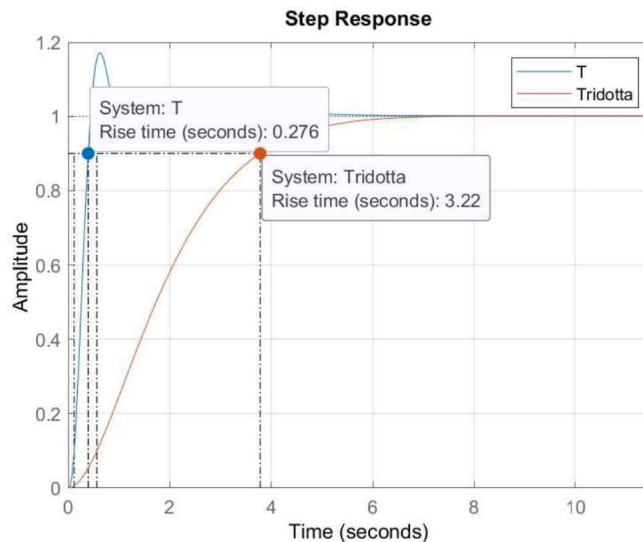


Per quanto riguarda la T "ideale" (Tridotta) non si ha alcuna sovraelongazione. Tanto e' vero che essa e' praticamente approssimabile a zero. Infatti, la risposta al gradino della T "ideale" tende al valore di regime senza mai superarlo.

Osservando, rispettivamente, la massima sovraelongazione  $S$ , il tempo di salita  $t_r$  e il tempo di assestamento al  $t_{s5\%}$







posso osservare che la **massima sovraelongazione  $S$** , definita come massimo scostamento tra la risposta e il suo valore di regime, della funzione di trasferimento del sistema retroazionato e' maggiore rispetto a quella della T ridotta. Questo indica una maggiore precisione da parte della T ridotta. Tanto e' vero che a causa della presenza di zeri all'interno della T effettiva, il grafico della risposta al gradino di quest'ultima viene sollevato verso l'alto aumentando, cosi', la sovraelongazione e perdendo, di conseguenza, precisione. Inoltre, il **tempo di salita  $t_r$** , il quale e' il tempo necessario per passare dal 10% al 90% del valore finale, risulta essere maggiore nella T ridotta. Pertanto, quest'ultimo valore considerato ci fa capire che la f.d.t. del sistema retroazionato effettiva (T) ha una "prontezza" migliore nel rispondere a variazioni a gradino dell'ingresso rispetto alla T ridotta. Oltretutto, il **tempo di assestamento  $t_{s5\%}$** , il quale e' definito come tempo necessario perché l'uscita rimanga entro il  $\pm 5\%$  del valore finale, risulta essere minore nella T effettiva. Pertanto, quest'ultimo parametro considerato ci fa capire che la f.d.t. del sistema retroazionato effettiva ha una velocita' maggiore nell'estinzione dei fenomeni transitori collegati con la risposta al gradino.