

二次函数的概念及图像

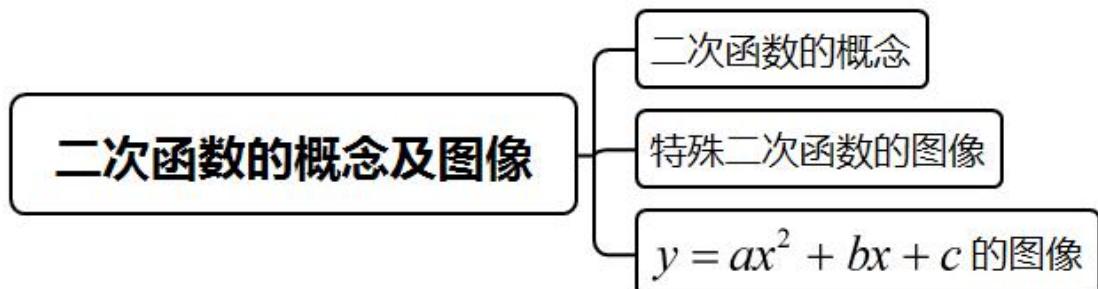


内容分析

二次函数是九年级上学期第三章的内容，包括二次函数的概念及其图像。基本要求是理解二次函数的概念，会用描点法画二次函数的图像，会用二次函数的解析式来表达相应的抛物线，并掌握二次函数 $y=ax^2$ 的图像平移得到二次函数 $y=ax^2+c$ 、 $y=a(x+m)^2$ 和 $y=a(x+m)^2+k$ 的图像的规律。重点是二次函数的图像的特征及画法。



知识结构



模块一：二次函数的概念



知识精讲

1、二次函数

一般地，解析式形如 $y=ax^2+bx+c$ （其中 a 、 b 、 c 是常数，且 $a \neq 0$ ）的函数叫做二次函数。

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的定义域为一切实数。而在具体问题中，函数的定义域根据实际意义来确定。



引导式教学，拒绝灌输！



例题解析

【例 1】下列函数解析式中，一定为二次函数的是（ ）

- A. $y = 3x - 1$ B. $y = ax^2 + bx + c$
C. $s = 2t^2 + 1$ D. $y = x^2 + \frac{1}{x}$

【难度】★

【例 2】二次函数 $y = -3 - x^2$ 中，二次项系数为_____，一次项系数为_____，常数项为_____。

【难度】★

【例 3】二次函数 $y = 3x^2 - 2x - 1$ ，当 $x = -1$ 时， $y =$ _____；当 $x =$ _____时， $y = 0$ 。

【难度】★

【例 4】当 m _____时，函数 $y = (m^2 - 4)x^2 + (m - 2)x + 3$ 是二次函数。

【难度】★★



引导式教学，拒绝灌输！

【例 5】用一根 80 cm 的铁丝，把它弯成一个矩形框，求它的最大面积. 请设变量，并列出函数解析式：_____.

【难度】★★

【例 6】已知二次函数 $y = x^2 + bx + c$ ，当 $x = 0$ 时， $y = 1$ ；当 $x = 2$ 时， $y = -1$. 求当 $x = -3$ 时 y 的值.

【难度】★★

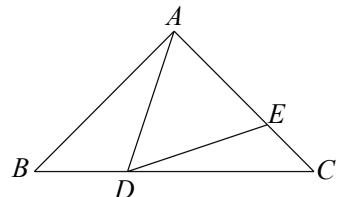
【例 7】二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图像经过点 $(1, 1)$ ，则 $a + b + c$ 的值是（ ）

A. -3 B. -1 C. 2 D. 3

【难度】★★

【例 8】如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC = 2$ ， D 是 BC 上异于 B 、 C 的一个动点，过点 D 作 $\angle ADE = 45^\circ$ ， DE 交 AC 于点 E . 设 $BD = x$ ， $AE = y$ ，求 y 关于 x 的函数关系式，并写出自变量 x 的取值范围.

【难度】★★★





模块二：特殊二次函数的图像



知识精讲

1、 $y = x^2$ 的图像

在平面直角坐标系 xOy 中，按照下列步骤画二次函数 $y = x^2$ 的图像.

(1) 列表：取自变量 x 的一些值，计算相应的函数值 y ，如下表所示：

x	...	-2	$-1\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	...
$y = x^2$...	4	$2\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$2\frac{1}{4}$	4	...

(2) 描点：分别以所取的 x 的值和相应的函数值 y 作为点的横坐标和纵坐标，描出这些坐标所对应的各点，如图 1 所示.

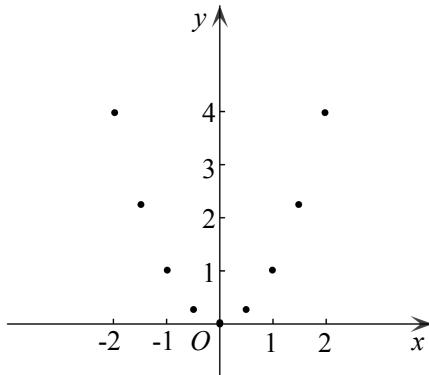


图 1

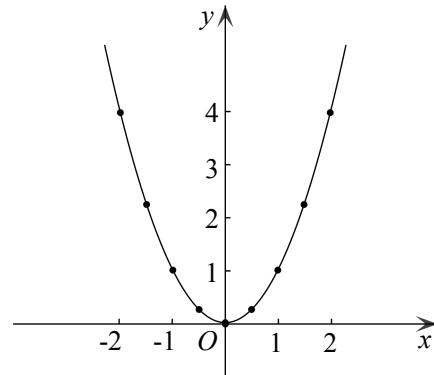


图 2

(3) 连线：用光滑的曲线把所描出的这些点顺次联结起来，得到函数 $y = x^2$ 的图像，

如图 2 所示.

二次函数 $y = x^2$ 的图像是一条曲线，分别向左上方和右上方无限伸展. 它属于一类特

殊的曲线，这类曲线称为**抛物线**. 二次函数 $y = x^2$ 的图像就称为抛物线 $y = x^2$.

2、二次函数 $y = ax^2$ 的图像



抛物线 $y = ax^2$ ($a \neq 0$) 的对称轴是 y 轴，即直线 $x = 0$ ；顶点是原点。当 $a > 0$ 时，

抛物线开口向上，顶点为最低点；当 $a < 0$ 时，抛物线开口向下，顶点为最高点。

3、二次函数 $y = ax^2 + c$ 的图像

一般地，二次函数 $y = ax^2 + c$ 的图像是抛物线，称为抛物线 $y = ax^2 + c$ ，它可以通过将抛物线 $y = ax^2$ 向上 ($c > 0$ 时) 或向下 ($c < 0$ 时) 平移 $|c|$ 个单位得到。

抛物线 $y = ax^2 + c$ (其中 a 、 c 是常数，且 $a \neq 0$) 的对称轴是 y 轴，即直线 $x = 0$ ；顶点坐标是 $(0, c)$ 。抛物线的开口方向由 a 所取值的符号决定，当 $a > 0$ 时，开口向上，顶点是抛物线的最低点；当 $a < 0$ 时，开口向下，顶点是抛物线的最高点。

4、二次函数 $y = a(x+m)^2$ 的图像

一般地，二次函数 $y = a(x+m)^2$ 的图像是抛物线，称为抛物线 $y = a(x+m)^2$ ，它可以通过将抛物线 $y = ax^2$ 向左 ($m > 0$ 时) 或向右 ($m < 0$ 时) 平移 $|m|$ 个单位得到。

抛物线 $y = a(x+m)^2$ (其中 a 、 m 是常数，且 $a \neq 0$) 的对称轴是过点 $(-m, 0)$ 且平行 (或重合) 于 y 轴的直线，即直线 $x = -m$ ；顶点坐标是 $(-m, 0)$ 。当 $a > 0$ 时，开口向上，顶点是抛物线的最低点；当 $a < 0$ 时，开口向下，顶点是抛物线的最高点。

5、二次函数 $y = a(x+m)^2 + k$ 的图像

二次函数 $y = a(x+m)^2 + k$ (其中 a 、 m 、 k 是常数，且 $a \neq 0$) 的图像即抛物线 $y = a(x+m)^2 + k$ ，可以通过将抛物线 $y = ax^2$ 进行两次平移得到。

这两次平移可以是：先向左 ($m > 0$ 时) 或向右 ($m < 0$ 时) 平移 $|m|$ 个单位，再向上 ($k > 0$ 时) 或向下 ($k < 0$ 时) 平移 $|k|$ 个单位。

利用图形平移的性质，可知：抛物线 $y = a(x+m)^2 + k$ (其中 a 、 m 、 k 是常数，且 $a \neq 0$) 的对称轴是经过点 $(-m, 0)$ 且平行于 y 轴的直线，即直线 $x = -m$ ；抛物线的顶点坐标是 $(-m, k)$ 。抛物线的开口方向由 a 所取值的符号决定，当 $a > 0$ 时，开口向上，顶点是抛物线的最低点；当 $a < 0$ 时，开口向下，顶点是抛物线的最高点。



例题解析



引导式教学，拒绝灌输！

【例 9】 二次函数 $y = -\frac{1}{3}x^2$ 的图像是_____，开口方向_____，顶点坐标为_____.

【难度】★

【例 10】 抛物线 $y = ax^2 + c$ 的顶点坐标为_____，对称轴为_____.

【难度】★

【例 11】 抛物线 $y = 2x^2$, $y = -2x^2$, $y = 2x^2 + 1$ 共有的性质是（ ）

- A. 开口向上
- B. 对称轴都是 y 轴
- C. 都有最高点
- D. 顶点都是原点

【难度】★

【例 12】 抛物线 $y = a(x-1)^2$ 有最高点，则 a 的取值范围为_____，最高点的坐标为_____.

【难度】★

【例 13】 抛物线 $y = -2(x+1)^2 + 3$ 的顶点坐标是（ ）



引导式教学，拒绝灌输！

- A. $(1, 3)$ B. $(1, -3)$ C. $(-1, 3)$ D. $(-1, -3)$

【难度】★

【例 14】 抛物线 $y = -(x+1)^2$ 上有三点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$, 且 $-1 < x_1 < 0$,

$0 < x_2 < x_3$, 则比较 y_1, y_2, y_3 的大小为_____.

【难度】★★

【例 15】 将抛物线 $y = ax^2$ 向左平移后所得新抛物线的顶点横坐标为 -2 , 且新抛物线经过点

$(1, 3)$, 则 a 的值为_____.

【难度】★★

【例 16】 将抛物线 $y = 5x^2$ 向左平移 2 个单位, 再向下平移 3 个单位, 得到的抛物线是()

- A. $y = 5(x+2)^2 + 3$ B. $y = 5(x+2)^2 - 3$
C. $y = 5(x-2)^2 + 3$ D. $y = 5(x-2)^2 - 3$

【难度】★★



引导式教学，拒绝灌输！

【例 17】若直线 $y=3x+m$ 经过第一、三、四象限，则抛物线 $y=(x-m)^2+1$ 的顶点必在

()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【难度】★★

【例 18】抛物线上有两点 $(3, -8)$ 和 $(-5, -8)$ 则它的对称轴是 ()

- A. 直线 $x=-1$ B. 直线 $x=1$ C. 直线 $x=2$ D. 直线 $x=3$

【难度】★★

【例 19】把抛物线 $y=2(x+m)^2$ 向上平移 n 个单位，使新得到的抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 通过

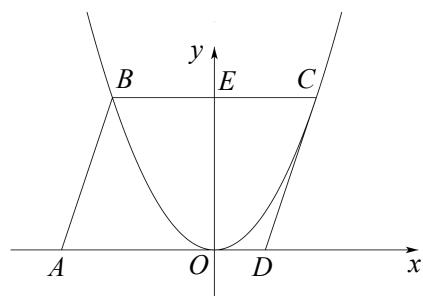
点 $(2, 5)$ 与 $(1, 1)$ ，求 a, b, c, m, n 的值.

【难度】★★★

【例 20】如图，抛物线 $y=ax^2$ 上的点 B, C 与 x 轴上的两点 $A(-6, 0), D(2, 0)$ 构成

平行四边形， BC 与 y 轴相交于点 $E(0, 6)$ ，求系数 a 的值.

【难度】★★★





模块三：二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像



知识精讲

1、二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像

二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像称为抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ，这个函数的解析式就是这条抛物线的表达式。

任意一个二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ （其中 a 、 b 、 c 是常数，且 $a \neq 0$ ）都可以运用配方法，把它的解析式化为 $y = a(x + m)^2 + k$ 的形式。

对 $y = ax^2 + bx + c$ 配方得： $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$ 。

由此可知：

抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ （其中 a 、 b 、 c 是常数，且 $a \neq 0$ ）的对称轴是直线 $x = -\frac{b}{2a}$ ，顶点坐标是 $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$ 。

当 $a > 0$ 时，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 开口向上，顶点是抛物线的最低点，抛物线在对称轴（即直线 $x = -\frac{b}{2a}$ ）左侧的部分是下降的，在对称轴右侧的部分是上升的；

当 $a < 0$ 时，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 开口向下，顶点是抛物线的最高点，抛物线在对称轴（即直线 $x = -\frac{b}{2a}$ ）左侧的部分是上升的，在对称轴右侧的部分是下降的。

2、二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像与 x 轴的交点的个数

判断二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像与 x 轴交点的个数，即为判断一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的解的个数，这样就可以利用一元二次方程根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 来进行解题。



例题解析

【例 21】 说出函数 $y = -2x^2 + 8x - 8$ 的图像的开口方向，对称轴，顶点坐标，这个函数有最大值还是最小值？是多少？

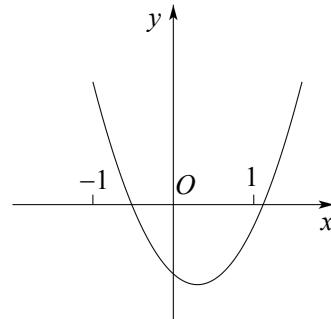
【难度】★

【例 22】 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像如上右图所示，则 abc ， $b^2 - 4ac$ ， $2a + b$ ，

$a + b + c$ ， $a - b + c$ 这五个式子中，值为正数的有（ ）

- A. 2 个 B. 3 个 C. 4 个 D. 5 个

【难度】★★



【例 23】 将抛物线 $y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2}x + 6$ 先向上平移 2 个单位长度，再向右平移 3 个单位长度后，得到的抛物线的解析式是_____.

【难度】★★

【例 24】 已知二次函数 $y = -x^2 + bx + 5$ ，它的图像经过点 $(2, -3)$.

- (1) 求这个函数关系式及它的图像的顶点坐标；
- (2) 当 x 为何值时，函数 y 随着 x 的增大而增大？当 x 为何值时，函数 y 随着 x 的增大而减小？

【难度】★★



【例 25】 若直线 $y = x + 2$ 与抛物线 $y = x^2 + 2x$ 有交点，则它的坐标是_____.

【难度】★★

【例 26】 已知二次函数 $y = x^2 - 2x - 3$ ，当 $0 \leq x \leq 3$ 时， y 的最大值是_____，最小值是_____.

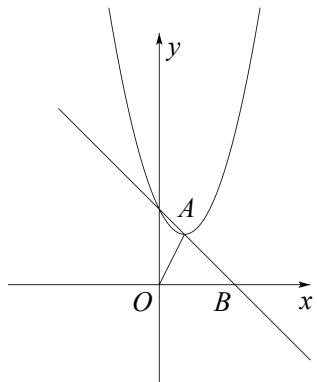
【难度】★★

【例 27】 已知抛物线 $y = x^2 - 2x + a$ 的顶点 A 在直线 $y = -x + 3$ 上，直线 $y = -x + 3$ 与 x

轴的交点为 B 点，点 O 为直角坐标系的原点.

- (1) 求点 B 的坐标与 a 的值；
- (2) 求 $\triangle AOB$ 的面积.

【难度】★★



【例 28】 已知抛物线 $y = x^2 - (a+2)x + 9$ 的顶点在坐标轴上，求 a 的值.

【难度】★★★



【例 29】若对于任何实数 x , 二次函数 $y=(m-1)x^2+2mx+m+3$ 的图像全在 x 轴上方,

求 m 的取值范围.

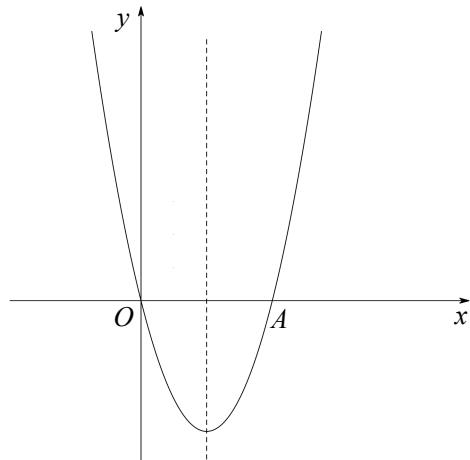
【难度】★★★

【例 30】如图, 抛物线 $y=x^2-4x$ 与 x 轴交于 O 、 A 两点, P 为抛物线上一点, 过点 P

的直线 $y=x+m$ 与对称轴交于点 Q .

- (1) 这条抛物线的对称轴是_____, 直线 PQ 与 x 轴所夹的锐角的度数是_____;
- (2) 若两个三角形的面积满足 $S_{\triangle POQ}=\frac{1}{3}S_{\triangle PAQ}$, 求 m 的值;
- (3) 当点 P 在 x 轴下方的抛物线上时, 过点 $C(2, 2)$ 的直线 AC 与直线 PQ 交于点 D , 求:
① $PD+DQ$ 的最大值; ② $PD \cdot DQ$ 的最大值.

【难度】★★★





随堂检测

【习题 1】 下列函数中，不是二次函数的是（ ）

- A. $y = 1 - \sqrt{2}x^2$ B. $y = 2(x+1)^2 - 4$
C. $y = \frac{1}{2}(x-1)(x+4)$ D. $y = (x-2)^2 - x^2 + 1$

【难度】★

【习题 2】 抛物线 $y = 2(x-3)^2$ 的顶点在（ ）

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. x 轴上 D. y 轴上

【难度】★

【习题 3】 已知抛物线 $y = x^2 + 4x + 3$ ，请回答以下问题：

- (1) 它的开口方向_____，对称轴是直线_____，顶点坐标为_____；
(2) 图像与 x 轴的交点为_____，与 y 轴的交点为_____.

【难度】★

【习题 4】 有下列 4 个函数关系式：①正方形的面积 S 与边长 x 的关系；②圆的面积 S 与圆周长 l 的关系；③已知周长为 l 的矩形中，面积 S 与一边长 x 的关系；④已知面积为 S 的矩形中，周长 l 与一边长 x 的关系。其中二次函数有（ ）

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【难度】★★



【习题 5】 抛物线 $y = ax^2 + bx + 2$ 经过点 $(-2, 3)$, 则 $3b - 6a = \underline{\hspace{2cm}}$.

【难度】★★

【习题 6】 已知函数 $y = (m+2)x^{m^2-m} + (m+1)x$, (m 为常数).

- (1) 当 m 为何值时, 这个函数是二次函数?
- (2) 当 m 为何值时, 这个函数是一次函数?

【难度】★★

【习题 7】 把抛物线 $y = -2(x+2)^2$ 向左平移 4 个单位, 再向下平移 3 个单位, 求平移后抛物线的函数解析式, 并指出它的开口方向, 顶点坐标和对称轴.

【难度】★★

【习题 8】 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 的对称轴是直线 $x = 1$.

- (1) 求证: $2a + b = 0$;
- (2) 若关于 x 的方程 $ax^2 + bx - 8 = 0$ 的一个根为 4, 求方程的另一个根.

【难度】★★



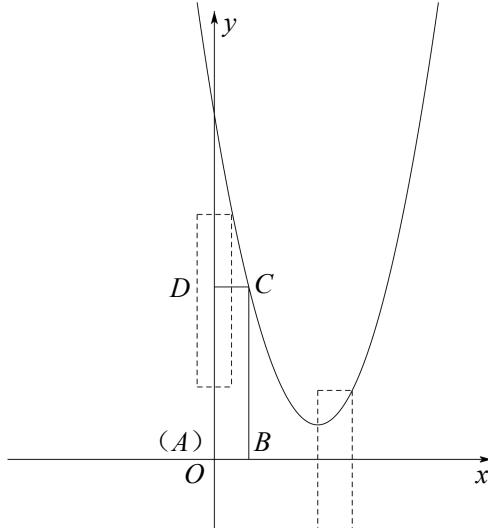
【习题 9】如图，已知矩形 $ABCD$ 的宽 $CD = 1$ ，点 C 在 y 轴右侧沿抛物线 $y = x^2 - 6x + 10$

滑动，滑动过程中保持 $CD \parallel x$ 轴。当点 D 在 y 轴上时， AB 正好在 x 轴上。

(1) 求矩形的长 BC ；

(2) 当矩形在滑动过程中被 x 轴分成两部分的面积之比为 $1 : 4$ 时，求点 C 的坐标。

【难度】★★★



【习题 10】如图，二次函数 $L_1 : y = ax^2 - 2ax + a + 3$ ($a > 0$) 和二次函数 $L_2 : y = -a(x+1)^2 + 1$

($a > 0$) 的图像的顶点分别为 M 、 N ，与 y 轴分别交于点 E 、 F 。

(1) 函数 $y = ax^2 - 2ax + a + 3$ ($a > 0$) 的最小值为_____；当二次函数 L_1 、 L_2 的 y 值同时

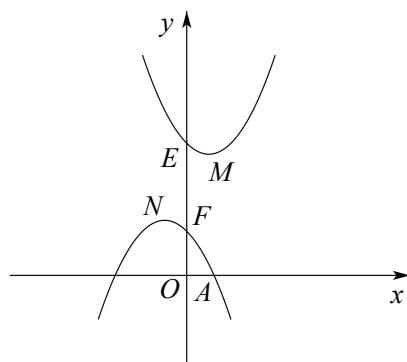
随着 x 的增大而减小时， x 的取值范围是_____；

(2) 当 $EF = MN$ ，求 a 的值，并判断四边形 $ENFM$ 的形状（直接写出，不必证明）；

(3) 若二次函数 L_2 的图像与 x 轴的右交点为 $A(m, 0)$ ，当 $\triangle AMN$ 为等腰三角形时，求方程

$$-a(x+1)^2 + 1 = 0 \text{ 的解.}$$

【难度】★★★





课后作业

【作业 1】 对于任意实数 x , 二次函数 $y=ax^2$ 的值总是非正数, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $a > 0$ B. $a < 0$ C. $a \geq 0$ D. $a \leq 0$

【难度】★

【作业 2】 抛物线 $y=2x^2 - 4x - 3$, 当 x _____ 时, 函数值 y 随 x 的增大而减小; 当 x _____

时, 函数值 y 随 x 的增大而增大; 当 x _____ 时, 函数取最 _____ 值为 _____.

【难度】★

【作业 3】 抛物线 $y=-3x^2 - x + 4$ 与坐标轴的交点个数是 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

【难度】★

【作业 4】 给任意实数 n , 得到不同的抛物线 $y=x^2 + n$, 当 $n=0, 1$ 或 -1 时, 关于这些抛

物线有以下结论: ①开口方向不同; ②对称轴不同; ③都有最低点; ④可以通过一个抛物线平移得到另一个, 其中判断正确的个数是 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【难度】★★



引导式教学，拒绝灌输！

【作业 5】 已知函数 $y = (m-1)x^{m^2+1} + 3x$, 当 m _____ 时, 它是二次函数.

【难度】★★

【作业 6】 抛物线 $y = 6(x+1)^2 - 2$ 可由抛物线 $y = 6x^2 - 2$ 向_____平移_____个单位得到.

【难度】★★

【作业 7】 二次函数 $y = -2(x+m)^2$ 的图像顶点在_____轴上, 对称轴直线 $x=1$, 则函数解析式为_____.

【难度】★★

【作业 8】 已知抛物线 $y = (x-m)^2 - (x-m)$, 其中 m 是常数.

(1) 求证: 不论 m 为何值, 该抛物线与 x 轴一定有两个公共点;

(2) 若该抛物线的对称轴为直线 $x = \frac{5}{2}$.

①求该抛物线的函数解析式;

②该抛物线沿 y 轴向上平移多少个单位长度后, 得到的抛物线与 x 轴只有一个公共点?

【难度】★★



【作业 9】如图 1，一次函数 $y = kx + b$ 的图像与二次函数 $y = x^2$ 的图像相交于 A 、 B 两点，

点 A 、 B 的横坐标分别为 m 、 n ($m < 0$, $n > 0$).

- (1) 当 $m = -1$, $n = 4$ 时, $k = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$;
当 $m = -2$, $n = 3$ 时, $k = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

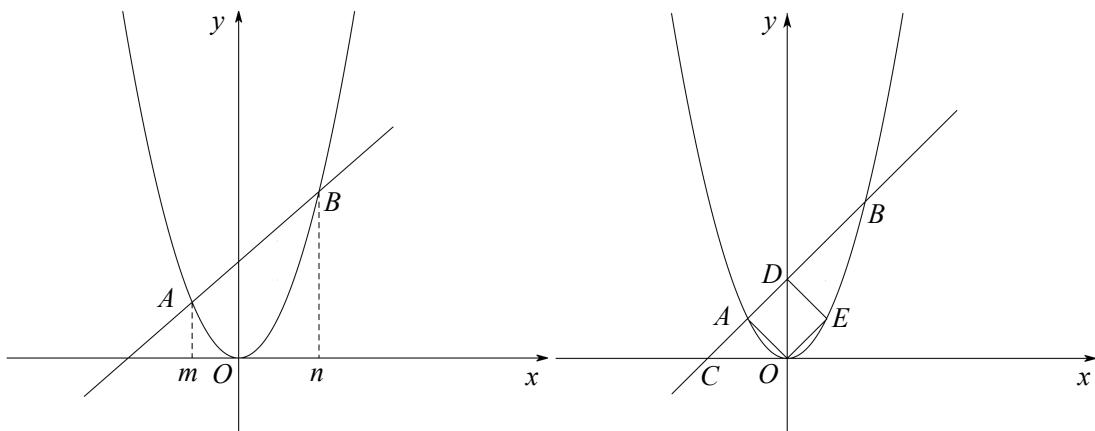
(2) 用含 m 、 n 的代数式分别表示 k 与 b .

(3) 利用(2)的结论, 解答下面问题:

如图 2, 直线 AB 与 x 轴、 y 轴分别交于点 C 、 D , 点 A 关于 y 的对称点为 E , 连接 AO 、 OE 、 ED .

- ①当 $m = -3$, $n > 3$ 时, 求 $\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\text{四边形 } AOED}}$ 的值 (用含 n 的代数式表示)
②当四边形 $AOED$ 为菱形时, m 与 n 满足的关系为 $\underline{\hspace{4cm}}$; 当四边形 $AOED$ 为正方形时, $m = \underline{\hspace{2cm}}$, $n = \underline{\hspace{2cm}}$.

【难度】★★★





【作业 10】如图，两条抛物线的解析式分别是 $y_1 = -ax^2 - ax + 1$, $y_2 = -ax^2 - ax - 1$ (其中 a 为常数) .

- (1) 请写出三条与上述抛物线有关的不同类型的结论；
- (2) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时，设 $y_1 = -ax^2 - ax + 1$ 与 x 轴分别交于 M 、 N 两点 (M 在 N 的左边)，
 $y_2 = -ax^2 - ax - 1$ 与 x 轴分别交于 E 、 F 两点 (E 在 F 的左边)，观察 M 、 N 、 E 、 F 四点坐标，请写出一个你所得到的正确的结论，并说明理由；
- (3) 设上述两条抛物线相交于 A 、 B 两点，直线 l 、 l_1 、 l_2 都垂直于 x 轴， l_1 、 l_2 分别经过 A 、 B 两点， l 在 l_1 、 l_2 之间，且 l 与两条抛物线分别交于 C 、 D 两点，求线段 CD 的最大值.

【难度】★★★

