二次函数综合应用

内容分析

二次函数的综合应用主要包括以下几个方面：

（1）二次函数与经济问题，主要用于求解利润最大化；

（2）二次函数与面积问题，涉及到实际图形面积关系式的表达、面积最值的求解等；

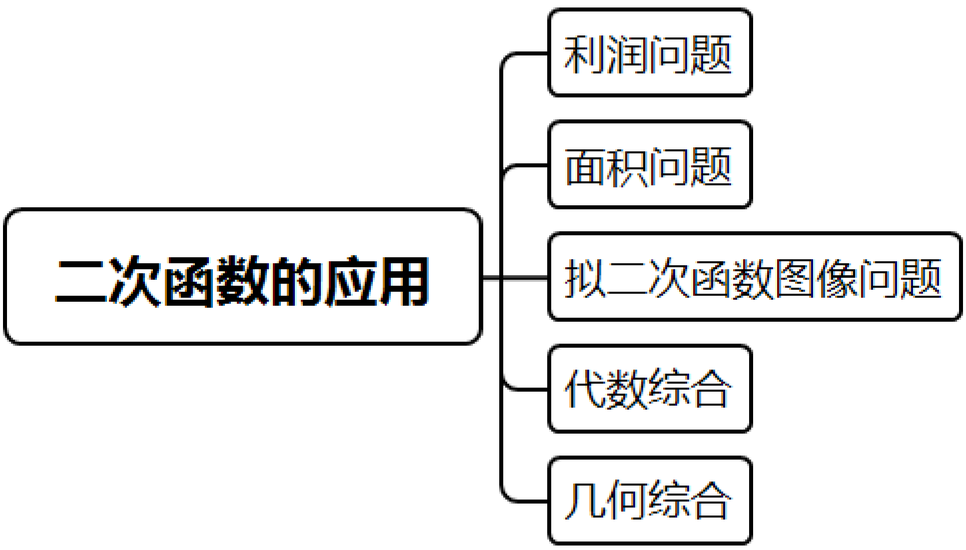
（3）拟二次函数图像问题，包括拱桥问题，物体的运动轨迹问题等，可以利用二次函数的图像性质求解相关的问题；

（4）二次函数与一次函数、反比例函数、一元二次方程和不等式等的代数综合；

（5）二次函数与相似三角形、二次函数与动点、二次函数与圆等的几何综合．

二次函数综合应用主要考察学生灵活运用二次函数解析式及图像性质解决实际问题、代数问题和几何问题的综合能力，难点在于不同知识点的融会贯通，是最近中考压轴题主要的考察题型之一．

知识结构



模块一：利润问题

知识精讲

1、利润问题

求解二次函数与利润最大化的问题，主要是根据题意列出相关的二次函数解析式，再通过配方的方式求解最大值.

这是一种实际应用的题型，需根据自变量的实际意义确定函数的定义域，在求解最大值时，也需注意自变量的取值范围.

例题解析

【例1】　进入夏季后，某电器商场为减少库存，对电风扇连续进行两次降价．若设平均每次降价的百分率为 x，降价后的价格为 y 元，原价为 a 元，则 y 与 x 之间的函数关系为（　　）

A．$y=2a(x-1)$　B．$y=2a(1-x)$　C．$y=a(1-x^2)$　D．$y=a(1-x)^2$

【难度】★

【答案】D

【解析】变化率问题.

【总结】本题主要考查利用二次函数程解决变化率的问题.

【例2】　某化工材料经销公司购进一种化工原料 7 吨，价格为每千克 30 元．物价部门规定其销售单价不得高于每千克 70 元，也不得低于每千克 30 元．经市场调查发现：单价为 70 元时，日均销售 60 千克；单价每降低 1 元，日均多售出 2 千克．在销售过程中，每天还要支付其他费用 450 元．设销售单价为 x 元，日均获利为 y 元.

（1）求 y 与 x 的函数关系式，写出 x 的取值范围.

（2）若商店期望日均获利不少于 1800 元，则单价应定为多少？

（3）在满足商店期望获利条件下，若要尽早销售完毕，则应如何定价？

【难度】★★

【答案】（1）$y=-2x^2+260x-6450(30\le x\le 70)$；（2）$55\le x\le 70$；（3）55 元.

【解析】（1）若销售单价为 x 元，则每千克降低 $(70-x)$ 元，日均销售量为 $[60+2(70-x)]$ 千克，每千克获利 $(x-30)$ 元.

依题意，得：$y=(x-30)[60+2(70-x)]-450$

整理可得：$y=-2x^2+260x-6450$

即 $y=-2x^2+260x-6450(30\le x\le 70)$；

（2）由题意，得：$y\ge 1800$，即 $-2x^2+260x-6450\ge 1800$，

解得：$55\le x\le 75$，又∵ $30\le x\le 70$，$\therefore 55\le x\le 70$．

即单价应定在 55 与 70 之间．

（3）由（2）可知 $55\le x\le 70$，　又∵要尽早销售完毕，

$\therefore x=55$，即定价为 55 元．

【总结】本题主要考查二次函数在利润问题中的应用，注意对题目条件的分析．

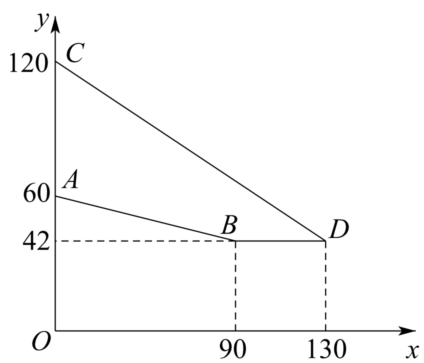
【例3】　某企业生产并销售某种产品，假设销售量与产量相等．如图，折线 ABD、线段 CD 分别表示该产品每千克的生产成本 y_1（单位：元）、销售价 y_2（单位：元）与产量 x（单位：kg）之间的函数关系．

（1）解释图中点 D 的横坐标、纵坐标的实际意义；

（2）求线段 AB 所表示的 y_1 与 x 之间的函数解析式；

（3）当该产品的产量为多少时，获得的利润最大？最大利润是多少？

【难度】★★



【答案】（1）当产量为 $130kg$ 时，该产品每千克生产生产成本与销售价相等，都为 42 元；

（2）$y_1=-0.2x+60(0\le x\le 90)$；

（3）当该产品产量为 $75kg$ 时，获得利润最大，最大值为 2250．

【解析】（1）当产量为 $130kg$ 时，该产品每千克生产生产成本与销售价相等，都为 42 元；

（2）设线段 AB 所表示的 y_1 与 x 之间的函数关系式为

$y_1=k_1x+b_1$，∵线段 AB 过点 $(0,60)$ 与 $(90,42)$

$\therefore \begin{cases} b_1=60 \\ 90k_1+b_1=42 \end{cases}$，　解得：$\begin{cases} k_1=-0.2 \\ b_1=60 \end{cases}$，　$\therefore y_1=-0.2x+60(0\le x\le 90)$；

（3）设 y_2 与 x 之间的函数关系式为 $y=k_2x+b_2$，　∵经过点 $(0,120)$ 与 $(130,42)$，

$\therefore\begin{cases}b_2=120\\130k_2+b_2=42\end{cases}$，　　解得：$\begin{cases}k_2=-0.6\\b_2=120\end{cases}$，$\therefore y_2=-0.6x+120(0\le x\le 130)$．

设产量为 xkg 时，获得利润为 W 元，

当 $0\le x\le 90$ 时，$W=x\left[\left(-0.6x+120\right)-\left(-0.2x+60\right)\right]=-0.4\left(x-75\right)^2+2250$

$\therefore$ 当 $x=75$ 时，W 的值最大，最大值为 2250．

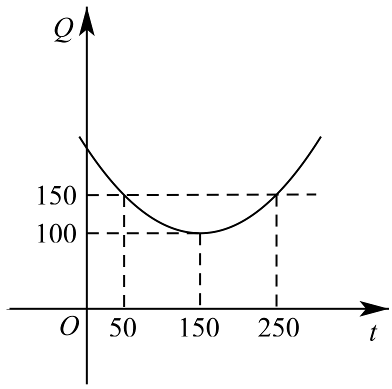
当 $90\le x\le 130$ 时，$W=x\left[\left(-0.6x+120\right)-42\right]=-0.6\left(x-65\right)^2+2535$

由 $-0.6<0$ 知，当 $x>65$ 时，W 随 x 的增大而减小，$\therefore x=90$ 时，$W=2160$，

因此当产品的产量为 $75kg$ 时，获得的利润最大，最大值为 2250．

【总结】本题主要考查了二次函数的应用，解题的关键是从实际问题中抽离出二次函数模型．

【例4】　某蔬菜基地种植西红柿，由历年市场行情得知，从 2 月 1 日起的 300 天内，西红柿市场售价 P（元/100 kg）与上市时间 t（2 月 1 日开始的天数）有函数关系：$P=\begin{cases}300-t\left(0\le t\le 200\right)\\2t-300\left(200<t\le 300\right)\end{cases}$，西红柿的种植成本 Q（元/100 kg）与上市时间 t 也存在如图所示的二次函数关系式．设市场售价减去种植成本为纯收益，问何时上市的西红柿纯收益最大？



【难度】★★★

【答案】从二月一日开始的第 50 天上市的西红柿纯收益最大．

【解析】由图像可求出二次函数解析式为：

$Q=\dfrac{1}{200}\left(t-150\right)^2+100\left(0\le t\le 300\right)$．

设 t 时刻上市的西红柿纯收益为 W，则

$$W=P-Q=\begin{cases}-\dfrac{1}{200}t^2+\dfrac{t}{2}+\dfrac{175}{2}=-\dfrac{1}{200}\left(t-50\right)^2+100\left(0\le t\le 200\right)\\-\dfrac{1}{200}t^2+\dfrac{7}{2}t-\dfrac{1025}{2}=-\dfrac{1}{200}\left(t-350\right)^2+100\left(200<t\le 300\right)\end{cases}$$

当 $0\le t\le 200$ 时，$t=50$ 时，W 最大，此时 $W=100$

当 $200<t\le 300$ 时，$t=300$ 时，W 最大，此时 $W=87.5$

综上所述，当 $t=50$ 时，W 最大．．即从二月一日开始的第 50 天上市的西红柿纯收益最大．

【总结】本题主要考查了二次函数的应用，解题的关键是从实际问题中抽离出二次函数模型．

【例5】　某产品每件成本 50 元，出售价 70 元，2014 年销售量 5 万件．为了进一步拓展销路，厂家投入一定资金做广告．2015 年和 2016 年分别支出广告费用 10 万元和 20 万元，年销售量分别是做广告前的 1.5 倍和 1.8 倍．设做广告后年销售量与原销售量的比值 y 是关于广告费 x（万元）的二次函数．

（1）求 y 与 x 的函数关系式；

（2）设年销售总额减去成本和广告费后所得的利润为 S 万元，求 S 与 x 的函数关系式；

（3）你认为厂家是否应该继续投入大量广告费，以求年利润随广告费投入的增加而无限增加？

【难度】★★★

【答案】（1）$y=-\frac{1}{1000}x^2+\frac{3}{50}x+1$；　　（2）$s=-\frac{1}{10}x^2+5x+100$；

（3）详见解析．

【解析】（1）设 y 与 x 的解析式为：$y=ax^2+bx+c$，把 $(10,1.5)$、$(20,1.8)$、$(0,1)$ 代入，

得：$\begin{cases} c=1 \\ 100a+10b+c=1.5 \\ 400a+20b+c=1.8 \end{cases}$，　解得：$\begin{cases} a=-\frac{1}{1000} \\ b=\frac{3}{50} \\ c=1 \end{cases}$，$\therefore y=-\frac{1}{1000}x^2+\frac{3}{50}x+1$；

（2）∵利润=销售总额减去成本费和广告费，

$\therefore s=5y(70-50)-x=100y-x=-\frac{1}{10}x^2+5x+100$；

（3）$\therefore s=-\frac{1}{10}x^2+5x+100=-\frac{1}{10}(x-25)^2+162.5$，

当 $x=25$ 时，函数有最大值，

当 $0\le x<25$ 时，S 随 x 的增大而增大，

当 $x>25$ 时，S 随 x 的增大而减小．

综上所述，我认为厂家不应该继续投入大量广告费，因为年利润不会随广告费的增加而无限增加，应该投入 25 万元获得最大利润．

【总结】本题主要考查了二次函数的应用，求二次函数解析式以及增减性问题．

模块二：面积问题

知识精讲

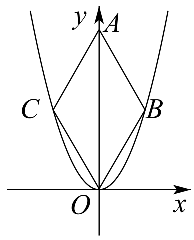
面积问题

求解二次函数与面积结合的问题时，基本方法上与利润最大化是相同的，也是通过配方的方式求解相关面积的最值，当然也需要注意自变量的取值范围．

而与利润最大化问题不同的是，面积问题中可能会涉及到三角形、四边形或者圆等图形，也可能会出现动点与面积相结合的类型，变化较多．

例题解析

【例6】　二次函数 $y=\sqrt{3}x^2$ 的图像如图所示，点 O 为坐标原点，点 A 在 y 轴的正半轴上，点 B、C 在二次函数的图像上，四边形 $OBAC$ 为菱形，且 $\angle OBA=120°$，则菱形 $OBAC$ 的面积为______．



【难度】★

【答案】$2\sqrt{3}$．

【解析】由题可设点 $B\left(t,\sqrt{3}t\right)$，把 $B\left(t,\sqrt{3}t\right)$ 代入 $y=\sqrt{3}x^2$，

得：$\sqrt{3}t^2=\sqrt{3}t$，解得：$t_1=0$（舍去），$t_2=1$，$\therefore BC=2$，$AO=2\sqrt{3}$．

$\therefore$ 菱形 $OBAC$ 的面积 $=\dfrac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$．

【总结】本题主要考查了菱形的性质，也考查了二次函数图像上点的坐标特征．

【例7】　一边靠长为 15 米的围墙，其他三边用总长 40 米的篱笆围成一个矩形花圃，如何围法，可使花圃的面积最大？

【难度】★★

【答案】平行于墙的花圃边长为$15m$，垂直于靠墙的花圃的边长为$\frac{25}{2}m$时，花圃面积最大为$187.5m^2$.

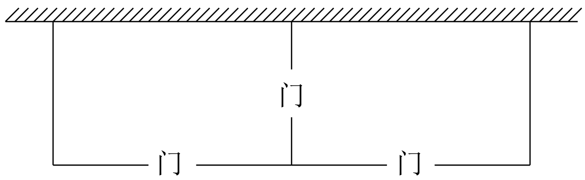
【解析】设平行于墙的花圃边长为 x 米，则垂直于墙的花圃的边长为$(40-2x)$米，

花圃的面积$S=x(40-2x)=-2x^2+40x$，由于墙长只有 15 米，所以当平行于墙的花圃边长为 15 米，垂直于墙的花圃边长为$\frac{25}{2}m$时，花圃面积最大，最大为$187.5m^2$.

【总结】本题主要考查二次函数在面积问题中的应用，注意墙的边长的条件的限制.

【例8】　某农场拟建两间矩形饲养室，一面靠现有墙壁（墙壁足够长），中间用一道墙隔开，并在如图所示的三处各留 1 m 宽的门. 已知计划中的材料可建墙体（不包括门）总长为 27 m，则能建成的饲养室的面积最大为______m^2.

【难度】★★



【答案】75.

【解析】设垂直于墙的材料长为 x 米，

则平行于墙的材料长为$(30-3x)$米，

则总面积$S=x(30-x)=-3x^2+30x=-3(x-5)^2+75$，

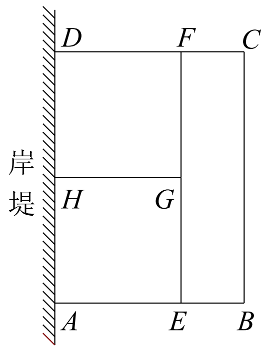
故最大面积为$75m^2$.

【总结】本题主要考查二次函数在面积问题中的应用.

【例9】 为了节省材料，某水产养殖户利用水库的岸堤（岸堤足够长）为一边，用总长为80米的围网在水库中围成了如图所示的三块矩形区域，而且这三块矩形区域的面积相等，设BC的长度是x米，矩形区域$ABCD$的面积为y平方米.

（1）求y与x之间的函数解析式，并注明自变量x的取值范围；

（2）当x取何值时，y有最大值？最大值是多少？



【难度】★★

【答案】（1） $y=-\frac{3}{4}x^2+30x\left(0<x<40\right)$；

（2）当$x=20$时，y有最大值，最大值是300.

【解析】（1）∵三块矩形区域的面积相等，

$\therefore$矩形$AEFD$的面积是矩形$EBCF$面积的2倍，

$\therefore AE=2BE$.

设$BE=a$，则$AE=2a$．$\therefore 8a+2x=80$.

$\therefore a=-\frac{1}{4}x+10$，$\therefore 2a=-\frac{1}{2}x+20$.

$$\therefore y=\left(-\frac{1}{2}x+20\right)\cdot x+\left(-\frac{1}{4}x+10\right)\cdot x=-\frac{3}{4}x^2+30x.$$

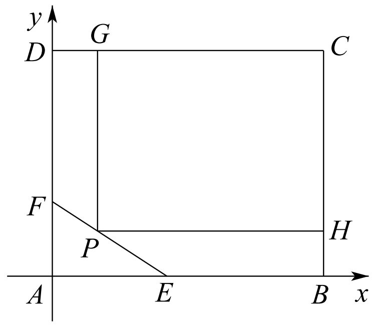
$\because a=-\frac{1}{4}x+10>0$，$\therefore x<40$，$\therefore y=-\frac{3}{4}x^2+30x\left(0<x<40\right)$.

（2）$\because y=-\frac{3}{4}x^2+30x=-\frac{3}{4}(x-20)^2+300(0<x<40)$，

又$a=-\frac{3}{4}<0$， ∴当$x=20$时，y有最大值，最大值是300.

【总结】本题主要考查二次函数在面积问题中的应用，注意每个线段的准确表示.

【例10】 如图，某市在城建规划中，准备在市中心一块长方形空地 $ABCD$ 上建一块长方形绿化区域. 因为空地一角有一个文物保护设施，所以规划时不能超越线段 EF，进入 ΔAEF 内. 已知长方形的长 $AB=200$ 米，宽 $AD=160$ 米，$AE=60$ 米，$AF=40$ 米. 如何规划能使这个绿化区的面积最大？



【难度】★★★

【答案】P 是离 F 近的六等分点时，绿化面积最大.

【解析】设点 $P(x，y)$，可求出直线 EF 的解析式：

$y=-\dfrac{2}{3}x+40$，则

绿化区面积 $S=(200-x)(160-y)=-\dfrac{2}{3}x^2+\dfrac{40}{3}x+24000$，

当 $x=-\dfrac{b}{2a}=10$ 时 S 最大，即 P 是离 F 近的六等分点时，绿化面积最大.

【总结】本题主要考查二次函数在面积问题中的应用.

【例11】 如图 1，为美化校园，某校计划在一块长为 60 米，宽为 40 米的长方形空地上修建一个长方形花圃，并将花圃四周余下的空地修建成同样宽的通道，设通道宽为 a 米.

（1）用含 a 的式子表示花圃的面积；

（2）如果通道所占面积是整个长方形空地面积的 $\dfrac{3}{8}$，求出此时通道的宽；

（3）已知某园林公司修建通道、花圃的造价 y_1（元）、y_2（元）与修建面积 x（平方米）之间的函数关系如图 2 所示，如果学校决定由该公司承建此项目，并要求修建的通道的宽度不少于 2 米且不超过 10 米，那么当通道的宽为多少时，修建的通道和花圃的总造价最低，最低总造价为多少元？

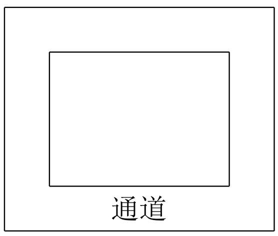


图 1

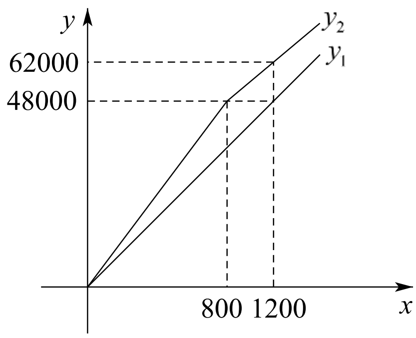


图 2

【难度】★★★

【答案】（1）$(40-2a)(60-2a)$；（2）5 米；（3）当通道宽为 2 米时，总造价最大为 125920 元.

【解析】（1）由题可知，花圃的面积为 $(40-2a)(60-2a)$；

（2）由 $(40-2a)(60-2a)=\frac{5}{8}\times 60\times 40$，解得：$a_1=5$，$a_2=45$(舍去)

∴通道宽为5米；

（3）设修建的道路和花圃的总造价为 y，由图可求得：$y_1=40x$，

$$y_2=\begin{cases}60x(0\le x\le 800)\\ 35x+20000(x>800)\end{cases}.$$

$x_{花圃}=(40-2a)(60-2a)=4a^2-200a+2400$，

$x_{通道}=60\times 40-(40-2a)(60-2a)=-4a^2+200a$，

当 $2\le a\le 10$ 时，$800\le x_{花圃}\le 2016$，$384\le x_{通道}\le 1600$，

$\therefore y=40(-4a^2+200a)+48000+35(4a^2-200a+2400-800)+20000$

$=-20a^2+1000a+124000\ (2\le a\le 10)$，

$\because -20<0$，对称轴 $a=-\frac{b}{2a}=25$，

$\therefore$ 当 $a<25$ 时，y 随 a 增大而增大，

$\therefore$ 当 $a=2$ 时，y 最小，此时 $y=125920$.

即当通道宽为2米时，总造价最大为125920元.

【总结】考查二次函数在实际问题中的应用，一般求最值的时候，就是对解析式进行配 方，从而根据性质求出满足条件的值.

模块三：拟二次函数图像问题

知识精讲

拟二次函数图像问题

拟二次函数函数图像问题的解题，依赖于合理的平面直角坐标系的建立，继而在平面直角坐标系中，利用二次函数的图像性质解答相关问题．主要包括拱桥问题、运行轨迹问题等.

例题解析

【例12】 一个足球从地面向上踢出，它距地面的高度 h（m）与足球被踢出后经过的时间 t（s）之间具有函数关系：$h=at^2+19.6t$，已知足球被踢出后经过 4 s 落地，则足球距地面的最大高度是______m.

【难度】★

【答案】19.6.

【解析】由题意得，$t=4$时，$h=0$．因此$0=16a+19.6\times4$，解得：$a=-4.9$，

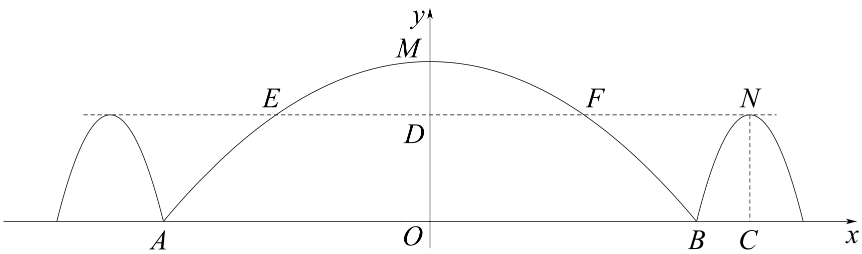
$\therefore h=-4.9t^2+19.6t$ 最大高度是 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}=19.6m$.

【总结】二次函数的解析式的确定及最值问题.

【例13】 如图，三孔桥横截面的三个孔都呈抛物线形，两小孔形状、大小都相同．正常水位时，大孔水面宽度 $AB=20$ 米，顶点 M 距水面 6 米（即 $MO=6$ 米），小孔顶点 N 距水面 4.5 米（即 $NC=4.5$ 米）．当水位上涨刚好淹没小孔时，求此时大孔的水面宽度 EF.

【难度】★

【答案】10 米.



【解析】由题意得，M的坐标为$(0,6)$，设抛物线的关系式为 $y=ax^2+6$，

点 $B(10,0)$在图像上，$\therefore a\times10^2+6=0$，解得：$a=-0.06$，即$y=-0.06x^2+6$.

当 $y=4.5$时，$-0.06x^2+6=4.5$，解得：$x=\pm5$．$\therefore DF=5$，$\therefore EF=10$.

即此时大孔的水面宽度为10 米.

【总结】本题主要考查二次函数的解析式的确定以及坐标问题.

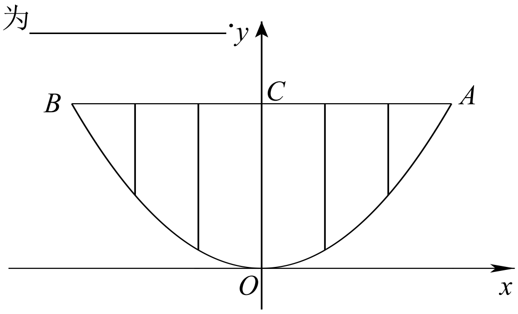
【例14】 学校的围墙上端由一排相同的凹拱形栅栏组成，如图所示，已知拱形为抛物线的一部分，栅栏的跨径 AB 间，每隔相同的间距 0.3 米用 1 根立柱加固，拱高 OC 为 0.6 米.

（1）建立如图所示的平面直角坐标系，则抛物线的解析式为________________；

（2）一段这样的栅栏所需立柱的总长度（精确到 0.1 米）为______________.

【难度】★★

【答案】（1）$\therefore y=\dfrac{20}{27}x^2$；（2）2.3 米.



【解析】（1）由题可知，$OC=0.6$，$AC=0.9$，

得点A的坐标为（0.9，0.6），代入 $y=ax^2$，

得：$a=\dfrac{20}{27}$． $\therefore y=\dfrac{20}{27}x^2$．

（2）当 $x=\pm0.3$时，$y=\dfrac{1}{15}$，$x=\pm0.6$时，$y=\dfrac{4}{15}$．

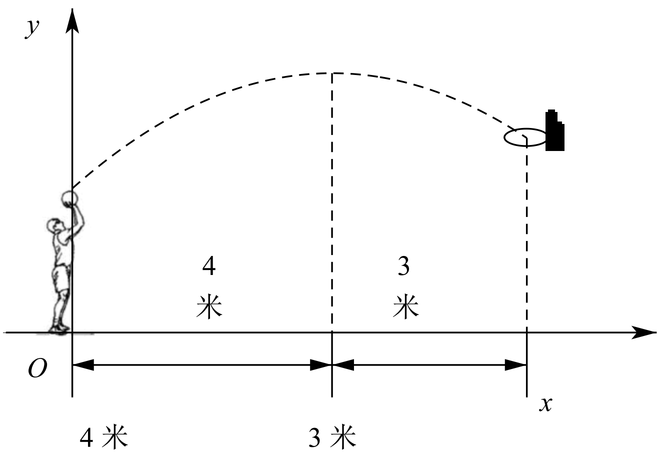
所以总长度$=2\left(0.6-\dfrac{1}{15}\right)+2\left(0.6-\dfrac{4}{15}\right)+0.6=\dfrac{7}{3}$米$\approx2.3$米．

【总结】本题主要考查二次函数的解析式的确定及用坐标表示长度问题．

【例15】 某校初三年级的一场篮球比赛中，队员甲正在投篮，若球出手时离地面$\dfrac{20}{9}$米，与篮圈中心的水平距离为 7 米．设篮球运行的路线为抛物线，当球出手后水平距离为 4 米时到达最大高度 4 米，已知篮圈离地面 3 米．

（1）建立如图所示的平面直角坐标系，试问此球能否准确投中？

（2）若对方队员乙再甲前面 1 米处跳起盖帽拦截，已知乙的最大摸高为 3．1 米，那么他能否拦截成功？



【难度】★★

【答案】（1）能；（2）能．

【解析】（1）由题意得，抛物线的顶点坐标为$(4，4)$，球出手时的坐标为

$\left(0，\dfrac{20}{9}\right)$，设抛物线解析式为：

$y=a(x-4)^2+4$，将点$\left(0，\dfrac{20}{9}\right)$

代入，解得：$a=-\dfrac{1}{9}$，则抛物线解析式为：$y=-\dfrac{1}{9}(x-4)^2+4$，令 $x=7$ 则 $y=3$

$\because 3m=3m$，$\therefore$此球能准确投中．

（2）能拦截成功，理由：将 $x=1$代入$y=-\dfrac{1}{9}(x-4)^2+4$，得：$y=3$．

$\because 3<3.1$， $\therefore$他能拦截成功．

【总结】二次函数的应用，解题关键是待定系数法求抛物线解析式，建立数学模型，解 决实际问题．

【例16】 跳水运动员在空中运动时，身体的重心所经过的路线是一条抛物线．在某项 10 米跳台的一个规定动作中，正常情况下运动员在跳台边缘向上跃起，重心上升 1 米到达最高点，这时跃出水平距离 0.4 米，然后下落．在距离水面 5 米处完成规定的翻腾动作，并调整好入水姿势．

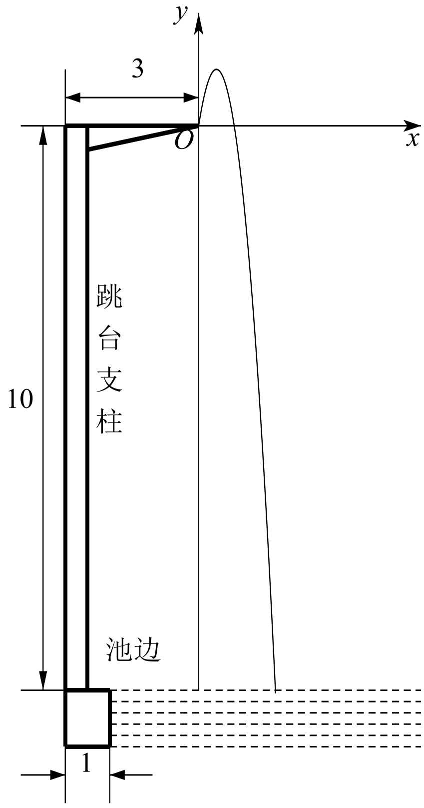
（1）建立如图所示的坐标系，求出抛物线解析式（图中数值的单位是米）

（2）运动员入水时距池边多少米（精确到 0.1 米）？

（3）运动员在空中调整好入水姿势时，与水池边的水平距离是多少米（精确到 0.1 米）？

【难度】★★★

【答案】（1）$y=-\frac{25}{4}x^2+5x$；（2）3.7 米；（3）3.4 米．



【解析】（1）由题可设抛物线解析式为：$y=a(x-0.4)^2+1$，

将点$(0，0)$代入，得：$a=-\frac{25}{4}$．

$\therefore y=-\frac{25}{4}(x-0.4)^2+1=-\frac{25}{4}x^2+5x$．

（2）令 $y=-10$，得：$x_1=\frac{2+2\sqrt{11}}{5}$，$x_2=\frac{2-2\sqrt{11}}{5}$（舍去），

入水时距池边距离=$\frac{2+2\sqrt{11}}{5}+3-1\approx3.7$ 米；

（3）将 $y=-5$ 代入解析式，得：$-\frac{25}{4}x^2+5x=-5$，

解得：$y_1=\frac{2+2\sqrt{11}}{5}$，$y_2=\frac{2-2\sqrt{6}}{5}$（舍去）．

故调整好姿势时与水池边的水平距离为$\frac{2+2\sqrt{6}}{5}+3-1\approx3.4$ 米．

【总结】主要考查二次函数的应用，解题关键是待定系数法求抛物线解析式，建立数学 模型，解决实际问题．

模块四：代数综合

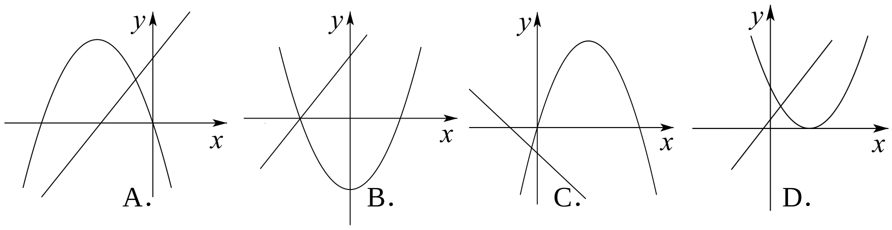
知识精讲

代数综合

二次函数与代数的综合涉及到二次函数与一次函数、反比例函数在同一直角坐标系中的图像性质问题、交点问题等．难点是函数思想与方程思想、不等式思想的相互转化和结合．

例题解析

【例17】 一次函数 $y=ax+b$ 与二次函数 $y=ax^2-bx$ 在同一坐标系中的图像可能是（　　）



【难度】★★

【答案】C

【解析】A、由抛物线可知$a<0$，由直线可知$a>0$，故本选项错误；

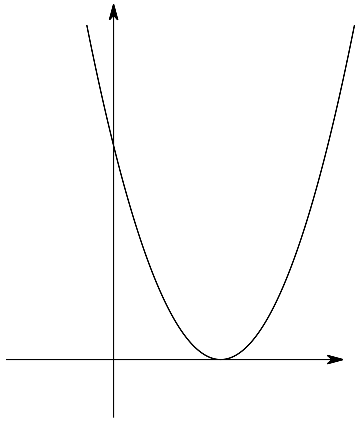
B、由抛物线可知$a>0$，$b=0$，由直线可知$a>0$，$b>0$,故本选项错误；

C、由抛物线可知$a<0$，$b<0$，由直线可知$a<0$，$b<0$，故本选项正确；

D、此题中抛物线的图像与解析式本身不符，故本选项错误．

【总结】本题考查抛物线和直线的性质，通常用假设法来做这种数形结合题．

【例18】 利用函数图像，求解不等式 $x^2-4x+4>0$.



【难度】★★

【答案】 $x\neq 2$.

【解析】如图所示

【总结】函数思想与方程思想的相互转换.

【例19】 已知关于 x 的方程 $mx^2-3(m-1)x+2m-3=0$.

（1）当 m 取何整数值时，关于 x 的方程 $mx^2-3(m-1)x+2m-3=0$ 的根都是整数？

（2）若抛物线 $y=mx^2-3(m-1)x+2m-3$ 向左平移一个单位后，过反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$（$k\neq 0$）上的一点（-1，3）.

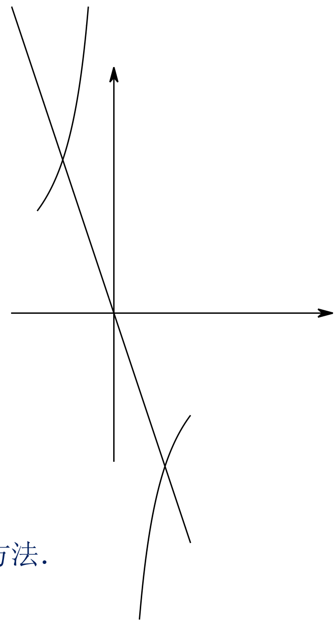
①求抛物线 $y=mx^2-3(m-1)x+2m-3$ 的解析式；

②利用函数图像求不等式 $\dfrac{k}{x}-kx>0$ 的解.

【难度】★★

【答案】（1） $m=0、\pm1、\pm3$；　（2） $\therefore y=3x^2-6x+3$；　（3） $x>1$ 或 $-1<x<0$.

【解析】（1）当 $m=0$ 时， $x=1$；　　当 $m\neq 0$ 时，可解得： $x_1=1$， $x_2=2-\dfrac{3}{m}$；



$\therefore m=\pm1、\pm3$ 时， x 均有整数根.　　综上可得： $m=0、\pm1、\pm3$.

(2)①抛物线向左平移一个单位后得到： $y=m(x+1)^2-3(m-1)(x+1)+2m-3$，

过点 $(-1,3)$，代入解得： $m=3$； $\therefore y=3x^2-6x+3$.

②∵反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 经过点 $(-1,3)$，∴ $k=-3$.

作出 $y=-3x$ 与 $y=\dfrac{-3}{x}$ 的图像如图所示：　由图可知：当 $x>1$ 或 $-1<x<0$ 时，

$\dfrac{k}{x}>kx$. 即当 $x>1$ 或 $-1<x<0$ 时， $\dfrac{k}{x}-kx>0$.

【总结】本题主要考查函数思想与方程思想的相互转换及利用图像法解不等式的方法.

模块五：几何综合

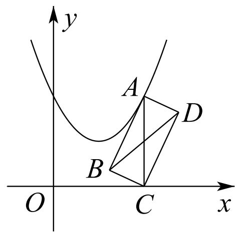
知识精讲

几何综合

二次函数与几何的综合，主要是将几何图形与二次函数的图像相结合，求解面积问题、角相等问题、相似问题等．难点是数形结合的思想，这也是中考要求的重点和难点．

例题解析

【例20】 如图，在平面直角坐标系中，点 A 在抛物线 $y=x^2-2x+2$ 上运动，过点 A 作 $AC\perp x$ 轴于点 C，以 AC 为对角线作矩形 $ABCD$，连接 BD，则对角线 BD 长的最小值为_____．



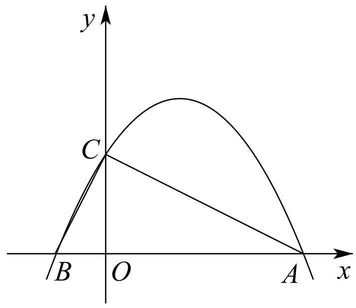
【难度】★

【答案】1．

【解析】抛物线的顶点坐标为 $(1,1)$，又∵ $ABCD$ 是矩形，

∴ $AC=BD$，而 $AC\perp x$ 轴，故 $BD=1$．

【例21】 如图所示，抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+bx+2$ 交 x 轴于 A、B 两点（点 B 在点 A 的左侧），交 y 轴于点 C，其对称轴为 $x=\frac{3}{2}$，O 为坐标原点．



（1）求 A、B、C 三点的坐标；

（2）求证：$\angle ACB$ 是直角．

【难度】★★

【答案】（1）$A(4，0)$、$B(-1，0)$、$C(0，2)$；（2）略．

【解析】（1）由对称轴 $x=-\dfrac{b}{-\frac{1}{2}}=\dfrac{3}{2}$，得：$b=\dfrac{3}{2}$，代入可求 $A(4，0)$、$B(-1，0)$、$C(0，2)$．

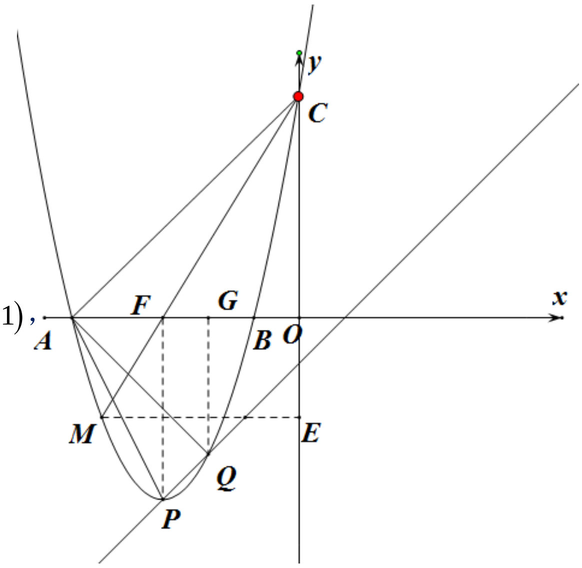
（2）只需证明 ΔBOC 与 ΔCOA 相似即可．

【总结】考查了二次函数与相似的结合问题．

【例22】 已知抛物线 $y=x^2-2mx+m^2+m-1$（m 是常数）的顶点为 P，直线 l： $y=x-1$．

（1）求证：点 P 在直线 l 上；

（2）当 $m=-3$ 时，抛物线与 x 轴交于 A、B 两点，与 y 轴交于点 C，与直线 l 的另一个交点为 Q，M 是 x 轴下方抛物线上的一点，$\angle ACM=\angle PAQ$（如图），求点 M 的坐标；（3）若以抛物线和直线 l 的两个交点及坐标原点为顶点的三角形是等腰三角形，请直接写出所有符合条件的 m 的值．



【难度】★★★

【答案】（1）略；（2）$(-4,-3)$；

（3）m 的值为 0，$\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$，$\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$，$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$，$\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$．

【解析】（1）由抛物线解析式可求得点 P 的坐标为 $(m，m-1)$，

$\because$ 当 $x=m$ 时， $y=x-1=m-1$， $\therefore$ 点 P 在直线 l 上．

（2）当 $m=-3$ 时，抛物线解析式为 $y=x^2+6x+5$，

可求 $A(-5，0)$、$B(-1，0)$、$C(0，5)$，

联立方程组 $\begin{cases} y=x^2+6x+5 \\ y=x-1 \end{cases}$，解得：$\begin{cases} x=-3 \\ y=-4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \end{cases}$，则 $P(-3，-4)$、$Q(-2，-3)$．

作 ME 垂直 y 轴于 E，$PF\perp x$ 轴于 F，$QG\perp x$ 轴于 G，如图，

$\because OA=OC=5$，$\therefore \Delta OAC$ 为等腰直角三角形，

$\therefore \angle ACO=45°$，$\therefore \angle MCE=45°-\angle ACM$．

$\because QG=3$，$OG=2$，$\therefore AG=OA-OG=3=QG$，

$\therefore \Delta AQG$ 为等腰直角三角形，$\therefore \angle QAG=45°$．

$\because \angle APF=90°-\angle PAF=90°-(\angle PAQ+45°)=45°-\angle PAQ$，$\because \angle ACM=\angle PAQ$，

$\therefore \angle APF=\angle MCE$，$\therefore Rt\Delta CME \backsim Rt\Delta PAF$，$\therefore \dfrac{ME}{AF}=\dfrac{CE}{PF}$，设 $M(x，x^2+6x+5)$，

$\therefore ME=-x$，$CE=5-(x^2+6x+5)=-x^2-6x$，

$\therefore \dfrac{-x}{2}=\dfrac{-x^2-6x}{4}$，整理得： $x^2+4x=0$．

解得 $x_1=0$(舍去)，$x_2=-4$，$\therefore$ 点 M 的坐标为 $(-4，-3)$；

（3）解方程组$\begin{cases} y=x^2-2mx+m^2+m-1 \\ y=x-1 \end{cases}$，得：$\begin{cases} x=m \\ y=m-1 \end{cases}$或$\begin{cases} x=m+1 \\ y=m \end{cases}$.

则$P(m，m-1)$，$Q(m+1，m)$.

$\therefore PQ^2=(m+1-m)^2+(m-m+1)^2=2$，

$\therefore OQ^2=(m+1)^2+m^2=2m^2+2m+1$，

$\therefore OP^2=m^2+(m-1)^2=2m^2-2m+1$，

当$PQ=OQ$时，$2m^2+2m+1=2$，解得：$m_1=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$，$m_2=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$；

当$PQ=OP$时，$2m^2-2m+1=2$，解得：$m_1=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$，$m_2=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$；

当$OP=OQ$时，$2m^2+2m+1=2m^2-2m+1$，解得：$m=0$.

综上所述，m的值为0，$\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$，$\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$，$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$，$\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$.

【总结】本题综合性较强，考查了二次函数背景下的相似问题，等腰三角形的分类讨论问题，解题时认真分析题目中条件.

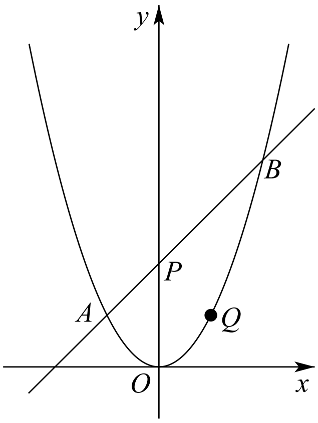
【例23】 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，将抛物线 $y=x^2$ 的对称轴绕着点 P（0，2）顺时针旋转 45° 后与该抛物线交于 A、B 两点，Q 是抛物线上一点.

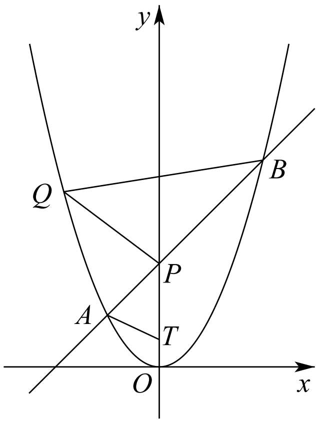
（1）求直线 AB 的函数解析式；

（2）如图 1，若点 Q 在直线 AB 的下方，求点 Q 到直线 AB 的距离的最大值；

（3）如图 2，若点 Q 在 y 轴左侧，且点 T（0，t）（$t<2$）是射线 PO 上一点，当以 P、B、Q 为顶点的三角形与 ΔPAT 相似时，求所有满足条件的 t 的值.

【难度】★★★





【答案】详见解析.

【解析】（1）如图（一），设直线 AB 与 x 轴的交点为 M.

$\because \angle OPA=45^\circ$，

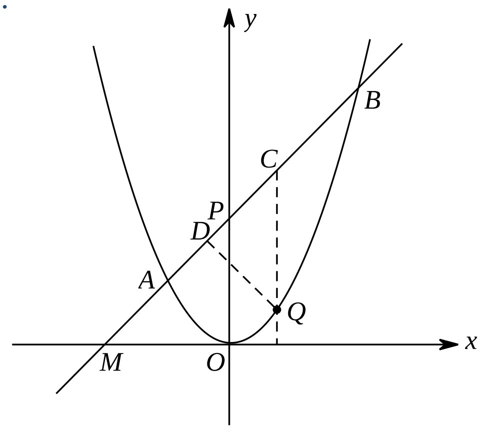
$\therefore OM=OP=2$， 即 $M(-2,0)$.

设直线 AB 的解析式 $y=kx+b\ (k\neq 0)$，

将 $M(-2,0)$，$P(0,2)$ 两点坐标代入，

得 $\begin{cases}2=k\times 0+b\\0=k\times(-2)+b\end{cases}$，解得：$\begin{cases}k=1\\b=2\end{cases}$，

故直线 AB 的解析式为 $y=x+2$.



图（一）

（2）如图（一），过点 Q 作 x 轴的垂线 QC，交 AB 于点 C，再过点 Q 作直线 AB 的垂线，垂足为点 D，根据条件可知 ΔQDC 为等腰直角三角形，则 $QD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}QC$.

设 $Q(m,m^2)$，则 $C(m,m+2)$，

$\therefore QC=m+2-m^2=-\left(m-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$，

$\because QD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}QC$，$\therefore$ 当 $m=\dfrac{1}{2}$ 时，$QC=\dfrac{9}{4}$，

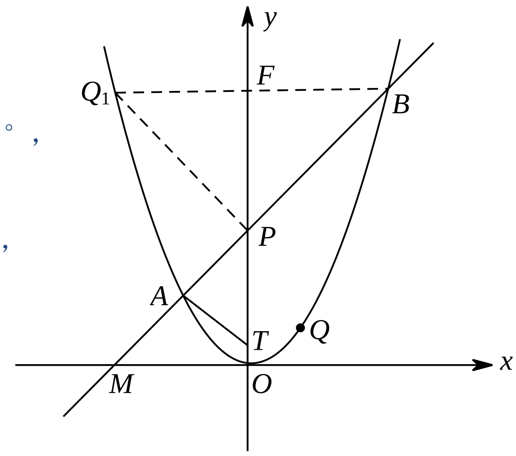
此时 QC 最大，QD 最大，最大值为 $\dfrac{9\sqrt{2}}{8}$.

（3）$\because \angle APT=45^\circ$，$\therefore \Delta PBQ$ 中必有一个内角为 45°，

由图知，$\angle BPQ=45^\circ$ 不合题意.

①若 $\angle PBQ=45^\circ$，如图（二），过点 B 作 x 轴的平行线，

与抛物线和 y 轴分别交于点 Q_1、F .



（图二）

此时满足 $\angle PBQ_1=45^\circ$.

$\because Q_1(-2，4)$，$F(0，4)$，

$\therefore$ 此时 ΔBPQ_1 是等腰直角三角形，由题意知，ΔPAT 也是等腰直角三角形.

（i）当 $\angle PTA=90^\circ$ 时，$PT=AT=1$，此时 $t=1$.

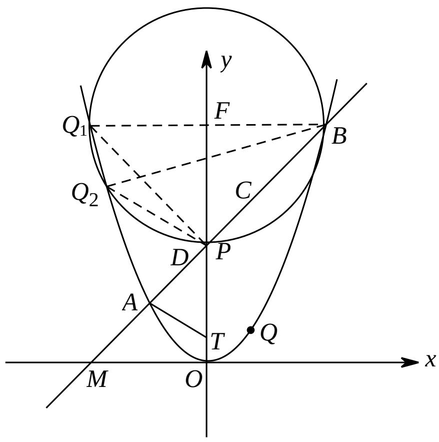
（ii）当 $\angle PAT=90^\circ$ 时，$PT=2$，此时 $t=0$.

②若 $\angle PBQ=45^\circ$，①是情况之一，答案同上；另外情况如下所示：

现以点 F 为圆心，FB 为半径作圆，则 P,B,Q_1 都在⊙ F 上，设⊙ F 与 y 轴左侧的抛　物线交于另一点 Q_2（如图（三）所示），

$\because \angle PQ_2B=\angle PQ_1B=45^\circ$（同弧所对的圆周角相等），

故 Q_2 也符合要求.



（图三）

设 $Q_2\left(n，n^2\right)(-2<n<0)$，由 $FQ_2=2$，

得 $n^2+\left(4-n^2\right)^2=2^2$，解得：$n^2=3$ 或 $n^2=4$.

$\because -2<n<0$，$\therefore n=-\sqrt{3}$，即 $Q_2\left(-\sqrt{3}，3\right)$.

可证 ΔPFQ_2 为等边三角形，

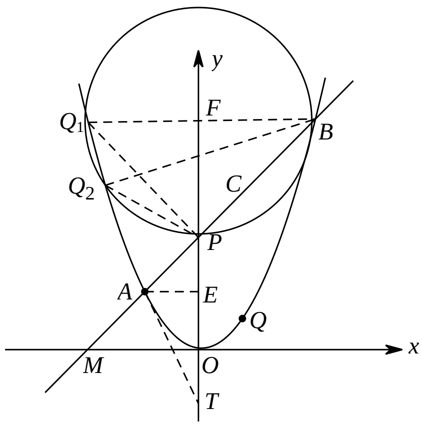
$\therefore \angle PFQ_2=60^\circ$，$\therefore \angle PBQ_2=30^\circ$，

在 ΔPQ_2B 中，$\angle PQ_2B=45^\circ$，$\angle PBQ_2=30^\circ$，

（i）若 $\Delta Q_2PB \backsim \Delta PAT$，则过点 A 作 y 轴的垂线，

垂足为 E . 如图（四）

则 $ET=\sqrt{3}AE=\sqrt{3}$，$OE=1$，



$\therefore OT=\sqrt{3}-1$，

解得：$t=1-\sqrt{3}$．　　　　（图四）

（ii）若 $\Delta Q_2BP\backsim\Delta PAT$，则过点 T 作直线 AB 的垂线，垂足为 G．如图（五）

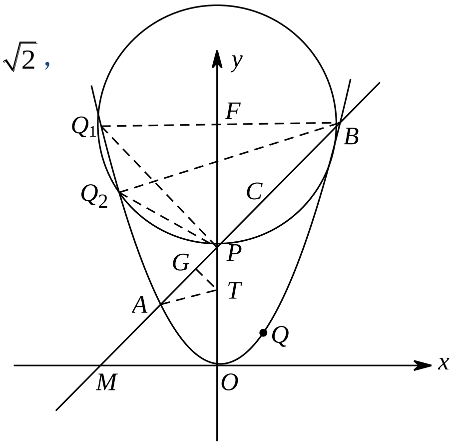
设 $TG=a$，则 $PG=TG=a$，$AG=\sqrt{3}TG=\sqrt{3}a$，$AP=\sqrt{2}$，

$\therefore\sqrt{3}a+a=\sqrt{2}$，

解得：$PT=\sqrt{2}a=\sqrt{3}-1$，

$\therefore OT=OP-PT=3-\sqrt{3}$，$\therefore t=3-\sqrt{3}$．

综上所述，所求 t 的值为 1 或 0 或 $1-\sqrt{3}$ 或 $3-\sqrt{3}$．



【总结】本题综合性很强，考查了二次函数、一次函数、相似三角形以及圆的综合，解题时要一点点去分析，找到对自己有利的条件．

随堂检测

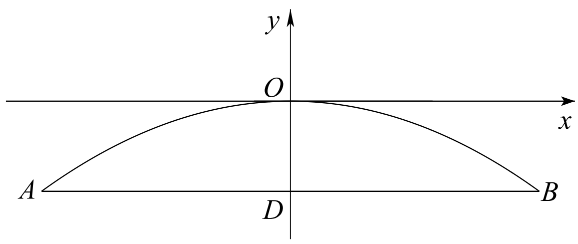
【习题1】河北省赵县的赵州桥的桥拱是近似的抛物线形，建立如图所示的平面直角坐标系，其函数解析式为 $y=-\dfrac{1}{25}x^2$，当水面离桥拱顶的高度 DO 是 4 米是，这时水面的宽度 AB 为（　　）米

A．-20　　B．10　　C．20　　D．-10

【难度】★

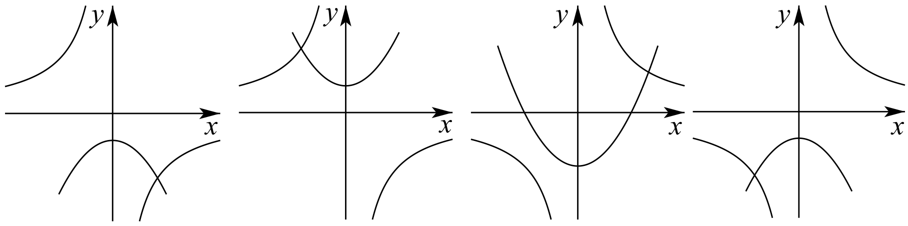
【答案】C

【解析】略



【总结】考查了点的坐标求法及二次函数的实际应用．

【习题2】函数 $y=ax^2+a$ 与 $y=\frac{a}{x}$ （$a\neq 0$）在同一坐标系中的图像可能是（　　）



A.　　B.　　C.　　D.

【难度】★

【答案】A

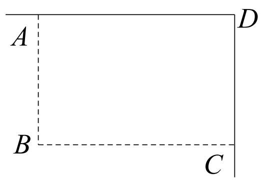
【解析】略

【总结】考查二次函数及反比例函数图像形状与系数的关系.

【习题3】如图，假设篱笆（虚线部分）的长度为 16 米，则所围成的矩形 $ABCD$ 的最大面积为（　　）平方米

A．60　　B．63　　C．64　　D．66

【难度】★★



【答案】C

【解析】设 $BC=xm$，则 $AB=(16-x)m$，

则矩形的面积 $S=x(16-x)=-x^2+16x=-(x-8)^2+64$.

当 $x=8m$ 时，$S_{max}=64m^2$.

【总结】考查二次函数的最值问题的应用.

【习题4】利用函数图像，解不等式 $x^2+x-3\le 0$.

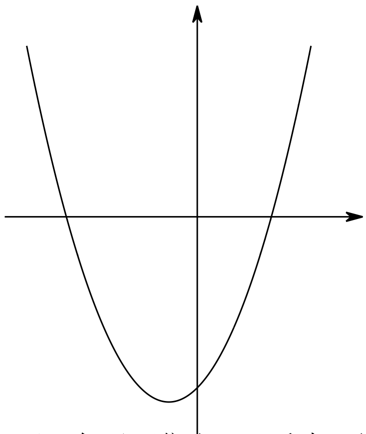
【难度】★★

【答案】$\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}\le x\le\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$.

【解析】设 $y=x^2+x-3$， y 是 x 的二次函数，其图像如图所示：

观察图像可知：当 $\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}\le x\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$ 时，

不等式 $x^2+x-3\le 0$.



【总结】考查用函数图像解决不等式的问题.

【习题5】某水果批发市场经销一种水果，如果每千克盈利 10 元，每天可售出 500 千克．经市场调查发现，在进货价不变的情况下，若每千克涨价 1 元，日销售量将减少 20 千克.

（1）当每千克涨价为多少元时，每天的盈利最多？最多为多少？

（2）若商场只要求保证每天的盈利为 6000 元，同时又可使顾客得到实惠，每千克应涨价多少元？

【难度】★★

【答案】（1） 6125； （2） 5 元.

【解析】（1）设每千克涨价 x 元，利润为 y 元，由题意，得

$$y=(10+x)(500-20x)=-20x^2+300x+5000=-20\left(x-\frac{15}{2}\right)^2+6125 .$$

$\because a=-20<0$， $\therefore$抛物线开口向下，当 $x=7.5$ 时 ， $y_{最大值}=6125$.

（2） 当 $y=6000$ 时， $6000=(10+x)(500-20x)$ ，

解得： $x_1=10$， $x_2=5$. $\because$要使顾客得到实惠， $\therefore x=5$.

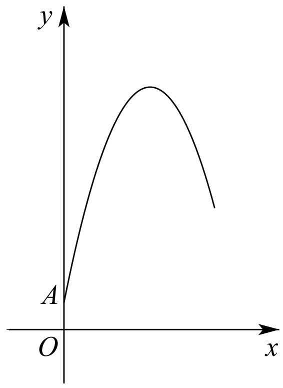
即每千克应涨价 5 元.

【总结】考查二次函数解析式在利润问题中的运用，注意利润=单个利润×总量.

【习题6】如图，某足球运动员站在点 O 处练习射门，将足球从离地面 0.5 m 的 A 处正 对球门踢出（点 A 在 y 轴上），足球的飞行高度 y（单位：m）与飞行时间 t（单位：s） 之间满足函数关系式：$y=at^2+5t+c$，已知足球飞行 0.8 s 时，离地面的高度为 3.5 m.

（1）足球飞行的时间是多少时，足球离地面最高？最大高度为多少？

（2）若足球飞行的水平距离 x（单位：m）与飞行时间 t（单位：s）之间具有函数关系式 $x=10t$，已知球门的高度为 2.44 m，如果该运动员正对球门射门时，离球门的水平距离 为 28 m，那么他能否将球直接射入球门？



【难度】★★

【答案】（1）当 $t=\frac{8}{5}$ 时，$y_{最大}=4.5$；（2）能.

【解析】（1）由题意得：函数 $y=at^2+5t+c$ 的图像经过点 $(0，0.5)$ 和点 $(0.8，3.5)$，代入可解得：$a=-\frac{25}{16}$，$c=0.5$.

$\therefore y=-\frac{25}{16}t^2+5t+\frac{1}{2}$，当 $t=\frac{8}{5}$ 时，$y_{最大}=4.5$；

（2）把 $x=28$，代入 $x=10t$，得：$t=2.8$，当 $t=2.8$ 时，$y=2.25<2.44$.

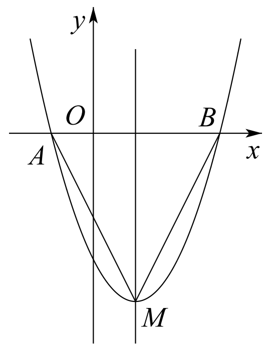
∴他能将球直接射入球门.

【总结】考查用待定系数法求二次函数解析式，以及二次函数的应用.

【习题7】如图所示是二次函数 $y=(x+m)^2+k$ 的图像，其顶点坐标为 M（1，-4）.

（1）求出图像与 x 轴的交点 A、B 的坐标；

（2）在二次函数的图像上是否存在点 P，使 $S_{\Delta PAB}=\frac{5}{4}S_{\Delta MAB}$，若存在，求出点 P 的坐标，若不存在，请说明理由.



【难度】★★

【答案】（1）$A(-1，0)$、$B(3，0)$；（2）$(4，5)$或$(-2，5)$.

【解析】（1）由题可知抛物线解析式为：$y=(x-1)^2-4$，令 $y=0$，

得 $(x-1)^2-4=0$，解得：$x_1=3$，$x_2=-1$，

$\therefore A(-1，0)$，$B(3，0)$.

（2）$\because \Delta PAB$与ΔMAB同底，且$S_{\Delta PAB}=\frac{5}{4}S_{\Delta MAB}$，

$\therefore |y_p|=\frac{5}{4}|y_m|=\frac{5}{4}\times 4-5$，即$y_p=\pm 5$.

又$\because$点P在$y=(x-1)^2-4$的图像上，$\therefore y_p\geq -4$，

$\therefore y_p=5$，则$(x-1)^2-4=5$，

解得：$x_1=4$，$x_2=-2$，

$\therefore$存在合适的点P，坐标为$(4，5)$或$(-2,5)$.

【总结】考查用待定系数法求二次函数解析式，以及二次函数图像点的坐标.

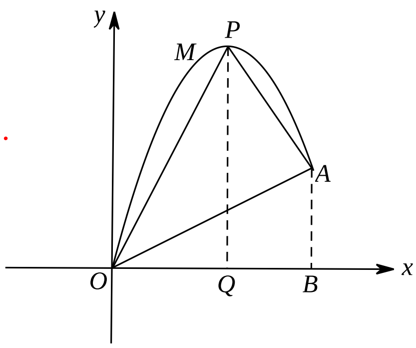
【习题8】如图，一小球从斜坡点O处抛出，球的抛出路线可以用二次函数$y=-x^2+4x$的图像来刻画，斜坡可以用一次函数$y=\frac{1}{2}x$的图像来刻画.

（1）请用配方法求二次函数图像的最高点P的坐标；

（2）小球的落点是A，求点A的坐标；

（3）连接抛物线的最高点P与点O、A得ΔPOA，求ΔPOA的面积；

（4）在OA上方的抛物线上存在一点M（点M与点P不重合），ΔMOA的面积等于ΔPOA的面积，请直接写出点M的坐标.



【难度】★★★

【答案】（1）$(2，4)$；（2）$\left(\frac{7}{2}，\frac{7}{4}\right)$；（3）$\frac{21}{4}$；（4）$M\left(\frac{3}{2}，\frac{15}{4}\right)$.

【解析】（1）由题意，得：$y=-x^2+4x=-(x-2)^2+4$，

故二次函数的最高点P的坐标为$(2，4)$.

（2）联立两解析式，可得：$\begin{cases}y=-x^2+4x\\ y=\frac{1}{2}x\end{cases}$，解得：$\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$或$\begin{cases}x=\frac{7}{2}\\ y=\frac{7}{4}\end{cases}$.

故可得点A的坐标为$\left(\frac{7}{2}，\frac{7}{4}\right)$；

（3）作$PQ\perp x$轴于点Q，$AB\perp x$轴于点B，

$S_{\Delta POA}=S_{\Delta POQ}+S_{梯形PQBA}-S_{\Delta BOA}=\frac{1}{2}\times 2\times 4+\frac{1}{2}\times\left(4+\frac{7}{4}\right)\times\left(\frac{7}{2}-2\right)=\frac{21}{4}$.

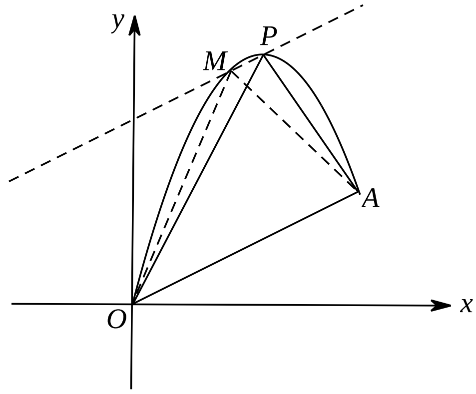
（4）过 P 作 OA 的平行线，交抛物线于点 M，连结 OM、AM，则 $S_{\Delta MOA}=S_{\Delta POA}$.

设直线 PM 的解析式为 $y=\frac{1}{2}x+b$，

$\because P(2,4)$，$\therefore 4=\frac{1}{2}\times 2+b$，$\therefore b=3$．$\therefore y=\frac{1}{2}x+3$.

由 $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+3 \\ y=-x^2+4x \end{cases}$，解得：$\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=\frac{15}{4} \end{cases}$，

所以点 M 的坐标为：$M\left(\frac{3}{2},\frac{15}{4}\right)$.



【总结】考查用二次函数解决面积问题，以及对二次函数图像上点的坐标的理解及应用.

【习题9】已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）的顶点坐标为 Q（2，–1），且与 y 轴交于点 C（0，3），与 x 轴交于 A、B 两点（点 A 在点 B 的右侧），点 P 是该抛物线上一动点，从点 C 沿抛物线向点 A 运动（P 与 A 不重合），过点 P 作 $PD\,//\,y$ 轴，交 AC 于点 D.

（1）求该抛物线的函数解析式；

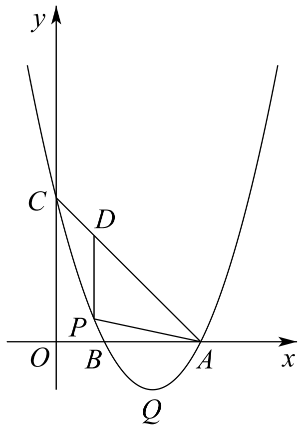
（2）当 ΔADP 是直角三角形时，求点 P 的坐标；

（3）在问题（2）的结论下，若点 E 在 x 轴上，点 F 在抛物线上，问是否存在以 A、P、E、F 为顶点的平行四边形？若存在，求点 F 的坐标，若不存在，请说明理由.

【难度】★★★

【答案】（1）$y=x^2-4x+3$；（2）$P_1(1,0)$，$P_2(2,-1)$；

（3）$F_1\left(2-\sqrt{2},1\right)$，$F_2\left(2+\sqrt{2},1\right)$.



【解析】（1）由题可设抛物线的解析式为 $y=a(x-2)^2-1$，

将 C（0，3）代入上式，得：$3=a(0-2)^2-1$，$\therefore a=1$，

$\therefore y=(x-2)^2-1$，即 $y=x^2-4x+3$.

（2）分两种情况：①当点 P_1 为直角三角形顶点时，点 P_1 与点 B 重合；

令 $y=0$，得：$x^2-4x+3=0$，解得：$x_1=1$，$x_2=3$.

∵点 A 在点 B 的右边，$\therefore B(1,0)$，$A(3,0)$，$\therefore P_1(1,0)$；

②当点 A 为直角三角形顶点时，$\because OA=OC$，$\angle AOC=90°$，$\therefore \angle OAD=45°$.

当 $\angle DAP_2 = 90°$ 时，$\angle OAP_2 = 45°$，$\therefore AO$ 平分 $\angle DAP_2$，又 $\because P_2D // y$ 轴，

$\therefore P_2D \perp AO$，$\therefore P_2$，D 关于 x 轴对称．

由 A，C 两点的坐标可求直线 AC 的解析式为：$y = x + 3$，设点 $D(x，-x+3)$．

则 $P_2\left(x，x^2 - 4x + 3\right)$，则有 $(-x+3) + \left(x^2 - 4x + 3\right) = 0$，即 $x^2 - 5x + 6 = 0$，

解得：$x_1 = 2$，$x_2 = 3$（舍去），当 $x = 2$ 时，$y = -1$，$\therefore P_2(2，-1)$ 即抛物线的顶点；

$\therefore P$ 点坐标为 $P_1(1，0)$，$P_2(2，-1)$．

（3）由（2）知，当 P 点坐标为 $(1，0)$ 时不能够构成平行四边形，当 P 点坐标为 $(2，-1)$ 时，平移直线 AP 交 x 轴于点 E，交抛物线与点 F．

$\because P(2，-1)$，$\therefore$ 可设 $F(x，1)$，由 $x^2 - 4x + 3 = 1$，解得：$x_1 = 2 - \sqrt{2}$，$x_2 = 2 + \sqrt{2}$，

所以符合条件的 F 点有两个，即 $F_1\left(2 - \sqrt{2}，1\right)$，$F_2\left(2 + \sqrt{2}，1\right)$．

【总结】考查用待定系数法求二次函数解析式，直角三角形的判定，平行四边形的存在性问题等知识点，同时还考查了分类讨论的思想．

【习题10】　如图（a），抛物线 $y=a\left(x+6\right)^2-3$ 与 x 轴相交于 A、B 两点，与 y 轴相交于点 C，点 D 为抛物线的顶点，直线 $DE\perp x$ 轴，垂足为 E，$AE^2=3DE$．

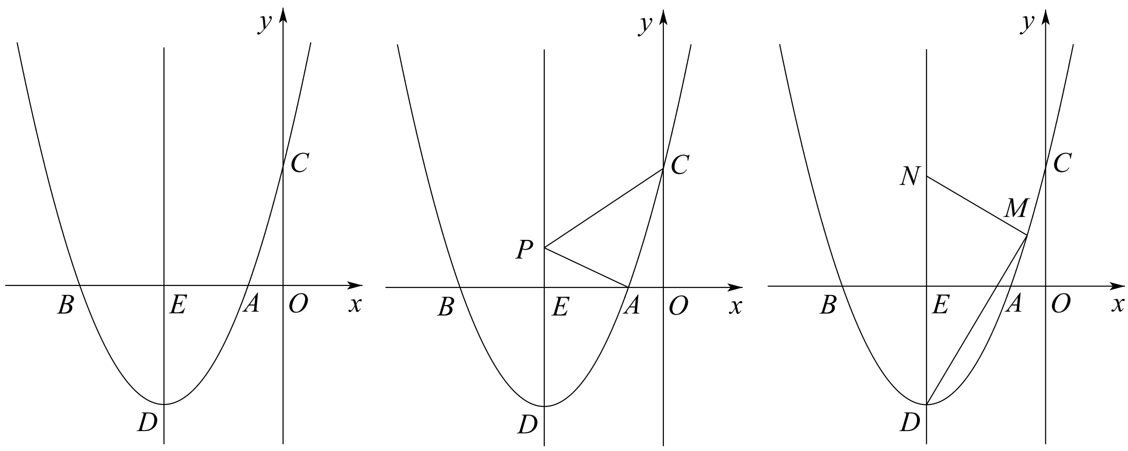
（1）求这个抛物线的解析式；

（2）P 为直线 DE 上的一点，且 ΔPAC 是以 PC 为斜边的直角三角形，见图（b），求 $\tan\angle PCA$ 的值；

（3）如图（c）所示，M 为抛物线上的一动点，过点 M 作直线 $MN\perp DM$，交直线 DE 于点 N，当 M 点在抛物线的第二象限的部分上运动时，是否存在使点 E 三等分线段 DN 的情况？若存在，请求出符合条件的所有的点 M 的坐标；若不存在，请说明理由．

【难度】★★★

【答案】（1）$y=\dfrac{1}{3}x^2+4x+9$；（2）$\tan\angle PCA=\dfrac{1}{3}$；（3）$M\left(-6+3\sqrt{2}，3\right)$或$\left(-6-3\sqrt{2}，3\right)$．



图（a）　　图（b）　　图（c）

【解析】（1）已知抛物线的顶点 $D\left(-6，-3\right)$，则 $DE=3$，$OE=6$，

$\because AE^2=3DE=9$，$\therefore AE=3$，即 $A\left(-3，0\right)$．

将 A 点代入抛物线解析式中，得：$a\left(-3+6\right)^2-3=0$，即 $a=\dfrac{1}{3}$，

所以抛物线解析式为：$y=\dfrac{1}{3}\left(x+6\right)^2-3=\dfrac{1}{3}x^2+4x+9$．

（2）设 $P\left(-6，a\right)$，$\because A\left(-3，0\right)$，$E\left(-6，0\right)$，$C\left(0，9\right)$，根据勾股定理得：

$AE^2+PE^2+AC^2=PC^2$，即 $9+a^2+81=6^2+\left(a-9\right)^2$，解得：$a=1$，

$\therefore P\left(-6，1\right)$，$\therefore AP=\sqrt{10}$，$AC=3\sqrt{10}$，

$\therefore \tan\angle PCA=\dfrac{AP}{AC}=\dfrac{\sqrt{10}}{3\sqrt{10}}=\dfrac{1}{3}$．

（3）设点 $M(a，b)(a<0，b>0)$，分两种情况讨论：

（i）当 $NE=2DE$ 时，$NE=6$，即 $N(-6，12)$，已知 $D(-6，3)$，

则有直线 MN 的斜率：$k_1=\dfrac{b-6}{a+6}$，直线 MD 的斜率：$k_2=\dfrac{b+3}{a+6}$．

由于 $MN\perp DN$，则 $k_1\cdot k_2=\dfrac{(b-6)(b+3)}{(a+6)^2}=-1$，

整理得：$a^2+b^2+12a-3b+18=0$①

由抛物线的解析式得：$\dfrac{1}{3}a^2+4a+9=b$，整理得：$a^2+12a-3b+27=0$②

由①－②得：$b^2=9$，即 $b=3$（负值舍去），

将 $b=3$ 代入①得：$a=-6+3\sqrt{2}$，$a=-6-3\sqrt{2}$，

故点 $M\left(-6+3\sqrt{2}，3\right)$或$\left(-6-3\sqrt{2}，3\right)$；

（ii）当 $2NE=DE$ 时，$NE=\dfrac{3}{2}$，即 $N\left(-6，\dfrac{3}{2}\right)$，已知 $D(-6，-3)$，

则有直线 MN 的斜率：$k_1=\dfrac{b-\frac{3}{2}}{a+6}$，直线 DM 的斜率：$k_2=\dfrac{b+3}{a+6}$．

由题意得：$k_1\cdot k_2=\dfrac{\left(b-\frac{3}{2}\right)(b+3)}{(a+6)^2}=-1$，整理得：$a^2+b^2+\dfrac{3}{2}b+12a+\dfrac{63}{2}=0$，

而 $a^2+12a-3b+27=0$；将两式相减，得：$2b^2+9b+9=0$，

解得：$b_1=-2$，$b_2=-\dfrac{3}{2}$（均不符合题意，舍去）．

综上可知，存在符合条件的 M 点，且坐标为：$M\left(-6+3\sqrt{2}，3\right)$或$\left(-6-3\sqrt{2}，3\right)$．

【总结】考查了二次函数的综合运用，同时还考查了分类讨论的思想．

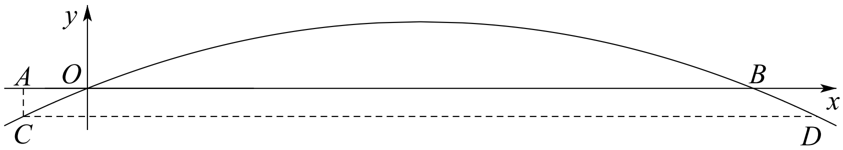
课后作业

【作业1】如图是某拱形大桥的示意图，桥拱与桥面的交点为 O、B，以点 O 为原点，水平直线 OB 为 x 轴，建立平面直角坐标系，桥的拱形可近似看成抛物线 $y=-\frac{1}{400}(x-80)^2+16$，桥拱与桥墩 AC 的交点 C 恰好在水面，有 $AC\perp x$ 轴，若 $OA=10$ 米，则高度 AC 为（　　）

A．$16\frac{9}{40}$ 米　　B．$\frac{17}{4}$ 米　　C．$16\frac{7}{40}$ 米　　D．$\frac{15}{4}$ 米

【难度】★

【答案】B



【解析】$\because AC\perp x$ 轴，$OA=10$ 米，$\therefore$ 点 C 的横坐标为 -10，当 $x=-10$ 时，$y=-\frac{17}{4}$，

故 $AC=\frac{17}{4}$.

【总结】考查了二次函数的实际应用.

【作业2】如图，有一块边长为 6 cm 的正三角形纸板，在它的三个角处分别截去一个彼此全等的筝形，再沿图中的虚线折起，做成一个无盖的直三棱柱纸盒，则该纸盒侧面积的最大值是（　　）cm^2

A．$\sqrt{3}$　　B．$\frac{3}{2}\sqrt{3}$　　C．$\frac{9}{2}\sqrt{3}$　　D．$\frac{27}{2}\sqrt{3}$

【难度】★★

【答案】C

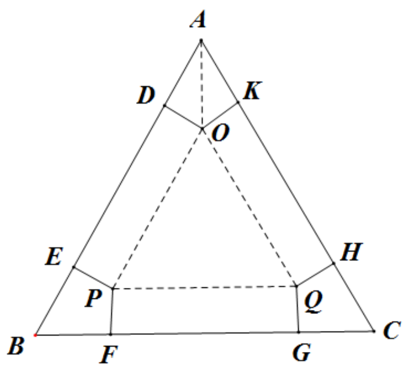
【解析】经分析可知，直三棱柱的三个侧面都是矩形，

且 ΔAOD 和 ΔAOK 全等，设 $OD=x$, 则 $AO=2x$，

由勾股定理可以求出 $AD=\sqrt{3}x$，$\therefore DE=6-2\sqrt{3}x$，

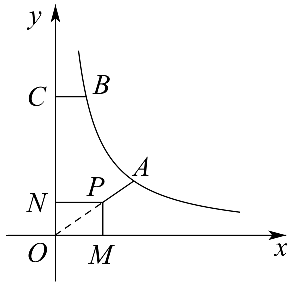
$\therefore$ 纸盒侧面积$=3x\left(6-2\sqrt{3}x\right)=-6\sqrt{3}x^2+18x$，

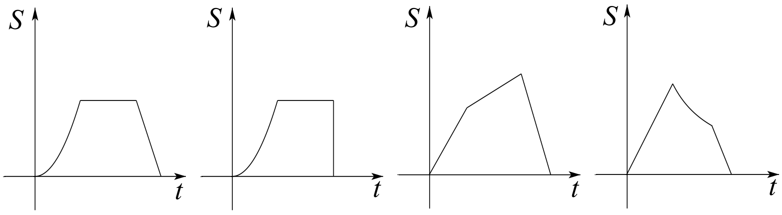
$\therefore$ 当 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，纸盒侧面积最大为 $\frac{9\sqrt{3}}{2}$.



【总结】考查了等边三角形的性质运用，二次函数解决最值问题的实际应用.

【作业3】如图，已知 A、B 是反比例函数（$k>0$，$x>0$）图像上的两点，$BC\,//\,x$ 轴，交 y 轴与点 C，动点 P 从坐标原点 O 出发，沿 $O\to A\to B\to C$ 匀速运动，终点为 C．过 P 作 $PM\perp x$ 轴，$PN\perp y$ 轴，垂足分别为 M、N．设矩形 $OMPN$ 的面积为 S，点 P 运动时间为 t，则 S 与 t 的函数图像大致为（　　）





A．　　B．　　C．　　D．

【难度】★★

【答案】A

【解析】当点 P 在 AB 上运动时，此时 S 不变，故排除 C、D；

当点 P 在 BC 上运动时，S 与 t 成一次函数的关系，故排除 B；

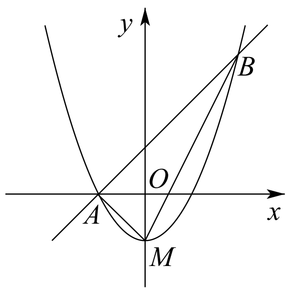
故选 A．

【总结】考查了动点问题的函数图像．

【作业4】如图，顶点 M 在 y 轴上的抛物线与直线 $y=x+1$ 相交于 A、B 两点，且点 A 在 x 轴上，点 B 的横坐标为 2，连接 AM、BM．

（1）求抛物线的函数解析式；

（2）判断 ΔABM 的形状，并说明理由．



【难度】★★

【答案】（1）$y=x^2-1$；（2）ΔABM 为直角三角形，理由略．

【解析】（1）$\because A$ 点为直线 $y=x+1$ 与 x 轴的交点，$\therefore(-1,0)$，

又 B 点横坐标为 2，代入 $y=x+1$ 可求得：$y=3$，$\therefore B(2,3)$．

∵抛物线顶点在 y 轴上，∴可设抛物线解析式为 $y=ax^2+c$，

把 A、B 两点代入可得 $a=1$，$c=-1$，$\therefore y=x^2-1$．

（2）ΔABM 为直角三角形，理由如下：由 $y=x^2-1$ 可知 $M(-1,0)$，

$\therefore AM=\sqrt{2}$，$AB=3\sqrt{2}$，$BM=2\sqrt{5}$，$\therefore AM^2+AB^2=BM^2$，$\therefore\Delta ABM$ 为直角三角形．

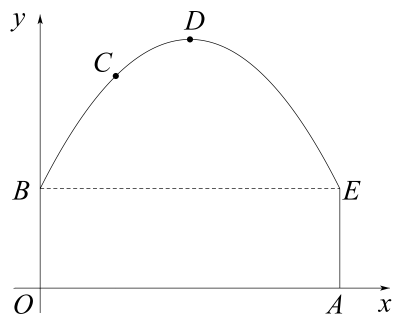
【总结】考查二次函数的综合运用，涉及待定系数法，二次函数的性质，勾股定理等知识点．

【作业5】如图，隧道的截面由抛物线和长方形构成，长方形的长是 12 米，宽是 4 米．按照图中所示的直角坐标系，抛物线可以用 $y=-\frac{1}{6}x^2+bx+c$ 表示，且抛物线上的点 C 到墙面 OB 的水平距离为 3 米，到地面 OA 的距离为 $\frac{17}{2}$ 米．

（1）求该抛物线的函数解析式，并计算出拱顶 D 到地面 OA 的距离；

（2）一辆货车载一长方体集装箱后高为 6 米，宽为 4 米，如果隧道内设双向车道，那么这辆货车能否安全通过？

（3）在抛物线形拱壁需要安装两排灯，使它们离地面的高度相等，如果灯离地面的高度不超过 8 米，那么两排灯的水平距离最小是多少？



【难度】★★

【答案】（1）$10m$；（2）能；（3）$4\sqrt{3}m$．

【解析】（1）根据题意，得：$B(0,4)$、$C\left(3,\frac{17}{2}\right)$，

把 $B(0,4)$、$C\left(3,\frac{17}{2}\right)$ 代入 $y=-\frac{1}{6}(x-6)^2+10$，

得：$\begin{cases}b=2\\c=4\end{cases}$，$\therefore y=-\frac{1}{6}x^2+2x+4$．

则 $y=-\frac{1}{6}(x-6)^2=10$；所以 $D(6,10)$，所以拱顶到地面的距离为 $10m$；

（2）由题意得货运汽车最外侧与地面 OA 的交点为 $(2,0)$ 或 $(10,0)$，当 $x=2$ 或 $x=10$ 时，$y=\frac{22}{3}>6$，所以这辆货车能安全通过．

（3）令 $y=8$，则 $-\frac{1}{6}(x-6)^2+10=8$，解得：$x_1=6+2\sqrt{3}$，$x_2=6-2\sqrt{3}$，

则 $x_1-x_2=4\sqrt{3}$，所以两排灯的水平距离最小是 $4\sqrt{3}m$．

【总结】考查二次函数的应用，构建二次函数模型．

【作业6】某商场在销售旺季临近时，某品牌的童装销售价格呈上升趋势，假如这种童装开始时售价为每件 20 元，并且每周涨价 2 元，从第 6 周开始，保持每件 30 元的稳定价格销售，直到 11 周结束，该童装不再销售.

（1）请建立销售价格 y（元）与周次 x 之间的函数关系式；

（2）若该品牌童装于进货当周售完，且这种童装每件进价 z（元）与周次 x 之间的关系为 $z=-\frac{1}{8}(x-8)^2+12$，$1\le x\le 11$，且 x 为整数，那么该品牌童装在第几周售出后，每件 获得的利润最大？最大利润为多少？

【难度】★★

【答案】（1）$y=\begin{cases}20+2(x-1)=2x+18(1\le x<6)\\30(6\le x\le 11)\end{cases}$；

（2）第 11 周利润最大且为每件19.125元.

【解析】（1）$y=\begin{cases}20+2(x-1)=2x+18(1\le x<6)\\30(6\le x\le 11)\end{cases}$；

（2）设利润为W，则

$$W=y-z=\begin{cases}20+2(x-1)+\frac{1}{8}(x-8)^2-12=\frac{1}{8}x^2+14(1\le x<6)\\30+\frac{1}{8}(x-8)^2-12=\frac{1}{8}(x-8)^2+18(6\le x\le 11)\end{cases}$$

当$W=\frac{1}{8}x^2+14$时，对称轴是直线$x=0$，当$x>0$时，W随x的增大而增大.

∴当$x=5$时，$W_{最大值}=17.125$（元）；

当$W=\frac{1}{8}(x-8)^2+18$时，对称轴是直线$x=8$，当$x>8$时，W随x的增大而增大.

∴当$x=11$时，$W_{最大}=19.125$（元）

综上可知：在第 11 周利润最大且为每件19.125元.

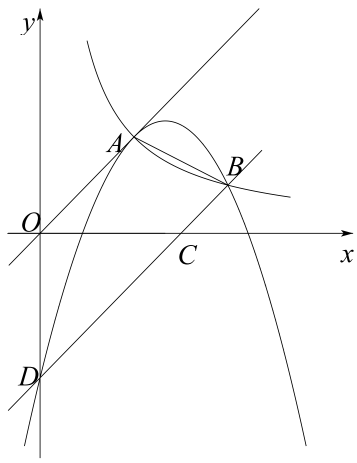
【总结】考查二次函数的实际应用，构建二次函数模型.

【作业7】如图，正比例函数和反比例函数的图像都经过点 A（3，3），把直线 OA 向下 平移后，与反比例函数的图像交于点 B（6，m），与 x 轴、y 轴分别交于 C、D 两点．

（1）求 m 的值；

（2）求过 A、B、D 三点的抛物线的解析式；

（3）在抛物线上是否另外存在点 E，使四边形 $OECD$ 与四边形 $OACD$ 的面积相等？若存在，求出点 E 的坐标；若不存在，请说明理由．



【难度】★★

【答案】（1）$m=\dfrac{3}{2}$；（2）$y=-0.5x^2+4x-4.5$；

（3）存在，$E(5，3)$．

【解析】（1）由题可知，A、B 都在反比例函数图像上，故 $3\times3=6\times m$，解得：$m=\dfrac{3}{2}$．

（2）易求直线 OA 的解析式：$y=x$，

设直线 CD 的解析式为 $y=x+b$，代入 $B\left(6，\dfrac{3}{2}\right)$ 得：$\dfrac{3}{2}=6+b$，$\therefore b=-4.5$．

∴直线 OC 的解析式为：$y=x-4.5$，

$\therefore C$、D 的坐标分别为 $(4.5，0)$，$(0，-4.5)$．

设过 A、B、D 三点的抛物线的解析式为：$y=ax^2+bx+c$，

分别把 A、B、D 三点的坐标代入可得 $\begin{cases}3=9a+3b+c\\1.5=36a+6b+c\\-4.5=c\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a=-0.5\\b=4\\c=-4.5\end{cases}$；

$\therefore y=-0.5x^2+4x-4.5$．

（3）存在，由四边形 $OECD$ 的面积等于四边形 $OACD$ 的面积分析可知，当点 E 与点 A 的纵坐标相等时，面积相等，故将 $y=3$ 代入 $y=-0.5x^2+4x-4.5$，

解得：$x_1=3，x_2=5$．故 $x=5$，所以点 E 的坐标为 $(5，3)$．

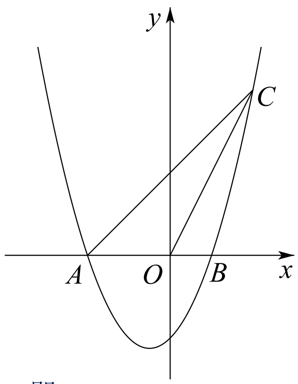
【总结】考查点的坐标的求法及待定系数法确定二次函数解析式，建立数学模型借助一元二次方程解决探究问题．

【作业8】如图所示，在平面直角坐标系中，抛物线 $y=x^2+bx+c$ 与 x 轴交于 A、B 两点，C 为抛物线上一点，且直线 AC 的解析式为 $y=mx+2m$（$m\neq0$），$\angle CAB=45°$，$\tan\angle COB=2$．

（1）求 A、C 的坐标；

（2）求直线 AC 和抛物线的解析式；

（3）在抛物线上是否存在点 D，使得四边形 $ABCD$ 为梯形？若存在，请求出点 D 的坐标；若不存在，请说明理由．



【难度】★★★

【答案】（1）$A(-2，0)$、$C(2，4)$；

（2）$y=x+2$，$y=x^2+x-2$；

（3）$D(-3，4)$或$(5，28)$．

【解析】（1）在 $y=mx+2m(m\neq0)$ 中，当 $y=0$ 时，$mx+2m=0$，即 $m(x+2)=0$，

$\because m\neq0$，$\therefore x=-2$．故 $A(-2，0)$．

过 C 作 $CM\perp x$ 轴于 M，

在 $Rt\Delta CAM$ 中，$\angle CAB=45°$，则 $CM=AM$；

在 $Rt\Delta COM$ 中，$\tan\angle COM=2$，则 $CM=2OM$，故 $CM=2OM=2AM$；

$\because OA=2$，则$OM=2$，$CM=4$，$\therefore C(2，4)$．

（2）将点 C 坐标代入直线 AC 的解析式中，有：

$2m+2m=4$，$m=1$ ∴直线 AC：$y=x+2$；

将 A、C 的坐标代入抛物线解析式中，有：$\begin{cases}4-2b+c=0\\4+2b+c=4\end{cases}$，解得：$\begin{cases}b=1\\c=-2\end{cases}$；

∴抛物线的解析式为：$y=x^2+x-2$；

故直线 AC 和抛物线的解析式分别为：$y=x+2$，$y=x^2+x-2$．

（3）存在满足条件的点 D，其坐标为$(-3，4)$或$(5，28)$；

理由：假设存在符合条件的点 D，则有：

①当 $CD//AB$ 时，由于 $AB\neq CD$，此时四边形 $ABCD$ 是梯形；

易知抛物线的对称性轴为：直线 $x=-\frac{1}{2}$，由于此时 $CD//x$，

故 C、D 关于直线 $x=-\frac{1}{2}$ 对称．易知 $C(2,4)$，故 $D(-3,4)$；

②当 $AD//BC$ 时，显然 $BC\neq AD$，此时四边形 $ABCD$ 是梯形．

易知 $B(-1,0)$，用待定系数法可求得：直线 BC：$y=4x-4$；

由于 $AD//BC$，可设直线 AD 的解析式为 $y=4x+h$，

则有 $4\times(-2)+h=0$，即 $h=8$；∴直线 AD：$y=4x+8$；

联立可得：$\begin{cases}y=4x+8\\y=x^2+x-2\end{cases}$，解得：$\begin{cases}x=-2\\y=0\end{cases}$（舍去），$\begin{cases}x=5\\y=28\end{cases}$，故 $D(5,28)$；

综上所述，点 D 的坐标为 $(-3,4)$ 或 $(5,28)$．

【总结】本题主要考查二次函数背景下的梯形的存在性问题．

【作业9】已知关于 x 的二次函数 $y=x^2+(k^2-4)x+2k-2$ 的顶点在 y 轴的正半轴上．

（1）求此抛物线的解析式；

（2）设 A 是 y 轴右侧抛物线上的一个动点，过点 A 作 AB 垂直于 x 轴于点 B，过点 A 作 x 轴的平行线交抛物线于点 D，再过点 D 作 DC 垂直于 x 轴于点 C，可得到矩形 $ABCD$（B、C 两点在 x 轴上）．设矩形 $ABCD$ 的周长为 l，点 A 的横坐标为 m，试求 l 关于 m 的函　数关系式，并写出 m 的取值范围；

（3）当点 A 在 y 轴右侧的抛物线上运动时，矩形 $ABCD$ 能否成为正方形，若能，请求出此时正方形的周长；若不能，请说明理由．

【难度】★★★

【答案】（1）$y=-x^2+2$；（2）当 $0<x<\sqrt{2}$ 时，$l=-2x^2+4x+4$；

当 $x>\sqrt{2}$ 时，$l=2x^2+4x-4$；（3）矩形能成为正方形，且当 $x=\sqrt{3}-1$ 时周长是 $8\sqrt{3}-8$，

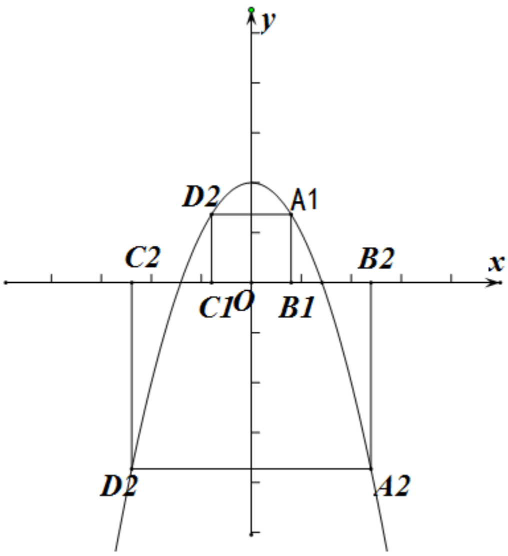
当 $x=\sqrt{3}+1$ 时，周长为 $8\sqrt{3}+8$．

【解析】（1）根据题意得：$k^2-4=0$，$\therefore k=\pm 2$．

当 $k=2$ 时，$2k-2=2>0$，当 $k=-2$ 时，$2k-2=-6<0$，

又因为抛物线与 y 轴的交点在 x 轴上方，$\therefore k=2$．

∴抛物线的解析式为：$y=-x^2+2$，函数的草图如图所示：



（2）令 $-x^2+2=0$，得 $x=\pm\sqrt{2}$．

当 $0<x<\sqrt{2}$ 时，$A_1D_1=2x$，$A_1B_1=-x^2+2$，

$\therefore l=2-\left(A_1B_1+A_1D_1\right)=-2x^2+4x+4$；

当 $x>\sqrt{2}$ 时，$A_2D_2=2x$，$A_2B_2=x^2-2$，

$\therefore l=2\left(A_2D_2+A_2B_2\right)=2x^2+4x-4$；

（3）当 $0<x<\sqrt{2}$ 时，令 $A_1B_1=A_1D_1$，得：$x^2+2x-2=0$．

解得：$x=-1-\sqrt{3}$（舍去）或 $x=-1+\sqrt{3}$，

将 $x=-1+\sqrt{3}$ 代入 $l=-2x^2+4x+4$，得 $l=8\sqrt{3}-8$；

当 $x>\sqrt{2}$ 时，令 $A_2B_2=A_2D_2$，得：$x^2-2x-2=0$，

解得：$x=1-\sqrt{3}$（舍去）或 $x=1+\sqrt{3}$，代入 $l=2x^2+4x-4$，得 $l=8\sqrt{3}+8$；

综上，矩形能成为正方形，且当 $x=\sqrt{3}-1$ 时周长是 $8\sqrt{3}-8$，当 $x=\sqrt{3}+1$ 时，周长为 $8\sqrt{3}+8$．

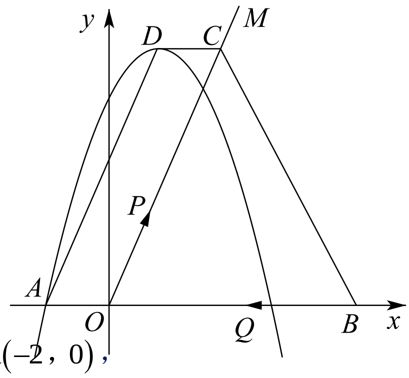
【总结】考查二次函数函数的综合性问题.

【作业10】　如图，已知抛物线 $y=a\left(x-1\right)^2+3\sqrt{3}$（$a\neq 0$）经过点 A（-2，0），抛物线的顶点为 D，过点 O 作射线 $OM // AD$，过顶点 D 平行于 x 轴的直线交射线 OM 于点 C，B 在 x 轴正半轴上，连接 BC.

（1）求该抛物线的解析式；

（2）若动点 P 从点 O 出发，以每秒 1 个长度单位的速度沿射线 OM 运动，设点 P 运动的时间为 t（s）. 问当 t 为何值是，四边形 $DAOP$ 分别为平行四边形？直角梯形？等腰梯形？

（3）若 $OC=OB$，动点 P 和动点 Q 分别从点 O 和点 B 同时出发，分别以每秒 1 个长度单位和 2 个长度单位的速度沿 OC 和 BO 运动，当其中一个点停止运动时，另一个点也随之停止运动. 设它们的运动时间为 k（s），连接 PQ，四边形 $BCPQ$ 的面积为 S，求 S 关于 k 的函数关系式，并写出定义域.



【难度】★★★

【答案】（1）$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x^2+\frac{2\sqrt{3}}{3}x+\frac{8\sqrt{3}}{3}$；

（2）当 $t=6$、5、4 时，对应四边形分别是平行四边形、直角梯形、等腰梯形；

（3）$\therefore S=\frac{\sqrt{3}}{2}k^2-\frac{3\sqrt{3}}{2}k+9\sqrt{3}\ \left(0<k<3\right)$.

【解析】（1）∵抛物线 $y=a\left(x-1\right)^2+3\sqrt{3}\left(a\neq 0\right)$ 经过点 $A\left(-2，0\right)$，

$\therefore 0=9a+3\sqrt{3}$，$\therefore a=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，∴二次函数的解析式为：$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x^2+\frac{2\sqrt{3}}{3}x+\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

（2）∵ D 为抛物线的顶点，$\therefore D\left(1，3\sqrt{3}\right)$，过 D 作 $DN\perp OB$ 于 N，则 $DN=3\sqrt{3}$，

$AN=3$，$\therefore AD=6$，$\therefore \angle DAO=60°$. $\because OM//AD$，

①当 $AD=OP$ 时，四边形 $DAOP$ 是平行四边形，$\therefore OP=6$，$\therefore t=6\left(s\right)$；

②当 $DP\perp OM$ 时，四边形 $DAOP$ 是直角梯形，过 O 作 $OH\perp AD$ 于 H，$AO=2$，

则 $AH=1$，（如果没求出 $\angle DAO=60°$，可由 $Rt\Delta OHA\backsim Rt\Delta DNA$，求 $AH=1$）

$\therefore OP=DH=5$，$t=5\left(s\right)$；

③当 $PD=OA$ 时，四边形 $DAOP$ 是等腰梯形，

$\therefore OP=AD-2$，$AH=6-2=4$，$\therefore t=4\left(s\right)$，

综上所述，当 $t=6$、5、4 时，对应四边形分别是平行四边形、直角梯形、等腰梯形.

（3）由（2）及已知，得：$\angle COB=60°$，$OC=OB$，ΔOCB 是等边三角形，

则 $OB=OC=AD=6$，$OP=k$，$BQ=2k$，$\therefore OQ=6-2k\left(0<k<3\right)$.

过 P 作 $PE\perp OQ$ 于 E，则 $PE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}k$，

$\therefore S_{BCPQ}=\dfrac{1}{2}\times 6\times 3\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}(6-2k)\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}k=\dfrac{\sqrt{3}}{2}k^2-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}k+9\sqrt{3}$，

即 $S=\dfrac{\sqrt{3}}{2}k^2-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}k+9\sqrt{3}\ (0<k<3)$.

【总结】本题综合性较强，主要考查二次函数背景下的平行四边形问题、梯形问题以及动点与面积的结合问题.