圆的补充练习及正多边形与圆

内容分析

本讲一方面对前两讲的内容补充了一些练习，另一方面讲解了正多边形与圆的相关知识，重点是正多边形与圆的相关概念的理解，中心角和边心距的计算.

知识结构

圆的补充练习及正多边形与圆
- 圆的基本性质补充练习
- 直线与圆、圆与圆的位置关系补充练习
- 正多边形与圆

模块一：圆的基本性质补充练习

知识精讲

1、 圆的相关概念

圆：平面上到一个定点的距离等于定长的所有点所成的图形.

圆心：以上概念中的“**定点**”；以点 O 为圆心的圆称为“圆 O”，记作$\odot O$.

半径：联结圆心和圆上任意一点的线段；以上概念中的“**定长**”是圆的半径长.

圆心角：以圆心为顶点的角叫做**圆心角**；

弧：圆上任意两点之间的部分叫做**圆弧**，简称**弧**；

半圆：圆的任意一条直径的两个端点将圆分成两条弧，每一条弧都叫做**半圆**.

优弧：大于半圆的弧叫做**优弧**.

劣弧：小于半圆的弧叫做**劣弧**.

弦：连接圆上任意两点的线段叫做**弦**，过圆心的弦就是**直径**；

弦心距：圆心到弦的距离叫做**弦心距**.

等弧：能够重合的两条弧称为**等弧**.

等圆：半径相等的两个圆一定能够重合，我们把半径相等的两个圆称为**等圆**.

2、 点与圆的位置关系

设一个圆的半径长为 R，点 P 到圆心的距离为 d，则有以下结论：

点 P 在圆外 $\Leftrightarrow d > R$；点 P 在圆上 $\Leftrightarrow d = R$；点 P 在圆内 $\Leftrightarrow 0 \le d < R$.

3、 定理：不在同一直线上的三个点确定一个圆

三角形的三个顶点确定一个圆．经过一个三角形各顶点的圆叫做这个**三角形的外接圆**，外接圆的圆心叫做这个**三角形的外心**；这个三角形叫做这个**圆的内接三角形**.

如果一个圆经过一个多边形的各顶点，那么这个圆叫做这个**多边形的外接圆**，这个多边形叫做这个**圆的内接多边形**.

4、 圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理

在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦相等，所对的弦的弦心距相等.

5、 圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理的推论

在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条劣弧（或优弧）、两条弦、两条弦的弦心距得到的四组量中有一组量相等，那么它们所对应的其余三组量也分别相等.

6、 垂径定理

如果圆的一条直径垂直于一条弦，那么这条直径平分这条弦，并且平分这条弦所对的弧.

7、 垂径定理的相关结论

（1）如果圆的直径平分弦（这条弦不是直径），那么这条直径垂直于这条弦，并且平分这条弦所对的弧.

（2）如果圆的直径平分弧，那么这条直径就垂直平分这条弧所对的弦.

（3）如果一条直线是弦的垂直平分线，那么这条直线经过圆心，并且平分这条弦所对的弧.

（4）如果一条直线平分弦和弦所对的一条弧，那么这条直线经过圆心，并且垂直于这条弦.

（5）如果一条直线垂直于弦，并且平分弦所对的一条弧，那么这条直线经过圆心，并且平分这条弦.

总结：在圆中，对于某一条直线“经过圆心”、“垂直于弦”、“平分弦”、“平分弦所对的弧”这四组关系中，如果有两组关系成立，那么其余两组关系也成立.

例题解析

【例1】 在平面直角坐标系内，⊙P 的半径为 5，圆心 P 的坐标为（1，2），分别判断点 A（2，-5），B（-2，6），C（1，-2）与⊙P 的位置关系.

【难度】★

【答案】点 A 在⊙P 外；点 B 在⊙P 上；点 C 在⊙P 内.

【解析】∵ $PA=\sqrt{(1-2)^2+(2+5)^2}=5\sqrt{2}>5$，∴点 A 在⊙P 外；

∵ $PA=\sqrt{(1+2)^2+(2-6)^2}=5$，∴点 B 在⊙P 上；

∵ $PA=\sqrt{(1-1)^2+(2+2)^2}=4<5$，∴点 C 在⊙P 内.

【总结】本题考查了点与圆的位置关系.

【例2】 下列判断中，正确的是（　　）

A．平分一条弦所对的弧的直线必垂直于这条弦

B．不与直径垂直的弦不能被该直径平分

C．互相平分的两条弦必定是圆的两条直径

D．同圆中，相等的弦所对的弧也相等

【难度】★

【答案】C.

【解析】同时平分一条弦所对优弧、劣弧的直线必垂直于这条弦，故 A 错误；

任意两条直径互相平分，故 B 错误；

同圆中，相等的弦所对的优弧、劣弧分别相等，故 D 错误.

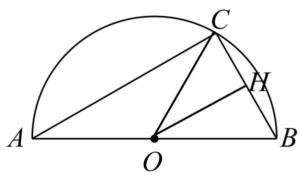
【总结】本题考查了垂径定理及圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理.

【例3】 如图，C 是以 AB 为直径的半圆弧上一点，已知 AC 所对的圆心角为 $120°$，

BC 的弦心距与直径 AB 的比为（　　）

A． $\sqrt{3}:2$　　　B． $\sqrt{3}:1$　　　C． $\sqrt{5}:4$　　　D． $\sqrt{3}:4$

【难度】★★



【答案】D.

【解析】∵ AC 所对的圆心角为 $120°$，

∴ $\angle AOC = 120°$，∴ ΔOBC 是等边三角形，

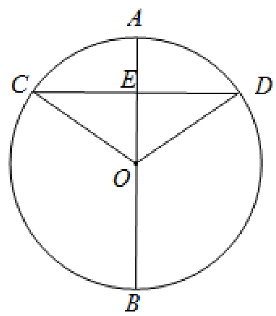
设 $OB = 2$，则 $OH = \sqrt{3}$，$AB = 4$，∴ $OH : AB = \sqrt{3} : 4$.

【总结】本题考查了垂径定理的运用.

【例4】 如图，AB 是 $\odot O$ 直径，AB 经过弦 CD 的中点 E，若 $\angle EOC = 2\angle OCE$，

则 $\angle D =$______，$\angle AOC =$______.

【难度】★★



【答案】$30°$；$60°$.

【解析】∵AB 是 $\odot O$ 直径，AB 经过弦 CD 的中点 E，

∴ $AB \perp CD$，∵ $\angle EOC = 2\angle OCE$，

∴ $\angle D = \angle C = 30°$，$\angle AOC = 60°$.

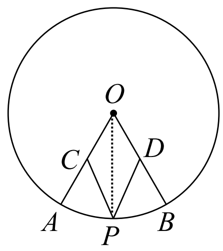
【总结】本题考查了垂径定理及圆的基本性质.

【例5】 如图，OA、OB 是 $\odot O$ 的两条半径，P 是 AB 的中点，点 C 是 OA 的中点，点

D 是 OB 的中点.

求证：$PC = PD$.

【难度】★★



【答案】详见解析.

【解析】连接 OP.

∵点 C 是 OA 的中点，点 D 是 OB 的中点，∴ $OC = OD$，

∵P 是 AB 的中点，∴ $\angle POC = \angle POD$，∴ $\Delta POC \cong \Delta POD$，

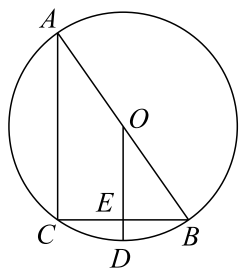
∴ $PC = PD$.

【总结】本题考查了圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理及三角形全等的综合运用.

【例6】 如图，AB 是⊙O 的直径，CB 是弦，$OD \perp CB$ 于 E，交 CB 于 D，联结 AC.

（1）请写出两个正确结论；

（2）若 $CB=8$，$ED=2$，求⊙O 的半径.



【难度】★★

【答案】（1）$\angle ACB=90°$，$OE=\frac{1}{2}AC$，$CE=BE$ 等；

（2）5.

【解析】（1）略；

（2）设⊙O 的半径为 R，由 $OE^2+EB^2=OB^2$，得 $(R-2)^2+16=R^2$，解得：$R=5$，

∴ ⊙O 的半径为 5.

【总结】本题考查了垂径定理及勾股定理、三角形中位线等性质的综合运用.

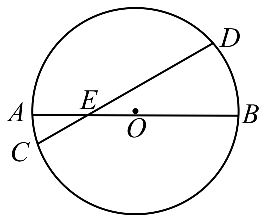
【例7】 如图，⊙O 的直径 AB 和弦 CD 相交于点 E，若 $AE=2$ 厘米，$BE=6$ 厘米，$\angle CEA=30°$，求：

（1）CD 的长；

（2）点 C 到 AB 的距离与点 D 到 AB 的距离之比.

【难度】★★

【答案】（1）$2\sqrt{15}$ 厘米；（2）$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.



【解析】（1）作 $OH \perp CD$ 于点 H，连接 OD，

∵ $AE=2$ 厘米，$BE=6$ 厘米，∴ ⊙O 的半径 $R=4$ 厘米，

∴ $OE=2$，∵ $\angle CEA=30°$，∴ $OH=1$，

∴ $DH=\sqrt{OD^2-OH^2}=\sqrt{15}$，∴ $CD=2DH=2\sqrt{15}$ 厘米.

（2）由（1）得 $EH=\sqrt{3}$，∴ $CE=\sqrt{15}-\sqrt{3}$，$DE=\sqrt{15}+\sqrt{3}$，

∴设点 C 到 AB 的距离为 a，点 D 到 AB 的距离为 b，

则 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{CE}{DE}=\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}+\sqrt{3}}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

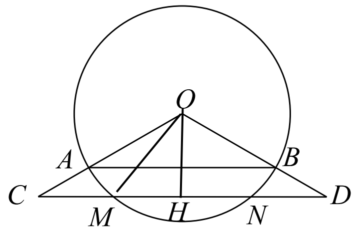
即点 C 到 AB 的距离与点 D 到 AB 的距离之比为 $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

【总结】本题考查了垂径定理及锐角三角比的综合应用.

【例8】 如图，点 C、D 分别在扇形 AOB 的半径 OA、OB 的延长线上，且 $OA=3$，$AC=2$，CD 平行于 AB，并与弧 AB 相交于点 M、N.

（1）求线段 OD 的长；

（2）若 $\tan C=\frac{1}{2}$，求弦 MN 的长.



【难度】★★

【答案】（1）$OD=5$；（2）$MN=4$.

【解析】（1）∵ $CD \parallel AB$，

$\therefore \frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}$，∵ $OA=OB$，∴ $OD=OC=5$.

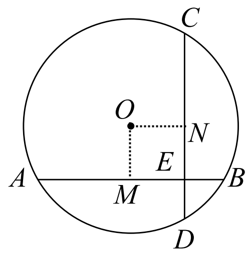
（2）作 $OH\perp MN$ 于点 H，连接 OM，

∵ $\tan C=\frac{OH}{CH}=\frac{1}{2}$，$OC=5$ ∴ $OH=\sqrt{5}$，

∴ $MH=\sqrt{OM^2-MH^2}=2$，∴ $MN=2MH=4$.

【总结】本题考查了垂径定理及平行线分线段成比例的综合运用.

【例9】 如图，半径为 2 的圆内有两条互相垂直的弦 AB 和 CD，它们的交点 E 到圆心 O 的距离等于 1，求 AB^2+CD^2 的值.



【难度】★★★

【答案】28.

【解析】作 $OM\perp AB$ 于点 M，$ON\perp CD$ 于点 N，

设 $OM=a$，$ON=b$，

∴ $BM=\sqrt{OB^2-OM^2}=\sqrt{4-a^2}$，$CN=\sqrt{OC^2-ON^2}=\sqrt{4-b^2}$，

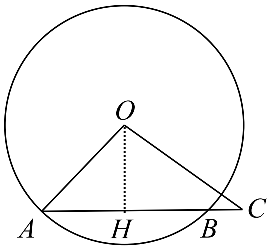
∴ $AB=2BM=2\sqrt{4-a^2}$，$CD=2CN=2\sqrt{4-b^2}$，

∵ E 到圆心 O 的距离等于 1，∴ $a^2+b^2=1$，

∴ $AB^2+CD^2=\left(2\sqrt{4-a^2}\right)^2+\left(2\sqrt{4-b^2}\right)^2=32-4\left(a^2+b^2\right)=28$.

【总结】本题考查了垂径定理及勾股定理的综合应用.

【例10】 如图，某休闲公园有一圆形人工湖，湖中心 O 处有一喷泉．小明为测量湖的半径，在湖边选择 A、B 两个观测点，在 A 处测得 $\angle OAB=\alpha$，在 AB 延长线上 C 处测得 $\angle OCB=\beta$．若 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$， $\tan\beta=\dfrac{2}{3}$，$BC=50$ 米，求人工湖的半径．



【难度】★★★

【答案】500 米．

【解析】作 $OH\perp AC$ 于点 H，则 $AH=BH$，

$\because \sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\therefore$设 $OH=3k$，则 $OA=5k$， $AH=4k$，

$\because \tan\beta=\dfrac{2}{3}$， $\therefore \dfrac{OH}{HC}=\dfrac{3}{5}$，即 $\dfrac{3k}{4k+50}=\dfrac{2}{3}$，解得： $k=100$，

$\therefore OA=500$，

$\therefore$人工湖的半径为 500 米．

【总结】本题考查了垂径定理及锐角三角比的综合应用．

模块二：直线与圆、圆与圆的位置关系补充练习

知识精讲

1、 直线与圆的位置关系：相离、相切、相交

如果$\odot O$的半径长为R，圆心O到直线l的距离为d，那么：

直线l与相交$\Leftrightarrow 0\le d<R$；

直线l与相切$\Leftrightarrow d=R$；

直线l与相离$\Leftrightarrow d>R$．

2、 切线的判定定理

经过半径的外端且垂直于这条半径的直线是圆的切线．

3、 相关概念

圆心距：两个圆的圆心之间的距离叫做**圆心距**．

连心线：经过两个圆圆心的直线叫做**连心线**．

4、 圆与圆的位置关系：外离、外切、相交、内切、内含

如果两圆的半径长分别为R_1和R_2，圆心距为d，那么：

两圆外离$\Leftrightarrow d>R_1+R_2$；

两圆外切$\Leftrightarrow d=R_1+R_2$；

两圆相交$\Leftrightarrow \left|R_1-R_2\right|<d<R_1+R_2$；

两圆内切$\Leftrightarrow 0<d=\left|R_1-R_2\right|$；

两圆内含$\Leftrightarrow 0\le d<\left|R_1-R_2\right|$．

5、 相关定理

（1）如果两圆相交，那么它们的两个交点关于连心线对称，于是，可推出以下**定理**：相交两圆的连心线垂直平分两圆的公共弦．

（2）如果两圆相切，可归纳出以下**定理**：相切两圆的连心线经过切点．

例题解析

【例11】 下列直线中，必为切线的是（　　）

A．与圆有公共点的直线　　B．到圆心距离等于半径的直线

C．垂直于圆的半径的直线　　D．过圆的半径外端的直线

【难度】★

【答案】B．

【解析】与圆有公共点的直线可以相切，可以相交，故 A 错误；

垂直于圆的半径并且经过半径的外端的直线是圆的切线，故 C、D 错误；

【总结】本题考查了圆的切线的判定方法．

【例12】 正方形 $ABCD$ 中，$AB=1$，分别以 A、C 为圆心作两个半径为 R、r（$R>r$）的圆，当$\odot A$与$\odot C$有两个交点，R、r 满足的条件是（　　）

A．$R+r>\sqrt{2}$　　B．$R-r<\sqrt{2}<R+r$

C．$R-r>\sqrt{2}$　　D．$0<R-r<\sqrt{2}$

【难度】★

【答案】B．

【解析】$\because$正方形 $ABCD$ 中，$AB=1$，$\therefore AC=\sqrt{2}$，

$\because \odot A$与$\odot C$有两个交点，$\therefore$两圆相交，$\therefore R-r<\sqrt{2}<R+r$．

【总结】本题考查了圆与圆的位置关系．

【例13】 已知两圆的半径分别为 2 和 5，当两圆相切时，圆心距为______．

【难度】★★

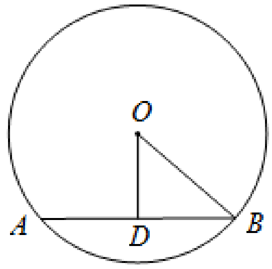
【答案】3 或 7．

【解析】当两圆外切时，圆心距 $d=5+2=7$，

当两圆内切时，圆心距 $d=5-2=3$．

【总结】本题考查了圆与圆相切的位置关系，注意分外切和内切两种情况．

【例14】 $\odot O$ 的半径为 6，$\odot O$ 的一条弦 AB 长为 $3\sqrt{3}$，以 3 为半径的同心圆与 AB 的关系是______.



【难度】★★

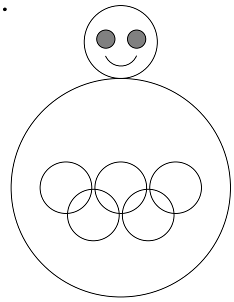
【答案】相离.

【解析】如图，则 $OD=\sqrt{OB^2-BD^2}=\sqrt{36-\frac{27}{4}}=\frac{3\sqrt{13}}{2}>3$，

∴以 3 为半径的同心圆与 AB 的关系是相离.

【总结】本题考查了垂径定理及直线与圆的位置关系的综合运用.

【例15】 两圆有多种位置关系，如图中不存在的位置关系是______.



【难度】★★

【答案】内切.

【解析】观察图形可知不存在的位置关系是内切.

【总结】本题考查了圆与圆的位置关系.

【例16】 设圆心 O 到直线 l 的距离为 d，半径为 R，当 d、R 是方程 $x^2-9x+20=0$ 的两个根，则直线与圆的位置关系是______；当 d、R 是方程 $x^2-4x+m=0$ 的两个根，且直线与圆相切，则 $m=$______.

【难度】★★

【答案】相交或相离；$m=4$.

【解析】$x^2-9x+20=0$，解得 $x_1=4$，$x_2=5$，

∵d、R 是方程 $x^2-9x+20=0$ 的两个根，

∴当 $d=5$，$R=4$ 时，直线与圆的位置关系是相离，

当 $d=4$，$R=5$ 时，直线与圆的位置关系是相交；

∵当 d、R 是方程 $x^2-4x+m=0$ 的两个根，且直线与圆相切，

∴ $d=R$，∴ $\Delta=b^2-4ac=16-4m=0$，解得：$m=4$.

【总结】本题考查了直线与圆的位置关系的判定.

【例17】 已知 A 点为（0，3），$\odot A$ 的半径为 1，点 B 在 x 轴上.

（1）若 B 点为（4，0），$\odot B$ 半径为 3，试判断 $\odot A$ 与 $\odot B$ 的位置关系；

（2）若 $\odot B$ 过点 M（2，0），且与 $\odot A$ 相切，求 B 点的坐标.

【难度】★★

【答案】（1）外离；（2）两圆外切时，$B(0,0)$；两圆内切时，$B(-3,0)$.

【解析】（1）由题意得 $R_A=1$，$R_B=3$，$AB=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

$\because R_A+R_B<AB$，$\therefore \odot A$ 与 $\odot B$ 外离；

（2）设 $B(x,0)$，则 $R_A=1$，$R_B=|x-2|$，$AB=\sqrt{x^2+9}$，

当两圆外切时，$R_A+R_B=AB$，即 $1+|x-2|=\sqrt{x^2+9}$，解得：$x=0$，$\therefore B(0,0)$；

当两圆内切时，$R_B-R_A=AB$，即 $|x-2|-1=\sqrt{x^2+9}$，解得：$x=-3$，$\therefore B(-3,0)$.

【总结】本题考查了圆与圆的位置关系的判定及两点距离公式的综合运用.

【例18】 已知 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相切，两圆的圆心距为 9 厘米，$\odot O_1$ 的半径为 4 厘米，求 $\odot O_2$ 的半径.

【难度】★★

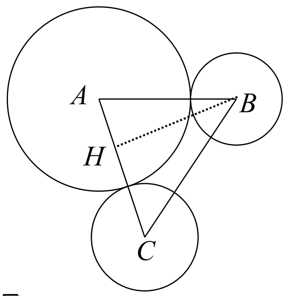
【答案】5 厘米或 13 厘米.

【解析】当两圆外切时，$d=9-4=5$，当两圆内切时，$d=9+4=13$，

$\therefore \odot O_2$ 的半径为 5 厘米或 13 厘米.

【总结】本题考查了两圆相切的位置关系，注意分两种情况讨论.

【例19】 如图，$\odot A$ 的直径为 $2\sqrt{3}$，$\odot B$ 的直径为 $4-2\sqrt{3}$，$\odot C$ 的直径为 2，$\odot A$ 和 $\odot B$ 外切，$\odot A$ 和 $\odot C$ 外切，$\angle BAC=60°$，求 BC 的长度及 $\angle C$ 的正弦值.



【难度】★★

【答案】 $BC=\sqrt{6}$， $\sin\angle C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

【解析】作 $BH\perp AC$ 于点 H，

由题意得： $AB=\dfrac{2\sqrt{3}}{2}+\dfrac{4-2\sqrt{3}}{2}=2$， $AC=\dfrac{2\sqrt{3}}{2}+\dfrac{2}{2}=\sqrt{3}+1$，

$\because \angle BAC=60°$， $\therefore AH=1$， $BH=\sqrt{3}$， $\therefore HC=AC-AH=\sqrt{3}$，

$\therefore BC=\sqrt{BH^2+CH^2}=\sqrt{6}$， $\sin\angle C=\dfrac{BH}{BC}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

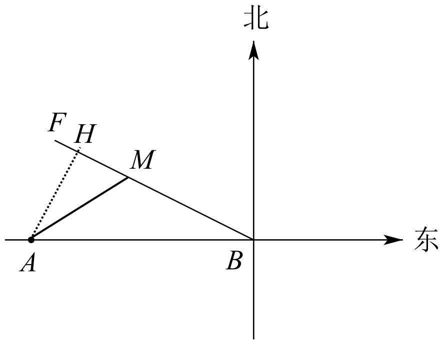
【总结】本题考查了圆与圆相切时半径与圆心距的关系及锐角三角比的应用.

【例20】 如图，A 市气象站测得台风中心在 A 市正东方向 300 千米的 B 处，并且以 10 千米/时的速度向北偏西 60° 的 BF 方向移动，距台风中心 200 千米范围内是受台风影响的区域.

（1）A 市是否会受到台风的影响?并说明理由;

（2）如果 A 市受这次台风的影响，那么受台风影响的时间有多长?

【难度】★★



【答案】（1）受影响，理由见解析;

（2）$10\sqrt{7}$ 小时.

【解析】（1）作 $AH\perp BF$ 于点 H，

由题意得： $AB=300$， $\angle ABH=30°$，

$\therefore AH=150<200$，

$\therefore A$ 市会受到台风的影响;

（2）假设当台风中心运动到 M 点时， A 市开始受影响，此时 $AM=200$，

则 $MH=\sqrt{AM^2-AH^2}=50\sqrt{7}$，

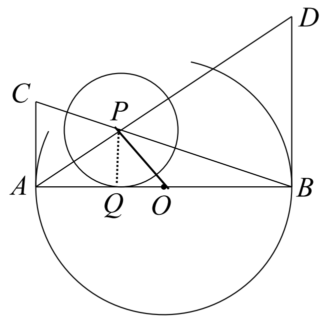
$\therefore$ 受影响时间 $t=\dfrac{2MH}{10}=\dfrac{2\times50\sqrt{7}}{10}=10\sqrt{7}$ （小时）

【总结】本题考查了锐角三角比的应用.

【例21】 如图，$\angle CAB=\angle ABD=90^\circ$，$AB=AC+BD$，$AD$ 交 BC 于 P，作$\odot P$ 使其与 AB 相切．试问：以 AB 为直径作出的$\odot O$ 与$\odot P$ 是相交?是内切?还是内含?请作出判断并加以证明．

【难度】★★★

【答案】内切．



【解析】$\odot O$ 与$\odot P$ 内切，理由如下：

设 AB 于$\odot P$ 相切于点 Q，连接 PQ，则 $PQ\perp AB$．

设 $PQ=r$，$AC=a$，$BD=b$，

$\because \angle CAB=\angle ABD=90^\circ$，$\therefore AC\parallel BD$，

$\therefore \frac{r}{a}=\frac{BQ}{AB}$，$\frac{r}{b}=\frac{AQ}{AB}$，$\therefore \frac{a-r}{a}=\frac{r}{b}$，$\therefore r=\frac{ab}{a+b}$，

$\because \odot O$ 的半径 $R=\frac{a+b}{2}$，$\therefore Rr=\frac{ab}{2}$，

$\therefore AQ=\frac{r\cdot AB}{b}=a$，$\therefore OQ=\frac{b-a}{2}$，

连接 OP，则 $PO=\sqrt{\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2+\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}=\frac{a^2+b^2}{2(a+b)}=\frac{a+b}{2}-\frac{ab}{a+b}=R-r$，

$\therefore \odot O$ 与$\odot P$ 内切．

【总结】本题考查了相似三角形的判定和性质，勾股定理，圆与圆的位置关系等知识，此题综合性较强，难度较大，解题的关键是注意数形结合思想的应用．

【例22】 如图，已知 $\sin\angle ABC=\frac{1}{3}$，$\odot O$ 的半径为 2，圆心 O 在射线 BC 上，$\odot O$ 与射线 BA 相交于 E、F 两点，$EF=2\sqrt{3}$．

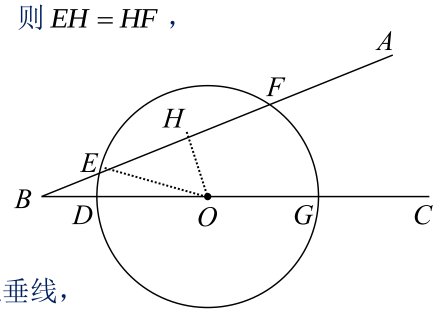
（1）求 BO 的长；

（2）点 P 在射线 BC 上，以点 P 为圆心作圆，使得 $\odot P$ 同时与 $\odot O$ 和射线 BA 相切，求所有满足条件的 $\odot P$ 的半径．

【难度】★★★

【答案】（1）$BO=3$；（2）$\frac{1}{4}$、$\frac{5}{2}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{5}{4}$．

【解析】（1）连接 EO，过点 O 作 $OH\perp EF$ 于点 H，则 $EH=HF$，



$\because OE=2$，$EF=2\sqrt{3}$，$\therefore OH=1$，

$\because \sin\angle ABC=\frac{1}{3}$，$\therefore BO=3$；

（2） 设 $\odot P$ 的半径为 R，

当 $\odot P$ 与直线相切时，过点 P 的半径垂直此垂线，

①$\odot P$ 与 $\odot O$ 外切于点 D 时，$\sin\angle ABC=\frac{R}{1-R}=\frac{1}{3}$，解得：$R=\frac{1}{4}$；

②$\odot P$ 与 $\odot O$ 外切于点 G 时，$\sin\angle ABC=\frac{R}{5+R}=\frac{1}{3}$，解得：$R=\frac{5}{2}$；

③$\odot P$ 与 $\odot O$ 内切于点 D 时，$\sin\angle ABC=\frac{R}{1+R}=\frac{1}{3}$，解得：$R=\frac{1}{2}$；

④$\odot P$ 与 $\odot O$ 内切于点 G 时，$\sin\angle ABC=\frac{R}{5-R}=\frac{1}{3}$，解得：$R=\frac{5}{4}$；

综上可知，$\odot P$ 的半径为 $\frac{1}{4}$、$\frac{5}{2}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{5}{4}$．

【总结】本题考查了直线与圆相切和两圆相切的知识，综合性较强，注意分类讨论．

模块三：正多边形与圆

知识精讲

1、 正多边形

各边相等，各角也相等的多边形叫做正多边形.

有 n 条边的正多边形（n 是正整数，且 $n \geq 3$）就称作正 n 边形.

2、 正 n 边形的对称性

正 n 边形是轴对称图形，对称轴的条数 $=n$.

当 n 为偶数时，正 n 边形是中心对称图形，对称中心是它的两条对称轴的交点.

3、 正多边形的外接圆和内切圆

任何一个正多边形都有一个外接圆和一个内切圆，外接圆和内切圆的圆心都是这个正多边形的对称轴的交点.

正多边形外接圆（或内切圆）的圆心叫做**正多边形的中心**.

正多边形外接圆的半径叫做**正多边形的半径**.

正多边形内切圆的半径长叫做**正多边形的边心距**.

正多边形一边所对的关于外接圆的圆心角叫做**正多边形的中心角**.

例题解析

【例23】 正十边形有______条对称轴，它不仅是______对称图形，还是______对称图形，它的中心角是______°.

【难度】★

【答案】10；轴；中心；36.

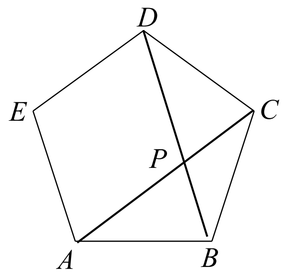
【解析】正 n 边形是轴对称图形，对称轴的条数 $=n$，如果 n 为偶数，则正 n 边形也是中心对称图形，中心角 $\alpha=\dfrac{360°}{n}$.

【总结】本题考查了正多边形的对称性及中心角的计算公式.

【例24】 圆内接正五边形 $ABCDE$ 中，对角线 AC 和 BD 相交于点 P，则 $\angle APB$ 的度数是______.

【难度】★

【答案】72°.



【解析】∵$ABCDE$ 为正五边形，

∴每个内角为108°，且 $CB=AB=CD$，

∴ $\angle CAB=\angle DBC=36^\circ$，

∴ $\angle APB=180^\circ-\angle PAB-\angle PBA=180^\circ-\angle ABC=72^\circ$.

【总结】本题考查了正五边形中有关角度的计算.

【例25】 下列命题中，假命题是（　　）

A．各边相等的圆内接多边形是正多边形

B．正多边形的任意两个角的平分线如果相交，则交点为正多边形的中心

C．正多边形的任意两条边的中垂线如果相交，则交点为正多边形的中心

D．一个外角小于一个内角的正多边形一定是正五边形

【难度】★★

【答案】D.

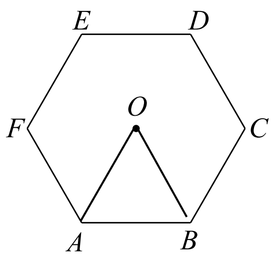
【解析】一个外角小于一个内角的正多边形一定是大于四边的正多边形，故 D 是假命题.

【总结】本题考查了正多边形的相关概念.

【例26】 如图，已知正六边形 $ABCDEF$ 的半径为 a，中心为 O，求它的周长和面积.

【难度】★★

【答案】周长 $C=6a$，面积 $S=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^2$.



【解析】连接 OA、OB，由题意得 $OA=OB=a$，

∵$ABCDEF$ 为正六边形，∴ $\angle AOB=60^\circ$，

∴ ΔAOB 为等边三角形，∴ $AB=OA=OB=a$，

∴正六边形周长 $C=6AB=6a$，

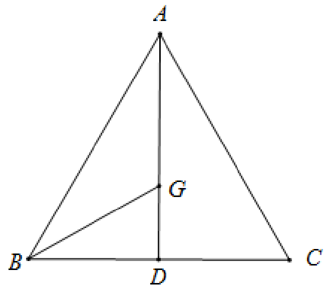
面积 $S=6\cdot\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^2$.

【总结】本题考查了正多边形的性质及勾股定理的应用.

【例27】 正三角形的边心距、半径和高的比是________________.

【难度】★★

【答案】$1:2:3$.



【解析】如图，设等边三角形边长为2，则

易得边心距 $GD=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

半径 $GB=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，高 $AD=\sqrt{3}$，

∴边心距、半径和高的比是$1:2:3$.

【总结】本题考查了正正三角形的边心距、半径的有关概念.

【例28】 正多边形的面积是 240 平方厘米，周长是 60 厘米，则边心距是______厘米.

【难度】★★

【答案】8.

【解析】设正多边形的边长为a，边心距为h，则正n边形的面积

$S=n\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot h$，∵ $na=60$，∴ $h=240\times2\div60=8$，

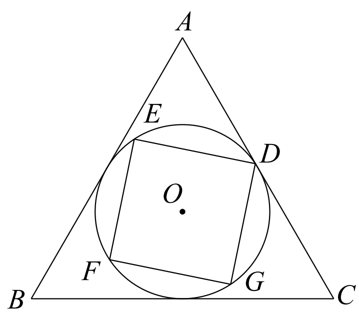
∴正多边形的边心距是 8 厘米.

【总结】本题考查了正多边形的有关计算，利用整体思想去求.

【例29】 如图，已知等边 ΔABC 的边长为 a，求其内切圆的内接正方形 $DEFG$ 的面积.

【难度】★★★

【答案】$\frac{1}{6}a^2$.



【解析】∵等边 ΔABC 的边长为 a，

∴内切圆半径 $r=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{a^2-\frac{1}{4}a^2}=\frac{\sqrt{3}}{6}a$，

∴圆内接正四边形的对角线长 $l=2r=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，

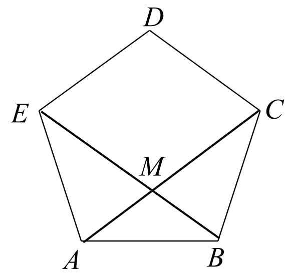
∴正方形 $DEFG$ 的面积 $S=\frac{1}{2}l^2=\frac{1}{6}a^2$.

【总结】本题考查了圆内接正多边形及外切正多边形的性质及相关计算，运用 $S=\frac{1}{2}l^2$ 计算面积比较简便.

【例30】 如图，正五边形 $ABCDE$ 的对角线 AC、BE 相交于点 M.

（1）求证：四边形 $CDEM$ 是菱形；

（2）若 $AB=4$，求 BE 的长.



【难度】★★★

【答案】（1）详见解析；（2）$2\sqrt{5}+2$.

【解析】（1）∵$ABCDE$ 是正五边形，

∴每个内角为$108°$，且每条边都相等.

∴ $\angle CAB=\angle ABM=36°$，

∴ $\angle EMA=72°$， $\angle EAM=108°-36°=72°$，

∴ $EM=EA$，同理可证 $CM=CB$，

∴ $DE=EM=CM=CD$，

∴四边形 $CDEM$ 是菱形；

（2）设 $BM=x$， ∵ $EM=EA$， ∴ $EB=4+x$，

由（1）易得 $\Delta BAE\backsim\Delta BMA$，

∴ $\dfrac{BA}{BM}=\dfrac{BE}{BA}$，即 $\dfrac{4}{x}=\dfrac{x+4}{4}$，解得： $x=2\sqrt{5}-2$，

∴ $BE=2\sqrt{5}+2$.

【总结】本题考查了菱形的判定及相似三角形的性质的综合应用.

随堂检测

【习题1】　两个等圆只有一个公共点，则这两圆的位置关系可以是（　　）

A．相离　　B．外切　　C．相交　　D．内切

【难度】★

【答案】B．

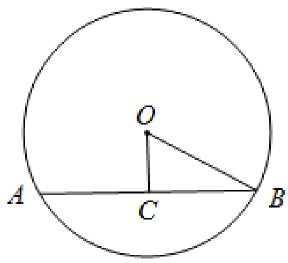
【解析】由两个等圆只有一个公共点可知，两圆相切，又因为两圆相等，所以两圆外切．

【总结】本题考查了圆与圆的位置关系．

【习题2】　已知圆 O 的弦 $AB=10$，相应的弦心距 $OC=3$，则圆 O 的半径等于______．

【难度】★

【答案】$\sqrt{34}$．



【解析】$OB=\sqrt{OC^2+CB^2}=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$．

【总结】本题考查了垂径定理的运用．

【习题3】　下列语句中，正确的个数是（　　）

①直角三角形的两条直角边长分别是 6 和 8，则外接圆半径为 $\frac{24}{5}$；

②已知两圆的直径为 10 厘米，6 厘米，圆心距为 16 厘米，则两圆外切；

③过三点可以确定一个圆；

④两圆的公共弦垂直平分连心线．

A．0 个　　B．1 个　　C．2 个　　D．3 个

【难度】★★

【答案】A．

【解析】①外接圆半径为 5，故①错误；②圆心距大于半径之和，两圆外离，故②错误；③过不共线的三点可以确定一个圆，故③错误；④两圆的连心线所在的直线垂直平分公共弦，故④错误．

【总结】本题考查了与圆有关的性质．

【习题4】　一个正六边形和一个正三角形的周长相等，则它们的面积之比是______.

【难度】★★

【答案】$3:2$.

【解析】设正六边形的边长为 1，则三角形的边长为 2，

$\therefore S_{六边形}=6\times\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，$S_{三角形}=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$，

$\therefore$正六边形和一个正三角形的面积之比是$3:2$.

【总结】本题考查了圆内接正多边形的有关性质.

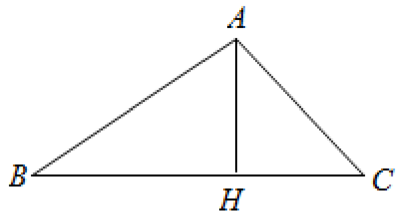
【习题5】　在ΔABC中，$BC=6$，$\angle B=30°$，$\angle C=45°$，以A为圆心，当半径多长时所作的$\odot A$与直线BC相切、相交、相离.

【难度】★★

【答案】当$0<r<3\sqrt{3}-3$时，$\odot A$与直线BC相离；

当$r=3\sqrt{3}-3$时，$\odot A$与直线BC相切；

当$r>3\sqrt{3}-3$时，$\odot A$与直线BC相交.



【解析】如图，作$AH\perp BC$于点H，设$AH=x$，

$\because\angle B=30°$，$\angle C=45°$，$\therefore CH=x$，$BH=\sqrt{3}x$，

$\because BC=6$，$\therefore x+\sqrt{3}x=6$，解得：$x=3\sqrt{3}-3$，

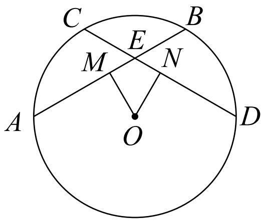
$\therefore$当$0<r<3\sqrt{3}-3$时，$\odot A$与直线BC相离；

当$r=3\sqrt{3}-3$时，$\odot A$与直线BC相切；

当$r>3\sqrt{3}-3$时，$\odot A$与直线BC相交.

【总结】本题考查了直线与圆的位置关系的判定.

【习题6】 如图，在$\odot O$中，弦AB、CD相交于E，OM、ON分别是弦AB、CD的弦心距.



（1）如果$OM=ON$，求证：$AC=BD$；

（2）如果$AC=BD$，求证：EO平分$\angle AED$.

【难度】★★

【答案】详见解析.

【解析】（1）$\because OM$、ON分别是弦AB、CD的弦心距，$OM=ON$，

$\therefore AB=CD$，$\therefore AB-BC=CD-BC$，

$\therefore AC=BD$；

（2）$\because AC=BD$，$\therefore AB=CD$，$\therefore OM=ON$，

$\because OM$、ON分别是弦AB、CD的弦心距，$\therefore OM\perp AB$，$ON\perp CD$，

$\therefore EO$平分$\angle AED$.

【总结】本题考查了圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理.

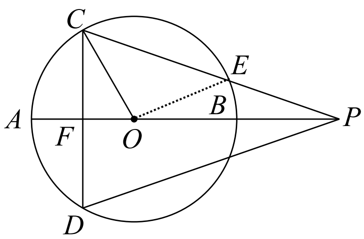
【习题7】 如图，P是$\odot O$的直径AB延长线上的一点，PC与$\odot O$分别相交于点E和点C，过点C作$CD\perp AB$，交$\odot O$于点D，联结PD.

（1）求证：$PC=PD$;

（2）如果PE的长等于$\odot O$的半径OC，求证：$\angle AOC=3\angle APC$.

【难度】★★

【答案】详见解析.



【解析】（1）$\because CD\perp AB$，O为圆心，

$\therefore CF=DF$，$\therefore \Delta PCF\cong\Delta PDF$，

$\therefore PC=PD$；

（2）连接OE，则$PE=OE$，

$\therefore \angle EOP=\angle EPC$，$\therefore \angle OEC=2\angle EPO$，

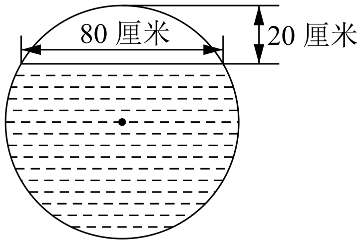
$\because OE=OC$，$\therefore \angle OCE=\angle OEC$，

$\therefore \angle AOC=\angle OCE+\angle EPO=3\angle EPO$，

$\therefore \angle AOC=3\angle APC$.

【总结】本题考查了垂径定理、三角形外角性质及等腰三角形性质的综合运用.

【习题8】　某小区一圆形管道破裂，修理工准备更换一段新管道，现在量得污水水面宽度为 80 厘米，水面到管道顶部距离为 20 厘米．修理工应准备内直径为多少厘米的管道?



【难度】★★

【答案】100 厘米．

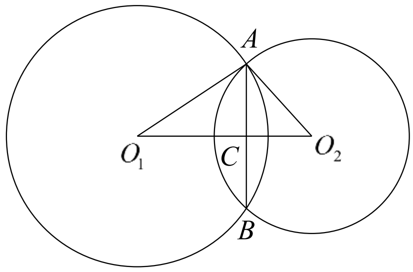
【解析】设圆的半径为 r 厘米，则由题意可得

$(r-20)^2+40^2=r^2$，解得 $r=50$，

∴修理工应准备内直径为 100 厘米的管道．

【总结】本题考查了垂径定理及勾股定理的综合运用．

【习题9】　如图，已知 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 相交于 A、B 两点，若 $\tan\angle AO_1O_2=\dfrac{1}{2}$，$\tan\angle AO_2O_1=\dfrac{3}{4}$，且 $O_1O_2=30$，求 AB 的长．



【难度】★★

【答案】18．

【解析】∵ $\tan\angle AO_1O_2=\dfrac{1}{2}$，$\tan\angle AO_2O_1=\dfrac{3}{4}$，

∴设 $AC=3k$，则 $O_2C=4k$，$O_1C=6k$，

∵ $O_1O_2=30$，

∴ $6k+4k=30$，解得：$k=3$，

∴ $AC=9$，

∴ $AB=2AC=18$．

【总结】本题考查了相交两圆的有关性质及勾股定理的综合运用．

【习题10】 如图 1，已知 $Rt\Delta ABC$ 中，$\angle CAB=30^\circ$，$BC=5$．过点 A 作 $AE\perp AB$，且 $AE=15$，连接 BE 交 AC 于点 P．

（1）求 PA 的长；

（2）以点 A 为圆心，AP 为半径作 $\odot A$，试判断 BE 与 $\odot A$ 是否相切，并说明理由；

（3）如图 2，过点 C 作 $CD\perp AE$，垂足为点 D．以点 A 为圆心，r 为半径作 $\odot A$；以点 C 为圆心，R 为半径作 $\odot C$．若 r 和 R 的大小可变化，并且在变化过程中保持 $\odot A$ 和 $\odot C$ 相切，且使 D 点在 $\odot A$ 的内部，B 点在 $\odot A$ 的外部，求 r 和 R 的变化范围．

【难度】★★★

【答案】（1）$\dfrac{15}{2}$；

（2）相切，理由详见解析；

（3）当 $\odot A$ 和 $\odot C$ 外切时，$5<r<5\sqrt{3}$，$10-5\sqrt{3}<R<5$；

当 $\odot A$ 和 $\odot C$ 内切时，$5<r<5\sqrt{3}$，$15<R<10+5\sqrt{3}$．

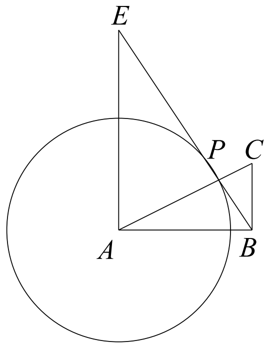


图 1

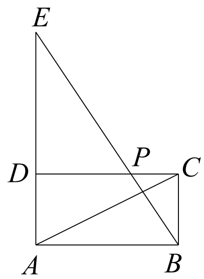


图 2

【解析】（1）$\because AE\perp AB$，$CB\perp AB$，$\therefore AE\parallel BC$，

$\therefore \dfrac{BC}{AE}=\dfrac{CP}{AP}$，$\because BC=5$，$\angle CAB=30^\circ$，$\therefore AC=10$，

把 $BC=5$，$AE=15$ 代入得 $\dfrac{5}{15}=\dfrac{10-AP}{AP}$，解得 $AP=\dfrac{15}{2}$；

（2）BE 与 $\odot A$ 相切，理由如下：

由（1）得 $PC=AC-AP=\dfrac{5}{2}$，

$\because \angle C=60^\circ$，$BC=5$，$\therefore \angle BPC=90^\circ$，$\therefore BE$ 与 $\odot A$ 相切；

（3）$\because D$ 点在$\odot A$的内部，B 点在$\odot A$的外部，$\therefore 5<r<5\sqrt{3}$，

当$\odot A$和$\odot C$外切时，$r+R=10$，

$\because 5<r<5\sqrt{3}$，$\therefore 10-5\sqrt{3}<R<5$，

$\therefore 5<r<5\sqrt{3}$，$10-5\sqrt{3}<R<5$；

当$\odot A$和$\odot C$内切时，$R-r=10$，

$\because 5<r<5\sqrt{3}$，$\therefore 15<R<10+5\sqrt{3}$，

$\therefore 5<r<5\sqrt{3}$，$15<R<10+5\sqrt{3}$，

综上可知，当$\odot A$和$\odot C$外切时，$5<r<5\sqrt{3}$，$10-5\sqrt{3}<R<5$；

当$\odot A$和$\odot C$内切时，$5<r<5\sqrt{3}$，$15<R<10+5\sqrt{3}$．

【总结】本题考查了点与圆、圆与圆的位置关系及相似三角形的综合应用，综合性较强，并且后面没有说明$\odot A$和$\odot C$是内切还是外切，因此要分类讨论．

课后作业

【作业1】 下列说法正确的是（ ）

A．平分弦的直径垂直于弦

B．相等的圆心角所对的弧相等

C．弦的垂直平分线经过圆心且平分弦所对的弧

D．半径都相等

【难度】★

【答案】C．

【解析】A．平分非直径弦的直径垂直于弦，故 A 错；

B．在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，故 B 错；

D．在同圆或等圆中，半径都相等．

【总结】本题考查了圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理．

【作业2】 正九边形的中心角等于______°．

【难度】★

【答案】40．

【解析】正九边形的中心角 $n=\dfrac{360°}{9}=40°$．

【总结】本题考查了正多边形中心角的计算，中心角 $\alpha=\dfrac{360°}{n}$．

【作业3】 等边三角形的外接圆的面积是内切圆面积的______倍．

【难度】★

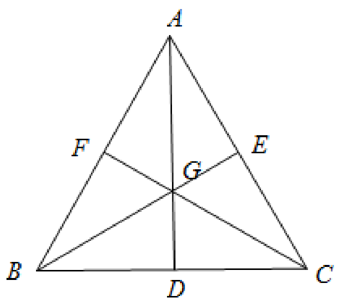
【答案】4．

【解析】如图，易得 G 为等边三角形外接圆和内切圆的圆心，

$\because$ ΔABC 是等边三角形，

$\therefore$ G 为 ΔABC 的重心，$\therefore$ $GA=2GD$

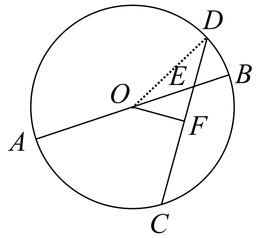
$\therefore$等边三角形的外接圆的面积是内切圆面积 4 倍．



【总结】本题考查了等边三角形外接圆与内切圆的有关性质．

【作业4】 如图，$\odot O$ 中，AB 是直径，CD 与 AB 交于点 E，$\angle BED = 45°$，$OF \perp CD$，$OF = 2$ 厘米，$ED = 3$ 厘米，则 $CD =$______厘米．

【难度】★★



【答案】10．

【解析】连接 OD，$\because OF \perp CD$，O 为圆心，

$\therefore DF = CF$，$\because \angle BED = 45°$，$\therefore \angle OEF = 45°$，

$\therefore OF = EF$，$\because OF = 2$ 厘米，$ED = 3$ 厘米，

$\therefore DF = DE + EF = 5$ 厘米，

$\therefore CD = 10$ 厘米．

【总结】本题考查了垂径定理及勾股定理的综合运用．

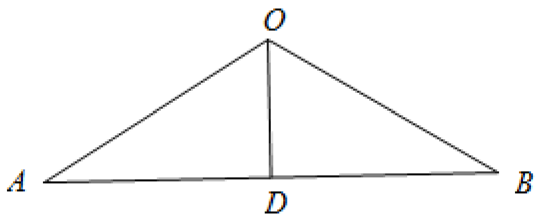
【作业5】 在 ΔOAB 中，若 $OA = OB = 2$，$\odot O$ 的半径为 1，当 $\angle AOB$ 的度数在何范围内，直线 AB 与 $\odot O$ 相切、相交、相离．

【难度】★★

【答案】当 $0° < \angle AOB < 120°$ 时，$\odot O$ 与直线 AB 相离．

当 $\angle AOB = 120°$ 时，$\odot O$ 与直线 AB 相切；

当 $120° < \angle AOB < 180°$ 时，$\odot O$ 与直线 AB 相交．



【解析】如图，作 $OD \perp AB$，

当 $OD = 1$ 时，$\because OA = 2$，

$\therefore \angle AOD = 60°$，$\angle AOB = 120°$，

此时 $\odot O$ 与直线 AB 相切，

$\therefore$ 当 $0° < \angle AOB < 120°$ 时，$\odot O$ 与直线 AB 相离．

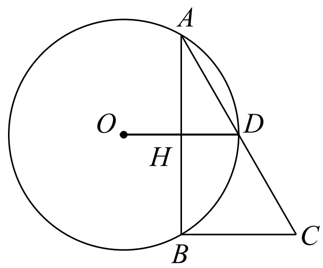
当 $\angle AOB = 120°$ 时，$\odot O$ 与直线 AB 相切；

当 $120° < \angle AOB < 180°$ 时，$\odot O$ 与直线 AB 相交．

【总结】本题考查了直线与圆的位置关系的判定及相关计算．

【作业6】　如图，AB 是⊙O 的弦，点 D 是 AB 的中点，过 B 作 AB 的垂线交 AD 的延长线与点 C．求证：$AD=DC$．

【难度】★★



【答案】详见解析．

【解析】连接 OD 交 AB 于点 H，

∵点 D 是 AB 的中点，O 为圆心，

∴ $OD\perp AB$，$AH=BH$，

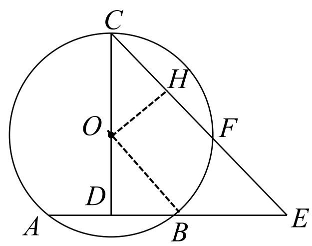
∵ $AB\perp BC$，

∴ $DH\ /\!/\ BC$，∴ $AD=DC$．

【总结】本题考查了垂径定理及平行线分线段成比例的性质定理的综合运用．

【作业7】　如图，已知⊙O 的半径为 5，弦 AB 的长等于 8，$OD\perp AB$ 于点 D，DO 的延长线与⊙O 相交于点 C，点 E 在弦 AB 的延长线上，CE 与⊙O 相交于点 F，$\cos C=\dfrac{3}{5}$．求：（1）CD 的长；（2）EF 的长．

【难度】★★



【答案】（1）$CD=8$；（2）$EF=\dfrac{22}{3}$．

【解析】（1）连接 OB，

由题意得：$OB=5$，$BD=4$，

∴ $OD=3$，∴ $CD=OC+OD=8$；

（2）作 $OH\perp CF$ 于点 H，则 $CH=HF$，

∵ $OC=5$，$\cos C=\dfrac{3}{5}$，∴ $CH=3$，$CF=6$，

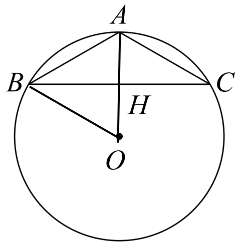
∵ $CD=8$，$\cos C=\dfrac{3}{5}$，∴ $CE=\dfrac{40}{3}$，∴ $EF=CE-CF=\dfrac{22}{3}$．

【总结】本题考查了垂径定理的应用及勾股定理．

【作业8】 如图，等腰ΔABC内接于半径为5厘米的$\odot O$，$AB=AC$，$\tan B=\frac{1}{3}$．求：

（1）BC的长；

（2）AB边上高的长．



【难度】★★

【答案】（1）$BC=6$；（2）$\frac{3\sqrt{10}}{5}$．

【解析】（1）连接OA交BC于点H，连接OB，

∵$AB=AC$，∴点A为CB的中点，∴$OA\perp BC$，$BH=CH$，

∵$\tan B=\frac{1}{3}$，设$AH=k$，$BH=3k$，则$OH=5-3k$，

由$OH^2+BH^2=OB^2$，得$(5-3k)^2+(3k)^2=25$，解得：$k=1$，

∴$BC=2BH=6$；

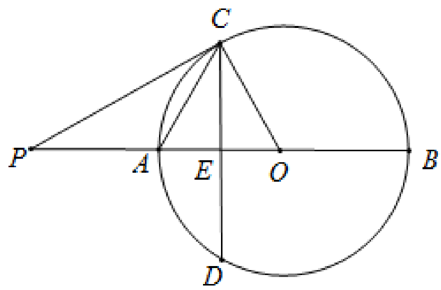
（2）由（1）得$AH=1$，$AB=\sqrt{10}$，

设AB边上高的长为h，则$\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AH=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot h$，代入解得：$h=\frac{3\sqrt{10}}{5}$．

【总结】本题考查了垂径定理及等积法的应用．

【作业9】 AB是$\odot O$的直径，点P在BA的延长线上，弦$CD\perp AB$于点E，PC是切线，若$OE:OA=1:2$，$PA=6$，

求：（1）$\odot O$的半径；（2）$\sin\angle PCA$的值．



【难度】★★★

【答案】（1）$R=6$；（2）$\sin\angle PCA=\frac{1}{2}$．

【解析】（1）∵$OE:OA=1:2$，

设$OE=k$，$OA=2k$，则$OC=2k$，

∵$CD\perp AB$，∴$\cos\angle COE=\frac{1}{2}$，∵$PC$是切线，∴$\angle PCO=90^\circ$，

∴$\angle P=\angle OCE$，∴$\frac{OC}{OP}=\frac{1}{2}$，即$\frac{2k}{2k+6}=\frac{1}{2}$，解得：$k=3$，

∴$\odot O$的半径$R=2k=6$；

（2）由（1）得$\angle COE=60^\circ$，∴ΔOAC是等边三角形，

∵PC是$\odot O$的切线，∴$OC\perp PC$，∴$\angle PCA=30^\circ$，∴$\sin\angle PCA=\frac{1}{2}$．

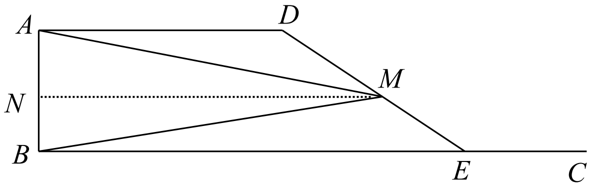
【总结】本题考查了切线的有关定理及锐角三角比的综合应用．

【作业10】　如图，已知 $AB=2$，$AD=4$，$\angle DAB=90^\circ$，$AD \parallel BC$．点 E 是射线 BC 上的动点（点 E 与点 B 不重合），M 是线段 DE 的中点．

（1）设 $BE=x$，ΔABM 的面积为 y，求 y 关于 x 的函数解析式，并写出函数的定义域；

（2）如果以线段 AB 为直径的圆与以线段 DE 为直径的圆外切，求线段 BE 的长．

【难度】★★★



【答案】（1）$y=\frac{x}{2}+2\left(x>0\right)$；（2）$BE=\frac{4}{3}$．

【解析】（1）取 AB 的中点 N，连接 MN，

∵ M 是线段 DE 的中点，$AD \parallel BC$，

∴ $MN=\frac{1}{2}\left(AD+BE\right)=2+\frac{x}{2}$，

∵ $\angle DAB=90^\circ$，∴ $MN \perp AB$，

∴ $S_{\Delta ABM}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot MN=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\left(2+\frac{x}{2}\right)=\frac{x}{2}+2\left(x>0\right)$，

∴ $y=\frac{x}{2}+2\left(x>0\right)$；

（2）由勾股定理得 $DE=\sqrt{4+\left(x-4\right)^2}$，

∴ $R_N=\frac{1}{2}AB=1$，$R_M=\frac{1}{2}DE=\frac{\sqrt{4+\left(x-4\right)^2}}{2}$，$MN=2+\frac{x}{2}$，

∵两圆外切，∴ $R_N+R_M=MN$，即 $1+\frac{\sqrt{4+\left(x-4\right)^2}}{2}=2+\frac{x}{2}$，解得：$x=\frac{4}{3}$，

∴线段 BE 的长为 $\frac{4}{3}$．

【总结】本题考查了圆与圆相切及梯形中位线的灵活应用，综合性较强，注意将两圆相切的位置关系转化为线段的和差进行求解．