



## 圆的基本性质

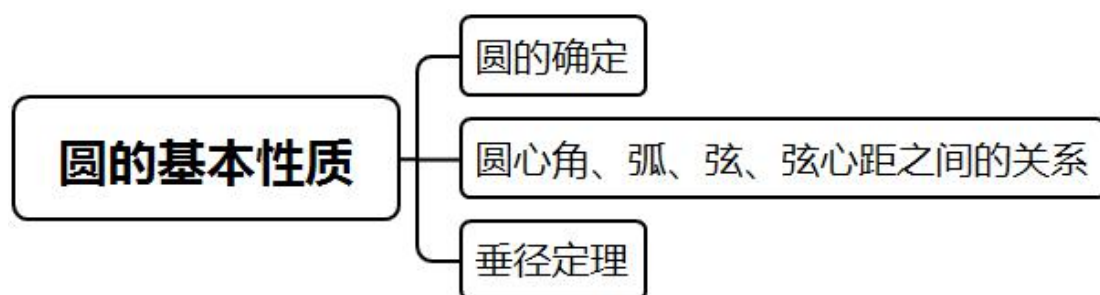


### 内容分析

圆的基本性质是初中数学九年级下学期第一章第一节的内容. 需要掌握点与圆的位置关系, 理解圆心角、弧、弦、弦心距的概念和掌握它们之间的关系, 重点是这四者关系的灵活运用, 以及垂径定理及其推论的应用.



### 知识结构



## 模块一：圆的确定



### 知识精讲

#### 1、圆的概念

**圆：**平面上到一个定点的距离等于定长的所有点所成的图形.

**圆心：**以上概念中的“定点”；以点  $O$  为圆心的圆称为“圆  $O$ ”，记作  $\odot O$ .

**半径：**联结圆心和圆上任意一点的线段；以上概念中的“定长”是圆的半径长.

#### 2、点与圆的位置关系

设一个圆的半径长为  $R$ ，点  $P$  到圆心的距离为  $d$ ，则有以下结论：

当点  $P$  在圆外时， $d > R$ ；当点  $P$  在圆上时， $d = R$ ；当点  $P$  在圆内时， $0 \leq d < R$ .

反之亦然.

#### 3、相关定理：不在同一直线上的三个点确定一个圆.

三角形的三个顶点确定一个圆. 经过一个三角形各顶点的圆叫做这个三角形的**外接圆**，外接圆的圆心叫做这个三角形的**外心**；这个三角形叫做这个圆的**内接三角形**.

如果一个圆经过一个多边形的各顶点，那么这个圆叫做这个多边形的**外接圆**，这个多边形叫做这个圆的**内接多边形**.



## 例题解析

【例 1】 在平面直角坐标系内， $A(-3, -\tan 30^\circ)$ ， $B(\frac{\sqrt{a^2}}{|a|}, 0)$ ， $\odot A$  的半径为 4，

试说明点  $B$  与  $\odot A$  的位置关系.

【难度】★

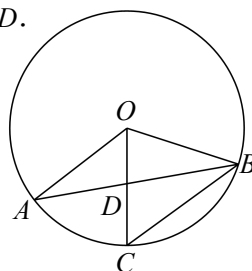
【例 2】 过一个点可以画\_\_\_\_\_个圆，过两个点可以画\_\_\_\_\_个圆，过三个点可以画\_\_\_\_\_个圆.

【难度】★

【例 3】 已知，如图，在  $\odot O$  中， $AB$ 、 $BC$  为弦， $OC$  交  $AB$  于点  $D$ .

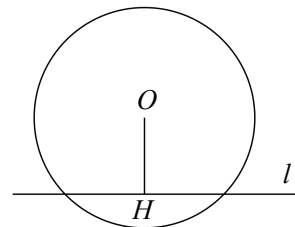
求证：(1)  $\angle ODB > \angle OBD$ ；(2)  $\angle ODB > \angle OBC$ .

【难度】★



【例 4】 如图， $\odot O$  的半径为 15， $O$  到直线  $l$  的距离  $OH=9$ ， $A$ 、 $B$ 、 $C$  为直线  $l$  上的三个点， $AH=9$ ， $QH=12$ ， $RH=15$ ，请分别说明点  $A$ 、 $B$ 、 $C$  与  $\odot O$  的位置关系.

【难度】★★



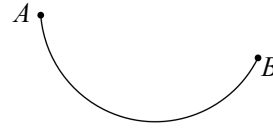
【例 5】 若  $A(a, -27)$  在以点  $B(-35, -27)$  为圆心，37 为半径的圆上，求  $a$  的值.

【难度】★★



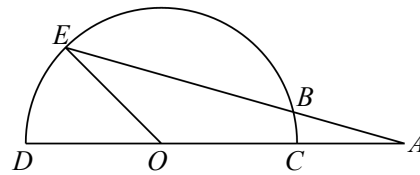
【例 6】如图，作出  $\widehat{AB}$  所在圆的圆心，并补全整个圆.

【难度】★★



【例 7】如图， $CD$  是半圆的直径， $O$  是圆心， $E$  是半圆上一点，且  $\angle EOD = 45^\circ$ ， $A$  是  $DC$  延长线上一点， $AE$  与半圆交于  $B$ ，若  $AB = OC$ ，求  $\angle EAD$  的度数.

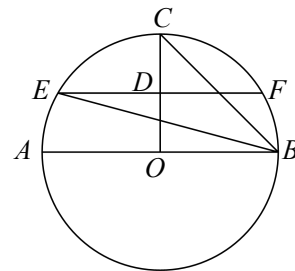
【难度】★★★★



【例 8】已知，如图， $AB$  是  $\odot O$  的直径，半径  $OC \perp AB$ ，过  $OC$  的中点  $D$  作  $EF \parallel AB$ .

求证：  $\angle ABE = \frac{1}{2} \angle CBE$  .

【难度】★★★★



【例 9】已知：  $AB$  是  $\odot O$  的直径，点  $P$  是  $OA$  上任意一点，点  $C$  是  $\odot O$  上任意一点.

求证：  $PA \leq PC \leq PB$  .

【难度】★★★★



## 模块二：圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系



### 知识精讲

#### 1、圆心角、弧、弦、弦心距的概念

圆心角：以圆心为顶点的角叫做**圆心角**；

弧：圆上任意两点之间的部分叫做**圆弧**，简称**弧**；

弦：连接圆上任意两点的线段叫做**弦**，过圆心的弦就是**直径**；

弦心距：圆心到弦的距离叫做**弦心距**。

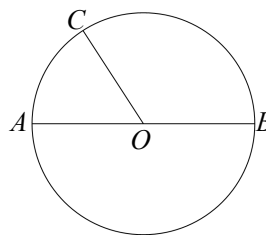
#### 2、半圆、优弧、劣弧

半圆：圆的任意一条直径的两个端点将圆分成两条弧，每一条弧都叫做**半圆**。

优弧：大于半圆的弧叫做**优弧**。

劣弧：小于半圆的弧叫做**劣弧**。

如图，以  $A$ 、 $C$  为端点的劣弧记作  $\widehat{AC}$ ，读作“弧  $AC$ ”；



以  $A$ 、 $C$  为端点的优弧记作  $\widehat{ABC}$ ，读作“弧  $ABC$ ”。

#### 3、等弧和等圆

能够重合的两条弧称为**等弧**，或者说这两条弧相等。若  $\widehat{AB}$  与  $\widehat{A'B'}$  是等弧，记作

$$\widehat{AB} = \widehat{A'B'}.$$

半径相等的两个圆一定能够重合，我们把半径相等的两个圆称为**等圆**。

#### 4、圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理

在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦相等，所对的弦的弦心距相等。

#### 5、圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理的推论

在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条劣弧（或优弧）、两条弦、两条弦的弦心距得到的四组量中有一组量相等，那么它们所对应的其余三组量也分别相等。



## 例题解析

【例 10】下列命题中真命题的个数是 ( )

- ①相等的圆心角所对的弧也相等；
- ②在同圆中，如果两条弦相等，那么所对的弧也相等；
- ③ $A$ 、 $B$  是  $\odot O$  上任意两点，则  $AO + BO$  等于  $\odot O$  的直径长；
- ④三角形的外心到三角形三边的距离相等.

A. 1 个                  B. 2 个                  C. 3 个                  D. 4 个

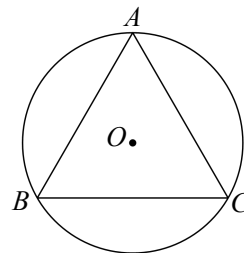
【难度】★

【例 11】一条弦把圆分成 1 : 3 两部分，则弦所对的圆心角为\_\_\_\_\_° .

【难度】★

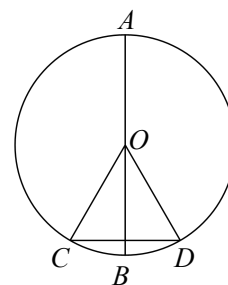
【例 12】如图，在  $\odot O$  中， $\widehat{AB} = \widehat{AC}$ ， $\angle B = 70^\circ$ ，则  $\angle BAC =$ \_\_\_\_\_.

【难度】★



【例 13】如图，已知  $\odot O$  的半径是 6， $\angle BOD = 30^\circ$ ， $\widehat{BD} = \widehat{BC}$ ， $CD =$ \_\_\_\_\_.

【难度】★★

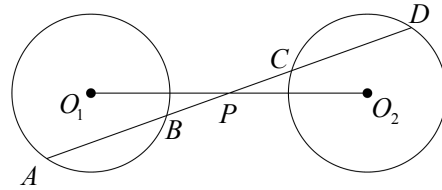




【例 14】如图， $\odot O_1$  和  $\odot O_2$  是等圆， $P$  是  $O_1O_2$  的中点，过点  $P$  作直线  $AD$  交  $\odot O_1$  于点  $A$ 、 $B$ ，交  $\odot O_2$  于点  $C$ 、 $D$ 。

求证： $AB = CD$ 。

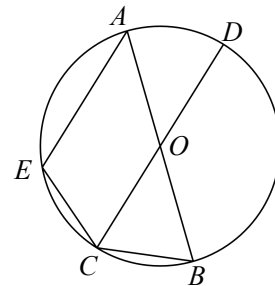
【难度】★★



【例 15】已知，如图， $AB$ 、 $CD$  是  $\odot O$  的直径，弦  $AE \parallel CD$ ，联结  $CE$ 、 $BC$ 。

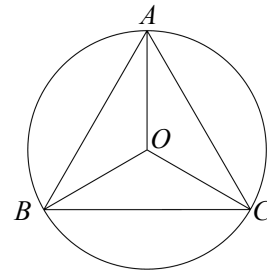
求证： $BC = CE$ 。

【难度】★★



【例 16】如图， $\odot O$  是  $\triangle ABC$  的外接圆， $AO$  平分  $\angle BAC$ ， $\angle AOB = \angle BOC$ ，判断  $\triangle ABC$  的形状，并说明理由。

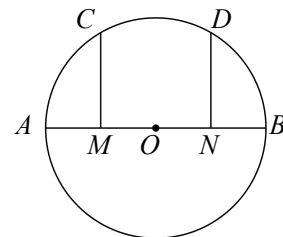
【难度】★★



【例 17】已知，如图， $AB$  是  $\odot O$  直径， $M$ 、 $N$  分别是  $AO$ 、 $BO$  的中点， $CM \perp AB$ ， $DN \perp AB$ 。

求证： $\widehat{AC} = \widehat{BD}$ 。

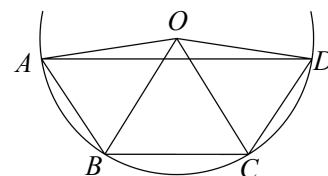
【难度】★★★★



【例 18】如图，以点  $O$  为圆心的圆弧上依次有四个点  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ ，且  $\angle AOB = \angle COD$ 。

求证：四边形  $ABCD$  是等腰梯形。

【难度】★★★★





## 模块三：垂径定理



### 知识精讲

#### 1、垂径定理

如果圆的一条直径垂直于一条弦，那么这条直径平分这条弦，并且平分这条弦所对的弧。

#### 2、相关结论

(1) 如果圆的直径平分弦（这条弦不是直径），那么这条直径垂直于这条弦，并且平分这条弦所对的弧。

(2) 如果圆的直径平分弧，那么这条直径就垂直平分这条弧所对的弦。

(3) 如果一条直线是弦的垂直平分线，那么这条直线经过圆心，并且平分这条弦所对的弧。

(4) 如果一条直线平分弦和弦所对的一条弧，那么这条直线经过圆心，并且垂直于这条弦。

(5) 如果一条直线垂直于弦，并且平分弦所对的一条弧，那么这条直线经过圆心，并且平分这条弦。

**总结：**在圆中，对于某一条直线“经过圆心”、“垂直于弦”、“平分弦”、“平分弦所对的弧”这四组关系中，如果有两组关系成立，那么其余两组关系也成立。



### 例题解析

【例 19】 $\odot O$  的直径为 10，圆心  $O$  到弦  $AB$  的距离  $OM$  的长为 3，则弦  $AB$  的长为\_\_\_\_\_。

【难度】★

【例 20】在半径为 2 的  $\odot O$  中，弦  $AB$  的长为  $2\sqrt{2}$ ，则弦  $AB$  所对的圆心角  $\angle AOB =$  \_\_\_\_\_°。

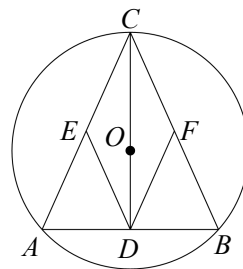
【难度】★



【例 21】如图， $\odot O$  是  $\triangle ABC$  的外接圆，圆心  $O$  在这个三角形的高  $CD$  上，点  $E$  和点  $F$  分别是边  $AC$  和  $BC$  的中点.

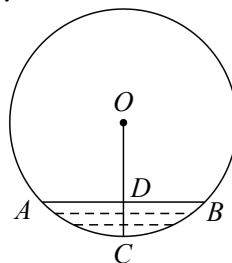
求证：四边形  $CEDF$  是菱形.

【难度】★★



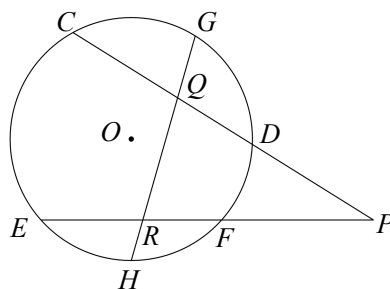
【例 22】如图，一根横截面为圆形的输水管道，阴影部分为有水部分，此时水面宽  $AB$  为 0.6 米，污水深  $CD$  为 0.1 米，求圆形的下水管道的直径.

【难度】★★



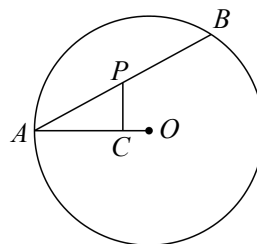
【例 23】如图，在  $\odot O$  中，弦  $CD$ 、 $EF$  的延长线相交于点  $P$ ， $G$ 、 $H$  分别是  $\widehat{CD}$ 、 $\widehat{EF}$  的中点， $GH$  与  $PC$ 、 $PE$  分别相交于  $Q$ 、 $R$  两点，试判断  $\triangle PQR$  的形状，并证明所得到的结论.

【难度】★★



【例 24】如图， $P$  是  $\odot O$  的弦  $AB$  的中点， $PC \perp OA$ ，垂足为  $C$ ，求证： $PA \cdot PB = AC \cdot AO$ .

【难度】★★

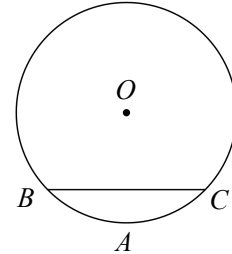






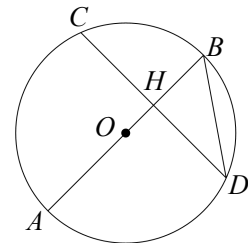
【例 25】位于本市浦东临港新城的滴水湖是圆形人工湖．为测量该湖的半径，小智和小方沿湖边选取  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三根木柱，使得  $A$ 、 $B$  之间的距离与  $A$ 、 $C$  之间的距离相等，并测得  $BC$  长 240 米， $A$  到  $BC$  的距离为 5 米，如图所示．请你帮他们求出滴水湖的半径．

【难度】★★



【例 26】如图，弦  $CD$  垂直于  $\odot O$  的直径  $AB$ ，垂足为  $H$ ，且  $CD = 2\sqrt{2}$ ， $BD = \sqrt{3}$ ，则  $AB$  的长为\_\_\_\_\_．

【难度】★★



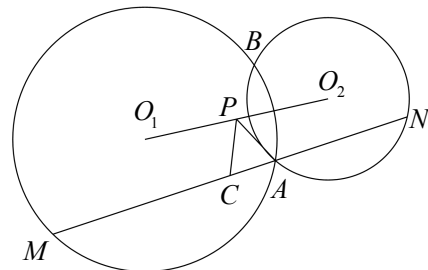
【例 27】已知  $\odot O$  的半径  $r = 4$ ， $AB$ 、 $CD$  为  $\odot O$  的两条弦， $AB$ 、 $CD$  的长分别是方程  $x^2 - (4\sqrt{3} + 4)x + 16\sqrt{3} = 0$  的两根，其中  $AB > CD$ ，且  $AB \parallel CD$ ，求  $AB$  与  $CD$  间的距离．

【难度】★★★★

【例 28】已知，如图， $\odot O_1$  与  $\odot O_2$  交于  $A$ 、 $B$ ，过  $A$  的直线分别交  $\odot O_1$  与  $\odot O_2$  于  $M$ 、 $N$ ，

$C$  是  $MN$  的中点， $P$  是  $O_1O_2$  的中点．

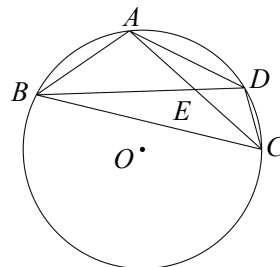
【难度】★★★★





【例 29】如图，已知四边形  $ABCD$  外接圆  $\odot O$  的半径为 2，对角线  $AC$  与  $BD$  的交点为  $E$ ， $AE = EC$ ， $AB = \sqrt{2}AE$ ，且  $BD = 2\sqrt{3}$ ，求四边形  $ABCD$  的面积。

【难度】★★★

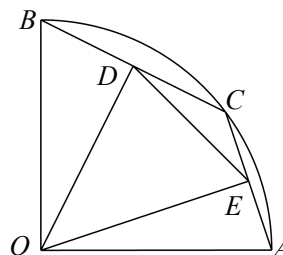


【例 30】如图，在半径为 2 的扇形  $AOB$  中， $\angle AOB = 90^\circ$ ，点  $C$  是弧  $AB$  上的一个动点（不与点  $A$ 、 $B$  重合）， $OD \perp BC$ ， $OE \perp AC$ ，垂足分别为  $D$ 、 $E$ 。

(1) 在  $\triangle DOE$  中是否存在长度保持不变的边？如果存在，请指出并求其长度，如果不存在，请说明理由。

(2) 设  $BD = x$ ， $\triangle DOE$  的面积为  $y$ ，求  $y$  关于  $x$  的函数关系式，并写出它的定义域。

【难度】★★★





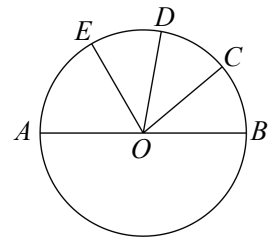
## 随堂检测

【习题 1】 已知  $\odot O$  半径为 5，若点  $P$  不在  $\odot O$  上，则线段  $OP$  的取值范围为 \_\_\_\_\_.

【难度】★

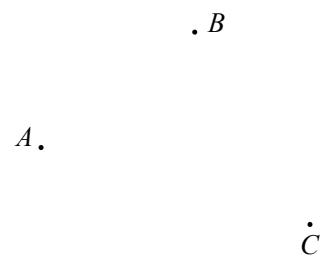
【习题 2】 如图， $AB$  是直径， $\widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE}$ ， $\angle BOC = 40^\circ$ ，则  $\angle AOE =$  \_\_\_\_\_.

【难度】★



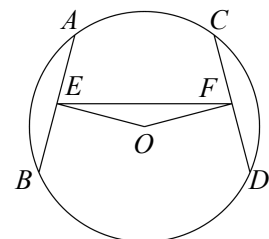
【习题 3】 如图，为方便三个村庄居民子女的上学问题，上级镇政府决定在  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三个村庄旁边造一所学校，要求它到各村庄的距离相等，请在图中画出学校的位置。（保留作图痕迹）

【难度】★



【习题 4】 如图， $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ ， $OE \perp AB$ ， $OF \perp CD$ ， $\angle OEF = 25^\circ$ ，求  $\angle EOF$  的度数.

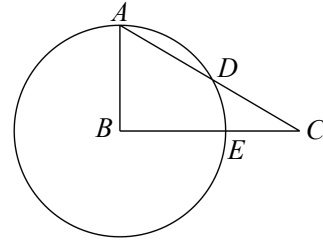
【难度】★★





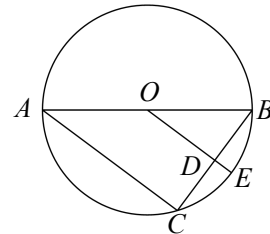
【习题 5】 如图，在  $\triangle ABC$  中， $\angle B = 90^\circ$ ， $\angle A = 60^\circ$ ，以点  $B$  为圆心， $AB$  为半径画圆，交  $AC$  于点  $D$ ，交  $BC$  于点  $E$ 。求证：(1)  $\widehat{AD} = 2\widehat{DE}$ ；(2)  $D$  是  $AC$  的中点。

【难度】★★



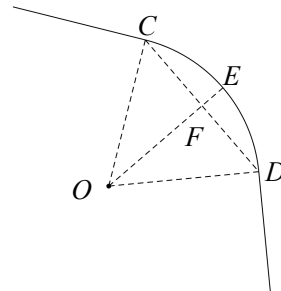
【习题 6】 如图， $AB$  为  $\odot O$  直径， $E$  为  $\widehat{BC}$  的中， $OE$  交  $BC$  于点  $D$ ， $BD = 3$ ， $AB = 10$ ，  
则  $AC =$  \_\_\_\_\_。

【难度】★★



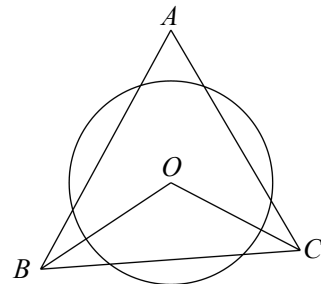
【习题 7】 如图，一条公路的转弯处是一段圆弧（即图中的  $\widehat{CD}$ ），点  $O$  是  $\widehat{CD}$  的圆心，其中  $CD = 600$  米， $E$  为  $\widehat{CD}$  上一点，且  $OE \perp CD$ ，垂足为  $F$ ， $EF = 90$  米，  
求这段弯路的半径。

【难度】★★



【习题 8】 如图，在  $\triangle ABC$  中， $\angle A = 70^\circ$ ， $\odot O$  截  $\triangle ABC$  的三边所得的弦长都相等，  
求  $\angle BOC$  的度数。

【难度】★★★★



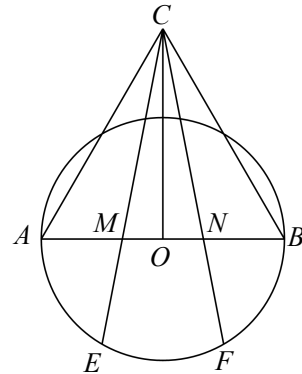


【习题 9】 已知，如图， $\triangle ABC$  是等边三角形， $AB$  是  $\odot O$  的直径， $\widehat{AE} = \widehat{EF} = \widehat{FB}$ ，

$CE$ 、 $CF$  交  $AB$  于点  $M$ 、 $N$ 。

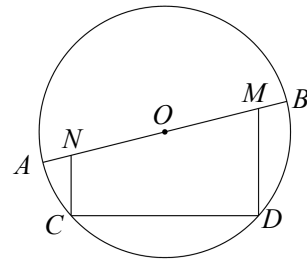
求证： $AM = MN = NB$ 。

【难度】★★★



【习题 10】 如图， $AB$  为  $\odot O$  的直径， $CD$  为弦，过点  $C$ 、 $D$  分别作  $CN \perp CD$ 、 $DM \perp CD$ ，分别交  $AB$  于点  $N$ 、 $M$ ，请问图中的  $AN$  与  $BM$  是否相等，说明理由。

【难度】★★★





## 课后作业

【作业 1】 在下列命题中，正确的个数是（ ）

- ① 圆心角相等，则它们所对的弦必相等；
- ② 经过线段的两个端点及线段所在直线外一点可以确定一个圆；
- ③ 直径平分弦，则必垂直于弦；
- ④ 如果同圆中，两条弦互相平分，那么这两条弦都是直径.

A. 0 个                  B. 1 个                  C. 2 个                  D. 3 个

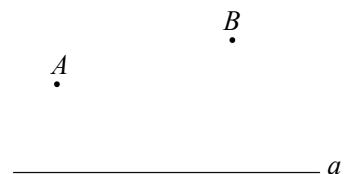
【难度】★

【作业 2】 在  $\triangle ABC$  中， $\angle C = 90^\circ$ ， $D$ 、 $E$  分别是  $AB$ 、 $AC$  的中点， $AC = 7$ ， $BC = 4$ . 若以点  $C$  为圆心， $BC$  为半径作圆，判断点  $D$ 、 $E$  与  $\odot C$  的位置关系.

【难度】★

【作业 3】 已知直线  $a$  和直线外两点  $A$ 、 $B$ ，经过  $A$ 、 $B$  作一圆，使它的圆心在直线  $a$  上.

【难度】★



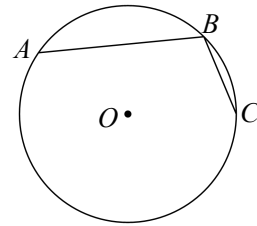
【作业 4】 已知  $\odot O$  外一点  $A$  和圆上的点最大距离为 23 厘米，最小距离为 10 厘米，则  $\odot O$  的半径为\_\_\_\_\_厘米.

【难度】★★



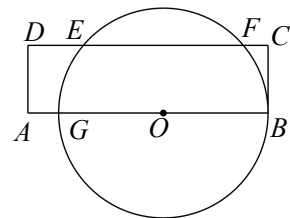
【作业 5】 如图，在  $\odot O$  中， $2\widehat{AB} = \widehat{BC}$ ，试确定  $AB$  与  $2BC$  的大小关系.

【难度】★★



【作业 6】 如图，矩形  $ABCD$  与圆心在  $AB$  上的  $\odot O$  交于点  $G$ 、 $B$ 、 $F$ 、 $E$ ， $GB = 8$  厘米， $AG = 1$  厘米， $DE = 2$  厘米，则  $EF =$  \_\_\_\_\_ 厘米.

【难度】★★



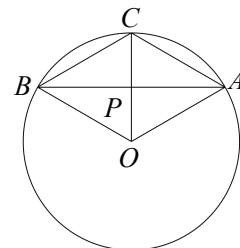
【作业 7】 已知点  $A(1, 0)$ ， $B(4, 0)$ ， $\odot P$  是经过  $A$ 、 $B$  两点的一个动圆，当  $\odot P$  与  $y$  轴相交，且在  $y$  轴上两交点的距离为 3 时，求圆心  $P$  的坐标.

【难度】★★

【作业 8】 已知，如图，在  $\odot O$  中，弦  $AB$  的长是半径  $OA$  的  $\sqrt{3}$  倍， $C$  为  $\widehat{AB}$  的中点， $AB$ 、 $OC$  相交于  $P$ .

求证：四边形  $OACB$  为菱形.

【难度】★★★★

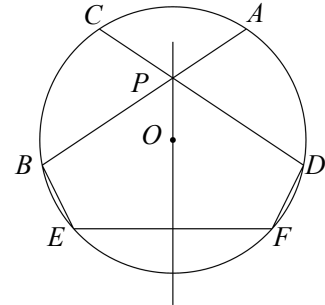




【作业 9】 已知：过圆  $O$  内一点  $P$  作弦  $AB$ 、 $CD$ ，且  $AB = CD$ ，在  $\widehat{BD}$  上取两点  $E$ 、 $F$ ，且  $\widehat{BE} = \widehat{DF}$ 。

求证：直线  $PO$  是  $EF$  的垂直平分线。

【难度】★★★★



【作业 10】 如图， $\odot O_1$  与  $\odot O_2$  交于  $A$ 、 $B$ ， $M$  为  $O_1O_2$  的中点，过点  $A$  作  $EF \perp AM$  分别交  $\odot O_1$  与  $\odot O_2$  于点  $E$ 、 $F$ 。若  $\angle O_1AO_2 = 90^\circ$ ， $AO_1 \cdot AO_2 = O_1O_2 = m$  ( $m \geq 2$ )，求  $EF$  的长。

【难度】★★★★

