相似三角形综合

内容分析

相似三角形是初中数学中的重点，也是难点．相当多的知识点可以与相似三角形综合起来考察．本讲将从以下几个方面学习相似三角形的应用，旨在灵活运用相似三角形的判定和性质解决问题．

知识结构

相似三角形综合

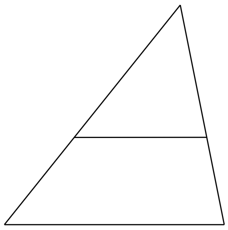
- 平行线与相似三角形
- 角平分线与相似三角形
- a2 = bc与相似三角形
- 内接矩形与相似三角形
- 一线三等角与相似三角形
- 旋转与相似三角形
- 函数与相似三角形

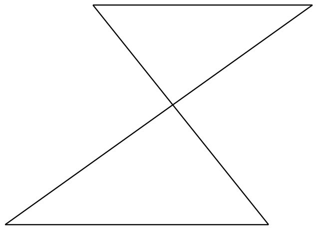
模块一：平行线与相似三角形

知识精讲

1、平行线与相似三角形

利用平行线构造的相似主要有两个基本的模型，即：“A”字型和“X”字型．



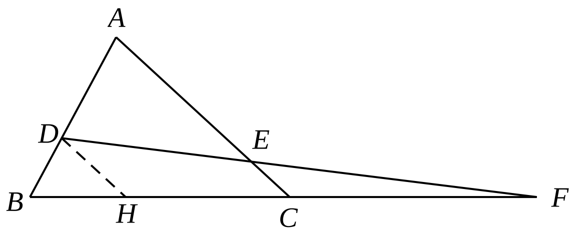


例题解析

【例 1】如图，在ΔABC中，设D、E是AB、AC上的两点，且$BD=CE$，延长DE交BC的延长线于点F，$AB:AC=3:5$，$EF=12\text{cm}$，求DF的长．

【难度】★★

【答案】$20cm$．



【解析】过点D作$DH//AC$交BC于H，

则有$\dfrac{BD}{DH}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{3}{5}$，又$BD=CE$，

则有$\dfrac{CE}{DH}=\dfrac{3}{5}$，由$CE//DH$，

得$\dfrac{EF}{DF}=\dfrac{CE}{DH}=\dfrac{3}{5}$，代入计算得：$DF=12\times 5\div 3=20cm$．

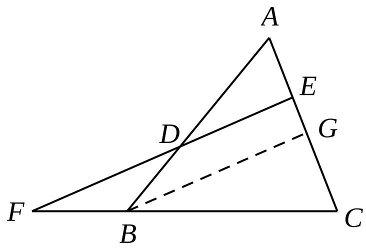
【总结】作平行线，构造出与所求线段相关的“A”字型或“X”字型，比例转化．

【例 2】如图，已知 ΔABC 中，点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上，且 $AD:DB=3:2$ ，$AE:EC=1:2$ ，直线 ED 和 CB 的延长线交于点 F ，求 $FB:FC$.

【难度】★★

【答案】$1:3$.

【解析】过点 B 作 $BG//FE$ 交 AC 于 G .



根据三角形一边平行线的性质定理，可得：

$\dfrac{AE}{EG}=\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{3}{2}$，又 $AE:EC=1:2$，故 $\dfrac{EG}{EC}=\dfrac{1}{3}$，

由 $BG//FE$ ，可得： $FB:FC=EG:EC=1:3$.

【总结】作平行线，构造出与所求线段相关的“A”字型或“X”字型，比例转化.

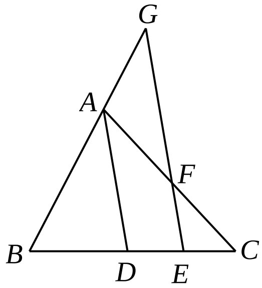
【例 3】已知：在 ΔABC 中， D 、E 是 BC 上的两点，且 $AD//EG$ ， EG 交 AC 于 F ，交 BA 的延长线于 G ，若 $EF+EG=2AD$.

求证： AD 是 ΔABC 的中线.

【难度】★★★

【答案】略.

【解析】证明：$\because$ $AD//EG$ ，



$\therefore \dfrac{AD}{EG}=\dfrac{BD}{BE},\dfrac{EF}{AD}=\dfrac{CE}{CD}$.

$\therefore EG=\dfrac{BE}{BD}\cdot AD,\ \ EF=\dfrac{CE}{CD}\cdot AD$.

$\because$ $EF+EG=2AD$ ， $\therefore \dfrac{BE}{BD}+\dfrac{CE}{CD}=2$.

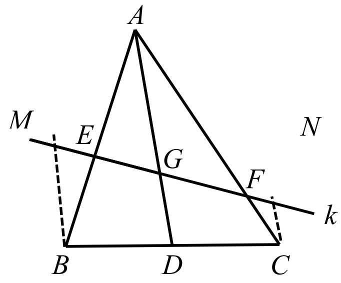
则有 $\dfrac{BE}{BD}-1=1-\dfrac{CE}{CD}$ ， $\therefore \dfrac{BE-BD}{BD}=\dfrac{CD-CE}{CD}$. 即 $\dfrac{DE}{BD}=\dfrac{DE}{CD}$. $\therefore BD=CD$.

即 AD 是 ΔABC 的中线.

【总结】考查三角形一边平行线的性质定理，注意根据题目条件灵活进行比例转换，将条件转化到同一个量，得出结论.

【例 4】如图，点 G 是 ΔABC 的重心，过点 G 作直线 k，交 AB 于点 E，交 AC 于点 F .

求证：$\frac{BE}{AE}+\frac{CF}{AF}=1$.



【难度】★★★

【答案】略.

【解析】证明：分别过点 B 和点 C 作 BM 和 CN 平行于直线 AD，分别交 AB、AC 于点 M、点 N .

则有 $BM//AG//CN$，$\therefore \frac{BE}{AE}=\frac{BM}{AG},\frac{CF}{AF}=\frac{CN}{AG}$，

$\therefore \frac{BE}{AE}+\frac{CF}{AF}=\frac{BM+CN}{AG}$.

又 G 是 ΔABC 的重心，根据重心的性质，$\therefore BD=CD$ 且有 $AG=2DG$，

即此时 DG 为梯形 $MBCN$ 的中位线.

$\therefore BM+CN=2DG=AG$，即可证 $\frac{BE}{AE}+\frac{CF}{AF}=1$.

【总结】根据重心的特殊性质构造平行线段，用比例线段的转化建立一个三直线平行的模型解决问题.

【例 5】AD 是 ΔABC 的中线，将 BC 边所在直线绕点 D 顺时针旋转 α 角，交边 AB 于点 M，交射线 AC 于点 N，设 $AM=x\cdot AB$，$AN=y\cdot AC$，（$x\neq 0$，$y\neq 0$）.

（1）如图 1，当 ΔABC 为等边三角形且 $\alpha=30°$ 时，求证：$\Delta AMN\backsim\Delta DMA$；

（2）如图 2，证明 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2$.

【难度】★★★

【答案】略

【解析】

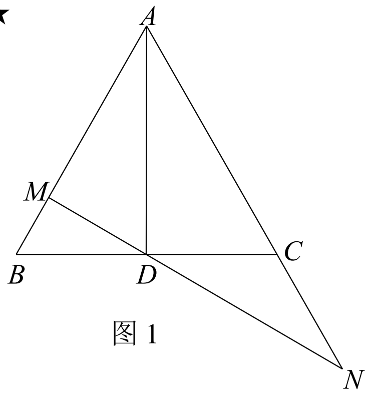


图 1

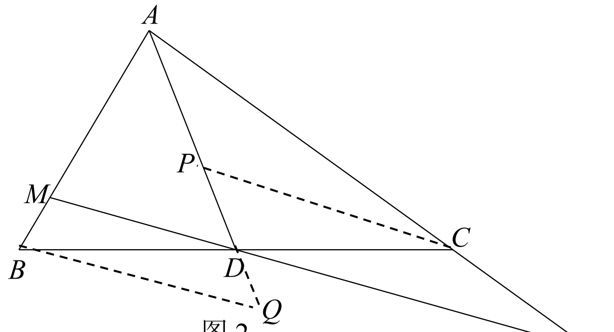


图 2

（1）$\because$ ΔABC 是等边三角形，AD 是中线，$\therefore \angle BAD=\angle DAC=30^{\circ},\angle ADB=90^{\circ}$;

$\because \alpha=30^{\circ}$,即$\angle MDB=30^{\circ}$，$\therefore \angle ADM=60^{\circ}$

$\because \angle ADM=\angle DAC+\angle N$　　$\therefore \angle N=30^{\circ}$　　$\therefore \angle MAD=\angle N$;

$\because \angle AMD=\angle AMN$　　$\therefore \Delta AMN\backsim\Delta DMA$；

（2）过 B 作 $BQ//MN$ 交 AD 延长线于点 Q，过 C 作 $CP//MN$ 交 AD 于点 P，

$\therefore BQ//CP$　　$\therefore \dfrac{BD}{DC}=\dfrac{DQ}{PD}$　　$\because$ AD 是中线　　$\therefore BD=DC, \therefore QD=DP,$

$\because BQ//MN$　$\therefore \dfrac{1}{x}=\dfrac{AB}{AM}=\dfrac{AQ}{AD}=\dfrac{AD+DQ}{AD}$

$\because CP//MN$　$\therefore \dfrac{1}{y}=\dfrac{AC}{AN}=\dfrac{AP}{AD}=\dfrac{AD-DP}{AD}$　　　$\therefore \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2$.

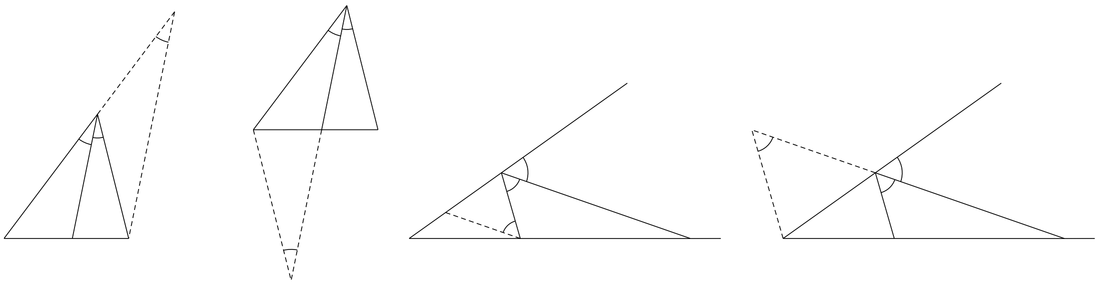
【总结】本题考查了平行线分线段成比例定理、三角形一边的平行线、相似三角形的判定等的相关知识，构造辅助线是个难点.

模块二：角平分线与相似三角形

知识精讲

1、角平分线与相似三角形

角平分线类的相似模型如下：

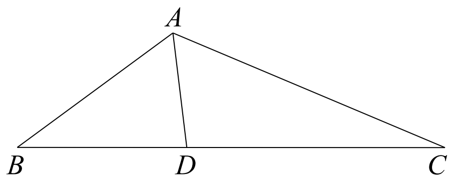


分为“内角平分线”和“外角平分线”两种类型，虚线部分为辅助线的作法.

例题解析

【例 6】在 ΔABC 中，$\angle BAC = 120°$，AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 D.

求证：$\dfrac{1}{AD} = \dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AC}$.



【难度】★★

【答案】略.

【解析】过点 C 作 $CM // AD$ 交 BA 于点 M.

$\because CM // AD$，

$\therefore \dfrac{AB}{BM} = \dfrac{AD}{CM}$，$\angle DAC = \angle ACM$，$\angle BAD = \angle M$

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$，$\angle BAC = 120^\circ$． $\therefore \angle BAD = \angle CAD = 60^\circ$；

$\therefore \angle M = \angle ACM = 60^\circ$，$\therefore \Delta ACM$ 是等边三角形.

$\therefore AC = CM = AM$． $\therefore \dfrac{AB}{AB + AM} = \dfrac{AD}{MC}$ 即 $\dfrac{AB}{AB + AC} = \dfrac{AD}{AC}$．

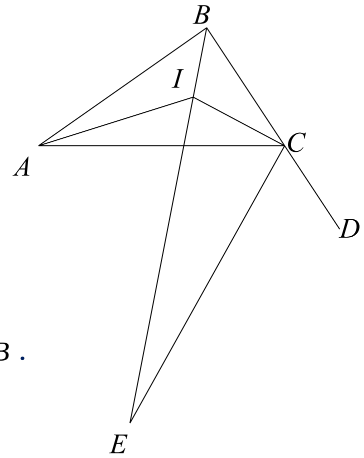
$\therefore \dfrac{1}{AD} = \dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AC}$.

【总结】本题考查了三角形一边的平行线、角平分线及等边三角形的相关知识.

【例 7】如图，ΔABC 中，AI、BI 分别平分 $\angle BAC$、$\angle ABC$，CE 是 ΔABC 的外角 $\angle ACD$ 的平分线，交 BI 延长线于 E，连接 CI.

（1）ΔABC 变化时，设 $\angle BAC = 2\alpha$．若用 α 表示 $\angle BIC$ 和 $\angle E$，那么 $\angle BIC =$ ______，$\angle E =$ ______；

（2）若 $AB = 1$，且 ΔABC 与 ΔICE 相似，求 AC 长.



【难度】★★

【答案】（1）$90^\circ + \alpha$，α；（2）略.

【解析】（1）$\because \angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ$，

$\therefore \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - 2\alpha$.

$\because AI$、BI 分别平分 $\angle BAC$、$\angle ABC$，

$\therefore \angle IBC = \frac{1}{2}\angle ABC$，$CI$ 平分 $\angle ACB$．$\therefore \angle ICB = \frac{1}{2}\angle ACB$.

$\because \angle IBC + \angle ICB + \angle BIC = 180^\circ$

$\therefore \angle BIC = 180^\circ - (\angle IBC + \angle ICB) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) = 90^\circ + \alpha$.

$\because CE$ 是 ΔABC 的外角 $\angle ACD$ 的平分线，$\therefore \angle ACE = \frac{1}{2}\angle ACD$.

$\therefore \angle ICE = \angle ICA + \angle ACE = \frac{1}{2}(\angle ACD + \angle ACB) = 90^\circ$.

$\because \angle BIC = \angle ICE + \angle E = 90^\circ + \alpha$，

$\therefore \angle E = \alpha$.

（2）ΔABC 与 ΔICE 相似，

$\because \angle ICE = 90^\circ$，$\therefore \Delta ABC$ 是直角三角形时，分三种情况：

① 当 $\angle ABC = 90^\circ$ 时，$\because \angle E = \alpha$，$\angle BAC = 2\alpha$，$\therefore \angle E \neq \angle BAC$.

$\therefore \angle E = \angle BCA = \alpha$．$\because \angle BAC + \angle BCA = 90^\circ$，$\therefore \alpha = 30^\circ$．$\therefore AC = 2AB = 2$；

② 当 $\angle BCA = 90^\circ$ 时，$\because \angle E = \alpha$，$\angle BAC = 2\alpha$，$\therefore \angle E \neq \angle BAC$.

$\therefore \angle E = \angle ABC = \alpha$，$\because \angle BAC + \angle ABC = 90^\circ$，$\therefore \alpha = 30^\circ$，$\therefore AC = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}$；

③ 当 $\angle BAC = 90^\circ$ 时，$\because \angle BAC = 2\alpha$，$\therefore \alpha = 45^\circ$．$\therefore AC = AB = 1$；

综上所述，$AC = \frac{1}{2}$或1或2.

【总结】本题考查相似三角形的性质及其两三角形相似分类讨论，还考查了三角形角平分线的知识.

模块三：$a^2=b\cdot c$ 与相似三角形

知识精讲

1、$a^2=b\cdot c$ 与相似三角形

常见及扩展模型如下：

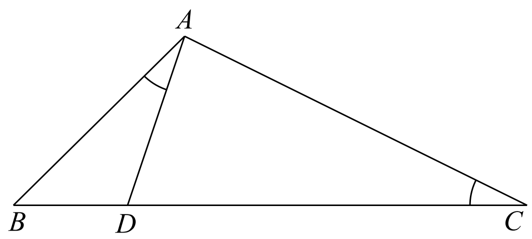


图 1

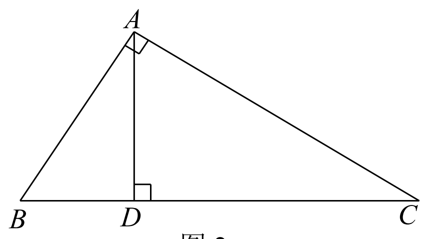


图 2

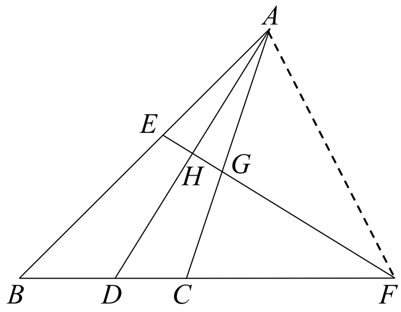
由图 1 可证：$AB^2=BD\bullet BC$；

由图 2 可证：$AB^2=BD\bullet BC$，$AD^2=BD\bullet DC$，$AC^2=CD\bullet CB$.

例题解析

【例 8】如图，在 ΔABC 中，AD 平分 $\angle BAC$，AD 的垂直平分线交 AB 于点 E，交 AD 于点 H，交 AC 于点 G，交 BC 的延长线于点 F.

求证：$DF^2=CF\bullet BF$.



【难度】★★

【答案】略.

【解析】联结 AF

$\because$ 点 F 在 AD 的垂直平分线上，

$\therefore AF=FD$，　$\angle FAD=\angle ADF$.

$\because \angle FAD=\angle FAC+\angle DAC$，$\angle ADF=\angle BAD+\angle B$

$\therefore \angle FAC+\angle DAC=\angle BAD+\angle B$.

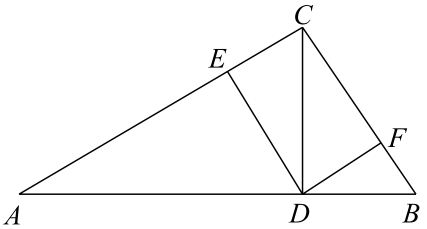
又 $\because AD$ 平分 $\angle BAC$，　$\therefore \angle BAD=\angle DAC$，　$\therefore \angle FAC=\angle B$.

又 $\because \angle AFC=\angle AFB$，　$\therefore \Delta EBA\backsim\Delta ECB$，　$\therefore \dfrac{AF}{FB}=\dfrac{FC}{AF}$.

$\therefore AF^2=CF\bullet BF$，　$\therefore DF^2=CF\bullet BF$.

【总结】本题考查线段垂直平分线、外角定理及相似三角形的判定及性质知识.

【例 9】如图，在 $Rt\Delta ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$ 于 D，$DE\perp AC$ 于 E，$DF\perp BC$ 于 F．求证：$\dfrac{AE}{BF}=\dfrac{AC^3}{BC^3}$．



【难度】★★★

【答案】略．

【解析】证明：$\because \angle ACB=\angle DEC=\angle DFC=90^\circ$．

$\therefore$ 四边形 $CEDF$ 是矩形．　$\therefore DE=CF$，$DE//CF$，$DF//CA$．

$\therefore \dfrac{AE}{AC}=\dfrac{DE}{CB}$　$\dfrac{BF}{CB}=\dfrac{DF}{AC}$，　$\therefore \dfrac{AE}{DE}=\dfrac{AC}{CB}$　$\dfrac{DF}{BF}=\dfrac{AC}{CB}$．

$\because \angle CDF+\angle FDB=90^\circ$，$\angle FDB+\angle B=90^\circ$，　$\therefore \angle CDF=\angle B$．

$\because \angle DFC=\angle DFB=90^\circ$，　$\therefore \Delta CDF\backsim\Delta DBF$，　$\therefore \dfrac{CF}{DF}=\dfrac{DF}{BF}$．

$\therefore \dfrac{CF}{DF}=\dfrac{AC}{CB}$，即 $\dfrac{DE}{DF}=\dfrac{AC}{CB}$．

$\therefore \dfrac{AE}{DE}\bullet\dfrac{DE}{DF}\bullet\dfrac{DF}{BF}=\dfrac{AC}{CB}\bullet\dfrac{AC}{CB}\bullet\dfrac{AC}{CB}$，即 $\dfrac{AE}{BF}=\dfrac{AC^3}{BC^3}$．

【总结】本题考查了三角形相似的判定方法、矩形的性质、三角形一边的平行线等知识．

【例 10】如图 1，在 ΔABC 中，P 是边 AB 上的一点，联结 CP，要使 $\Delta ACP\backsim\Delta ABC$，还需要补充一个条件．

（1）补充的条件是________________，或者________________．

（2）请你参考上面的图形和结论，解答下面的问题：

如图 2，在 ΔABC 中，$\angle A=60°$，$AC^2=AB^2+AB\bullet BC$，求 $\angle B$ 的度数．

【难度】★★★

【答案】略．

【解析】

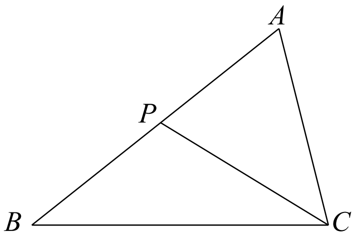


图 1

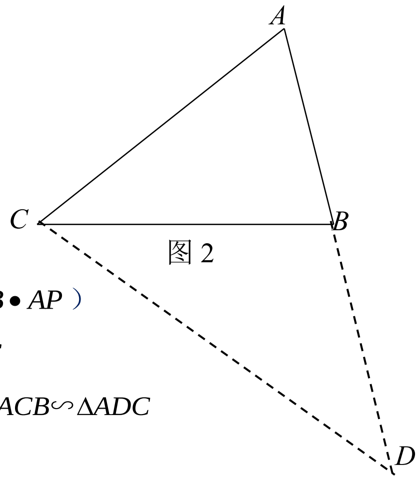


图 2

（1）$\angle ACP=\angle B$；$\angle APC=\angle ACB$；（或者 $AC^2=AB\bullet AP$）

（2）延长 AB 到 D，使 $BD=CB$　$\therefore \angle BCD=\angle BDC$

$\because AC^2=AB^2+AB\bullet BC$　$\therefore AC^2=AB\bullet AD$　$\therefore \Delta ACB\backsim\Delta ADC$

$\therefore \angle D=\angle ACB$　$\because \angle A+\angle ACD+\angle D=180^\circ$

$\therefore 3\angle D+\angle A=180^\circ$　而 $\angle A=60^\circ$　$\therefore \angle D=\angle BCD=40^\circ$

$\therefore \angle ABC=\angle BCD+\angle D=80^\circ$．

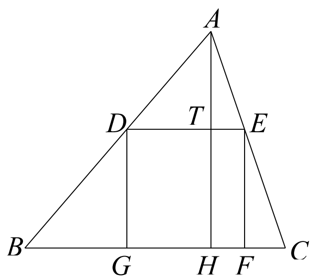
【总结】本题考查相似三角形的判定及性质、三角形内角和、外角定理等知识．

模块四：内接矩形与相似三角形

知识精讲

1、内接矩形与相似三角形

相关模型：



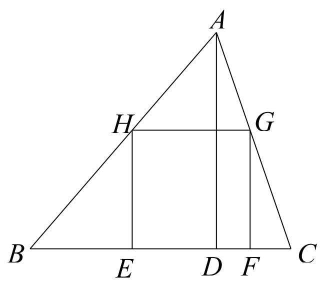
常用结论：$\dfrac{AT}{AH}=\dfrac{DE}{BC}$.

例题解析

【例 11】ΔABC 中，正方形 $EFGH$ 的两个顶点 E、F 在 BC 上，另两个顶点 G、H 分别在 AC、AB 上，$BC=15$，BC 边上的高 $AD=10$，求正方形 $EFGH$ 的面积.

【难度】★★

【答案】36.



【解析】设正方形 $EFGH$ 的边长为 a，易知：

$HE//AD$，$HG//BC$.

$\therefore \dfrac{HE}{AD}=\dfrac{BH}{BA}$，$\dfrac{HG}{BC}=\dfrac{AH}{AB}$.

$\therefore \dfrac{HE}{AD}+\dfrac{HG}{BC}=1$，

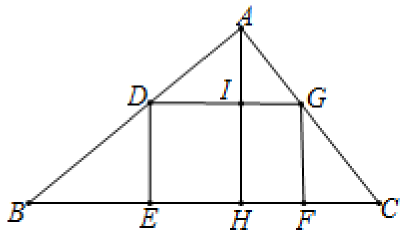
$\therefore \dfrac{a}{10}+\dfrac{a}{15}=1$，　　$\therefore a=6$，

$\therefore$ 正方形 $EFGH$ 的面积为 36.

【总结】本题考查三角形内接正方形的模型，熟练掌握此题涉及的知识点.

【例 12】在锐角ΔABC中，矩形$DEFG$的顶点D在AB边上，顶点E、F在BC边上，顶点G在AC边上，如果矩形$DEFG$的长为6，宽为4，设底边BC上的高为x，ΔABC的面积为y，求y与x的函数关系式.

【难度】★★★



【答案】$y=\dfrac{3x^2}{x-4}(x>4)$.

【解析】解：如图，$\because$矩形$DEFG$，

$\therefore GD//BC$，$\angle DEC=90^\circ$，$\therefore \dfrac{GD}{BC}=\dfrac{AD}{AB}$.

又$\because AH$是高，$\therefore \angle AHC=90^\circ$.

$\therefore \angle DEC=\angle AHC$，$\therefore DE//AH$，$\therefore \dfrac{DE}{AH}=\dfrac{BD}{AB}$，$\therefore \dfrac{DG}{BC}+\dfrac{DE}{AH}=1$，

$\therefore \dfrac{6}{BC}+\dfrac{4}{x}=1$，$\therefore BC=\dfrac{6x}{x-4}$，

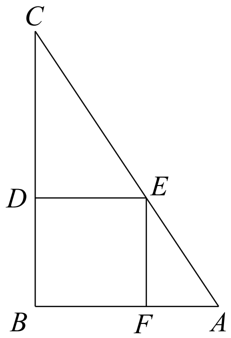
又$\because S_{\Delta ABC}=y=\dfrac{1}{2}BC\bullet AH$，　　$\therefore y=\dfrac{3x^2}{x-4}\left(x>4\right)$.

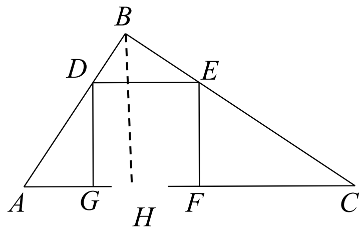
【总结】本题考查三角形一边的平行线定理，矩形的面积等知识.

【例 13】一块直角三角形木板的一条直角边 AB 长为 1.5m，面积为 1.5m^2，现需把它加工成一个面积最大的正方形桌面，请甲、乙两位同学设计加工方案，甲设计方案如图（1），乙设计方案如图（2）．你认为哪位同学设计的方案较好？请说明理由（加工损耗忽略不计，计算结果中可保留分数）．

【难度】★★★

【答案】甲同学方案好，理由略.





【解析】解：$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB\bullet BC=1.5m^2$，又$\because$ $AB=1.5m$，$\therefore CB=2m$

$\therefore$在 $Rt\Delta ABC$ 中，$AC=2.5m$．

① 按甲的设计：设 $DE=x$，$\because$ 正方形 $DEFB$，$\therefore ED//BF,EF//CB$，

$\therefore \dfrac{DE}{AB}=\dfrac{CE}{CA},\dfrac{EF}{CB}=\dfrac{AE}{AC}$，$\therefore \dfrac{DE}{BA}+\dfrac{EF}{CB}=1$，$\therefore \dfrac{x}{1.5}+\dfrac{x}{2}=1$，

$\therefore x=\dfrac{6}{7}m$，$\therefore S_{正DEFB}=\dfrac{36}{49}m^2$；

②按乙的设计：过点 B 作 $BH\perp AC$ 交 AC 于点 H，得 $DG//BH$，$\therefore \dfrac{DG}{BH}=\dfrac{AD}{AB}$，

设 $DE=x$，则 $DG=x$，$\because$ 正方形 $DGFE$，$\therefore ED//AC$，$DE=DG$，

$\therefore \dfrac{DE}{AC}=\dfrac{BD}{BA}$，$\therefore \dfrac{DE}{CA}+\dfrac{DG}{HB}=1$，

$\because S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB\bullet BC=\dfrac{1}{2}AC\bullet BH$，$\therefore BH=\dfrac{6}{5}m$，$\therefore \dfrac{x}{2.5}+\dfrac{x}{\frac{6}{5}}=1$，

$\therefore x=\dfrac{30}{37}m$，$\therefore S_{正DGFE}=\dfrac{900}{1369}m^2$；

综上，甲设计方案好.

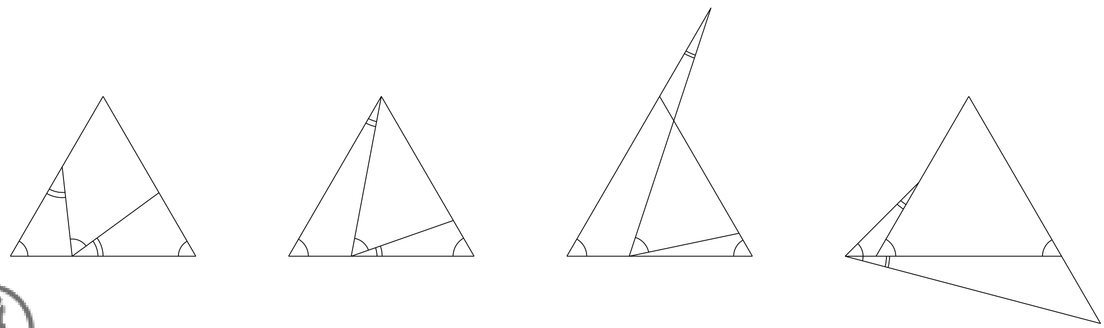
【总结】本题考查了三角形一边的平行线，正方形的面积等知识，本题考查了最优化问题.

模块五：一线三等角与相似三角形

知识精讲

1、一线三等角与相似三角形

相关模型如下图所示：



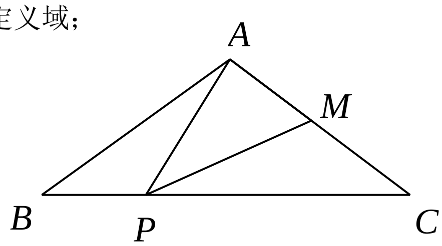
例题解析

【例 14】如图，在ΔABC中，$AB = AC = 5cm, BC = 8cm$，点P为BC边上一动点（不与点B,C重合），过点P作射线PM交AC于点M，使$\angle APM = \angle B$．

（1）求证：$\Delta ABP \backsim \Delta PCM$

（2）设$BP = x, CM = y$.求y与x的函数解析式，并写出函数的定义域；

（3）当ΔAPM为等腰三角形时，求PB的长.



【难度】★★

【答案】（1）略；（2）$y = \dfrac{x(8-x)}{5}(0 < x < 8)$；（3）3 或$\dfrac{39}{8}$．

【解析】（1）一线三等角模型，略；

（2）由（1）$\Delta ABP \backsim \Delta PCM$得$\dfrac{AB}{PC} = \dfrac{BP}{MC}$即$\dfrac{5}{8-x} = \dfrac{x}{y}$得$y = \dfrac{x(8-x)}{5}(0 < x < 8)$；

（3）△APM为等腰△分以下三种情况：

①$AP=PM$，$\dfrac{AP}{PM} = \dfrac{5}{8-x} = 1$，则$x = 3$；

②$AP=AM$，$\dfrac{PM}{AP} = 2\cos B = \dfrac{8}{5} = \dfrac{5}{8-x}$得$x = \dfrac{39}{8}$；

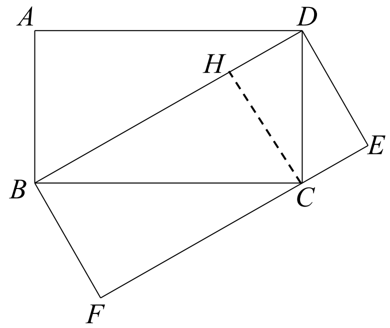
③$AM=PM$，$\dfrac{AP}{PM} = 2\cos B = \dfrac{8}{5} = \dfrac{8-x}{5}$得$x = 0$(舍）

综上，BP的长为 3 和$\dfrac{39}{8}$.

【例 15】矩形 $ABCD$ 中，以对角线 BD 为一边构造一个矩形 $BDEF$，使得另一边 EF 过原矩形的顶点 C.

（1）设 $Rt\Delta CBD$ 的面积为 S_1， $Rt\Delta BFC$ 的面积为 S_2， $Rt\Delta DCE$ 的面积为 S_3，则 S_1 ______ S_2+S_3（用“ > ”、“ = ”、“ < ”填空）；

（2）写出图中的 3 对相似三角形，并选择其中一对进行证明.



【难度】★★

【答案】（1）=；

（2）$\Delta BFC \backsim \Delta CED$；

$\Delta BFC \backsim \Delta DCB$；

$\Delta CED \backsim \Delta DCB$.

【解析】（1）过点 C 作 $CH \perp BD$ 交 BD 于点 H，易得；

（2）$\because \angle BCD + \angle DCE = \angle F + \angle FBC$，

而 $\angle BCD = \angle F = 90^\circ$． $\therefore \angle FBC = \angle DCE$． $\therefore \Delta BFC \backsim \Delta CED$.

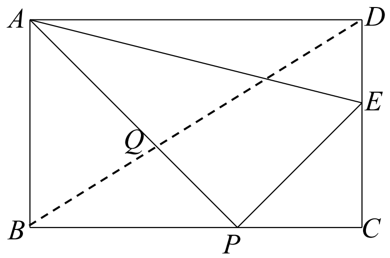
【总结】本题主要是考查“一线三等角”模型的相似以及矩形的性质.

【例 16】在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$AD=3$，P 是 BC 上的任意一点（P 与 B、C 不重合），过点 P 作 $AP \perp PE$，垂直为 P，PE 交 CD 于点 E.

（1）连接 AE，当 ΔAPE 与 ΔADE 全等时，求 BP 的长；

（2）若设 BP 为 x，CE 为 y，试确定 y 与 x 的函数关系式；当 x 取何值时，y 的值最大？最大值是多少？

（3）若 $PE \parallel BD$，试求出此时 BP 的长.



【难度】★★★

【答案】（1）$\sqrt{5}$；

（2）$y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x\left(0<x<3\right)$，

当 $x=\frac{3}{2}$ 时， y 取最大值，最大值为 $\frac{9}{8}$；

（3）$\frac{4}{3}$.

【解析】（1）ΔAPE 与 ΔADE 全等，

$\because \angle APE = \angle ADE = 90^\circ$， $\angle BAE = \angle AED$ ， 而 $\angle BAE > \angle PAE$，

$\therefore \Delta ADE \cong \Delta APE$． $\therefore AD = AP = 3$．

在 $Rt\Delta ABP$ 中， $AB^2+BP^2=AP^2$， $\therefore BP=\sqrt{AP^2-AB^2}=\sqrt{5}$．

（2）易证 $\Delta ABP \backsim \Delta PCE$， 得 $\frac{AB}{PC}=\frac{BP}{CE}$， 即 $\frac{2}{3-x}=\frac{x}{y}$.

$\therefore y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x(0<x<3)$.

$\because y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{8}$，

$\therefore$ 当 $x=\frac{3}{2}$ 时， y 取最大值，最大值为 $\frac{9}{8}$；

（3）联结 BD 交 AP 于点 Q.

$\because PE//BD$， $\therefore \angle APE=\angle AQD=90^{\circ}$.

$\therefore \angle QAD+\angle ADQ=90^{\circ}$，$\angle BAQ+\angle QAD=90^{\circ}$.

$\therefore \angle BAQ=\angle ADQ$， $\therefore Rt\Delta ABP \backsim Rt\Delta DAB$. $\therefore \frac{AB}{AD}=\frac{BP}{AB}$， $\therefore BP=\frac{4}{3}$.

【总结】本题考查三角形全等，相似三角形的判定和性质，二次函数求最值的知识，题目比较综合.

模块六：旋转与相似三角形

例题解析

【例 17】如图 1，在 ΔABC 中， $\angle ACB=90^{\circ}$， $BC=2$， $\angle A=30^{\circ}$， 点 E、F 分别是线段 BC、AC 的中点，联结 EF.

（1）线段 BE 与 AF 的位置关系是______， $\frac{AF}{BE}=$______；

（2）如图 2，当 ΔCEF 绕点 C 顺时针旋转 α 时（ $0^{\circ}<\alpha<180^{\circ}$ ），联结 AF、BE，则（1）中的结论是否仍然成立？如果成立，请证明；如果不成立，请说明理由；

（3）如图 3，当 ΔCEF 绕点 C 顺时针旋转 α 时（ $0^{\circ}<\alpha<180^{\circ}$ ），延长 FC 交 AB 于点 D，如果 $AD=6-2\sqrt{3}$，求旋转角 α 的度数.

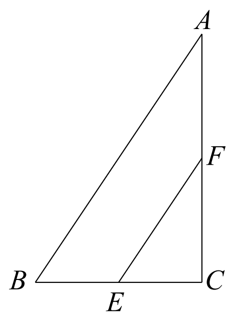


图 1

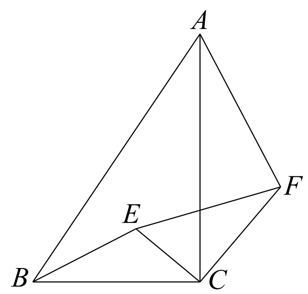


图 2

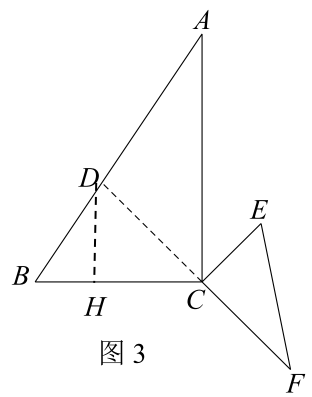


图 3

【难度】★★★

【答案】（1）垂直，$\sqrt{3}$；（2）成立；（3）略.

【解析】（1）略；

（2）由$\Delta ACB\backsim\Delta FCE$，得：$\dfrac{AC}{CB}=\dfrac{FC}{CE}$．

$\because \angle BCE=\angle ACF$，$\therefore \Delta BCE\backsim\Delta ACF$．$\therefore \dfrac{AF}{BE}=\dfrac{AC}{BC}=\sqrt{3}$；

（3）过点D作$DH\perp BC$交BC于点H，$\because AD=6-2\sqrt{3}$，$\therefore BD=2\sqrt{3}-2$．

在$Rt\Delta DBH$中，$\angle B=60^\circ$，$\therefore BH=\sqrt{3}-1$，$DH=3-\sqrt{3}$．

$\therefore CH=3-\sqrt{3}$，$\therefore \angle DCH=45^\circ$，$\therefore \angle ACD=45^\circ$．$\therefore \angle ACF=135^\circ$．

$\therefore \alpha=135^\circ$．

【总结】本题考查旋转的相关知识，特殊的直角三角形边的关系，题目比较综合，第3小题由边求角要会添置辅助线.

模块七：函数与相似三角形

例题解析

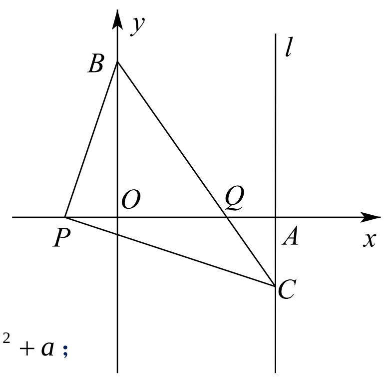
【例18】如图，已知平面直角坐标系中三点A（2，0），B（0，2），P（a，0）（$a<0$），联结BP，过点P作$PC\perp PB$交过点A的直线l于点C（2，b）．

（1）求b与a之间的函数关系式；

（2）当a取得最大的整数时，求BC与x轴的交点Q的坐标.

【难度】★★

【答案】（1）$b=-\dfrac{1}{2}a^2+a$；（2）$Q\left(\dfrac{8}{7},0\right)$.



【解析】

（1）$\because \angle BPO+\angle OPC=\angle BPO+\angle PBO=90^\circ$

$\therefore \angle OPC=\angle PBO$

$\because \angle BOP=\angle PAC=90^\circ$　$\therefore \Delta BPO\backsim\Delta PCA$

$\therefore \dfrac{OP}{AC}=\dfrac{OB}{AP}$　即$\dfrac{-a}{-b}=\dfrac{2}{2-a}$　$\therefore b=-\dfrac{1}{2}a^2+a$；

（2）$\because a<0$　$\therefore a$取得最大的整数时$a=-1$　$\therefore b=-\dfrac{3}{2}$

$\because OB//AC$ $\qquad \therefore \dfrac{OB}{AC}=\dfrac{OQ}{QA}$，即 $\dfrac{2}{\frac{3}{2}}=\dfrac{OQ}{2-OQ}$ $\qquad \therefore OQ=\dfrac{8}{7}$ $\qquad \therefore Q\left(\dfrac{8}{7},0\right)$.

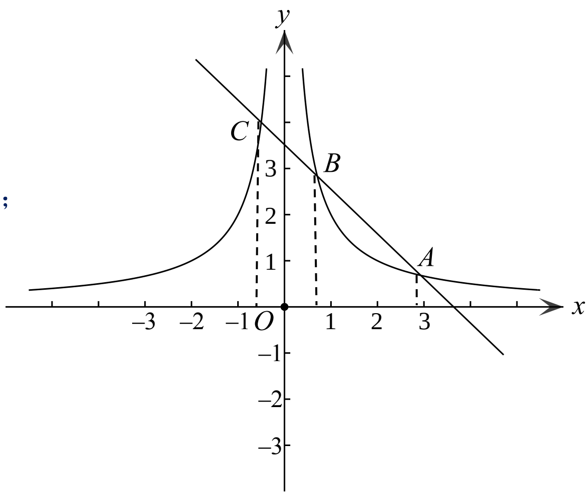
【总结】本题考查相似的判定及性质等知识.

【例 19】函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 和 $y=-\dfrac{k}{x}$（$k\neq 0$）的图像关于 y 轴对称，我们把函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 和 $y=-\dfrac{k}{x}$（$k\neq 0$）叫做互为“镜子”函数，类似地，如果函数 $y=f$（x）和 $y=h$（x）的图像关于 y 轴对称，那么我们就把函数 $y=f$（x）和 $y=h$（x）叫做互为“镜子”函数.

（1）函数 $y=3x-4$ 的“镜子”函数是________________；

（2）函数 $y=x^2-2x+3$ 的“镜子”函数是________________；

（3）如图所示，一条直线与一对“镜子” $y=\dfrac{2}{x}$（$x>0$）和 $y=-\dfrac{2}{x}$（$x<0$）的图像分别交于点 A、B、C，如果 $CB:AB=1:2$，点 C 在函数 $y=-\dfrac{2}{x}$（$x<0$）的“镜子”函数上的 对应点的横坐标是 $\dfrac{1}{2}$，求点 B 的坐标.



【难度】★★

【答案】略

【解析】（1）$y=-3x-4$；　　（2）$y=x^2+2x+3$；

（3）分别过点 A、B、C 作 CC'、BB'、AA' 垂直于 x 轴，垂足分别为 C'、B'、A'.

设点 $B\left(m,\dfrac{2}{m}\right)$、$A\left(n,\dfrac{2}{n}\right)$，其中 $m>0$，$n>0$.

由题意，得点 $C\left(-\dfrac{1}{2},4\right)$.

$\therefore CC'=4$，$BB'=\dfrac{2}{m}$，$AA'=\dfrac{2}{n}$，$A'B'=n-m$，$B'C'=m+\dfrac{1}{2}$.

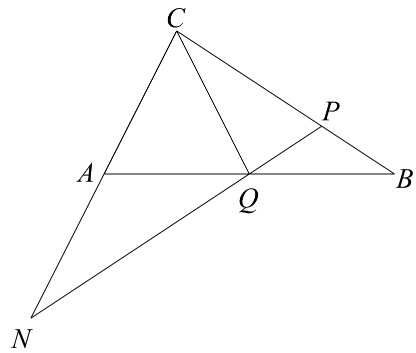
易知 $CC'//BB'//AA'$，又 $CB:AB=1:2$

所以，可得 $\begin{cases} n-m=2(m+\dfrac{1}{2}). \\ \dfrac{2}{m}-\dfrac{2}{n}=\dfrac{2}{3}(4-\dfrac{2}{n}) \end{cases}$，化简得 $\begin{cases} n-3m=1 \\ \dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{3n}=\dfrac{4}{3} \end{cases}$，

解得 $m=\frac{1\pm\sqrt{10}}{6}$（负值舍去）， $\therefore B\left(\frac{1+\sqrt{10}}{6},\frac{4\sqrt{10}-4}{3}\right)$.

【总结】本题主要难在第 3 问，学生不知道怎么下手，要灵活应用相似的相关知识解决问题.

【例 20】在 ΔABC 中， $\angle ACB=90°$， CQ 是斜边 AB 上的中线， $AC=6$， $AB=10$，点 P 是 BC 边上的一个动点（与 B、C 不重合），经过点 P、Q 的直线与直线 AC 交于点 N，若 ΔPNC 与 ΔABC 相似，求 BP 的值.



【难度】★★★

【答案】 $BP=\frac{7}{4}$ 或 $\frac{25}{4}$.

【解析】解：∵ $\angle ACB=90^{\circ}$， CQ 是斜边 AB 上的中线，

$\therefore CQ=AQ=BQ=5$.

$\therefore \angle QCB=\angle B$.

在 $Rt\Delta ABC$ 中，由勾股定理得 $CB=8$.

∵ ΔPNC 与 ΔABC 相似， $\angle NCP=\angle ACB=90^{\circ}$， 而 $\angle NPC=\angle B+\angle PQB$，

$\therefore \angle NPC\neq\angle B$， $\therefore \angle N=\angle B=\angle QCB$.

设 $BP=x$， 则 $CP=8-x$.

① 当点 N 在 CA 延长线时，

∵ $\angle NPC=\angle CAB$， $\therefore \Delta CQP\backsim\Delta BCA$.

$\therefore \frac{CQ}{BC}=\frac{CP}{AB}$， 即 $\frac{5}{8}=\frac{8-x}{10}$，

解得： $x=\frac{7}{4}$；

② 当点 N 在 AC 延长线时，

∵ $\angle NPC=\angle BPQ=\angle CAB$， $\therefore \Delta BQP\backsim\Delta BCA$.

$\therefore \frac{BQ}{BC}=\frac{BP}{AB}$， 即 $\frac{5}{8}=\frac{x}{10}$，

解得： $x=\frac{25}{4}$；

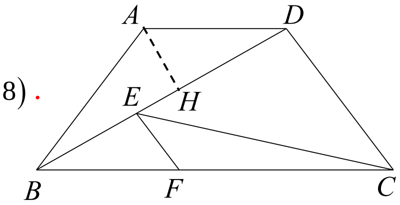
综上所述， $BP=\frac{7}{4}$ 或 $\frac{25}{4}$.

【总结】本题比较综合，需要进行适当转化，得到相似，运用相似性质，得出结论.

【例 21】如图，已知梯形 $ABCD$，$AD // BC$，$AB = AD = 5$， $\tan\angle DBC = \frac{3}{4}$. E 为射线 BD 上一点，过点 E 作 $EF // DC$ 交射线 BC 于点 F，连接 EC，设 $BE = x$，$\frac{S_{\Delta ECF}}{S_{\Delta BDC}} = y$.

（1）求 BD 的长；

（2）当点 E 在线段 BD 上时，求 y 关于 x 的函数解析式，并写出自变量 x 的取值范围.



【难度】★★★

【答案】（1） $BD=8$； （2） $y=-\frac{1}{64}x^2+\frac{1}{8}x\left(0<x<8\right)$.

【解析】（1）$\because AD//BC$， $\therefore \angle ADB=\angle DBC$.

$\because \tan\angle DBC=\frac{3}{4}$， $\therefore \tan\angle ADB=\frac{3}{4}$.

过点 A 作 $AH\perp BD$ 交 BD 于点 H，

$\because AB=AD$， $\therefore BH=HD=4$. $\therefore BD=8$.

（2）$\because EF//CD$， $\therefore \Delta BEF\backsim\Delta BDC$， $\therefore \frac{BE}{BD}=\frac{BF}{BC}=\frac{x}{8}$.

$$\therefore \frac{S_{\Delta BEF}}{S_{\Delta BDC}}=\left(\frac{BE}{BD}\right)^2=\frac{x^2}{64}.$$

$$\because \frac{S_{\Delta BEF}}{S_{\Delta EFC}}=\frac{BF}{FC}=\frac{x}{8-x},$$

$$\therefore \frac{S_{\Delta ECF}}{S_{\Delta BDC}}=\frac{x^2}{64}\bullet\frac{8-x}{x}.$$

$$\therefore y=-\frac{1}{64}x^2+\frac{1}{8}x\left(0<x<8\right).$$

【总结】本题考查相似三角形的面积比等于相似比的平方，同高（或同底）的三角形面积比可以转化为底边（或者高）的比.

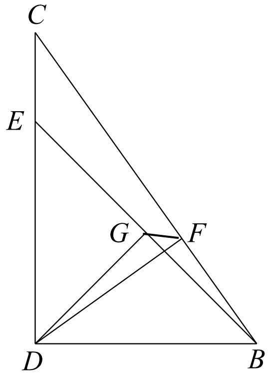
随堂检测

【习题 1】如图，在 $Rt\Delta BDC$ 中，点 E 在 CD 上，$DF\perp BC$ 于 F，$DG\perp BE$ 于 G.

求证：$FG\cdot BC=CE\cdot BG$.

【难度】★★★

【答案】略.



【解析】证明：联结 GF.

$\because \angle BDC=90^\circ$，$DF\perp BC$，$\therefore \angle BDC=\angle DFB=90^\circ$.

又$\because \angle CBD=\angle FBD$，$\therefore \Delta DBF\backsim\Delta CBD$.

$\therefore \dfrac{DB}{BC}=\dfrac{BF}{DB}$，$\therefore DB^2=BF\bullet BC$.

$\because \angle EDB=90^\circ$，$GD\perp BE$，$\therefore \angle DGB=\angle EDB=90^\circ$.

又$\because \angle EBD=\angle GBD$，$\therefore \Delta GBD\backsim\Delta DBE$.

$\therefore \dfrac{DB}{BG}=\dfrac{EB}{DB}$，$\therefore DB^2=BG\bullet BE$.

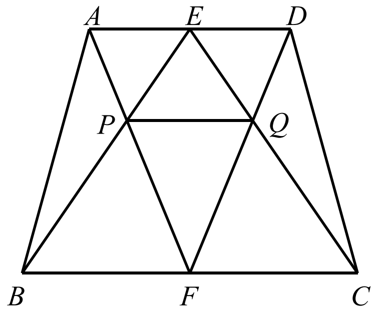
$\therefore BF\bullet BC=BG\bullet BE$，即 $\dfrac{FB}{BE}=\dfrac{BG}{BC}$.

又$\because \angle GBF=\angle EBC$，$\therefore \Delta GBF\backsim\Delta CBE$.

$\therefore \dfrac{GB}{BC}=\dfrac{FG}{CE}$，$\therefore FG\bullet BC=CE\bullet BG$.

【总结】本题考查了三角形相似的判定方法、相似三角形的性质等知识，综合性较强，需要通过多次相似证的结论成立.

【习题 2】如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD // BC$ ， $AD=a$ ， $BC=b$ ， E 、 F 分别是 AD 、 BC 的中点，且 AF 交 BE 于 P ， CE 交 DF 于 Q ，求 PQ 的长．



【难度】★★★

【答案】 $PQ=\dfrac{ab}{a+b}$.

【解析】$\because AD // BC$ ， $\therefore \dfrac{AE}{BF}=\dfrac{PE}{BP},\dfrac{ED}{FC}=\dfrac{EQ}{QC}$.

又 E 、 F 分别是 AD 、 BC 的中点，

$\therefore AE=DE，BF=FC$ ， $\therefore \dfrac{PE}{BP}=\dfrac{EQ}{QC}$ ，

$\therefore PQ//BC//AD$.

$\therefore \dfrac{PQ}{BC}=\dfrac{EP}{EB},\dfrac{PQ}{AD}=\dfrac{PF}{AF}=\dfrac{PB}{EB}$ ， $\therefore \dfrac{PQ}{AD}+\dfrac{PQ}{BC}=1$.

代入，求得： $PQ=\dfrac{ab}{a+b}$.

【总结】考查三角形一边平行线性质定理及其判定定理的，先应用性质证明比例线段相等再判定．由三线平行模型可得出结论．

【习题 3】如图，已知 ΔABC 和 ΔDEF 是两个全等的等腰直角三角形，且 $\angle BAC=\angle EDF=90°$，$\Delta DEF$ 的顶点 E 与 ΔABC 的斜边 BC 的中点重合．将 ΔDEF 绕点 E 旋转，旋转过程中，线段 DE 与线段 AB 相交于点 P，线段 EF 与射线 CA 相交于点 Q.

（1）如图 1，当点 Q 在线段 AC 上，且 $AP=AQ$ 时，求证：$\Delta BPE\cong\Delta CQE$；

（2）如图2，当点 Q 在线段 CA 的延长线上时，求证：$\Delta BPE\backsim\Delta CEQ$；并求当 $BP=a$，$CQ=\dfrac{9}{2}a$ 时，P、Q 两点间的距离（用含 a 的代数式表示）．

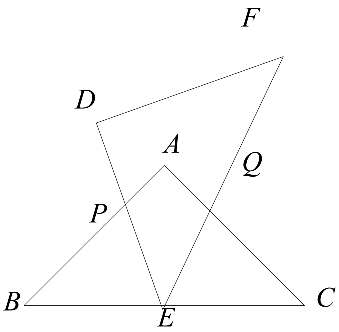


图 1

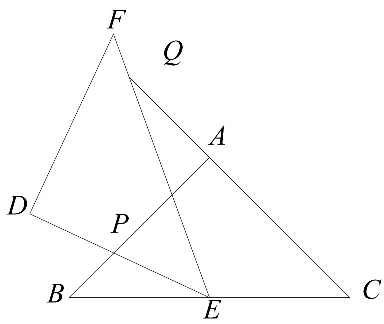


图 2

【难度】★★★

【答案】（1）略；（2）$PQ=\dfrac{5}{2}a$．

【解析】（1）$\because E$ 是中点，$\therefore BE=EC$．$\because AP=AQ$，$\therefore BP=CQ$．

$\because AB=AC$，$\therefore\angle B=\angle C$．$\therefore\Delta BPE\cong\Delta CQE$．

（2）$\because\angle DEF+\angle FEC=\angle B+\angle BPE$，而 $\angle B=\angle DEF=45^{\circ}$，$\therefore\angle BPE=\angle QEC$．

$\because\angle B=\angle C=45^{\circ}$，$\therefore\Delta BPE\backsim\Delta CEQ$，

$\therefore\dfrac{BP}{CE}=\dfrac{BE}{CQ}$，$\therefore\dfrac{a}{CE}=\dfrac{BE}{\frac{9a}{2}}$，$\therefore CE\cdot BE=\dfrac{9}{2}a^{2}$，$\therefore BC=3\sqrt{2}a$．

在 $Rt\Delta ABC$ 中，$AB=AC=3a$，$\therefore AQ=\dfrac{3}{2}a$，$AP=2a$．

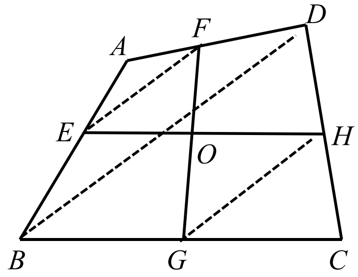
$\therefore$ 在 $Rt\Delta APQ$ 中，$PQ=\dfrac{5}{2}a$．

【总结】本题考查了“一线三等角”相似模型.

课后作业

【作业 1】如图，E、F、G、H 分别是四边形 $ABCD$ 各边的点，且 $AE \bullet FD = EB \bullet AF$，$BG \bullet HC = GC \bullet DH$，连接 EH、GF 相交于点 O．

求证：$OE \cdot GO = FO \cdot OH$．



【难度】★★★

【答案】略．

【解析】证明：连结 EF、BD、GH．

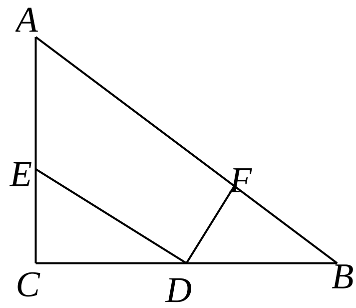
$\because AE \bullet FD = EB \bullet AF$，即 $\dfrac{AE}{EB} = \dfrac{AF}{FD}$，$\therefore EF // BD$．

又$\because BG \bullet HC = GC \bullet DH$，即 $\dfrac{GC}{BG} = \dfrac{HC}{DH}$，$\therefore GH // BD$．

$\therefore EF // GH$，$\therefore \dfrac{OE}{OH} = \dfrac{OF}{OG}$，即 $OE \cdot GO = FO \cdot OH$．

【总结】观察题目条件的形式，可知题目考查三角形一边平行线性质及其判定定理，先判定再利用性质进行变形应用．

【作业 2】如图，在 $Rt\Delta ABC$ 中，$\angle C=90°, AB=5, \tan B=\frac{3}{4}$，点 D 是 BC 的中点，点 E 是 AB 边上的动点，$DF\perp DE$ 交射线 AC 于点 F．



（1）求 AC 和 BC 的长

（2）当 $EF\parallel BC$ 时，求 BE 的长；

（3）联结 EF，当 ΔDEF 和 ΔABC 相似时，求 BE 的长.

【难度】★★★

【答案】略.

【解析】（1）在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，∵ $\tan B=$ $\frac{AC}{BC}=\frac{3}{4}$，设 $AC=3k$，$BC=4k$，$\therefore AB=5k=5$，$\therefore k=1$，$\therefore AC=3$，$BC=4$；

（2）过点 E 作 $EH\perp BC$，垂足为 H，易得 $\triangle EHB\backsim\triangle ACB$，设 $EH=CF=3k$，$BH=4k$，$BE=5k$；

∵ $EF\parallel BC$，∴ $\angle EFD=\angle FDC$，∵ $\angle FDE=\angle C=90°$，∴ $\triangle EFD\backsim\triangle FDC$，∴ $\frac{EF}{FD}=\frac{FD}{CD}$ $\therefore FD^2=EF\cdot CD$

即 $9k^2+4=2(4-4k)$ 化简得 $k=\frac{-4\pm2\sqrt{13}}{9}$（舍去负值）∴ $BE=5k=\frac{10\sqrt{13}-20}{9}$；

（3）过点 E 作 $EH\perp BC$，垂足为 H，易得 $\triangle EHB\backsim\triangle ACB$，设 $EH=3k$，$BE=5k$，∵ $\angle HED+\angle HDE=90°$ $\angle FDC+\angle HDE=90°$，∴ $\angle HED=\angle FDC$，∵ $\angle EHD=\angle C=90°$，∴ $\triangle EHD\backsim\triangle DCF$，∴ $\frac{EH}{CD}=\frac{DE}{DF}$

当 △ DEF 和 △ ABC 相似时，有两种情况：：①

$\frac{DE}{DF}=\frac{AC}{BC}=\frac{3}{4}$，$\therefore \frac{EH}{CD}=\frac{3}{4}$ 即 $\frac{3k}{2}=\frac{3}{4}$ 计算得出 $k=\frac{1}{2}$

∴ $BE=5k=\frac{5}{2}$

② $\frac{DE}{DF}=\frac{BC}{AC}=\frac{4}{3}$，$\therefore \frac{EH}{CD}=\frac{4}{3}$ 即 $\frac{3k}{2}=\frac{4}{3}$ 计算得出 $k=\frac{8}{9}$ $\therefore BE=5k=\frac{40}{9}$

综合①②，当 $\triangle DEF$ 和 $\triangle ABC$ 相似时，BE 的长为 $\frac{5}{2}$ 或 $\frac{40}{9}$

【作业 3】如图 1，在同一平面内，将两个全等的等腰直角三角形 ABC 和 AFG 摆放在一起，A 为公共顶点，$\angle BAC=\angle AGF=90°$，它们的斜边长为 2，若 ΔAFG 绕点旋转，AF、AG 与边 BC 的交点分别为点 D、E（点 D 不与点 B 重合，点 E 不与点 C 重合）.

（1）请在图 1 中找出两对相似而不全等的三角形，并选择其中一对进行证明；

（2）ΔABC 的斜边 BC 所在的直线为 x 轴，BC 边上的高所在的直线为 y 轴，建立平面直角坐标系（如图 2）．在边 BC 上找一点 D 使 $BD=CE$，求出点 D 的坐标，并通过计算验证 $BD^2+CE^2=DE^2$；

（3）在旋转过程中，（2）中的等量关系 $BD^2+CE^2=DE^2$ 是否始终成立？若成立，请证明你的结论；若不成立，请说明理由.

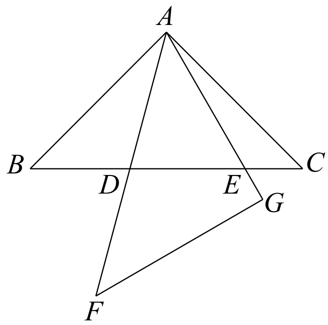


图 1

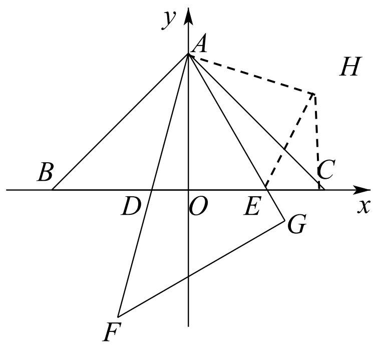


图 2

【难度】★★★

【答案】略.

【解析】（1）$\Delta EAD\backsim\Delta EBA$；$\Delta DAE\backsim\Delta DCA$；$\Delta EBA\backsim\Delta ACD$；

证明：$\because \angle ADE=\angle B+\angle BAD$　$\angle BAE=\angle DAE+\angle BAD$　而 $\angle B=\angle DAE$

$\therefore \angle ADE=\angle BAE$　又 $\because \angle B=\angle C$　　$\therefore \Delta EBA\backsim\Delta ACD$；

（2）解：$\because \Delta ABC$ 、ΔAGF 是等腰直角三角形，

$\therefore \angle FAG=\angle C=45^\circ$, $\because \angle ADC=\angle ADE$,

$\therefore \Delta DAE\backsim\Delta DCA$，$\therefore \angle AED=\angle CAD$．

$\because \Delta ABC$ 是等腰直角三角形，　$AO\perp BC$，　$\therefore BO=OC$．

$\therefore DO=OE$，$\therefore \dfrac{AB}{DC}=\dfrac{BD}{CF}$．

$\because AO\perp BC$，　$\therefore DA=AE$．　$\therefore \angle AED=\angle ADE$．

$\therefore \angle CDA=\angle CAD$．　　$\therefore DC=CA$．

$\because BC=2$，　$\therefore AC=\sqrt{2}$．

$\therefore DC=\sqrt{2}$，$\therefore OD=\sqrt{2}-1$．　$\therefore D\left(1-\sqrt{2},0\right)$；

由此可知：$\because BD=2-\sqrt{2}$，$CE=2-\sqrt{2}$，$ED=2\sqrt{2}-2$，

$\therefore BD^2+CE^2=DE^2$；

（3）成立，将 ΔABD 绕点 A 旋转，使得 AB 与 AC 重合，如图，此时 D 的对应点是 H，

联结 HE，可得 $\Delta ABD \cong \Delta ACH$．

$\therefore \angle ABD = \angle ACH = 45^\circ$， $BD = HC$， $AD = AH$，

$\therefore \angle BAD = \angle HAC$；$\because \angle ACB = 45^\circ$，$\therefore \angle HCE = 90^\circ$

在 $Rt\Delta HCE$ 中， $HC^2 + EC^2 = HE^2$，

$\because \angle DAE = 45^\circ$， $\therefore \angle BAD + \angle EAC = 45^\circ$，即 $\therefore \angle EAC + \angle HAC = 45^\circ$

$\therefore \angle HAE = 45^\circ$， $\therefore \angle DAE = \angle HAE$． $\therefore \Delta ADE \cong \Delta AHE$．

$\therefore DE = HE$． $\therefore BD^2 + EC^2 = DE^2$．

【总结】本题考查相似的判定和性质，以及全等的判定和性质，要会构造全等三角形来解决问题，本题比较综合.