圆的基本性质

内容分析

圆的基本性质是初中数学九年级下学期第一章第一节的内容．需要掌握点与圆的位置关系，理解圆心角、弧、弦、弦心距的概念和掌握它们之间的关系，重点是这四者关系的灵活运用，以及垂径定理及其推论的应用．

知识结构

圆的基本性质
- 圆的确定
- 圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系
- 垂径定理

模块一：圆的确定

知识精讲

1、 圆的概念

圆：平面上到一个定点的距离等于定长的所有点所成的图形．

圆心：以上概念中的“**定点**”；以点 O 为圆心的圆称为“圆 O”，记作 $\odot O$ ．

半径：联结圆心和圆上任意一点的线段；以上概念中的“**定长**”是圆的半径长．

2、 点与圆的位置关系

设一个圆的半径长为 R，点 P 到圆心的距离为 d，则有以下结论：

当点 P 在圆外时，$d>R$；当点 P 在圆上时，$d=R$；当点 P 在圆内时，$0\le d<R$ ．

反之亦然．

3、 相关定理：不在同一直线上的三个点确定一个圆．

三角形的三个顶点确定一个圆．经过一个三角形各顶点的圆叫做这个**三角形的外接圆**，外接圆的圆心叫做这个**三角形的外心**；这个三角形叫做这个**圆的内接三角形**．

如果一个圆经过一个多边形的各顶点，那么这个圆叫做这个**多边形的外接圆**，这个多边形叫做这个**圆的内接多边形**．

例题解析

【例1】 在平面直角坐标系内，A（-3，$-\tan 30°$），B（$\dfrac{\sqrt{a^2}}{|a|}$，0），$\odot A$ 的半径为 4，试说明点 B 与 $\odot A$ 的位置关系.

【难度】★

【答案】点 B 在 $\odot A$ 外.

【解析】由题意得 $A\left(-3，-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$，$B(1，0)$，所以 $AB=\sqrt{(-3-1)^2+\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$，

因为 $AB>4$，所以点 B 在 $\odot A$ 外.

【总结】本题考察了点与圆的位置关系，设一个圆的半径长为 R，点 P 到圆心的距离为 d，则有以下结论：当点 P 在圆外时，$d>R$；当点 P 在圆上时，$d=R$；当点 P 在圆内时，$0\le d<R$．反之亦然.

【例2】 过一个点可以画______个圆，过两个点可以画______个圆，过三个点可以画______个圆.

【难度】★

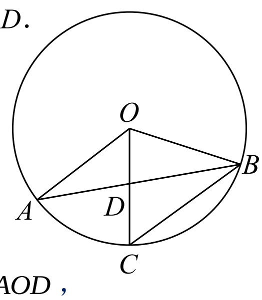
【答案】无数；无数；一或零.

【解析】不共线的三点才可以确定一个圆.

【总结】本题考察了圆的确定，不共线的三点可以确定一个圆.

【例3】 已知，如图，在 $\odot O$ 中，AB、BC 为弦，OC 交 AB 于点 D.

求证：（1）$\angle ODB>\angle OBD$；（2）$\angle ODB>\angle OBC$.



【难度】★

【答案】详见解析.

【解析】（1）$\because OA=OB$，$\therefore \angle OAB=\angle OBA$，

$\because \angle ODB=\angle OAB+\angle AOD$，$\therefore \angle ODB=\angle OBA+\angle AOD$，

$\therefore \angle ODB>\angle OBD$.

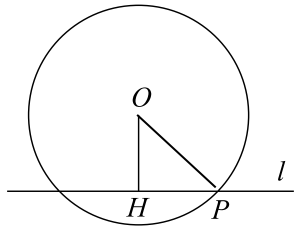
（2）$\because OC=OB$，$\therefore \angle OBC=\angle OCB$，$\because \angle ODB=\angle OCB+\angle DBC$，

$\therefore \angle ODB=\angle OBC+\angle DBC$，$\therefore \angle ODB>\angle OBC$.

【总结】本题考查了圆的性质，利用外角是解决问题的关键.

【例4】 如图，$\odot O$ 的半径为 15，O 到直线 l 的距离 $OH=9$，A、B、C 为直线 l 上的三个点，$AH=9$，$BH=12$，$CH=15$，请分别说明点 A、B、C 与 $\odot O$ 的位置关系.

【难度】★★



【答案】A 在 $\odot O$ 内； B 在 $\odot O$ 上； C 在 $\odot O$ 外.

【解析】连接 OP，$\because OP=15$， $OH=9$，

$\therefore PH=\sqrt{OP^2-OH^2}=12$，

$\because AH=9<HP$， $\therefore A$ 在 $\odot O$ 内；

$\because BH=12=HP$， $\therefore B$ 在 $\odot O$ 上；

$\because CH=12<HP$， $\therefore C$ 在 $\odot O$ 外.

【总结】本题考查了点与圆的位置关系.

【例5】 若 A（a，-27）在以点 B（-35，-27）为圆心，37 为半径的圆上，求 a 的值.

【难度】★★

【答案】2 或 -72.

【解析】$\because A$ 点在 $\odot B$ 上，$\therefore BA=37$，即 $\sqrt{(a+35)^2+(-27+27)^2}=37$，

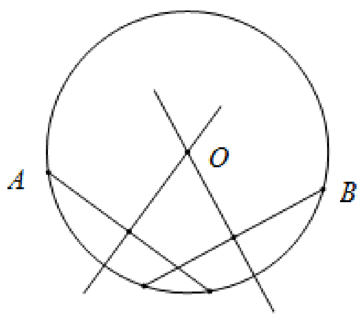
解得 $a_1=2$， $a_2=-72$.

【总结】本题考查了点与圆的位置关系，注意此题有两种解.

【例6】 如图，作出 AB 所在圆的圆心，并补全整个圆.

【难度】★★

【答案】如图所示.

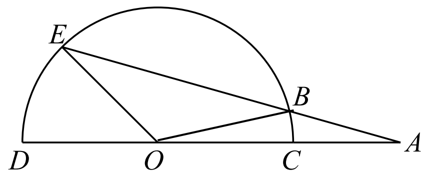


【解析】在 AB 上任意作两条弦，分别做两条弦的垂直平分线，两垂直平分线的交点即为圆心.

【总结】本题考查了不共线三点定圆的作法.

【例7】 如图，CD 是半圆的直径，O 是圆心，E 是半圆上一点，且 $\angle EOD=45°$，A 是 DC 延长线上一点，AE 与半圆交于 B，若 $AB=OC$，求 $\angle EAD$ 的度数．

【难度】★★★



【答案】$\angle EAD=15°$．

【解析】$\because AB=OC$，$OC=OB$，

$\therefore AB=OB$，$\therefore \angle EAD=\angle BOA$，

$\therefore \angle OBE=\angle BOA+\angle EAD=2\angle EAD$，

$\because OB=OE$，$\therefore \angle E=\angle OBE$，$\therefore \angle OEB=2\angle EAD$，

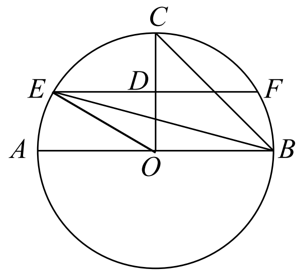
$\because \angle EOD=\angle OEA+\angle EAD=3\angle EAD=45°$，

$\therefore \angle EAD=15°$．

【总结】本题考查了同一个圆中半径处处相等及三角形外角的应用．

【例8】 已知，如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，半径 $OC\perp AB$，过 OC 的中点 D 作 $EF\,//\,AB$．

求证：$\angle ABE=\dfrac{1}{2}\angle CBE$．



【难度】★★★

【答案】详见解析．

【解析】连接 OE，

$\because OC\perp AB$，$EF\,//\,AB$，

$\therefore OC\perp EF$，$\angle OBE=\angle DEB$，

$\because OB=OE$，$\therefore \angle OBE=\angle OEB$，$\therefore \angle OBE=\angle OEB=\angle DEB$，

$\because D$ 为 OC 的中点，$\therefore OD=\dfrac{1}{2}OC=\dfrac{1}{2}OE$，

$\therefore \angle OED=30°$，$\therefore \angle ABE=\dfrac{1}{2}\angle OED=15°$，

$\therefore \angle CBE=\angle CBO-\angle ABE=45°-15°=30°$，

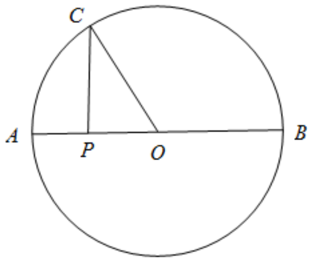
$\therefore \angle ABE=\dfrac{1}{2}\angle CBE$．

【总结】本题主要考查了等腰三角形的性质以及直角三角形性质的综合运用．

【例9】 已知：AB 是$\odot O$ 的直径，点 P 是 OA 上任意一点，点 C 是$\odot O$ 上任意一点．

求证：$PA \le PC \le PB$．

【难度】★★★



【答案】详见解析．

【解析】当 P 与 O 重合时，可得 $PA = PC = PB$，

当 P 与 O 不重合时，连接 OC，则 $OA = OC = OB$，

$\therefore PA = OA - OP = OC - OP < PC$，

$PB = OP + OB = OP + OC > PC$，

综上可知 $PA \le PC \le PB$．

【总结】本题考查了圆中半径处处相等，并利用三角形的三边关系解决问题．

模块二：圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系

知识精讲

1、 圆心角、弧、弦、弦心距的概念

圆心角：以圆心为顶点的角叫做**圆心角**；

弧：圆上任意两点之间的部分叫做**圆弧**，简称**弧**；

弦：连接圆上任意两点的线段叫做**弦**，过圆心的弦就是**直径**；

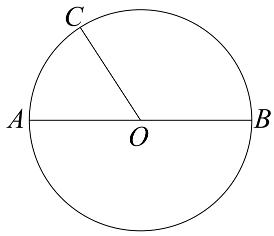
弦心距：圆心到弦的距离叫做**弦心距**.

2、 半圆、优弧、劣弧

半圆：圆的任意一条直径的两个端点将圆分成两条弧，每一条弧都叫做**半圆**.

优弧：大于半圆的弧叫做**优弧**.

劣弧：小于半圆的弧叫做**劣弧**.



如图，以 A、C 为端点的劣弧记作 AC ，读作“弧 AC”；

以 A、C 为端点的优弧记作 ABC ，读作“弧 ABC”.

3、 等弧和等圆

能够重合的两条弧称为**等弧**，或者说这两条弧相等．若 AB 与 $A'B'$ 是等弧，记作

$AB = A'B'$.

半径相等的两个圆一定能够重合，我们把半径相等的两个圆称为**等圆**.

4、 圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理

在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦相等，所对的弦的弦心距相等.

5、 圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理的推论

在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条劣弧（或优弧）、两条弦、两条弦的弦心距得到的四组量中有一组量相等，那么它们所对应的其余三组量也分别相等.

例题解析

【例10】 下列命题中真命题的个数是（　　）

① 相等的圆心角所对的弧也相等；

② 在同圆中，如果两条弦相等，那么所对的弧也相等；

③ A、B 是$\odot O$ 上任意两点，则 $AO+BO$ 等于$\odot O$ 的直径长；

④ 三角形的外心到三角形三边的距离相等.

A．1 个　　　　B．2 个　　　　C．3 个　　　　D．4 个

【难度】★

【答案】A.

【解析】① 需说明是在同圆或等圆中，故①错误；

② 一条弦对两条弧，所以需要说明是优弧还是劣弧，故②错误；

③ 易知 AO 、 BO 均为圆的半径，所以 $AO+BO$ 为直径，故③正确；

④ 三角形的外心到三角形三个顶点的距离相等，故④错误.

【总结】本题考查了圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理.

【例11】 一条弦把圆分成 $1:3$ 两部分，则弦所对的圆心角为______°．

【难度】★

【答案】90.

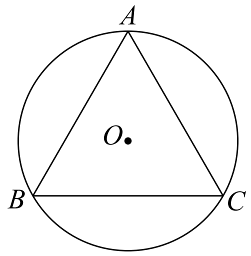
【解析】∵一条弦把圆分成 $1:3$ 两部分，

∴整个圆分为四等分，则劣弧的度数为$360°\div 4=90°$，

∴弦所对的圆心角为$90°$.

【总结】本题考查了同圆中圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系.

【例12】 如图，在$\odot O$ 中， $AB=AC$， $\angle B=70°$，则 $\angle BAC=$______.



【难度】★

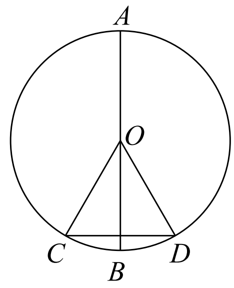
【答案】$40°$.

【解析】∵在$\odot O$ 中， $AB=AC$， ∴ $\angle C=\angle B$， ∵ $\angle B=70°$，

∴ $\angle BAC=180°-\angle B-\angle C=40°$.

【总结】本题主要考查等腰三角形的性质以及三角形内角和定理的应用.

【例13】 如图，已知$\odot O$的半径是6，$\angle BOD=30^\circ$，$BD=BC$，$CD=$______.



【难度】★★

【答案】6.

【解析】$\because BD=BC$，$\angle BOD=30^\circ$，$\therefore \angle BOD=\angle BOC=30^\circ$，

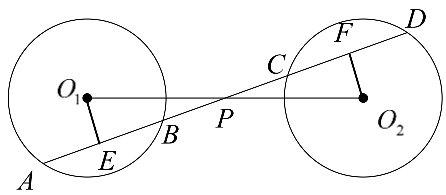
$\therefore \angle COD=60^\circ$，$\because OC=OD$，$\therefore \Delta OCD$是等边三角形，

$\therefore CD=6$.

【总结】本题考查了圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理的应用.

【例14】 如图，$\odot O_1$和$\odot O_2$是等圆，P是O_1O_2的中点，过点P作直线AD交$\odot O_1$于点A、B，交$\odot O_2$于点C、D.

求证：$AB=CD$.



【难度】★★

【答案】详见解析.

【解析】作$O_1E\perp AB$于E，$O_2F\perp CD$于F，

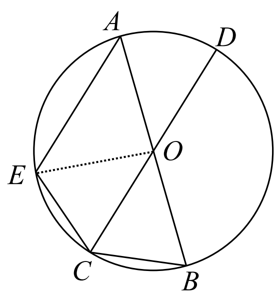
$\because P$是O_1O_2的中点，$\therefore \Delta PEO_1\cong\Delta PFO_2$，$\therefore O_1E=O_2F$，

$\because \odot O_1$和$\odot O_2$是等圆，$\therefore AB=CD$.

【总结】本题考查了圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理的应用.

【例15】 已知，如图，AB、CD是$\odot O$的直径，弦$AE // CD$，联结CE、BC.

求证：$BC=CE$.



【难度】★★

【答案】详见解析.

【解析】$\because OA=OE$，$\therefore \angle A=\angle OEA$，

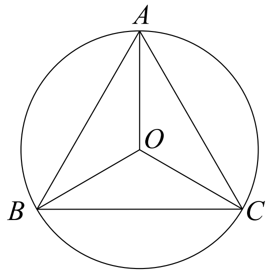
$\because AE // CD$，$\therefore \angle BOC=\angle A$，$\angle EOC=\angle OEA$，

$\therefore \angle BOC=\angle EOC$，$\therefore BC=CE$.

【总结】本题考查了圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理的应用.

【例16】 如图，$\odot O$ 是 ΔABC 的外接圆，AO 平分 $\angle BAC$，$\angle AOB=\angle BOC$，判断 ΔABC 的形状，并说明理由.

【难度】★★



【答案】等边三角形.

【解析】$\because AO$ 平分 $\angle BAC$，$\therefore \angle BAO=\angle CAO$，

$\because OA=OC=OB$，

$\therefore \angle ABO=\angle BAO=\angle CAO=\angle ACO$，

$\therefore \angle AOB=\angle AOC$，

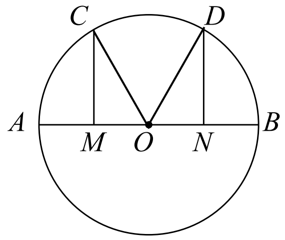
$\because \angle AOB=\angle BOC$，$\therefore \angle AOB=\angle AOC=\angle BOC$，

$\therefore AB=BC=CA$，$\therefore \Delta ABC$ 是等边三角形.

【总结】本题考查同圆中相等的圆心角所对的弦相等.

【例17】 已知，如图，AB 是 $\odot O$ 直径，M、N 分别是 AO、BO 的中点，$CM\perp AB$，$DN\perp AB$.

求证：$AC=BD$.



【难度】★★★

【答案】详见解析.

【解析】连接 OC、OD，则 $OC=OD$，

$\because M$、N 分别是 AO、BO 的中点，$\therefore OM=ON$，

$\because CM\perp AB$，$DN\perp AB$，$\therefore \Delta OCM\cong\Delta ODN$，

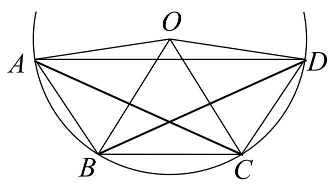
$\therefore \angle COM=\angle DON$，$\therefore AC=BD$.

【总结】本题考查了同圆中相等的圆心角所对的弧相等.

【例18】 如图，以点 O 为圆心的圆弧上依次有四个点 A、B、C、D，且 $\angle AOB=\angle COD$.

求证：四边形 $ABCD$ 是等腰梯形.

【难度】★★★



【答案】详见解析.

【解析】连接 AC、BD，

$\because \angle AOB=\angle COD$，$\therefore AB=CD$，

$\because \angle ACB=\dfrac{1}{2}\angle AOB$，$\angle CAD=\dfrac{1}{2}\angle COD$，

$\therefore \angle ACB=\angle CAD$，$\therefore AD\ /\!/\ BC$，$\therefore$四边形 $ABCD$ 是等腰梯形.

【总结】本题综合性较强，主要考查了同一条弦所对的圆周角和圆心角的关系，老师可以选择性的讲解.

模块三：垂径定理

知识精讲

1、 垂径定理

如果圆的一条直径垂直于一条弦，那么这条直径平分这条弦，并且平分这条弦所对的弧．

2、 相关结论

（1）如果圆的直径平分弦（这条弦不是直径），那么这条直径垂直于这条弦，并且平分这条弦所对的弧．

（2）如果圆的直径平分弧，那么这条直径就垂直平分这条弧所对的弦．

（3）如果一条直线是弦的垂直平分线，那么这条直线经过圆心，并且平分这条弦所对的弧．

（4）如果一条直线平分弦和弦所对的一条弧，那么这条直线经过圆心，并且垂直于这条弦．

（5）如果一条直线垂直于弦，并且平分弦所对的一条弧，那么这条直线经过圆心，并且平分这条弦．

总结：在圆中，对于某一条直线“经过圆心”、“垂直于弦”、“平分弦”、“平分弦所对的弧”这四组关系中，如果有两组关系成立，那么其余两组关系也成立．

例题解析

【例19】 $\odot O$ 的直径为10，圆心 O 到弦 AB 的距离 OM 的长为3，则弦 AB 的长为______．

【难度】★

【答案】8．

【解析】$\because$ $\odot O$ 的直径为 10，$\therefore OB=5$，$\because OM\perp AB$，$\therefore OM$ 平分 AB，

$\therefore BM=\sqrt{OB^2-OM^2}=4$，$\therefore AB=2BM=8$．

【总结】本题考查了垂径定理的运用．

【例20】 在半径为2的$\odot O$中，弦AB的长为$2\sqrt{2}$，则弦AB所对的圆心角$\angle AOB=$____°．

【难度】★

【答案】90．

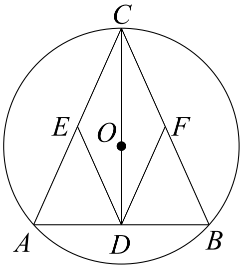
【解析】作$OD\perp AB$于D，则$AD=BD=\sqrt{2}$，

$\because OB=2$，$\therefore OD=\sqrt{OB^2-BD^2}=\sqrt{2}$，$\therefore \angle BOD=45^\circ$，$\therefore \angle AOB=90^\circ$．

【总结】本题考查了垂径定理的运用．

【例21】 如图，$\odot O$是ΔABC的外接圆，圆心O在这个三角形的高CD上，点E和点F分别是边AC和BC的中点．

求证：四边形$CEDF$是菱形．



【难度】★★

【答案】详见解析．

【解析】$\because CD\perp AB$，且CD过圆心，$\therefore AD=BD$，

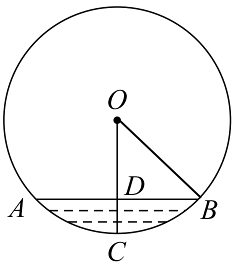
$\therefore CA=CB$，$\because$点E和点F分别是边AC和BC的中点，

$\therefore CE=\dfrac{1}{2}AC$，$DE=\dfrac{1}{2}AC$，$CF=\dfrac{1}{2}BC$，$DF=\dfrac{1}{2}BC$，

$\therefore CE=DE=DF=CF$，$\therefore$四边形$CEDF$是菱形．

【总结】本题考查了垂径定理的运用即菱形的判定．

【例22】 如图，一根横截面为圆形的输水管道，阴影部分为有水部分，此时水面宽AB为0.6米，污水深CD为0.1米，求圆形的下水管道的直径．



【难度】★★

【答案】1米．

【解析】连接OB，设圆半径为R，则$OD=R-0.1$，

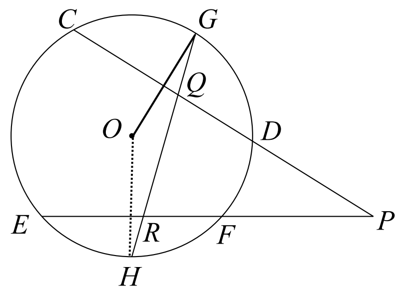
$BD=\dfrac{1}{2}AB=0.3$，

由$OD^2+BD^2=OB^2$得$\left(R-0.1\right)^2+0.3^2=R^2$，解得$R=0.5$，

所以下水管道的直径为1米．

【总结】本题考查了垂径定理以及勾股定理的综合运用．

【例23】 如图，在$\odot O$中，弦CD、EF的延长线相交于点P，G、H分别是CD、EF的中点，GH与PC、PE分别相交于Q、R两点，试判断ΔPQR的形状，并证明所得到的结论.



【难度】★★

【答案】等腰三角形.

【解析】连接OG、OH，

$\because G$、H分别是CD、EF的中点，

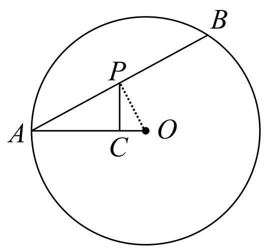
$\therefore OG\perp CD$，$OH\perp EF$，

$\because OH=OG$，$\therefore \angle H=\angle G$，$\therefore \angle GQC=\angle HRE$，$\therefore \angle PQR=\angle PRQ$，

$\therefore \Delta PQR$是等腰三角形.

【总结】本题考查了垂径定理的运用.

【例24】 如图，P是$\odot O$的弦AB的中点，$PC\perp OA$，垂足为C，求证：$PA\bullet PB=AC\bullet AO$.



【难度】★★

【答案】详见解析.

【解析】连接OP，$\because P$是$\odot O$的弦AB的中点，

$\therefore OP\perp AB$，$\because PC\perp OA$，

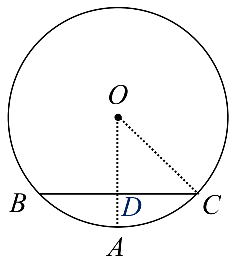
$\therefore \Delta ACP\backsim\Delta APO$，$\therefore \dfrac{PA}{AC}=\dfrac{AO}{PA}$，$\because PA=PB$，

$\therefore \dfrac{PA}{AC}=\dfrac{AO}{PB}$，即$PA\bullet PB=AC\bullet AO$.

【总结】本题考查了垂径定与相似三角形的综合运用.

【例25】 位于本市浦东临港新城的滴水湖是圆形人工湖．为测量该湖的半径，小智和小方沿湖边选取 A、B、C 三根木柱，使得 A、B 之间的距离与 A、C 之间的距离相等，并测得 BC 长 240 米，A 到 BC 的距离为 5 米，如图所示．请你帮他们求出滴水湖的半径．

【难度】★★



【答案】1442.5 米．

【解析】连接 OA 交 BC 于 D 点，连接 OC，

$\because A$、B 之间的距离与 A、C 之间的距离相等，

$\therefore OA\perp BC$， $BD=DC$，

设半径为 R，则 $OD=R-5$， $DC=120$，

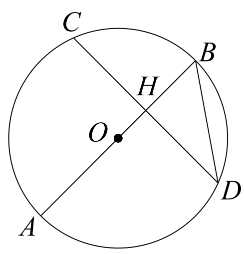
由 $OD^2+DC^2=OC^2$， $\therefore (R-5)^2+120^2=R^2$，解得： $R=1442.5$，

所以滴水湖的半径为 1442．5 米．

【总结】本题考查了垂径定理的运用．

【例26】 如图，弦 CD 垂直于⊙O 的直径 AB，垂足为 H，且 $CD=2\sqrt{2}$， $BD=\sqrt{3}$，则 AB 的长为_______．

【难度】★★



【答案】3．

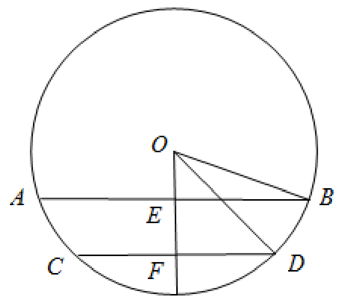
【解析】由题意得 $DH=\sqrt{2}$， $BH=\sqrt{DB^2-DH^2}=1$，

设半径为 R，则 $OH=R-1$，由 $OD^2=OH^2+HD^2$，

$\therefore R^2=(R-1)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2$，解得 $R=\dfrac{3}{2}$， $\therefore AB=2R=3$．

【总结】本题考查了垂径定理的运用．

【例27】 已知$\odot O$的半径$r=4$，AB、CD 为$\odot O$的两条弦，AB、CD 的长分别是方程$x^2-\left(4\sqrt{3}+4\right)x+16\sqrt{3}=0$的两根，其中$AB>CD$，且$AB\parallel CD$，求$AB$与$CD$间的距离.



【难度】★★★

【答案】$2\sqrt{3}+2$或$2\sqrt{3}-2$.

【解析】$\because x^2-\left(4\sqrt{3}+4\right)x+16\sqrt{3}=0$，

解得：$x_1=4\sqrt{3}$，$x_2=4$.

$\because AB>CD$，$\therefore AB=4\sqrt{3}$，$CD=4$，

当AB、CD圆心同侧时，作$OE\perp AB$于E，并延长交CD于F，

$\because AB\parallel CD$，$\therefore OF\perp CD$，$\therefore OE=\sqrt{OB^2-BE^2}=2$，$OF=\sqrt{OD^2-DF^2}=2\sqrt{3}$，

$\therefore EF=OF-OE=2\sqrt{3}-2$，

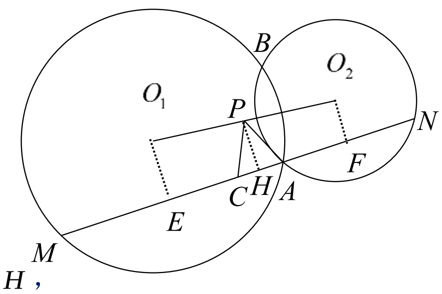
当AB、CD圆心两侧时，同理可得$EF=OF+OE=2\sqrt{3}+2$，

$\therefore AB$与CD间的距离是$2\sqrt{3}+2$或$2\sqrt{3}-2$.

【总结】本题考查了垂径定理的运用，做题的关键是要分情况讨论.

【例28】 已知，如图，$\odot O_1$与$\odot O_2$交于A、B，过A的直线分别交$\odot O_1$与$\odot O_2$于M、N，C是MN的中点，P是O_1O_2的中点.

求证：$PA=PC$.



【难度】★★★

【答案】详见解析.

【解析】作$O_1E\perp AM$，$O_2F\perp AN$，作$PH\perp MN$于H，

则$O_1E//PH//O_2F$，且E、F分别为AM、AN的中点，

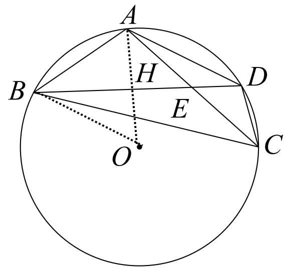
$\therefore AE+AF=EF=\dfrac{1}{2}MN$，$\because C$是$MN$的中点，$\therefore NC=\dfrac{1}{2}MN$，$\therefore EF=NC$，

$\therefore EC=FN=AF$，$\because P$是O_1O_2的中点，$\therefore EH=FH$，

$\therefore HC=HA$，$\therefore PA=PC$.

【总结】本题考查了垂径定理的运用.

【例29】 如图，已知四边形 $ABCD$ 外接圆 $\odot O$ 的半径为 2，对角线 AC 与 BD 的交点为 E，$AE=EC$， $AB=\sqrt{2}AE$， 且 $BD=2\sqrt{3}$，求四边形 $ABCD$ 的面积．



【难度】★★★

【答案】 $2\sqrt{3}$．

【解析】$\because AE=EC$， $AB=\sqrt{2}AE$，

$\therefore AB^2=2AE^2=AE\cdot AC$，

$\therefore \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AE}{AB}$， 又 $\angle EAB=\angle BAC$， $\therefore \Delta ABE \backsim \Delta ACB$，

$\therefore \angle ABE=\angle ACB$， $\because \angle ADB=\angle ACB$， $\therefore \angle ABE=\angle ADB$， $\therefore AB=AD$，

连接 AO 交 BD 于 H， 连接 BO，

$\because AB=AD$， $\therefore AO\perp BD$， $\therefore BH=DH=\sqrt{3}$，

$\because OB=2$， $\therefore OH=1$， $\therefore AH=1$，

$\therefore S_{\Delta ABD}=\dfrac{1}{2}\cdot BD\cdot AH=\sqrt{3}$， $\because$ E 为 AC 中点，

$\therefore S_{\Delta ABE}=S_{\Delta CBE}$， $S_{\Delta ADE}=S_{\Delta CDE}$， 即 $S_{\Delta ABD}=S_{\Delta CBD}$，

$\therefore S_{四边形ABCD}=2S_{\Delta ABD}=2\sqrt{3}$，

$\therefore$四边形 $ABCD$ 的面积是 $2\sqrt{3}$．

【总结】本题考查了垂径定理的运用及图形的分割，综合性较强，解题时注意认真观察．

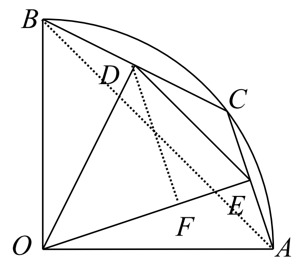
【例30】 如图，在半径为 2 的扇形 AOB 中，$\angle AOB=90°$，点 C 是弧 AB 上的一个动点（不与点 A、B 重合），$OD\perp BC$，$OE\perp AC$，垂足分别为 D、E.

（1）在 ΔDOE 中是否存在长度保持不变的边？如果存在，请指出并求其长度，如果不存在，请说明理由.

（2）设 $BD=x$，ΔDOE 的面积为 y，求 y 关于 x 的函数关系式，并写出它的定义域.

【难度】★★★

【答案】（1）DE 长度不变，$DE=\sqrt{2}$；（2）$y=\dfrac{4-x^2+x\sqrt{4-x^2}}{4}\left(0<x<\sqrt{2}\right)$.



【解析】（1）连接 AB，$\therefore AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=2\sqrt{2}$，

$\because OD\perp BC$，$OE\perp AC$，

$\therefore D$、E 分别为 BC、AC 中点，

$\therefore DE=\dfrac{1}{2}AB=\sqrt{2}$.

（2）作 $DF\perp OE$ 于 F，由（1）易得 $\angle DOE=\dfrac{1}{2}\angle AOB=45°$，

由题意得 $OD=\sqrt{4-x^2}$，$\therefore DF=OF=\dfrac{OD}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{8-2x^2}}{2}$，

$EF=\sqrt{DE^2-EF^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$，

$\therefore OE=OF+EF=\dfrac{\sqrt{8-2x^2}+\sqrt{2}x}{2}$，

$\therefore y=\dfrac{1}{2}\cdot DF\cdot OE=\dfrac{4-x^2+x\sqrt{4-x^2}}{4}\left(0<x<\sqrt{2}\right)$.

【总结】本题考查了垂径定理、勾股定理及中位线定理的综合运用，综合性较强.

随堂检测

【习题1】　已知⊙O 半径为 5，若点 P 不在⊙O 上，则线段 OP 的取值范围为______________.

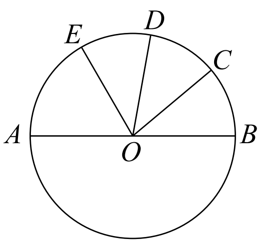
【难度】★

【答案】$0 \le OP < 5$ 或 $OP > 5$.

【解析】∵点 P 不在⊙O 上，∴当点 P 在⊙O 内时，$0 \le OP < 5$；当点 P 在⊙O 外时，$OP > 5$，综上可知 $0 \le OP < 5$ 或 $OP > 5$.

【总结】本题考查了点与圆的位置关系.

【习题2】　如图，AB 是直径，$BC = CD = DE$，$\angle BOC = 40°$，则 $\angle AOE =$_____.



【难度】★

【答案】$60°$.

【解析】∵ $BC = CD = DE$，∴ $\angle BOC = \angle COD = \angle DOE$，

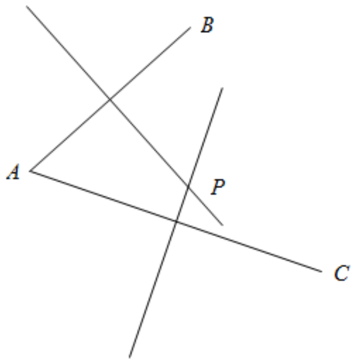
∵ $\angle BOC = 40°$，∴ $\angle AOE = 180° - 3\angle BOC = 60°$.

【总结】本题考查了圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理.

【习题3】　如图，为方便三个村庄居民子女的上学问题，上级镇政府决定在 A、B、C 三个村庄旁边造一所学校，要求它到各村庄的距离相等，请你在图中画出学校的位置.（保留作图痕迹）

【难度】★

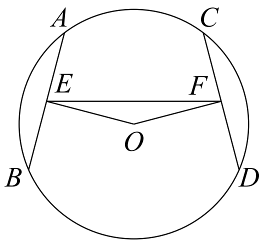
【答案】如图所示.



【解析】作线段 AB、AC 的中垂线的交点 P 即为学校位置.

【总结】本题考查了不共线的三点可以确定一个圆.

【习题4】　如图，$AB=CD$，$OE\perp AB$，$OF\perp CD$，$\angle OEF=25°$，求$\angle EOF$的度数．



【难度】★★

【答案】130°．

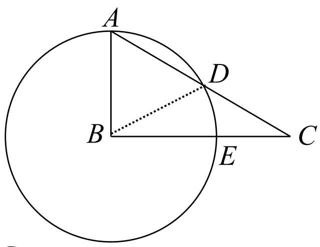
【解析】∵$AB=CD$，$OE\perp AB$，$OF\perp CD$，

∴$OE=OF$，∴$\angle OEF=\angle OFE$，∵$\angle OEF=25°$，

∴$\angle EOF=180°-\angle OEF-\angle OFE=180°-2\angle OEF=130°$．

【总结】本题考查了圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理．

【习题5】　如图，在ΔABC中，$\angle B=90°$，$\angle A=60°$，以点B为圆心，AB为半径画圆，交AC于点D，交BC于点E．求证：（1）$AD=2DE$；（2）D是AC的中点．



【难度】★★

【答案】详见解析．

【解析】（1）连接BD，∵$BA=BD$，$\angle A=60°$，

∴ΔABD是等边三角形，∴$\angle ABD=60°$，

∵$\angle B=90°$，∴$\angle DBC=30°$，∴$\angle ABD=2\angle DBC$，

∴$AD=2DE$；

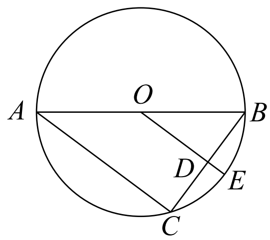
（2）由（1）得$\angle ADB=60°$，$DB=DA$，

∵$\angle ADB=\angle DBC+\angle C$，∴$\angle C=30°$，∴$DB=DC$，∴$DA=DC$，

∴D是AC的中点．

【总结】本题考查了圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理．

【习题6】　如图，AB为⊙O直径，E为BC的中点，OE交BC于点D，$BD=3$，$AB=10$，则$AC=$______．



【难度】★★

【答案】8．

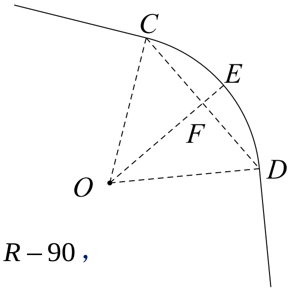
【解析】∵AB为⊙O直径，E为BC的中点，

∴$OD\perp BC$，$BD=CD$，∴$OD=\sqrt{OB^2-BD^2}=4$，

∵$OA=OB$，∴$AC=2OD=8$．

【总结】本题考查了垂径定理及三角形中位线．

【习题7】　如图，一条公路的转弯处是一段圆弧（即图中的CD），点 O 是CD的圆心，其中$CD=600$米，E为CD上一点，且$OE\perp CD$，垂足为F，$EF=90$米，求这段弯路的半径.



【难度】★★

【答案】545 米.

【解析】∵点 O 是CD的圆心，$OE\perp CD$，

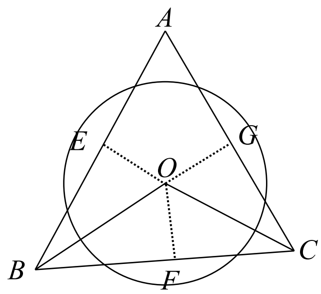
∴ $DF=\frac{1}{2}CD=300$，设$\odot O$的半径为R，则$OF=R-90$，

由$OD^2=OF^2+FD^2$得$R^2=(R-90)^2+300^2$，解得$R=545$，

∴这段弯路的半径为 545 米.

【总结】本题考查了垂径定理的应用.

【习题8】　如图，在ΔABC中，$\angle A=70^\circ$，$\odot O$截ΔABC的三边所得的弦长都相等，求$\angle BOC$的度数.



【难度】★★★

【答案】125°.

【解析】作$OE\perp AB$、$OF\perp BC$、$OG\perp AC$，

∵$\odot O$截ΔABC的三边所得的弦长都相等，

∴$OE=OF=OG$，

∴OB平分$\angle ABC$，OC平分$\angle ACB$，

∵$\angle A=70^\circ$，∴$\angle ABC+\angle ACB=110^\circ$，

∴$\angle OBC+\angle OCB=\frac{1}{2}\angle ABC+\frac{1}{2}\angle ACB=55^\circ$，

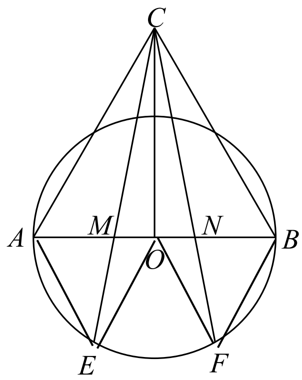
∴$\angle BOC=180^\circ-55^\circ=125^\circ$.

【总结】本题考查了圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理、角平分线的逆定理及三角形的内角和.

【习题9】　已知，如图，ΔABC 是等边三角形，AB 是$\odot O$ 的直径，$AE=EF=FB$，

CE、CF 交 AB 于点 M、N.

求证：$AM=MN=NB$.



【难度】★★★

【答案】详见解析.

【解析】连接 OE 、 OF ，

$\because AE=EF=FB$，

$\therefore \angle AOE=\angle EOF=\angle FOB=60^\circ$，

$\because \Delta ABC$ 是等边三角形，

$\therefore \angle CAO=\angle AOE$，$\therefore OE\parallel AC$，$\therefore \dfrac{OM}{MA}=\dfrac{OE}{AC}$.

$\because AC=BC$，O 是 AB 中点，　$\therefore \angle ACO=\dfrac{1}{2}\angle ACB=30^\circ$，

$\therefore OA=\dfrac{1}{2}AC$，$\therefore \dfrac{OE}{AC}=\dfrac{1}{2}$. $\therefore AM=2OM$，$\therefore AM=\dfrac{2}{3}OA$，$OM=\dfrac{1}{3}OA$，

同理 $BN=\dfrac{2}{3}OB$，$ON=\dfrac{1}{3}OB$，

$\because OA=OB$，$\therefore OM+ON=\dfrac{2}{3}OA$，$\therefore AM=MN=NB$.

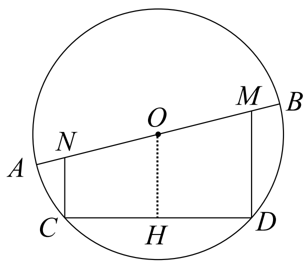
【总结】本题考查了圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理及平分线分线段成比例.

【习题10】　如图，AB 为$\odot O$ 的直径，CD 为弦，过点 C、D 分别作 $CN\perp CD$、$DM\perp CD$，

分别交 AB 于点 N、M，请问图中的 AN 与 BM 是否相等，说明理由.

【难度】★★★

【答案】AN 与 BM 相等.



【解析】作 $OH\perp CD$ 交 CD 于 H，

则 $CH=DH$，$\because CN\perp CD$、$DM\perp CD$，

$\therefore CN\parallel OH\parallel DM$，$\therefore ON=OM$，

$\because OA=OB$，$\therefore OA-ON=OB-OM$，

$\therefore AB=BM$.

【总结】本题考查了垂径定理及梯形的中位线.

课后作业

【作业1】 在下列命题中，正确的个数是（　　）

① 圆心角相等，则它们所对的弦必相等；

② 经过线段的两个端点及线段所在直线外一点可以确定一个圆；

③ 直径平分弦，则必垂直于弦；

④ 如果同圆中，两条弦互相平分，那么这两条弦都是直径.

A．0 个　　B．1 个　　C．2 个　　D．3 个

【难度】★

【答案】B.

【解析】① 需说明是在同圆或等圆中，故①错误；

② 不共线的三点可以确定一个圆，故②正确；

③ 直径平分非直径的弦，则必垂直于弦，故③错误；

④ 如果同圆中，直径垂直于弦，则必然平分弦，故④错误.

【总结】本题考查了圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理及垂径定理.

【作业2】 在 ΔABC 中，$\angle C=90°$，D、E 分别是 AB、AC 的中点，$AC=7$，$BC=4$. 若以点 C 为圆心，BC 为半径作圆，判断点 D、E 与 $\odot C$ 的位置关系.

【难度】★

【答案】点 D 在 $\odot C$ 外；点 E 在 $\odot C$ 内.

【解析】$\because AC=7$，$BC=4$，$\angle C=90°$，$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{65}$，

$\because R_C=4$，$DC=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{\sqrt{65}}{2}>R$，$\therefore$点 D 在 $\odot C$ 外；

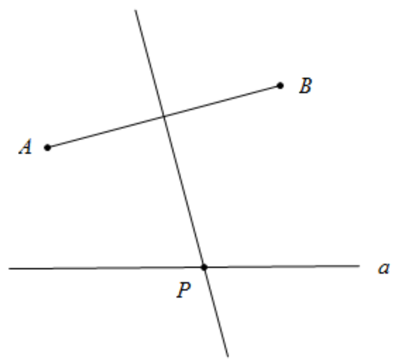
$EC=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{7}{2}<R$，$\therefore$点 E 在 $\odot C$ 内.

【总结】本题考查了点与圆的位置关系.

【作业3】　　已知直线 a 和直线外两点 A、B，经过 A、B 作一圆，使它的圆心在直线 a 上.

【难度】★

【答案】如图所示.



【解析】作线段 AB 的中垂线于直线 a 的交点 P 即为圆心.

【总结】本题考查了线段的垂直平分线的作法.

【作业4】　　已知 $\odot O$ 外一点 A 和圆上的点最大距离为 23 厘米，最小距离为 10 厘米，则 $\odot O$ 的半径为______厘米.

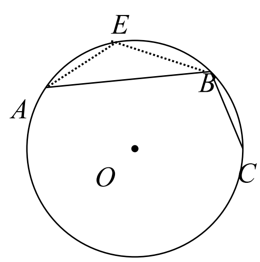
【难度】★★

【答案】$\frac{13}{2}$.

【解析】点 A 与圆心的连心线所在的直线与圆的交点即为点 A 到圆上的最大距离和最小距离，所以半径 $R=\left(23-10\right)\div 2=\frac{13}{2}$ 厘米.

【总结】本题考查了点与圆的位置关系.

【作业5】　　如图，在 $\odot O$ 中，$2AB=BC$，试确定 AB 与 $2BC$ 的大小关系.



【难度】★★

【答案】$AB<2BC$.

【解析】取 AB 中点 E，$\because 2AB=BC$，

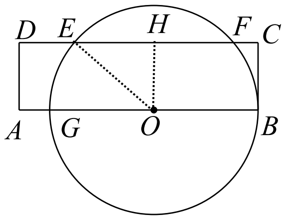
$\therefore AE=EB=BC$，$\because AE+EB>AB$，

$\therefore AB<2BC$.

【总结】本题考查了圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理.

【作业6】 如图，矩形 $ABCD$ 与圆心在 AB 上的 $\odot O$ 交于点 G、B、F、E，$GB=8$ 厘米，$AG=1$ 厘米，$DE=2$ 厘米，则 $EF=$______厘米．

【难度】★★



【答案】6．

【解析】连接 OE，作 $OH\perp DC$ 于 H 点，

$\because GB=8$ 厘米，$AG=1$ 厘米，$DE=2$ 厘米，

$\therefore OE=4$ 厘米，$EH=3$ 厘米，

$\therefore EF=2EH=6$ 厘米．

【总结】本题考查了垂径定理的应用．

【作业7】 已知点 A（1，0），B（4，0），$\odot P$ 是经过 A、B 两点的一个动圆，当 $\odot P$ 与 y 轴相交，且在 y 轴上两交点的距离为 3 时，求圆心 P 的坐标．

【难度】★★

【答案】$\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{5}{2},-\frac{5}{2}\right)$．

【解析】设 $P(x，y)$

$\because \odot P$ 是经过 A、B 两点的一个动圆，$\therefore P$ 在线段 AB 的中垂线上，

$\because A$（1，0），B（4，0），$\therefore x=\frac{5}{2}$ 且 $\odot P$ 在 x 轴上两交点的距离为 3，

$\because \odot P$ 与 y 轴相交，且在 y 轴上两交点的距离为 3，

$\therefore \odot P$ 在 x 轴上与 y 轴上截得的两条弦相等．

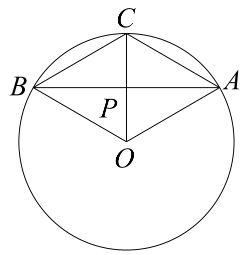
$\therefore |x|=|y|$，$\therefore y=\pm\frac{5}{2}$，

$\therefore P$ 点坐标为 $\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{5}{2},-\frac{5}{2}\right)$．

【总结】本题考查了垂径定理的应用．

【作业8】　已知，如图，在$\odot O$中，弦AB的长是半径OA的$\sqrt{3}$倍，C为AB的中点，AB、OC相交于P.

求证：四边形$OACB$为菱形.



【难度】★★★

【答案】详见解析.

【解析】$\because C$为AB的中点，$\therefore OC \perp AB$，$AP = PB$，

$\because$弦AB的长是半径OA的$\sqrt{3}$倍，$\therefore \dfrac{AP}{AO} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore \angle PAO = 30°$，

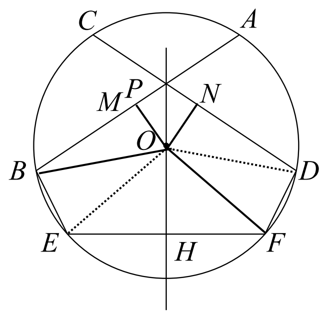
$\therefore PO = \dfrac{1}{2}OA = \dfrac{1}{2}OC$，即$OP = PC$，$\because AP = BP$，$OC \perp AB$，

$\therefore$四边形$OACB$为菱形.

【总结】本题考查了垂径定理的应用及菱形的判定.

【作业9】　已知：过圆O内一点P作弦AB、CD，且$AB = CD$，在BD上取两点E、F，且$BE = DF$.

求证：直线PO是EF的垂直平分线.



【难度】★★★

【答案】详见解析.

【解析】作$OM \perp AB$，$ON \perp CD$，

$\because AB = CD$，$\therefore OM = ON$，$BM = DN$，

$\therefore \Delta POM \cong \Delta PON$，$\therefore PM = PN$，

$\therefore PB = PD$，$\because OB = OD$，$PO = PO$，$\therefore \Delta OPB \cong \Delta OPD$，

$\therefore \angle POB = \angle POD$，$\because BE = DF$，$\therefore \angle BOE = \angle DOF$，

$\therefore \angle POE = \angle POF$，$\therefore \angle EOH = \angle FOH$，$\because OE = OF$，

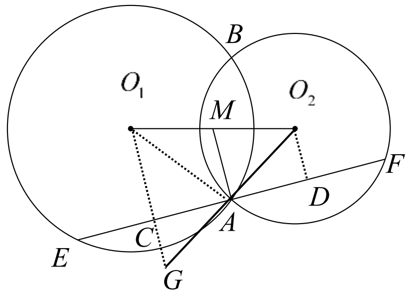
$\therefore$直线PO是EF的垂直平分线.

【总结】本题考查了垂径定理及圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理的综合应用.

【作业10】　如图，$\odot O_1$与$\odot O_2$交于A、B，M为O_1O_2的中点，过点A作$EF\perp AM$分别交$\odot O_1$与$\odot O_2$于点E、F．若$\angle O_1AO_2=90°$，$AO_1\bullet AO_2=O_1O_2=m$（$m\geq 2$），求$EF$的长．

【难度】★★★

【答案】4.



【解析】作$O_1C\perp AE$于C点，并延长与O_2A的延长线交于G点，作$O_2D\perp AF$于D点，

$\because EF\perp AM$，M为O_1O_2的中点，

$\therefore AC=AD$，$\therefore \Delta O_2AD\cong\Delta GAC$，$\therefore AG=AO_2$，

$\because \angle O_1AO_2=90°$，$\therefore \Delta O_1AC\backsim\Delta O_1GA$，$\therefore O_1A\cdot AG=O_1G\cdot AC$，

$\therefore O_1A\cdot AO_2=O_1G\cdot AC$，$\because AO_1\bullet AO_2=O_1O_2=m$，

$\therefore O_1O_2=O_1G\cdot AC$，$\because \angle O_1AO_2=90°$，$AG=AO_2$，$\therefore O_1O_2=O_1G$，

$\therefore AC=1$，$\therefore EF=4AC=4$．

【总结】本题考查了垂径定理及相似三角形性质的综合应用．