相似形与比例线段

内容分析

放缩与相似形是九年级上学期第一章第一节的内容，主要对相似多边形的概念和性质进行讲解，重点是理解相似形的相关概念和相似多边形性质的运用．通过对相似多边形的学习，为后面学习相似三角形的知识奠定基础．

比例线段是九年级上学期第一章第二节的内容，主要讲解比例线段的有关概念和性质，以及三角形一边的平行线的相关性质和判定．

比例线段的知识点，重点在于理解不同概念和性质之间的联系和区别，熟练比例线段之间的转换，并能结合具体图形，运用比例线段的性质进行解题．

对比例线段的学习之后，我们进一步学习三角形一边的平行线分线段成比例的相关性质和判定．

三角形一边的平行线是九年级数学上学期第一章第二节的内容，本讲主要讲解三角形一边平行线性质定理及推论和三角形一边平行线判定定理及推论，以及平行线分线段成比例定理．重点是掌握这两个定理及其推论，分清两个定理及其推论之间的区别和联系，难点是理解该定理和推论的推导过程中所蕴含的分类讨论思想和转化思想，并认识“A”字型和“X”字形这两个基本图形，最后灵活运用本节的三个定理及两个推论，理解和掌握“作平行线”这一主要的作辅助线的方法，为学习相似三角形的性质和判定做好准备．

知识结构

- 相似形与比例线段
  - 放缩与相似形
  - 比例线段
  - 三角形一边的平行线

模块一：放缩与相似形

知识精讲

1、 相似形的概念

相似形：我们把形状相同的两个图形称为相似的图形，简称相似形.

2、 相似多边形的性质

如果两个多边形是相似形，那么这两个多边形的**对应角**相等，**对应边**的长度成比例．当两个相似的多边形是全等形时，它们对应边的长度的比值为1．

例题解析

【例1】下列说法中错误的是（　　）

A．同一底片先后两次冲印出的照片是相似形

B．同一颗树在太阳光下先后两次形成的影子是相似形

C．放在投影仪上的图片及其在屏幕上显示的图片是相似形

D．放在复印件上的图片及其复印后得到的图片是相似形

【难度】★

【例2】有以下命题：①邻边之比为2 : 3的两个平行四边形相似；②有一个角是40°的两个菱形相似；③两个矩形相似；④两个正方形相似，其中正确的是（　　）

A．①和②　　B．②和④　　C．③和④　　D．①和③

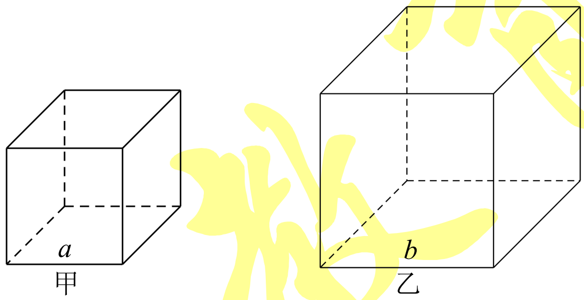
【难度】★★

【例 3】 如果两个矩形相似，已知一个矩形的两边长分别为 5 cm 和 4 cm，另一边矩形的边长为 6 cm，则另一边长为______.

【难度】★★

【例 4】 在平面内，两个形状相同、大小不一定相同的图形称作相似形．我们可以把这一概念推广到空间：如果两个几何体的形状完全相同，大小不一定相同，我们称它们为相似体．

如图，甲乙两个不同的正方体，它们是相似体．若两个正方体的棱长分别为 a 和 b，则称这两个相似体的相似比为 $a:b$．我们不难发现它们的一些基本性质：



设 $S_甲$、$S_乙$ 分别表示这两个正方体的表面积，则 $\dfrac{S_甲}{S_乙}=\dfrac{6a^2}{6b^2}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^2$；

设 $V_甲$、$V_乙$ 分别表示这两个正方体的体积，则 $\dfrac{V_甲}{V_乙}=\dfrac{a^3}{b^3}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^3$．

（1）下列几何体中，一定属于相似体的是（　　）

A．两个圆柱体　　B．两个圆锥体

C．两个球体　　D．两个长方体

（2）请归纳出相似体的三条主要性质：①两个相似体的对应线段或对应弧长的比等于______；②两个相似体表面积的比等于______；③两个相似体体积的比等于______．

（3）某海岛周围海域出产一种鱼，在体长 10 厘米之后的生长过程中，体型可以近似地看作相似体．若体长 20 厘米的鱼质量为 0.2 千克，则体长为 60 厘米的鱼质量为多少？当地市场上出售这种鱼价格与体长成正比，购买哪种鱼更划算？

【难度】★★★

模块二：比例线段

知识精讲

1、 比和比例

一般来说，两个数或两个同类的量 a 与 b 相除，叫做 a 与 b 的比，记作 $a:b$（或表示为 $\frac{a}{b}$）；

如果 $a:b=c:d$（或 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$），那么就说 a、b、c、d 成比例．

2、 比例的性质

（1） 基本性质：

如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么 $ad=bc$；

如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么 $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$，$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$，$\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$．

（2） 合比性质：

如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$；

如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么 $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$．

（3） 等比性质：

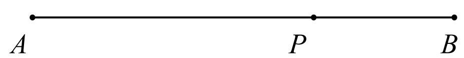
如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$，那么 $\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$（如果是实数运算，要注意强调 $b+d\neq 0$）．

3、 比例线段的概念

对于四条线段 a、b、c、d，如果 $a:b=c:d$（或表示为 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$），那么 a、b、c、d 叫做**成比例线段**，简称**比例线段**．

4、 黄金分割

如果点 P 把线段 AB 分割成 AP 和 PB（$AP>PB$）两段（如下图），其中 AP 是 AB 和 PB 的比例中项，那么称这种分割为**黄金分割**，点 P 称为线段 AB 的**黄金分割点**．其中，$\frac{AP}{AB}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$，称为**黄金分割数**，简称**黄金数**．



例题解析

【例 5】把 $ab=\frac{1}{2}cd$ 写成比例式，不正确的写法是（　　）

A. $\frac{a}{c}=\frac{d}{2b}$　　B. $\frac{a}{2c}=\frac{d}{b}$　　C. $\frac{2a}{c}=\frac{d}{b}$　　D. $\frac{c}{b}=\frac{2a}{d}$

【难度】★

【例 6】已知线段 x、y 满足 $(x+y):(x-y)=3:1$，那么 $x:y$ 等于（　　）

A. $3:1$　　B. $2:3$　　C. $2:1$　　D. $3:2$

【难度】★

【例 7】已知 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，则下列式子中正确的是（　　）

A. $a:b=c^2:d^2$　　B. $a:d=c:b$

C. $a:b=(a+c):(b+d)$　　D. $a:b=(a-d):(b-d)$

【难度】★★

【例 8】若 $a=8\ cm$，$b=6\ cm$，$c=4cm$，则 a、b、c 的第四比例项 $d=$ ______ cm；a、c 的比例中项 $x=$ ______ cm.

【难度】★★

【例 9】已知点 C 是线段 AB 的黄金分割点，$AC=5\sqrt{5}-5$，且 $AC>BC$，则线段 $AB=$______，$BC=$______.

【难度】★★

【例 10】 已知三个数 2、$\sqrt{3}$、5，填一个数，使这四个数能组成比例，这个数可能是____________.

【难度】★★★

【例 11】 已知实数 a、b、c 满足 $\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{c+a}{b}=\dfrac{a+b}{c}$，求 $\dfrac{b+c}{a}$ 的值.

【难度】★★★

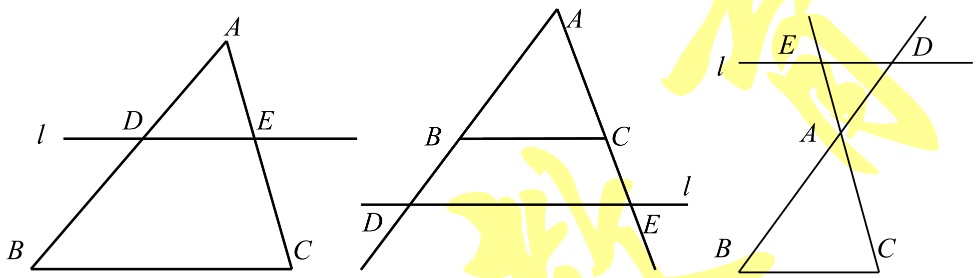
模块三：三角形一边的平行线

知识精讲

1、 三角形一边的平行线性质定理

平行于三角形一边的直线截其他两边所在的直线，截得的**对应线段**成比例．

如图，已知ΔABC，直线$l // BC$，且与AB、AC所在直线交于点D和点E，那么$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$．

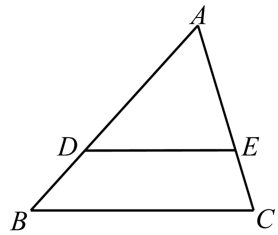


2、 三角形一边的平行线性质定理推论

平行于三角形一边的直线截其他两边所在的直线，截得的三角形的三边与原三角形的三边对应成比例．

如图，点D、E分别在ΔABC的边AB、AC上，$DE // BC$，

那么$\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$．



3、 三角形的重心

定义：三角形三条中线交于一点，三条中线交点叫三角形的**重心**．

性质：三角形重心到一个顶点的距离，等于它到这个顶点对边中点的距离的两倍．

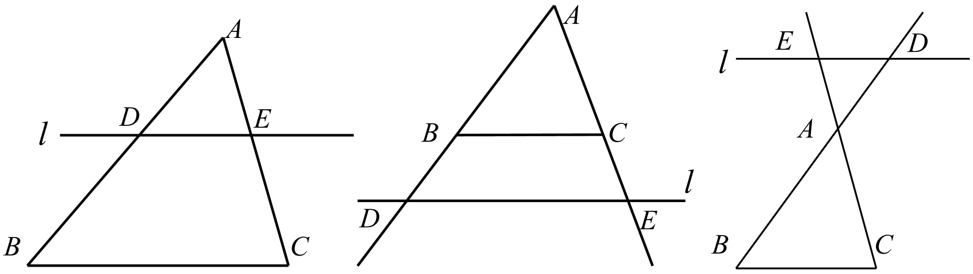
4、 三角形一边的平行线判定定理

如果一条直线截三角形的两边所得的对应线段成比例，那么这条直线平行于三角形的第三边．

5、 三角形一边的平行线判定定理推论

如果一条直线截三角形的两边的延长线（这两边的延长线在第三边的同侧）所得的对应线段成比例，那么这条直线平行于三角形的第三边．

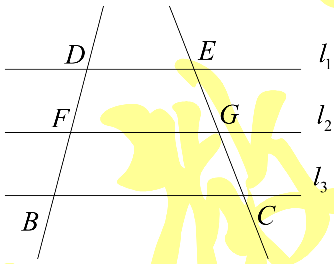
如图，在 ΔABC 中，直线 l 与 AB、AC 所在直线交于点 D 和点 E，如果 $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$，那么 $l/\!/BC$.



6、 平行线分线段成比例定理

两条直线被三条平行的直线所截，截得的对应线段成比例.

如图，直线 $l_1/\!/l_2/\!/l_3$，直线 m 与直线 n 被直线 l_1、l_2、l_3 所截，那么 $\frac{DF}{FB}=\frac{EG}{GC}$.



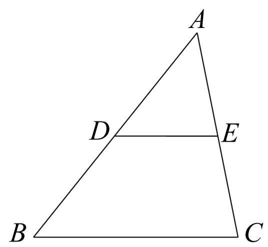
7、 平行线等分线段定

两条直线被三条平行的直线所截，如果一条直线上截得的线段相等，那么另一条直线上截得的线段也相等.

例题解析

【例 12】 如图，ΔABC 中，$DE/\!/BC$，$AD=EC$，$BD=4$ cm，$AE=3$ cm，则 $AB=$______.

【难度】★★



【例 13】 ΔABC 中，$\angle A=90^\circ$，点 D 在 AB 上，点 E 在 BC 上，若 $\frac{DE}{AC}=\frac{BD}{BA}$，那么 DE______平行于 AC.（填“一定”、“不一定”或者“一定不”）

【难度】★★

【例 14】　如图，两条相交于点 O 的直线被另外三条直线所截，交点分别为 A、B、C 和 D、E、F，则下列说法中正确的有（　　）

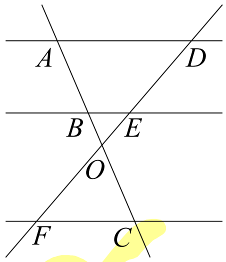
（1）若 $AD\,//\,BE\,//\,FC$，则 $\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{BC}{EF}$；

（2）若 $AD\,//\,BE\,//\,FC$，则 $\dfrac{OF}{OC}=\dfrac{AC}{DF}$；

（3）若 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{DE}{EF}$，则 $AD\,//\,FC$；

（4）若 $\dfrac{BC}{EF}=\dfrac{BO}{EO}$，则 $BE\,//\,FC$；

（5）若 $\dfrac{BE}{FC}=\dfrac{BO}{OC}$，则 $BE\,//\,FC$．



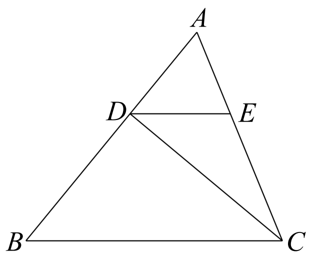
A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

【难度】★★

【例 15】　如图，ΔABC，$DE\,//\,BC$，若 $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{2}{3}$，则 $S_{\Delta CDE}:S_{\Delta BDC}=$（　　）

A．$2:3$　　B．$2:5$　　C．$4:15$　　D．6:15

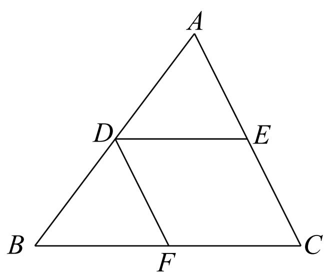
【难度】★★



【例 16】　如图，$DF\,//\,AC$，$DE\,//\,BC$，下列各式正确的是（　　）

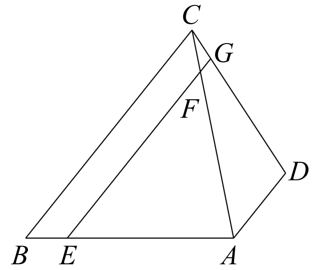
A．$\dfrac{AD}{BC}=\dfrac{BF}{CF}$　B．$\dfrac{AE}{DE}=\dfrac{CE}{BC}$　C．$\dfrac{AE}{CE}=\dfrac{BD}{AD}$　D．$\dfrac{AD}{DE}=\dfrac{AB}{BC}$

【难度】★★



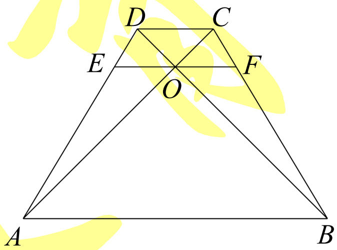
【例 17】 如图，$AD \parallel EG \parallel BC$，$AF = 12$，$FC = 3$，$BC = 10$，$AD = 5$，那么 EG 的长是______.

【难度】★★



【例 18】 如图，已知 $ABCD$ 是梯形，其中 $AB \parallel CD$，对角线 AC 与 BD 交于 O，过 O 作 AB 的平行线交 AD 于点 E，交 BC 于点 F，若 $AO : OC = 2 : 1$，且 $CD = 1.8$，$CF = 0.8$，那么 $AB =$______，$BC =$______.

【难度】★★

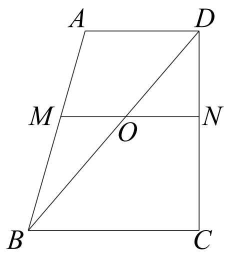


【例 19】 如图，已知梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$MN \parallel BC$，且交对角线 BD 于 O，$AD = DO = p$，$BC = BO = q$，则 MN 为（　　）

A．$\dfrac{pq}{p+q}$　　B．$\dfrac{2pq}{p+q}$

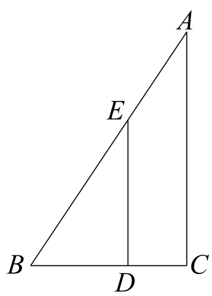
C．$\dfrac{p+q}{pq}$　　D．$\dfrac{p+q}{2pq}$

【难度】★★



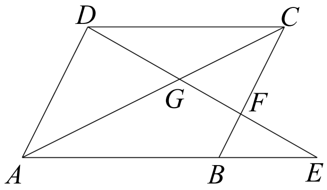
【例 20】 如图，直角 ΔABC 中两条直角边 $CA = 4$，$CB = 3$，点 E 为斜边 AB 上的一个动点，$ED \perp BC$ 于 D，设 $AE = x$，$BD = y$，则 y 关于 x 的函数解析式为______________.

【难度】★★



【例 21】 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，E 是 AB 延长线上的一点，求证：

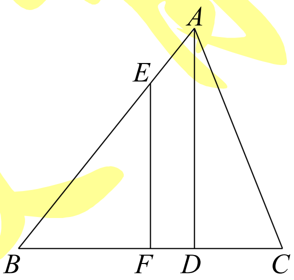
（1）$\dfrac{AE}{AD}=\dfrac{AB}{CF}$；（2）$GD^2=GF\cdot GE$．



【难度】★★

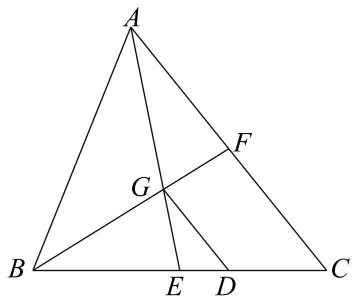
【例 22】 如图，在 ΔABC 中，$AB>AC$，$AD\perp BC$ 于 D，点 F 是 BC 中点，过点 F 作 BC 垂线交 AB 于点 E，$BD:DC=3:2$，则 $BE:EA=$______．

【难度】★★★



【例 23】 如图，在 ΔABC 中，E、F 分别是 BC、AC 的中点，AE、BF 交于点 G，过 G 作 $GD\,//\,AC$ 交 BC 于点 D，若 $ED=5$，则 BC 的长为______．

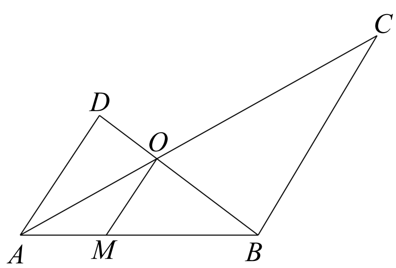
【难度】★★★



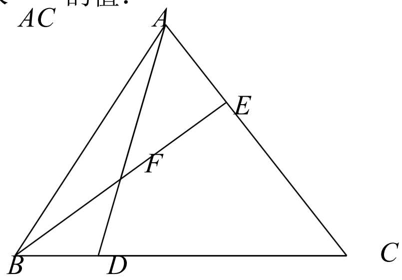
【例 24】 如图，$AD\,//\,OM\,//\,BC$，AC、BD 相交于点 O．

求证：$\dfrac{1}{AD}+\dfrac{1}{BC}=\dfrac{1}{OM}$．

【难度】★★★



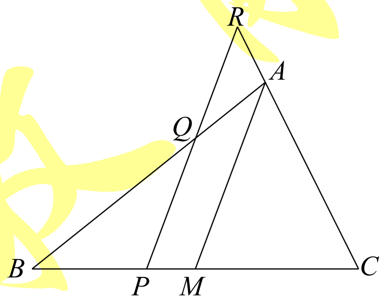
【例 25】 如图，已知：在 ΔABC 中，$\frac{BD}{CD}=\frac{1}{3}$，$\frac{AF}{DF}=2$，求 $\frac{AE}{AC}$ 的值.



【难度】★★★

【例 26】 如图，已知 AM 是 ΔABC 的中线，P 是 BC 边上的一个动点，过点 P 作 AM 的平行线分别交 AB、AC 所在直线与点 Q、R，求证：$PQ+PR$ 为定值.

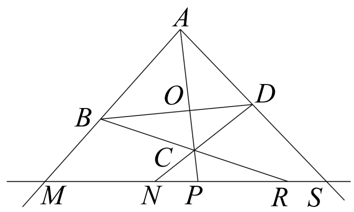
【难度】★★★



【例 27】 如图，在四边形 $ABCD$ 中，AC 与 BD 相交于点 O，直线 l 平行于 BD，且与 AB、DC、BC、AD 及 AC 的延长线分别相交于点 M、N、R、S 和 P.

求证：$PM\ PN=PR\ PS$.

【难度】★★★



【例 28】　（1）如图 1，在 ΔABC 中，点 D、E 分别在 AB、AC 上满足 $DE // BC$，点 P 为 BC 上的任意一点，AP 交 DE 于点 Q，求证：$\dfrac{DQ}{QE}=\dfrac{BP}{PC}$．

（2）试参考（1）的方法解决下列问题：如图 2，M、N 为边 BC 上的两点，且满足 $BM=MN=NC$，一条平行于 AC 的直线分别交 AB、AM 和 AN 的延长线于点 D、E 和 F．求 $EF:DE$ 的值．

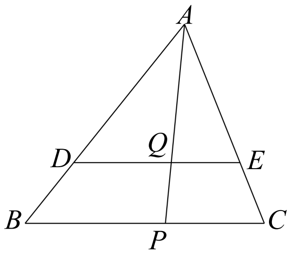


图 1

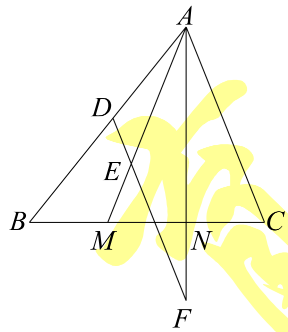


图 2

【难度】★★★

随堂检测

【习题1】　如果图形 A 与图形 B 相似，图形 B 与图形 C 相似，那么图形 A 与图形 C______相似．（填“一定”、“不一定”或“一定不”）

【难度】★

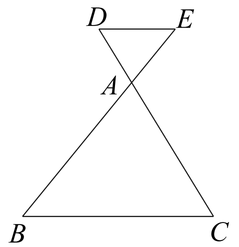
【习题2】　若 $(x+y):y=8:3$，则 $x:y=$______．

【难度】★

【习题3】　如图，$DE \parallel BC$，下列比例式成立的是（　　）

A．$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AC}{AE}$　　B．$\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{DA}{AB}$　　C．$\dfrac{EA}{AB}=\dfrac{DA}{AC}$　　D．$\dfrac{DA}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$

【难度】★



【习题4】　有以下命题，其中正确的判断有（　　）个

（1）如果线段 d 是线段 a、b、c 的第四比例项，则有 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$；

（2）如果点 C 是线段 AB 的中点，那么 AC 是 AB、BC 的比例中项；

（3）如果点 C 是线段 AB 的黄金分割点，且 $AC>BC$，那么 AC 是 AB 与 BC 的比例中项；

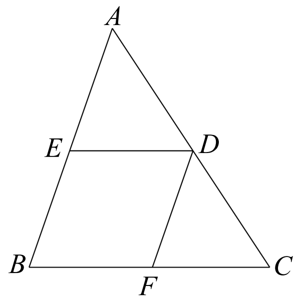
（4）如果点 C 是线段 AB 的黄金分割点，$AC>BC$，且 $AB=2$，则 $AC=\sqrt{5}-1$．

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【难度】★★

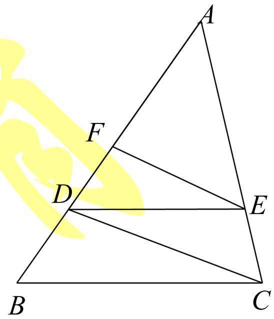
【习题 5】　如图，已知菱形 $BEDF$ 内接于 ΔABC，点 E、D、F 分别在 AB、AC 和 BC 上，若 $AB = 15\ cm$，$BC = 12\ cm$，则菱形边长为______.

【难度】★★



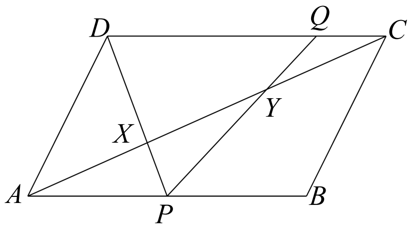
【习题 6】　如图，在 ΔABC 中，$DE // BC$，$EF // CD$，$AF = 3$，$FD = 2$，求 AB 的长.

【难度】★★



【习题 7】　如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB = 24$，X、Y 是对角线 AC 上的三等分点，联结 DX 并延长，交 AB 于 P，再联结 PY 并延长，交 DC 于 Q，则 CQ 的长为______

【难度】★★

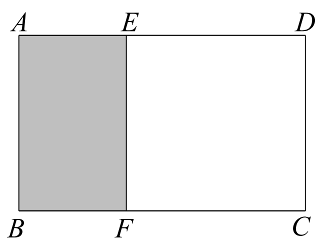


【习题 8】　如图，在矩形 $ABCD$ 中，截去一个矩形 $ABFE$（图中阴影部分），余下的矩形 $DEFC$ 与原矩形 $ABCD$ 相似.

（1）设 $AB = 6$ cm，$BC = 8$ cm，求矩形 $DEFC$ 的面积；

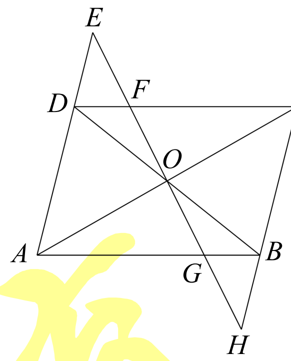
（2）若截去的矩形 $ABFE$ 是正方形，求 $\dfrac{AB}{BC}$ 的值.

【难度】★★



【习题 9】 如图，平行四边形 $ABCD$ 中，对角线交点为 O，E 为 AD 延长线上一点，OE 交 CD 于 F，交 AB 于 G，交 CB 的延长线与 H，试求 $\dfrac{AB}{DF}-\dfrac{AD}{DE}$ 的值．

【难度】★★★

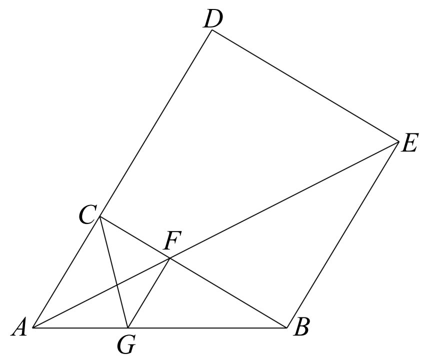


【习题 10】 如图，已知在 ΔABC 中，$\angle C=90°$，以 BC 为边向外作正方形 $BCDE$，联结 AE 交 BC 于 F，作 $FG \parallel AC$，交 AB 于 G．

（1）试判断 ΔFCG 的形状，并加以证明；

（2）若正方形 $BCDE$ 边长为 1，$\angle AEB=30°$，求 AB 的长．

【难度】★★★



课后作业

【作业 1】　下列说法正确的是（　　）

A．边数相同的多边形相似

B．对应边成比例的多边形相似

C．对应角相等的多边形相似

D．全等的多边形相似

【难度】★

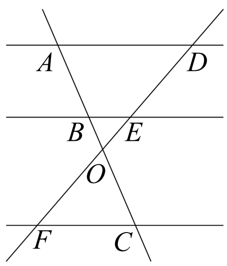
【作业 2】　已知 $\frac{x-y}{13}=\frac{y}{7}$，则 $\frac{x+y}{y}$ 的值为______.

【难度】★

【作业 3】　如图，已知 $AD\,//\,BE\,//\,CF$，下列比例式成立的有（　　）

（1）$\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}$；（2）$\frac{AB}{EF}=\frac{DE}{BC}$；

（3）$\frac{AC}{EF}=\frac{DF}{BC}$；（4）$\frac{BC}{AC}=\frac{EF}{DF}$．



A．1 个　　　　B．2 个

C．3 个　　　　D．4 个

【难度】★

【作业4】 已知 P、Q 是线段 AB 的两个黄金分割点，且 $AB=10\ cm$，则 PQ 长为（　　）

A．$5\left(\sqrt{5}-1\right)$　　B．$5\left(\sqrt{5}+1\right)$　　C．$10\left(\sqrt{5}-2\right)$　　D．$5\left(3-\sqrt{5}\right)$

【难度】★★

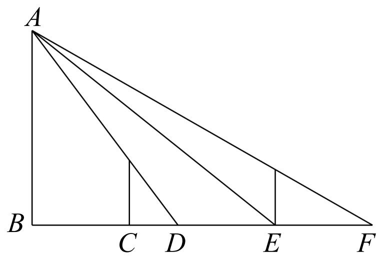
【作业5】 已知 $\frac{a}{5}=\frac{b}{7}=\frac{c}{8}$，且 $a+b+c=20$，求 $2a+b-c$ 的值．

【难度】★★

【作业6】 如图，小华是个爱动脑筋的小朋友，他发现可以通过如下的方法测得路灯的高度；晚上他由路灯下的 B 处走到 C 处时，测得影子 CD 的长为 1 米，继续往前走 3 米到达 E 处时，测得影子 EF 的长度为 2 米，已知小华的身高是 1.5 米，那么路灯 A 的高度 AB 等于（　　）

A．4.5 米　　B．6 米

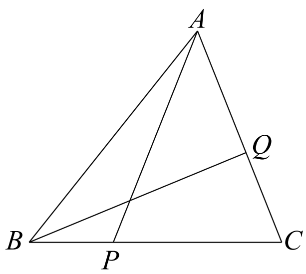
C．7.2 米　　D．8 米



【难度】★★

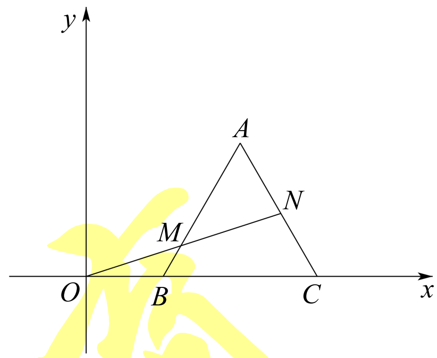
【作业7】 如图，ΔABC 中，在 BC 上取一点 P，CA 上取一点 Q，使得 $BP:PC=2:5$，$CQ:QA=3:4$，AP 与 BQ 交于点 R，则 $AR:RP=$______．

【难度】★★



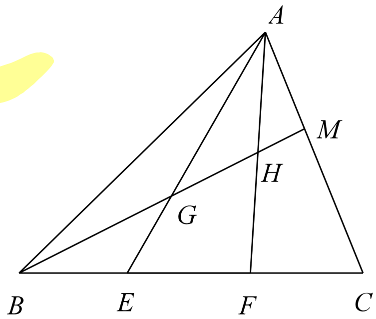
【作业 8】 如图，已知在平面直角坐标系中正三角形 ABC 的顶点 B（1，0），C（3，0），过坐标原点 O 的一条直线分别与边 AB、AC 交于点 M、N，若 $OM = MN$，则点 M 的坐标为______.

【难度】★★★



【作业 9】 在 ΔABC 中，E、F 是 BC 上的三等分点，M 在 AC 上满足 $AM : MC = 2 : 3$，BM 分别交 AE、AF 于点 G、H，设 $BG = x$，$GH = y$，$HM = z$，求 $x : y : z$.

【难度】★★★



【作业 10】 如图，在边长为 12 的正方形 $ABCD$ 中，点 E 在 CD 上，$DE = 5$，AE 的垂直平分线分别交 AD 于 P，交 BC 于 Q，垂足为 M，求 $PM : MQ$ 的值.

【难度】★★★