

## 二次函数综合应用



### 内容分析

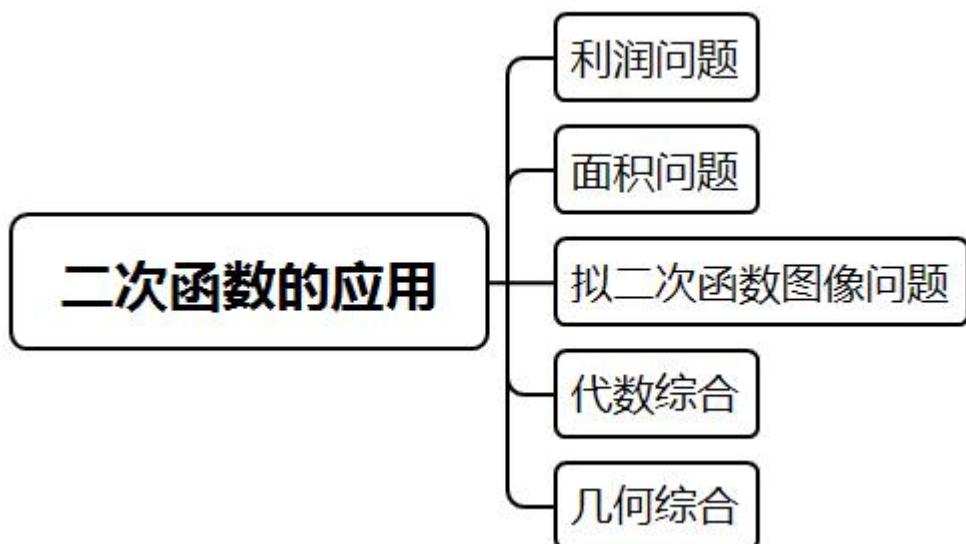
二次函数的综合应用主要包括以下几个方面：

- (1) 二次函数与经济问题，主要用于求解利润最大化；
- (2) 二次函数与面积问题，涉及到实际图形面积关系式的表达、面积最值的求解等；
- (3) 拟二次函数图像问题，包括拱桥问题，物体的运动轨迹问题等，可以利用二次函数的图像性质求解相关的问题；
- (4) 二次函数与一次函数、反比例函数、一元二次方程和不等式等的代数综合；
- (5) 二次函数与相似三角形、二次函数与动点、二次函数与圆等的几何综合。

二次函数综合应用主要考察学生灵活运用二次函数解析式及图像性质解决实际问题、代数问题和几何问题的综合能力，难点在于不同知识点的融会贯通，是最近中考压轴题主要的考察题型之一。



### 知识结构





## 模块一：利润问题



### 知识精讲

#### 1、利润问题

求解二次函数与利润最大化的问题，主要是根据题意列出相关的二次函数解析式，再通过配方的方式求解最大值。

这是一种实际应用的题型，需根据自变量的实际意义确定函数的定义域，在求解最大值时，也需注意自变量的取值范围。



### 例题解析

**【例 1】** 进入夏季后，某电器商场为减少库存，对电风扇连续进行两次降价。若设平均每次降价的百分率为  $x$ ，降价后的价格为  $y$  元，原价为  $a$  元，则  $y$  与  $x$  之间的函数关系为（ ）

- A.  $y = 2a(x-1)$       B.  $y = 2a(1-x)$       C.  $y = a(1-x^2)$       D.  $y = a(1-x)^2$

**【难度】★**

**【例 2】** 某化工材料经销公司购进一种化工原料 7 吨，价格为每千克 30 元。物价部门规定其销售单价不得高于每千克 70 元，也不得低于每千克 30 元。经市场调查发现：单价为 70 元时，日均销售 60 千克；单价每降低 1 元，日均多售出 2 千克。在销售过程中，每天还要支付其他费用 450 元。设销售单价为  $x$  元，日均获利为  $y$  元。

- (1) 求  $y$  与  $x$  的函数关系式，写出  $x$  的取值范围。
- (2) 若商店期望日均获利不少于 1800 元，则单价应定为多少？
- (3) 在满足商店期望获利条件下，若要尽早销售完毕，则应如何定价？

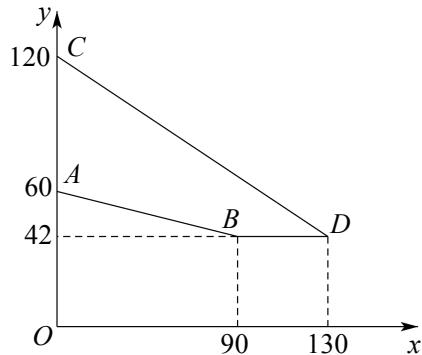
**【难度】★★**



**【例 3】** 某企业生产并销售某种产品，假设销售量与产量相等。如图，折线  $ABD$ 、线段  $CD$  分别表示该产品每千克的生产成本  $y_1$ （单位：元）、销售价  $y_2$ （单位：元）与产量  $x$ （单位： $kg$ ）之间的函数关系。

- (1) 解释图中点  $D$  的横坐标、纵坐标的实际意义；
- (2) 求线段  $AB$  所表示的  $y_1$  与  $x$  之间的函数解析式；
- (3) 当该产品的产量为多少时，获得的利润最大？最大利润是多少？

**【难度】★★**

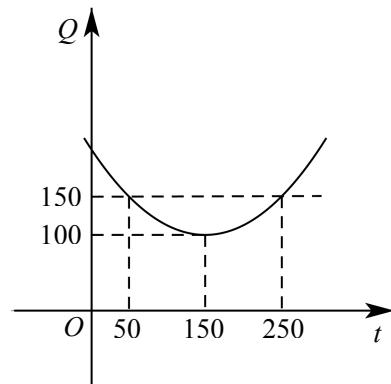


**【例 4】** 某蔬菜基地种植西红柿，由历年市场行情得知，从 2 月 1 日起的 300 天内，西红柿市场售价  $P$ （元/ $100 kg$ ）与上市时间  $t$ （2 月 1 日开始的天数）有函数关系：

$$P = \begin{cases} 300 - t & (0 \leq t \leq 200) \\ 2t - 300 & (200 < t \leq 300) \end{cases}$$
， 西红柿的种植成本  $Q$ （元/ $100 kg$ ）与上市时间  $t$  也

存在如图所示的二次函数关系式。设市场售价减去种植成本为纯收益，问何时上市的西红柿纯收益最大？

**【难度】★★★**





**【例 5】** 某产品每件成本 50 元，出售价 70 元，2014 年销售量 5 万件。为了进一步拓展销路，厂家投入一定资金做广告。2015 年和 2016 年分别支出广告费用 10 万元和 20 万元，年销售量分别是做广告前的 1.5 倍和 1.8 倍。设做广告后年销售量与原销售量的比值  $y$  是关于广告费  $x$ （万元）的二次函数。

- (1) 求  $y$  与  $x$  的函数关系式；
- (2) 设年销售总额减去成本和广告费后所得的利润为  $S$  万元，求  $S$  与  $x$  的函数关系式；
- (3) 你认为厂家是否应该继续投入大量广告费，以求年利润随广告费投入的增加而无限增加？

**【难度】★★★**



## 模块二：面积问题



### 知识精讲

#### 1、面积问题

求解二次函数与面积结合的问题时，基本方法上与利润最大化是相同的，也是通过配方的方式求解相关面积的最值，当然也需要注意自变量的取值范围。

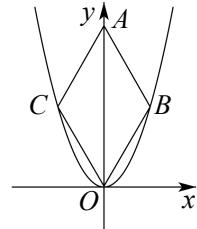
而与利润最大化问题不同的是，面积问题中可能会涉及到三角形、四边形或者圆等图形，也可能会出现动点与面积相结合的类型，变化较多。



### 例题解析

**【例 6】** 二次函数  $y = \sqrt{3}x^2$  的图像如图所示，点  $O$  为坐标原点，点  $A$  在  $y$  轴的正半轴上，点  $B$ 、 $C$  在二次函数的图像上，四边形  $OBAC$  为菱形，且  $\angle OBA = 120^\circ$ ，则菱形  $OBAC$  的面积为\_\_\_\_\_。

**【难度】★**

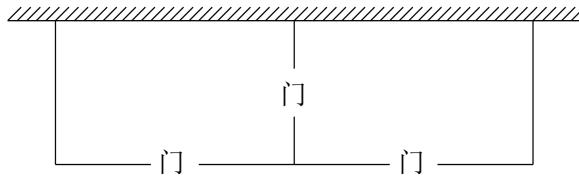


**【例 7】** 一边靠长为 15 米的围墙，其他三边用总长 40 米的篱笆围成一个矩形花圃，如何围法，可使花圃的面积最大？

**【难度】★★**

**【例 8】** 某农场拟建两间矩形饲养室，一面靠现有墙壁（墙壁足够长），中间用一道墙隔开，并在如图所示的三处各留 1 m 宽的门。已知计划中的材料可建墙体（不包括门）总长为 27 m，则能建成的饲养室的面积最大为\_\_\_\_\_  $m^2$ 。

**【难度】★★**



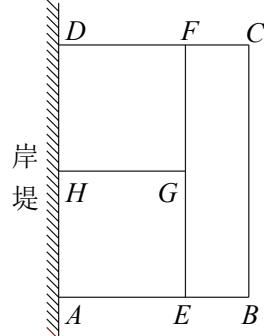


**【例 9】**为了节省材料，某水产养殖户利用水库的岸堤（岸堤足够长）为一边，用总长为 80 米的围网在水库中围成了如图所示的三块矩形区域，而且这三块矩形区域的面积相等，设  $BC$  的长度是  $x$  米，矩形区域  $ABCD$  的面积为  $y$  平方米。

(1) 求  $y$  与  $x$  之间的函数解析式，并注明自变量  $x$  的取值范围；

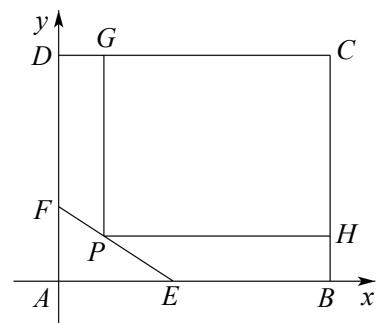
(2) 当  $x$  取何值时， $y$  有最大值？最大值是多少？

**【难度】★★**



**【例 10】**如图，某市在城建规划中，准备在市中心一块长方形空地  $ABCD$  上建一块长方形绿化区域。因为空地一角有一个文物保护设施，所以规划时不能超越线段  $EF$ ，进入  $\triangle AEF$  内。已知长方形的长  $AB = 200$  米，宽  $AD = 160$  米， $AE = 60$  米， $AF = 40$  米。如何规划能使这个绿化区的面积最大？

**【难度】★★★**





【例 11】如图 1，为美化校园，某校计划在一块长为 60 米，宽为 40 米的长方形空地上修建一个长方形花圃，并将花圃四周余下的空地修建成同样宽的通道，设通道宽为  $a$  米。

(1) 用含  $a$  的式子表示花圃的面积；

(2) 如果通道所占面积是整个长方形空地面积的  $\frac{3}{8}$ ，求出此时通道的宽；

(3) 已知某园林公司修建通道、花圃的造价  $y_1$  (元)、 $y_2$  (元) 与修建面积  $x$  (平方米) 之间的函数关系如图 2 所示，如果学校决定由该公司承建此项目，并要求修建的通道的宽度不少于 2 米且不超过 10 米，那么当通道的宽为多少时，修建的通道和花圃的总造价最低，最低总造价为多少元？

【难度】★★★

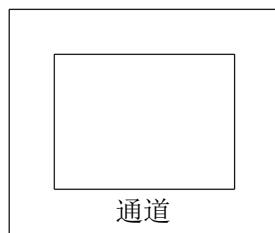


图 1

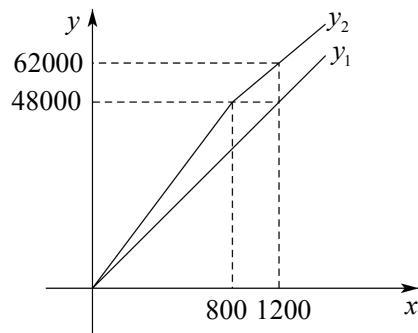


图 2



## 模块三：拟二次函数图像问题



### 知识精讲

#### 1、拟二次函数图像问题

拟二次函数图像问题的解题，依赖于合理的平面直角坐标系的建立，继而在平面直角坐标系中，利用二次函数的图像性质解答相关问题。主要包括拱桥问题、运行轨迹问题等。



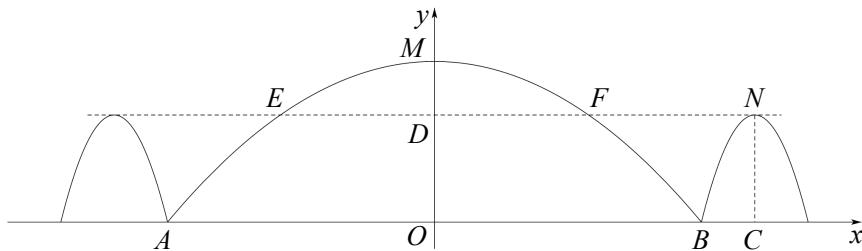
### 例题解析

【例 12】一个足球从地面向上踢出，它距地面的高度  $h$  (m) 与足球被踢出后经过的时间  $t$  (s) 之间具有函数关系： $h = at^2 + 19.6t$ ，已知足球被踢出后经过 4 s 落地，则足球距地面的最大高度是\_\_\_\_\_m.

【难度】★

【例 13】如图，三孔桥横截面的三个孔都呈抛物线形，两小孔形状、大小都相同。正常水位时，大孔水面宽度  $AB = 20$  米，顶点  $M$  距水面 6 米（即  $MO = 6$  米），小孔顶点  $N$  距水面 4.5 米（即  $NC = 4.5$  米）。当水位上涨刚好淹没小孔时，求此时大孔的水面宽度  $EF$ .

【难度】★



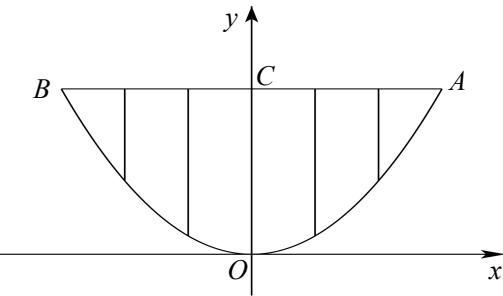


【例 14】学校的围墙上端由一排相同的凹拱形栅栏组成，如图所示，已知拱形为抛物线的一部分，栅栏的跨径  $AB$  间，每隔相同的间距 0.3 米用 1 根立柱加固，拱高  $OC$  为 0.6 米。

(1) 建立如图所示的平面直角坐标系，则抛物线的解析式为\_\_\_\_\_；

(2) 一段这样的栅栏所需立柱的总长度（精确到 0.1 米）为\_\_\_\_\_。

【难度】★★



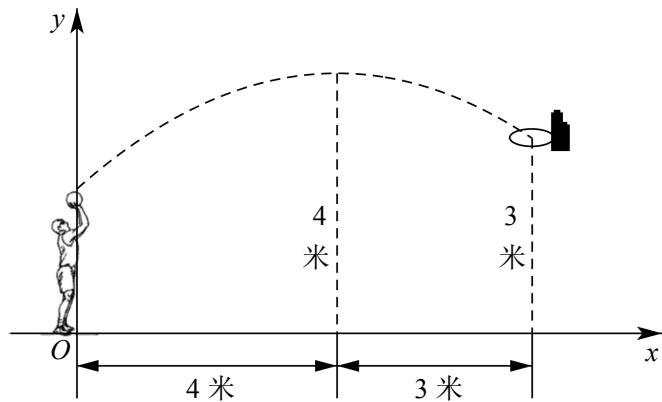
【例 15】某校初三年级的一场篮球比赛中，队员甲正在投篮，若球出手时离地面  $\frac{20}{9}$  米，

与篮圈中心的水平距离为 7 米。设篮球运行的路线为抛物线，当球出手后水平距离为 4 米时到达最大高度 4 米，已知篮圈离地面 3 米。

(1) 建立如图所示的平面直角坐标系，试问此球能否准确投中？

(2) 若对方队员乙再甲前面 1 米处跳起盖帽拦截，已知乙的最大摸高为 3.1 米，那么他能否拦截成功？

【难度】★★

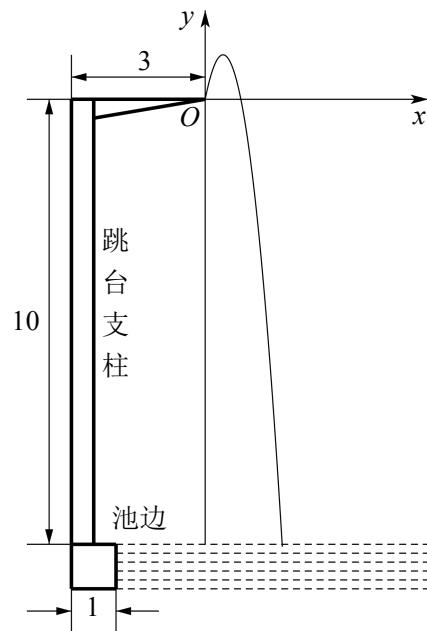




【例 16】跳水运动员在空中运动时，身体的重心所经过的路线是一条抛物线。在某项 10 米跳台的一个规定动作中，正常情况下运动员在跳台边缘向上跃起，重心上升 1 米到达最高点，这时跃出水平距离 0.4 米，然后下落。在距离水面 5 米处完成规定的翻腾动作，并调整好入水姿势。

- (1) 建立如图所示的坐标系，求出抛物线解析式（图中数值的单位是米）
- (2) 运动员入水时距池边多少米（精确到 0.1 米）？
- (3) 运动员在空中调整好入水姿势时，与水池边的水平距离是多少米（精确到 0.1 米）？

【难度】★★★





## 模块四：代数综合



### 知识精讲

#### 1、代数综合

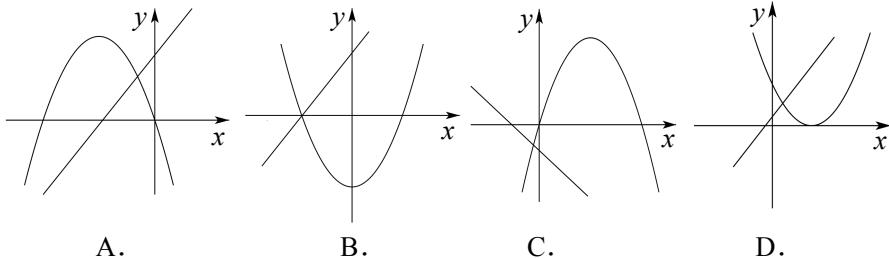
二次函数与代数的综合涉及到二次函数与一次函数、反比例函数在同一直角坐标系中的图像性质问题、交点问题等。难点是函数思想与方程思想、不等式思想的相互转化和结合。



### 例题解析

【例 17】一次函数  $y = ax + b$  与二次函数  $y = ax^2 - bx$  在同一坐标系中的图像可能是

( )



【难度】★

【例 18】利用函数图像，求解不等式  $x^2 - 4x + 4 > 0$  .

【难度】★★



【例 19】已知关于  $x$  的方程  $mx^2 - 3(m-1)x + 2m - 3 = 0$  .

(1) 当  $m$  取何整数值时, 关于  $x$  的方程  $mx^2 - 3(m-1)x + 2m - 3 = 0$  的根都是整数?

(2) 若抛物线  $y = mx^2 - 3(m-1)x + 2m - 3$  向左平移一个单位后, 过反比例函数  $y = \frac{k}{x}$  ( $k \neq 0$ ) 上的一点  $(-1, 3)$ .

①求抛物线  $y = mx^2 - 3(m-1)x + 2m - 3$  的解析式;

②利用函数图像求不等式  $\frac{k}{x} - kx > 0$  的解.

【难度】★★



## 模块五：几何综合



### 知识精讲

#### 1、几何综合

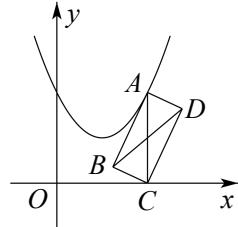
二次函数与几何的综合，主要是将几何图形与二次函数的图像相结合，求解面积问题、角相等问题、相似问题等。难点是数形结合的思想，这也是中考要求的重点和难点。



### 例题解析

**【例 20】**如图，在平面直角坐标系中，点  $A$  在抛物线  $y = x^2 - 2x + 2$  上运动，过点  $A$  作  $AC \perp x$  轴于点  $C$ ，以  $AC$  为对角线作矩形  $ABCD$ ，连接  $BD$ ，则对角线  $BD$  长的最小值为\_\_\_\_\_.

**【难度】★**

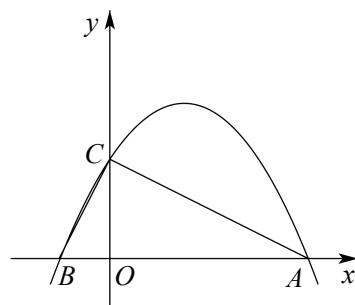


**【例 21】**如图所示，抛物线  $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + 2$  交  $x$  轴于  $A$ 、 $B$  两点（点  $B$  在点  $A$  的左侧），交  $y$  轴于点  $C$ ，其对称轴为  $x = \frac{3}{2}$ ， $O$  为坐标原点。

(1) 求  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三点的坐标；

(2) 求证： $\angle ACB$  是直角。

**【难度】★★**

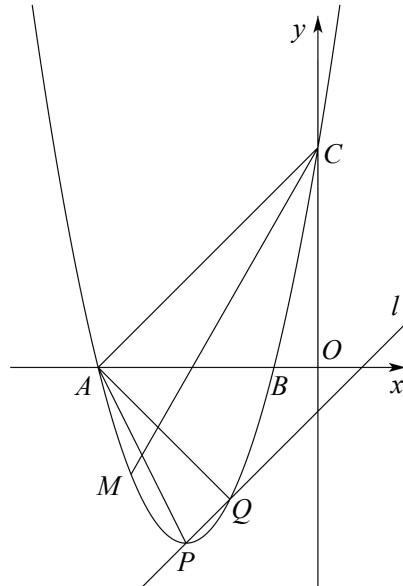




【例 22】已知抛物线  $y = x^2 - 2mx + m^2 + m - 1$  ( $m$  是常数) 的顶点为  $P$ , 直线  $l$ :  $y = x - 1$ .

- (1) 求证: 点  $P$  在直线  $l$  上;
- (2) 当  $m = -3$  时, 抛物线与  $x$  轴交于  $A$ 、 $B$  两点, 与  $y$  轴交于点  $C$ , 与直线  $l$  的另一个交点为  $Q$ ,  $M$  是  $x$  轴下方抛物线上的一点,  $\angle ACM = \angle PAQ$  (如图), 求点  $M$  的坐标;
- (3) 若以抛物线和直线  $l$  的两个交点及坐标原点为顶点的三角形是等腰三角形, 请直接写出所有符合条件的  $m$  的值.

【难度】★★★



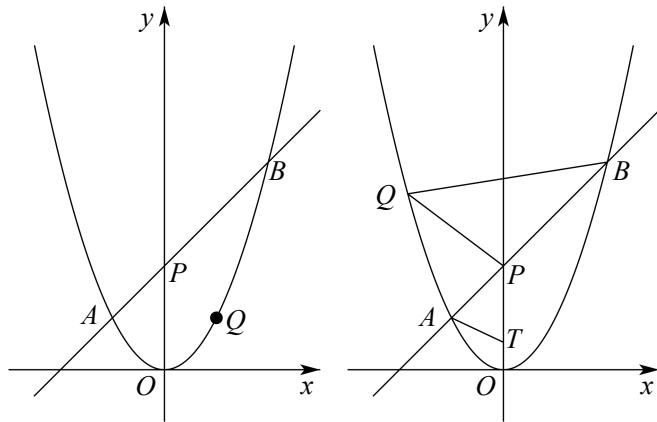


【例 23】如图，在平面直角坐标系  $xOy$  中，将抛物线  $y=x^2$  的对称轴绕着点  $P(0, 2)$

顺时针旋转  $45^\circ$  后与该抛物线交于  $A$ 、 $B$  两点， $Q$  是抛物线上一点.

- (1) 求直线  $AB$  的函数解析式；
- (2) 如图 1，若点  $Q$  在直线  $AB$  的下方，求点  $Q$  到直线  $AB$  的距离的最大值；
- (3) 如图 2，若点  $Q$  在  $y$  轴左侧，且点  $T(0, t)$  ( $t < 2$ ) 是射线  $PO$  上一点，当以  $P$ 、 $B$ 、 $Q$  为顶点的三角形与  $\triangle PAT$  相似时，求所有满足条件的  $t$  的值.

【难度】★★★



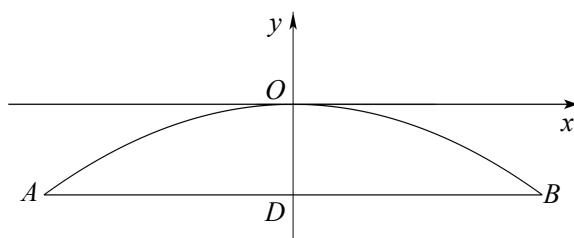


## 随堂检测

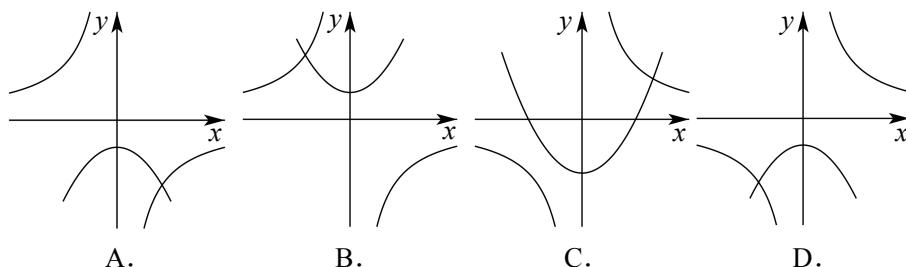
**【习题 1】** 河北省赵县的赵州桥的桥拱是近似的抛物线形，建立如图所示的平面直角坐标系，其函数解析式为  $y = -\frac{1}{25}x^2$ ，当水面离桥拱顶的高度  $DO$  是 4 米时，这时水面的宽度  $AB$  为（ ）米

- A. -20      B. 10      C. 20      D. -10

**【难度】★**



**【习题 2】** 函数  $y = ax^2 + a$  与  $y = \frac{a}{x}$  ( $a \neq 0$ ) 在同一坐标系中的图像可能是（ ）

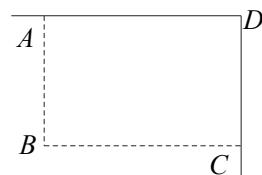


**【难度】★**

**【习题 3】** 如图，假设篱笆（虚线部分）的长度为 16 米，则所围成的矩形  $ABCD$  的最大面积为（ ）平方米

- A. 60      B. 63      C. 64      D. 66

**【难度】★★**



**【习题 4】** 利用函数图像，解不等式  $x^2 + x - 3 \leq 0$ 。

**【难度】★★**



**【习题 5】** 某水果批发市场经销一种水果，如果每千克盈利 10 元，每天可售出 500 千克。经市场调查发现，在进货价不变的情况下，若每千克涨价 1 元，日销售量将减少 20 千克。

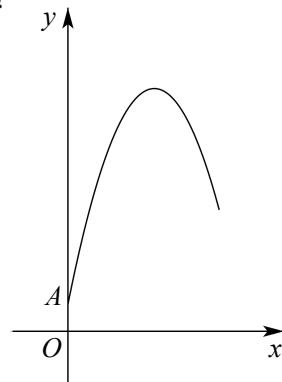
- (1) 当每千克涨价为多少元时，每天的盈利最多？最多为多少？
- (2) 若商场只要求保证每天的盈利为 6000 元，同时又可使顾客得到实惠，每千克应涨价多少元？

**【难度】★★**

**【习题 6】** 如图，某足球运动员站在点  $O$  处练习射门，将足球从离地面 0.5 m 的  $A$  处正对球门踢出（点  $A$  在  $y$  轴上），足球的飞行高度  $y$ （单位：m）与飞行时间  $t$ （单位：s）之间满足函数关系式： $y = at^2 + 5t + c$ ，已知足球飞行 0.8 s 时，离地面的高度为 3.5 m。

- (1) 足球飞行的时间是多少时，足球离地面最高？最大高度为多少？
- (2) 若足球飞行的水平距离  $x$ （单位：m）与飞行时间  $t$ （单位：s）之间具有函数关系式  $x = 10t$ ，已知球门的高度为 2.44 m，如果该运动员正对球门射门时，离球门的水平距离为 28 m，那么他能否将球直接射入球门？

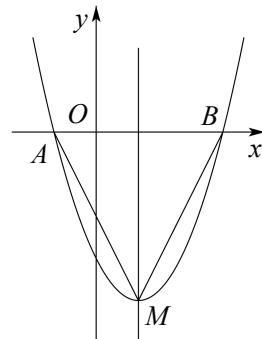
**【难度】★★**



**【习题 7】** 如图所示是二次函数  $y = (x + m)^2 + k$  的图像，其顶点坐标为  $M(1, -4)$ 。

- (1) 求出图像与  $x$  轴的交点  $A$ 、 $B$  的坐标；
- (2) 在二次函数的图像上是否存在点  $P$ ，使  $S_{\Delta PAB} = \frac{5}{4}S_{\Delta MAB}$ ，若存在，求出点  $P$  的坐标，若不存在，请说明理由。

**【难度】★★**

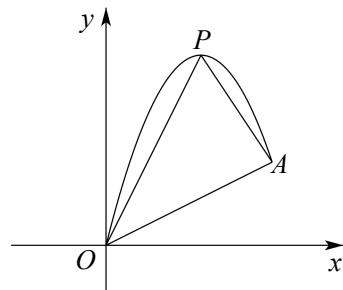




**【习题 8】** 如图，一小球从斜坡点  $O$  处抛出，球的抛出路线可以用二次函数  $y = -x^2 + 4x$  的图像来刻画，斜坡可以用一次函数  $y = \frac{1}{2}x$  的图像来刻画.

- (1) 请用配方法求二次函数图像的最高点  $P$  的坐标；
- (2) 小球的落点是  $A$ ，求点  $A$  的坐标；
- (3) 连接抛物线的最高点  $P$  与点  $O$ 、 $A$  得  $\Delta POA$ ，求  $\Delta POA$  的面积；
- (4) 在  $OA$  上方的抛物线上存在一点  $M$ （点  $M$  与点  $P$  不重合）， $\Delta MOA$  的面积等于  $\Delta POA$  的面积，请直接写出点  $M$  的坐标.

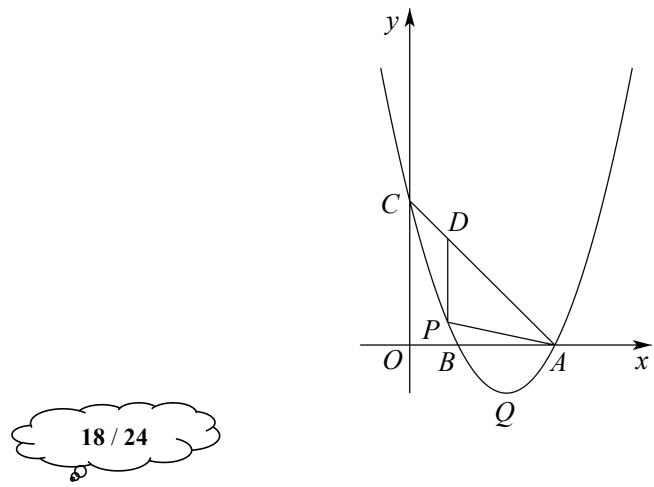
**【难度】★★★**



**【习题 9】** 已知抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) 的顶点坐标为  $Q(2, -1)$ ，且与  $y$  轴交于点  $C(0, 3)$ ，与  $x$  轴交于  $A$ 、 $B$  两点（点  $A$  在点  $B$  的右侧），点  $P$  是该抛物线上一动点，从点  $C$  沿抛物线向点  $A$  运动（ $P$  与  $A$  不重合），过点  $P$  作  $PD \parallel y$  轴，交  $AC$  于点  $D$ .

- (1) 求该抛物线的函数解析式；
- (2) 当  $\Delta ADP$  是直角三角形时，求点  $P$  的坐标；
- (3) 在问题 (2) 的结论下，若点  $E$  在  $x$  轴上，点  $F$  在抛物线上，问是否存在以  $A$ 、 $P$ 、 $E$ 、 $F$  为顶点的平行四边形？若存在，求点  $F$  的坐标，若不存在，请说明理由.

**【难度】★★★**





【习题 10】 如图 (a), 抛物线  $y=a(x+6)^2-3$  与  $x$  轴相交于  $A$ 、 $B$  两点, 与  $y$  轴相交

于点  $C$ , 点  $D$  为抛物线的顶点, 直线  $DE \perp x$  轴, 垂足为  $E$ ,  $AE^2=3DE$ .

(1) 求这个抛物线的解析式;

(2)  $P$  为直线  $DE$  上的一点, 且  $\Delta PAC$  是以  $PC$  为斜边的直角三角形, 见图 (b), 求  $\tan \angle PCA$  的值;

(3) 如图 (c) 所示,  $M$  为抛物线上的一动点, 过点  $M$  作直线  $MN \perp DM$ , 交直线  $DE$  于点  $N$ , 当  $M$  点在抛物线的第二象限的部分上运动时, 是否存在使点  $E$  三等分线段  $DN$  的情况? 若存在, 请求出符合条件的所有的点  $M$  的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【难度】★★★

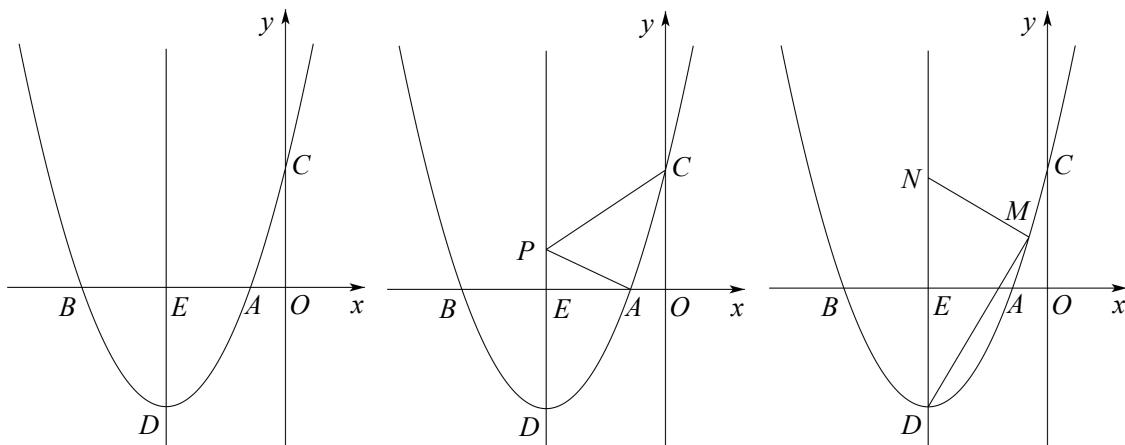


图 (a)

图 (b)

图 (c)

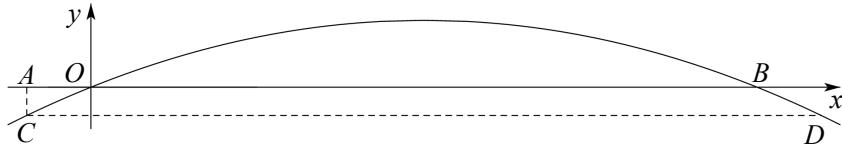


## 课后作业

**【作业 1】** 如图是某拱形大桥的示意图，桥拱与桥面的交点为  $O$ 、 $B$ ，以点  $O$  为原点，水平直线  $OB$  为  $x$  轴，建立平面直角坐标系，桥的拱形可近似看成抛物线  $y = -\frac{1}{400}(x - 80)^2 + 16$ ，桥拱与桥墩  $AC$  的交点  $C$  恰好在水面，有  $AC \perp x$  轴，若  $OA = 10$  米，则高度  $AC$  为（ ）

- A.  $16\frac{9}{40}$  米      B.  $\frac{17}{4}$  米      C.  $16\frac{7}{40}$  米      D.  $\frac{15}{4}$  米

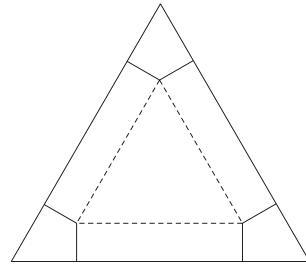
**【难度】★**



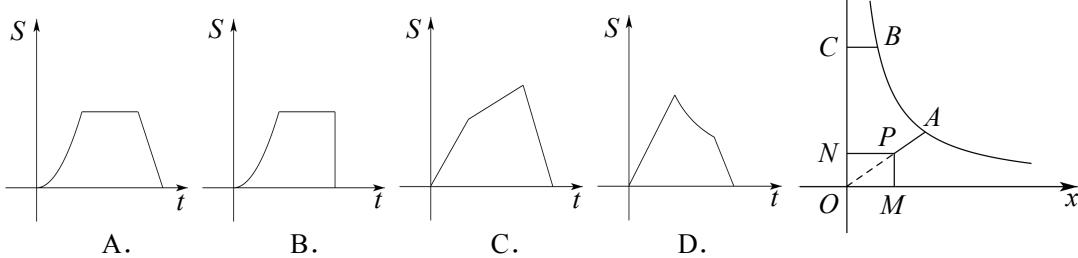
**【作业 2】** 如图，有一块边长为 6 cm 的正三角形纸板，在它的三个角处分别截去一个彼此全等的筝形，再沿图中的虚线折起，做成一个无盖的直三棱柱纸盒，则该纸盒侧面积的最大值是（ ） $\text{cm}^2$

- A.  $\sqrt{3}$       B.  $\frac{3}{2}\sqrt{3}$       C.  $\frac{9}{2}\sqrt{3}$       D.  $\frac{27}{2}\sqrt{3}$

**【难度】★★**



**【作业 3】** 如图，已知  $A$ 、 $B$  是反比例函数 ( $k > 0$ ,  $x > 0$ ) 图像上的两点， $BC \parallel x$  轴，交  $y$  轴与点  $C$ ，动点  $P$  从坐标原点  $O$  出发，沿  $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$  匀速运动，终点为  $C$ . 过  $P$  作  $PM \perp x$  轴， $PN \perp y$  轴，垂足分别为  $M$ 、 $N$ . 设矩形  $OMP$  的面积为  $S$ ，点  $P$  运动时间为  $t$ ，则  $S$  与  $t$  的函数图像大致为（ ）



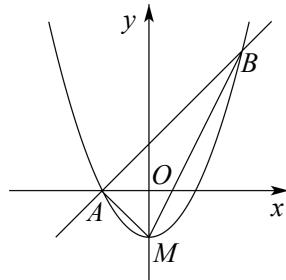
**【难度】★★**



**【作业 4】** 如图，顶点  $M$  在  $y$  轴上的抛物线与直线  $y = x + 1$  相交于  $A$ 、 $B$  两点，且点  $A$  在  $x$  轴上，点  $B$  的横坐标为 2，连接  $AM$ 、 $BM$ .

- (1) 求抛物线的函数解析式；
- (2) 判断  $\triangle ABM$  的形状，并说明理由.

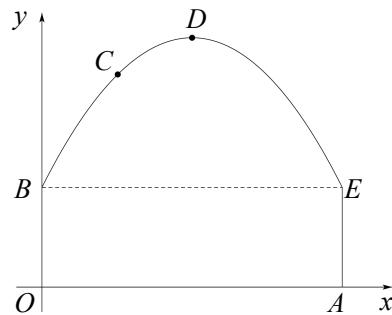
**【难度】★★**



**【作业 5】** 如图，隧道的截面由抛物线和长方形构成，长方形的长是 12 米，宽是 4 米。按照图中所示的直角坐标系，抛物线可以用  $y = -\frac{1}{6}x^2 + bx + c$  表示，且抛物线上的点  $C$  到墙面  $OB$  的水平距离为 3 米，到地面  $OA$  的距离为  $\frac{17}{2}$  米。

- (1) 求该抛物线的函数解析式，并计算出拱顶  $D$  到地面  $OA$  的距离；
- (2) 一辆货车载一长方体集装箱后高为 6 米，宽为 4 米，如果隧道内设双向车道，那么这辆货车能否安全通过？
- (3) 在抛物线形拱壁需要安装两排灯，使它们离地面的高度相等，如果灯离地面的高度不超过 8 米，那么两排灯的水平距离最小是多少？

**【难度】★★**



**【作业 6】** 某商场在销售旺季临近时，某品牌的童装销售价格呈上升趋势，假如这种童装开始时售价为每件 20 元，并且每周涨价 2 元，从第 6 周开始，保持每件 30 元的稳定价格销售，直到 11 周结束，该童装不再销售。

- (1) 请建立销售价格  $y$  (元) 与周次  $x$  之间的函数关系式；
- (2) 若该品牌童装于进货当周售完，且这种童装每件进价  $z$  (元) 与周次  $x$  之间的关系为  $z = -\frac{1}{8}(x-8)^2 + 12$ ， $1 \leq x \leq 11$ ，且  $x$  为整数，那么该品牌童装在第几周售出后，每件获得的利润最大？最大利润为多少？

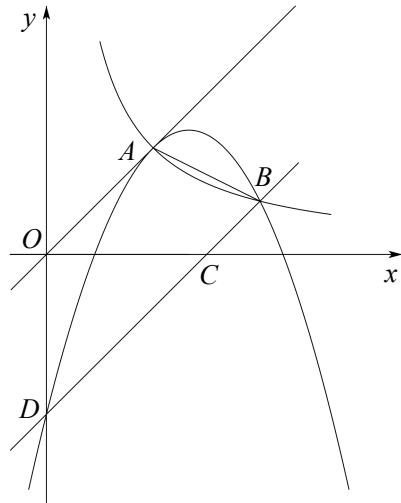
**【难度】★★**



**【作业 7】** 如图，正比例函数和反比例函数的图像都经过点  $A(3, 3)$ ，把直线  $OA$  向下平移后，与反比例函数的图像交于点  $B(6, m)$ ，与  $x$  轴、 $y$  轴分别交于  $C$ 、 $D$  两点。

- (1) 求  $m$  的值；
- (2) 求过  $A$ 、 $B$ 、 $D$  三点的抛物线的解析式；
- (3) 在抛物线上是否另外存在点  $E$ ，使四边形  $OECD$  与四边形  $OACD$  的面积相等？若存在，求出点  $E$  的坐标；若不存在，请说明理由。

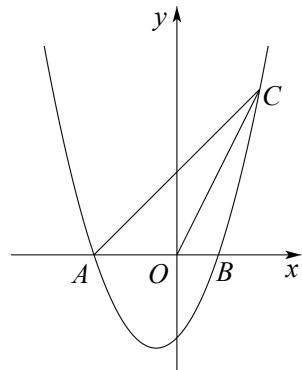
**【难度】★★**



**【作业 8】** 如图所示，在平面直角坐标系中，抛物线  $y = x^2 + bx + c$  与  $x$  轴交于  $A$ 、 $B$  两点， $C$  为抛物线上一点，且直线  $AC$  的解析式为  $y = mx + 2m$  ( $m \neq 0$ )， $\angle CAB = 45^\circ$ ， $\tan \angle COB = 2$ 。

- (1) 求  $A$ 、 $C$  的坐标；
- (2) 求直线  $AC$  和抛物线的解析式；
- (3) 在抛物线上是否存在点  $D$ ，使得四边形  $ABCD$  为梯形？若存在，请求出点  $D$  的坐标；若不存在，请说明理由。

**【难度】★★★**

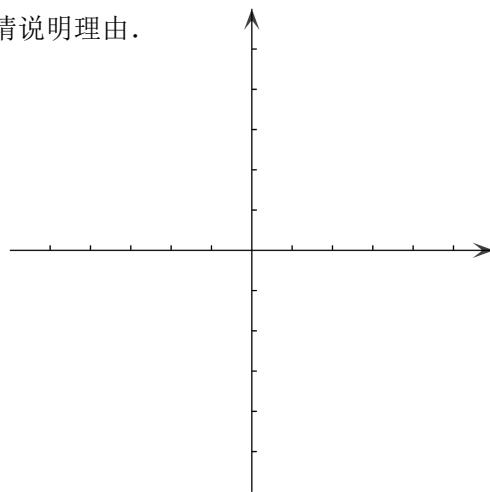




【作业 9】 已知关于  $x$  的二次函数  $y = x^2 + (k^2 - 4)x + 2k - 2$  的顶点在  $y$  轴的正半轴上.

- (1) 求此抛物线的解析式;
- (2) 设  $A$  是  $y$  轴右侧抛物线上的一个动点, 过点  $A$  作  $AB$  垂直于  $x$  轴于点  $B$ , 过点  $A$  作  $x$  轴的平行线交抛物线于点  $D$ , 再过点  $D$  作  $DC$  垂直于  $x$  轴于点  $C$ , 可得到矩形  $ABCD$  ( $B$ 、 $C$  两点在  $x$  轴上). 设矩形  $ABCD$  的周长为  $l$ , 点  $A$  的横坐标为  $m$ , 试求  $l$  关于  $m$  的函数关系式, 并写出  $m$  的取值范围;
- (3) 当点  $A$  在  $y$  轴右侧的抛物线上运动时, 矩形  $ABCD$  能否成为正方形, 若能, 请求出此时正方形的周长; 若不能, 请说明理由.

【难度】 ★★★

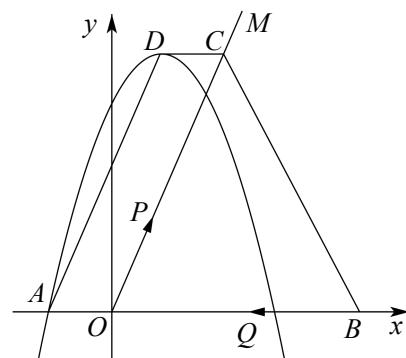


【作业 10】 如图, 已知抛物线  $y = a(x-1)^2 + 3\sqrt{3}$  ( $a \neq 0$ ) 经过点  $A(-2, 0)$ , 抛物线的顶点为  $D$ , 过点  $O$  作射线  $OM // AD$ , 过顶点  $D$  平行于  $x$  轴的直线交射线  $OM$  于点  $C$ ,  $B$  在  $x$  轴正半轴上, 连接  $BC$ .

- (1) 求该抛物线的解析式;
- (2) 若动点  $P$  从点  $O$  出发, 以每秒 1 个长度单位的速度沿射线  $OM$  运动, 设点  $P$  运动的时间为  $t$  (s). 问当  $t$  为何值时, 四边形  $DAOP$  分别为平行四边形? 直角梯形? 等腰梯形?
- (3) 若  $OC = OB$ , 动点  $P$  和动点  $Q$  分别从点  $O$  和点  $B$  同时出发, 分别以每秒 1 个长度单位和 2 个长度单位的速度沿  $OC$  和  $BO$  运动, 当其中一个点停止运动时, 另一个点也随之停止运动. 设它们的运动时间为  $k$  (s), 连接  $PQ$ , 四边形  $BCPQ$  的面积为  $S$ , 求  $S$  关于  $k$  的函数关系式, 并写出定义域.

【难度】 ★★★

23 / 24





引导式教学，拒绝灌输！