

## 圆的基本性质

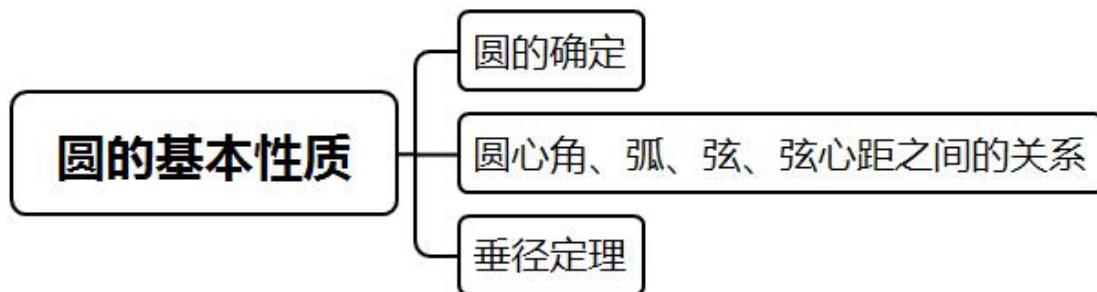


### 内容分析

圆的基本性质是初中数学九年级下学期第一章第一节的内容。需要掌握点与圆的位置关系，理解圆心角、弧、弦、弦心距的概念和掌握它们之间的关系，重点是这四者关系的灵活运用，以及垂径定理及其推论的应用。



### 知识结构



### 模块一：圆的确定



### 知识精讲

#### 1、圆的概念

圆：平面上到一个定点的距离等于定长的所有点所成的图形。

圆心：以上概念中的“定点”；以点  $O$  为圆心的圆称为“圆  $O$ ”，记作  $\odot O$ 。

半径：联结圆心和圆上任意一点的线段；以上概念中的“定长”是圆的半径长。

#### 2、点与圆的位置关系

设一个圆的半径长为  $R$ ，点  $P$  到圆心的距离为  $d$ ，则有以下结论：

当点  $P$  在圆外时， $d > R$ ；当点  $P$  在圆上时， $d = R$ ；当点  $P$  在圆内时， $0 \leq d < R$ 。

反之亦然。

#### 3、相关定理：不在同一直线上的三个点确定一个圆。

三角形的三个顶点确定一个圆。经过一个三角形各顶点的圆叫做这个三角形的外接圆，外接圆的圆心叫做这个三角形的外心；这个三角形叫做这个圆的内接三角形。

如果一个圆经过一个多边形的各顶点，那么这个圆叫做这个多边形的外接圆，这个多边形叫做这个圆的内接多边形。



## 例题解析

**【例 1】** 在平面直角坐标系内,  $A(-3, -\tan 30^\circ)$ ,  $B(\frac{\sqrt{a^2}}{|a|}, 0)$ ,  $\odot A$  的半径为 4,

试说明点  $B$  与  $\odot A$  的位置关系.

**【难度】★**

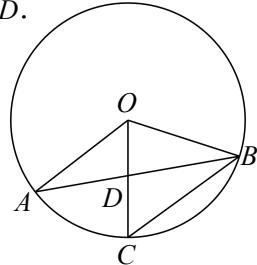
**【例 2】** 过一个点可以画\_\_\_\_\_个圆, 过两个点可以画\_\_\_\_\_个圆, 过三个点可以画\_\_\_\_\_个圆.

**【难度】★**

**【例 3】** 已知, 如图, 在  $\odot O$  中,  $AB$ 、 $BC$  为弦,  $OC$  交  $AB$  于点  $D$ .

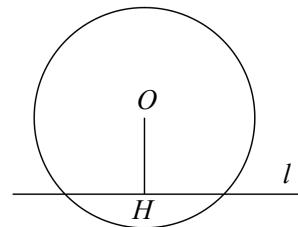
求证: (1)  $\angle ODB > \angle OBD$ ; (2)  $\angle ODB > \angle OBC$ .

**【难度】★**



**【例 4】** 如图,  $\odot O$  的半径为 15,  $O$  到直线  $l$  的距离  $OH = 9$ ,  $A$ 、 $B$ 、 $C$  为直线  $l$  上的三个点,  $AH = 9$ ,  $QH = 12$ ,  $RH = 15$ , 请分别说明点  $A$ 、 $B$ 、 $C$  与  $\odot O$  的位置关系.

**【难度】★★**



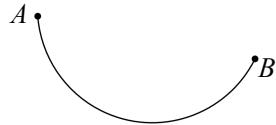
**【例 5】** 若  $A(a, -27)$  在以点  $B(-35, -27)$  为圆心, 37 为半径的圆上, 求  $a$  的值.

**【难度】★★**



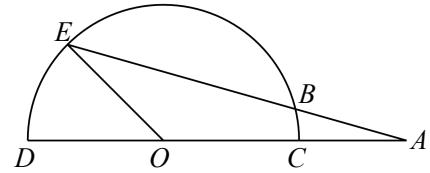
【例 6】如图，作出  $\widehat{AB}$  所在圆的圆心，并补全整个圆。

【难度】★★



【例 7】如图， $CD$  是半圆的直径， $O$  是圆心， $E$  是半圆上一点，且  $\angle EOD = 45^\circ$ ， $A$  是  $DC$  延长线上一点， $AE$  与半圆交于  $B$ ，若  $AB = OC$ ，求  $\angle EAD$  的度数。

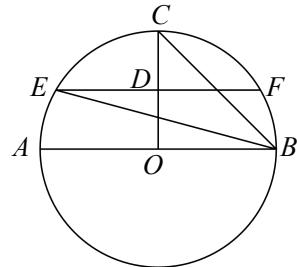
【难度】★★★



【例 8】已知，如图， $AB$  是  $\odot O$  的直径，半径  $OC \perp AB$ ，过  $OC$  的中点  $D$  作  $EF \parallel AB$ 。

$$\text{求证: } \angle ABE = \frac{1}{2} \angle CBE.$$

【难度】★★★



【例 9】已知： $AB$  是  $\odot O$  的直径，点  $P$  是  $OA$  上任意一点，点  $C$  是  $\odot O$  上任意一点。

$$\text{求证: } PA \leq PC \leq PB.$$

【难度】★★★



## 模块二：圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系



### 知识精讲

#### 1、圆心角、弧、弦、弦心距的概念

圆心角：以圆心为顶点的角叫做圆心角；

弧：圆上任意两点之间的部分叫做圆弧，简称弧；

弦：连接圆上任意两点的线段叫做弦，过圆心的弦就是直径；

弦心距：圆心到弦的距离叫做弦心距.

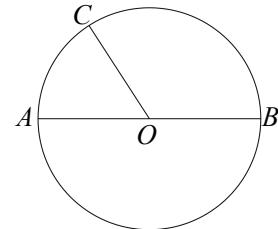
#### 2、半圆、优弧、劣弧

半圆：圆的任意一条直径的两个端点将圆分成两条弧，每一条弧都叫做半圆.

优弧：大于半圆的弧叫做优弧.

劣弧：小于半圆的弧叫做劣弧.

如图，以  $A$ 、 $C$  为端点的劣弧记作  $\widehat{AC}$ ，读作“弧  $AC$ ”；



以  $A$ 、 $C$  为端点的优弧记作  $\widehat{ABC}$ ，读作“弧  $ABC$ ”.

#### 3、等弧和等圆

能够重合的两条弧称为等弧，或者说这两条弧相等. 若  $\widehat{AB}$  与  $\widehat{A'B'}$  是等弧，记作

$$\widehat{AB} = \widehat{A'B'}.$$

半径相等的两个圆一定能够重合，我们把半径相等的两个圆称为等圆.

#### 4、圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理

在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦相等，所对的弦的弦心距相等.

#### 5、圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理的推论

在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条劣弧（或优弧）、两条弦、两条弦的弦心距得到的四组量中有一组量相等，那么它们所对应的其余三组量也分别相等.



喵伴教育

认真负责，引导思路！



## 例题解析

【例 10】下列命题中真命题的个数是（ ）

- ①相等的圆心角所对的弧也相等；
- ②在同圆中，如果两条弦相等，那么所对的弧也相等；
- ③ $A, B$  是  $\odot O$  上任意两点，则  $AO + BO$  等于  $\odot O$  的直径长；
- ④三角形的外心到三角形三边的距离相等.

A. 1 个      B. 2 个      C. 3 个      D. 4 个

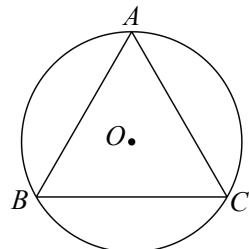
【难度】★

【例 11】一条弦把圆分成  $1:3$  两部分，则弦所对的圆心角为\_\_\_\_\_°.

【难度】★

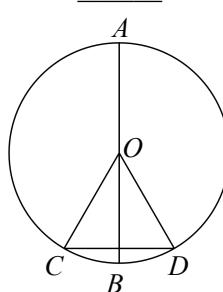
【例 12】如图，在  $\odot O$  中， $\widehat{AB} = \widehat{AC}$ ， $\angle B = 70^\circ$ ，则  $\angle BAC =$ \_\_\_\_\_.

【难度】★



【例 13】如图，已知  $\odot O$  的半径是 6， $\angle BOD = 30^\circ$ ， $\widehat{BD} = \widehat{BC}$ ， $CD =$ \_\_\_\_\_.

【难度】★★

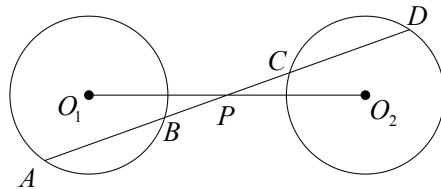




【例 14】如图,  $\odot O_1$  和  $\odot O_2$  是等圆,  $P$  是  $O_1O_2$  的中点, 过点  $P$  作直线  $AD$  交  $\odot O_1$  于点  $A$ 、 $B$ , 交  $\odot O_2$  于点  $C$ 、 $D$ .

求证:  $AB = CD$ .

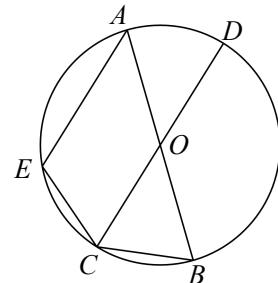
【难度】★★



【例 15】已知, 如图,  $AB$ 、 $CD$  是  $\odot O$  的直径, 弦  $AE \parallel CD$ , 联结  $CE$ 、 $BC$ .

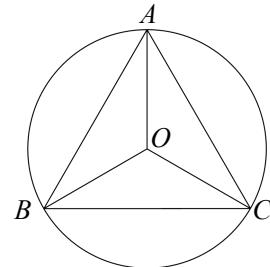
求证:  $BC = CE$ .

【难度】★★



【例 16】如图,  $\odot O$  是  $\triangle ABC$  的外接圆,  $AO$  平分  $\angle BAC$ ,  $\angle AOB = \angle BOC$ , 判断  $\triangle ABC$  的形状, 并说明理由.

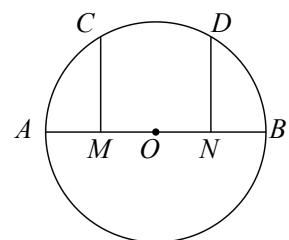
【难度】★★



【例 17】已知, 如图,  $AB$  是  $\odot O$  直径,  $M$ 、 $N$  分别是  $AO$ 、 $BO$  的中点,  $CM \perp AB$ ,  $DN \perp AB$ .

求证:  $\widehat{AC} = \widehat{BD}$ .

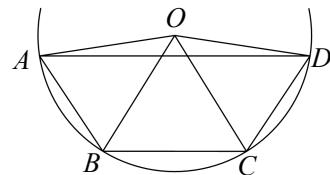
【难度】★★★



【例 18】如图, 以点  $O$  为圆心的圆弧上依次有四个点  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ , 且  $\angle AOB = \angle COD$ .

求证: 四边形  $ABCD$  是等腰梯形.

【难度】★★★





## 模块三：垂径定理



### 知识精讲

#### 1、垂径定理

如果圆的一条直径垂直于一条弦，那么这条直径平分这条弦，并且平分这条弦所对的弧。

#### 2、相关结论

(1) 如果圆的直径平分弦（这条弦不是直径），那么这条直径垂直于这条弦，并且平分这条弦所对的弧。

(2) 如果圆的直径平分弧，那么这条直径就垂直平分这条弧所对的弦。

(3) 如果一条直线是弦的垂直平分线，那么这条直线经过圆心，并且平分这条弦所对的弧。

(4) 如果一条直线平分弦和弦所对的一条弧，那么这条直线经过圆心，并且垂直于这条弦。

(5) 如果一条直线垂直于弦，并且平分弦所对的一条弧，那么这条直线经过圆心，并且平分这条弦。

**总结：**在圆中，对于某一条直线“经过圆心”、“垂直于弦”、“平分弦”、“平分弦所对的弧”这四组关系中，如果有两组关系成立，那么其余两组关系也成立。



### 例题解析

【例 19】 $\odot O$  的直径为 10，圆心  $O$  到弦  $AB$  的距离  $OM$  的长为 3，则弦  $AB$  的长为\_\_\_\_\_。

【难度】★

【例 20】在半径为 2 的  $\odot O$  中，弦  $AB$  的长为  $2\sqrt{2}$ ，则弦  $AB$  所对的圆心角  $\angle AOB = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ 。

【难度】★



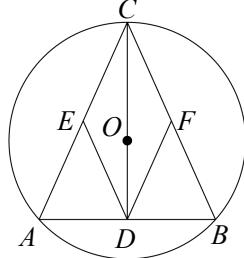
喵伴教育

认真负责，引导思路！

**【例 21】**如图,  $\odot O$  是  $\triangle ABC$  的外接圆, 圆心  $O$  在这个三角形的高  $CD$  上, 点  $E$  和点  $F$  分别是边  $AC$  和  $BC$  的中点.

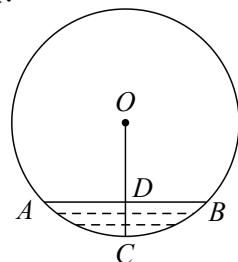
求证: 四边形  $CEDF$  是菱形.

**【难度】★★**



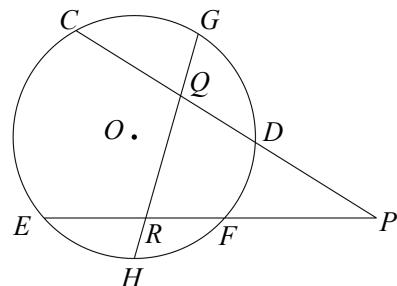
**【例 22】**如图, 一根横截面为圆形的输水管道, 阴影部分为有水部分, 此时水面宽  $AB$  为 0.6 米, 污水深  $CD$  为 0.1 米, 求圆形的下水管道的直径.

**【难度】★★**



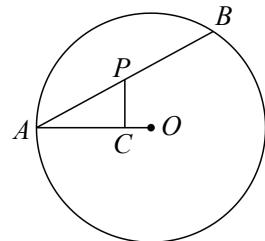
**【例 23】**如图, 在  $\odot O$  中, 弦  $CD$ 、 $EF$  的延长线相交于点  $P$ ,  $G$ 、 $H$  分别是  $\widehat{CD}$ 、 $\widehat{EF}$  的中点,  $GH$  与  $PC$ 、 $PE$  分别相交于  $Q$ 、 $R$  两点, 试判断  $\triangle PQR$  的形状, 并证明所得到的结论.

**【难度】★★**



**【例 24】**如图,  $P$  是  $\odot O$  的弦  $AB$  的中点,  $PC \perp OA$ , 垂足为  $C$ , 求证:  $PA \cdot PB = AC \cdot AO$ .

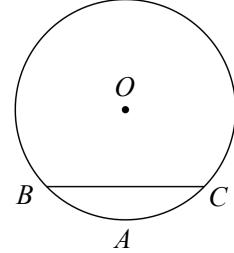
**【难度】★★**





**【例 25】**位于本市浦东临港新城的滴水湖是圆形人工湖。为测量该湖的半径，小智和小方沿湖边选取  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三根木柱，使得  $A$ 、 $B$  之间的距离与  $A$ 、 $C$  之间的距离相等，并测得  $BC$  长 240 米， $A$  到  $BC$  的距离为 5 米，如图所示。请你帮他们求出滴水湖的半径。

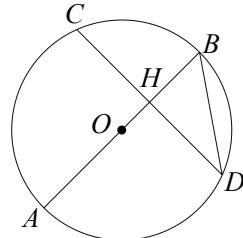
**【难度】★★**



**【例 26】**如图，弦  $CD$  垂直于  $\odot O$  的直径  $AB$ ，垂足为  $H$ ，且  $CD = 2\sqrt{2}$ ， $BD = \sqrt{3}$ ，则

$AB$  的长为\_\_\_\_\_。

**【难度】★★**

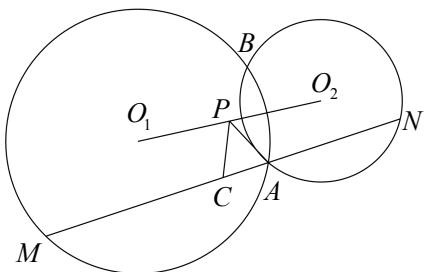


**【例 27】**已知  $\odot O$  的半径  $r = 4$ ， $AB$ 、 $CD$  为  $\odot O$  的两条弦， $AB$ 、 $CD$  的长分别是方程  $x^2 - (4\sqrt{3} + 4)x + 16\sqrt{3} = 0$  的两根，其中  $AB > CD$ ，且  $AB // CD$ ，求  $AB$  与  $CD$  间的距离。

**【难度】★★★**

**【例 28】**已知，如图， $\odot O_1$  与  $\odot O_2$  交于  $A$ 、 $B$ ，过  $A$  的直线分别交  $\odot O_1$  与  $\odot O_2$  于  $M$ 、 $N$ ，  
 $C$  是  $MN$  的中点， $P$  是  $O_1O_2$  的中点。

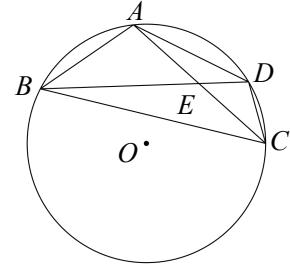
**【难度】★★★**





【例 29】如图，已知四边形  $ABCD$  外接圆  $\odot O$  的半径为 2，对角线  $AC$  与  $BD$  的交点为  $E$ ， $AE = EC$ ， $AB = \sqrt{2}AE$ ，且  $BD = 2\sqrt{3}$ ，求四边形  $ABCD$  的面积.

【难度】★★★

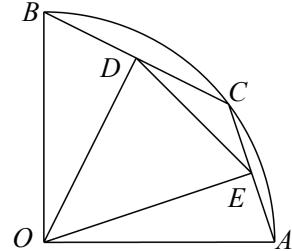


【例 30】如图，在半径为 2 的扇形  $AOB$  中， $\angle AOB = 90^\circ$ ，点  $C$  是弧  $AB$  上的一个动点（不与点  $A$ 、 $B$  重合）， $OD \perp BC$ ， $OE \perp AC$ ，垂足分别为  $D$ 、 $E$ .

(1) 在  $\triangle DOE$  中是否存在长度保持不变的边？如果存在，请指出并求其长度，如果不存在，请说明理由.

(2) 设  $BD = x$ ， $\triangle DOE$  的面积为  $y$ ，求  $y$  关于  $x$  的函数关系式，并写出它的定义域.

【难度】★★★





喵伴教育

认真负责，引导思路！



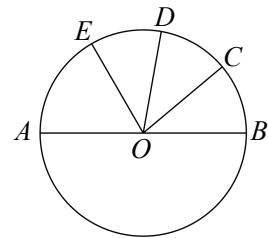
随堂检测

**【习题 1】** 已知  $\odot O$  半径为 5，若点  $P$  不在  $\odot O$  上，则线段  $OP$  的取值范围为 \_\_\_\_\_.

**【难度】★**

**【习题 2】** 如图， $AB$  是直径， $\widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE}$ ， $\angle BOC = 40^\circ$ ，则  $\angle AOE =$  \_\_\_\_\_.

**【难度】★**



**【习题 3】** 如图，为方便三个村庄居民子女的上学问题，上级镇政府决定在  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三个村庄旁边造一所学校，要求它到各村庄的距离相等，请你在图中画出学校的位置. (保留作图痕迹)

**【难度】★**

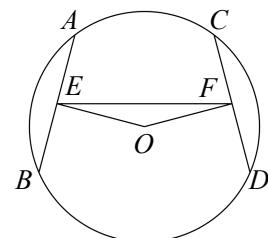
$A.$

$\cdot B$

$\cdot C$

**【习题 4】** 如图， $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ ， $OE \perp AB$ ， $OF \perp CD$ ， $\angle EOF = 25^\circ$ ，求  $\angle EOF$  的度数.

**【难度】★★**



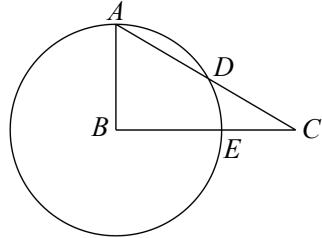


喵伴教育

认真负责，引导思路！

**【习题 5】** 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ， $\angle A = 60^\circ$ ，以点B为圆心，AB为半径画圆，交AC于点D，交BC于点E. 求证：(1)  $\widehat{AD} = 2\widehat{DE}$ ；(2) D是AC的中点.

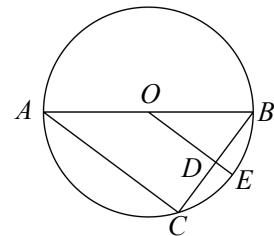
**【难度】★★**



**【习题 6】** 如图， $AB$ 为 $\odot O$ 直径， $E$ 为 $\widehat{BC}$ 的中点， $OE$ 交 $BC$ 于点 $D$ ， $BD=3$ ， $AB=10$ ，

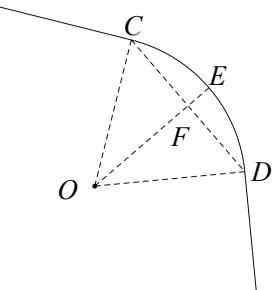
则 $AC=$ \_\_\_\_\_.

**【难度】★★**



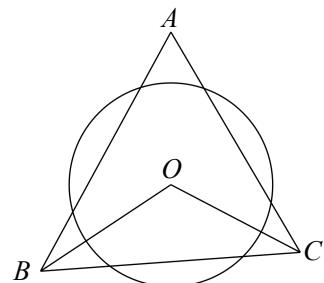
**【习题 7】** 如图，一条公路的转弯处是一段圆弧（即图中的 $\widehat{CD}$ ），点O是 $\widehat{CD}$ 的圆心，其中 $CD=600$ 米， $E$ 为 $\widehat{CD}$ 上一点，且 $OE \perp CD$ ，垂足为 $F$ ， $EF=90$ 米，求这段弯路的半径.

**【难度】★★**



**【习题 8】** 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 70^\circ$ ， $\odot O$ 截 $\triangle ABC$ 的三边所得的弦长都相等，求 $\angle BOC$ 的度数.

**【难度】★★★**



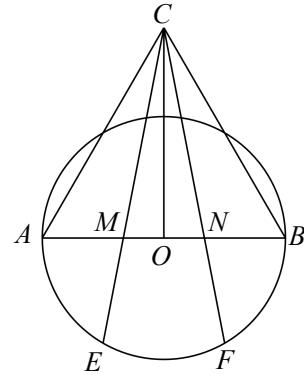


【习题 9】 已知，如图， $\triangle ABC$  是等边三角形， $AB$  是 $\odot O$  的直径， $\widehat{AE} = \widehat{EF} = \widehat{FB}$ ，

$CE$ 、 $CF$  交  $AB$  于点  $M$ 、 $N$ .

求证： $AM = MN = NB$ .

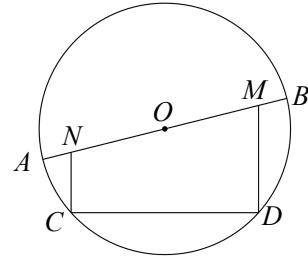
【难度】★★★



【习题 10】 如图， $AB$  为 $\odot O$  的直径， $CD$  为弦，过点  $C$ 、 $D$  分别作  $CN \perp CD$ 、 $DM \perp CD$ ，

分别交  $AB$  于点  $N$ 、 $M$ ，请问图中的  $AN$  与  $BM$  是否相等，说明理由.

【难度】★★★





喵伴教育

认真负责，引导思路！



## 课后作业

【作业 1】 在下列命题中，正确的个数是（ ）

- ①圆心角相等，则它们所对的弦必相等；
- ②经过线段的两个端点及线段所在直线外一点可以确定一个圆；
- ③直径平分弦，则必垂直于弦；
- ④如果同圆中，两条弦互相平分，那么这两条弦都是直径.

A. 0 个      B. 1 个      C. 2 个      D. 3 个

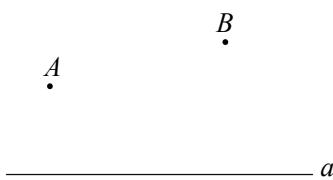
【难度】 ★

【作业 2】 在  $\triangle ABC$  中， $\angle C = 90^\circ$ ， $D, E$  分别是  $AB, AC$  的中点， $AC = 7$ ， $BC = 4$ . 若以点  $C$  为圆心， $BC$  为半径作圆，判断点  $D, E$  与  $\odot C$  的位置关系.

【难度】 ★

【作业 3】 已知直线  $a$  和直线外两点  $A, B$ ，经过  $A, B$  作一圆，使它的圆心在直线  $a$  上.

【难度】 ★



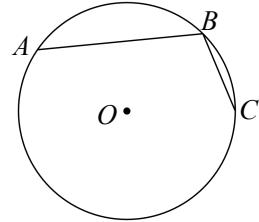
【作业 4】 已知  $\odot O$  外一点  $A$  和圆上的点最大距离为 23 厘米，最小距离为 10 厘米，则  $\odot O$  的半径为\_\_\_\_\_厘米.

【难度】 ★★



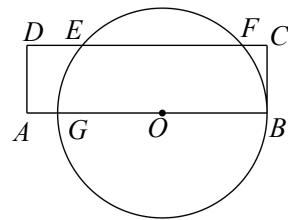
【作业 5】 如图，在 $\odot O$  中， $2\widehat{AB} = \widehat{BC}$ ，试确定 $AB$  与 $2BC$  的大小关系.

【难度】★★



【作业 6】 如图，矩形 $ABCD$  与圆心在 $AB$  上的 $\odot O$  交于点 $G, B, F, E$ ， $GB = 8$  厘米， $AG = 1$  厘米， $DE = 2$  厘米，则 $EF = \underline{\hspace{2cm}}$  厘米.

【难度】★★



【作业 7】 已知点 $A(1, 0)$ ,  $B(4, 0)$ ， $\odot P$  是经过 $A, B$  两点的一个动圆，当 $\odot P$  与 $y$  轴相交，且在 $y$  轴上两交点的距离为 3 时，求圆心 $P$  的坐标.

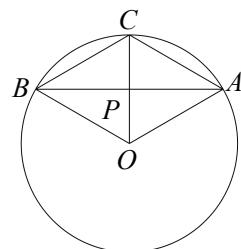
【难度】★★

【作业 8】 已知，如图，在 $\odot O$  中，弦 $AB$  的长是半径 $OA$  的 $\sqrt{3}$  倍， $C$  为 $\widehat{AB}$  的中点，

$AB, OC$  相交于 $P$ .

求证：四边形 $OACB$  为菱形.

【难度】★★★



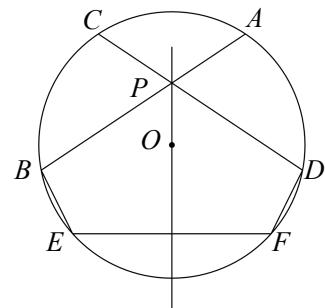


【作业 9】 已知：过圆  $O$  内一点  $P$  作弦  $AB$ 、 $CD$ ，且  $AB = CD$ ，在  $\widehat{BD}$  上取两点  $E$ 、

$F$ ，且  $\widehat{BE} = \widehat{DF}$ .

求证：直线  $PO$  是  $EF$  的垂直平分线.

【难度】 ★★★



【作业 10】 如图， $\odot O_1$  与  $\odot O_2$  交于  $A$ 、 $B$ ， $M$  为  $O_1O_2$  的中点，过点  $A$  作  $EF \perp AM$  分

别交  $\odot O_1$  与  $\odot O_2$  于点  $E$ 、 $F$ . 若  $\angle O_1AO_2 = 90^\circ$ ， $AO_1 \cdot AO_2 = O_1O_2 = m$  ( $m \geq 2$ )，

求  $EF$  的长.

【难度】 ★★★

