圆的补充练习及正多边形与圆

内容分析

本讲一方面对前两讲的内容补充了一些练习，另一方面讲解了正多边形与圆的相关知识，重点是正多边形与圆的相关概念的理解，中心角和边心距的计算.

知识结构

圆的补充练习及正多边形与圆
- 圆的基本性质补充练习
- 直线与圆、圆与圆的位置关系补充练习
- 正多边形与圆

模块一：圆的基本性质补充练习

知识精讲

1、 圆的相关概念

圆：平面上到一个定点的距离等于定长的所有点所成的图形.

圆心：以上概念中的“**定点**”；以点 O 为圆心的圆称为“圆 O”，记作 $\odot O$.

半径：联结圆心和圆上任意一点的线段；以上概念中的“**定长**”是圆的半径长.

圆心角：以圆心为顶点的角叫做**圆心角**；

弧：圆上任意两点之间的部分叫做**圆弧**，简称**弧**；

半圆：圆的任意一条直径的两个端点将圆分成两条弧，每一条弧都叫做**半圆**.

优弧：大于半圆的弧叫做**优弧**.

劣弧：小于半圆的弧叫做**劣弧**.

弦：连接圆上任意两点的线段叫做**弦**，过圆心的弦就是**直径**；

弦心距：圆心到弦的距离叫做**弦心距**.

等弧：能够重合的两条弧称为**等弧**.

等圆：半径相等的两个圆一定能够重合，我们把半径相等的两个圆称为**等圆**.

2、 点与圆的位置关系

设一个圆的半径长为 R，点 P 到圆心的距离为 d，则有以下结论：

点 P 在圆外 $\Leftrightarrow d>R$；点 P 在圆上 $\Leftrightarrow d=R$；点 P 在圆内 $\Leftrightarrow 0\le d<R$.

3、 定理：不在同一直线上的三个点确定一个圆

三角形的三个顶点确定一个圆．经过一个三角形各顶点的圆叫做这个**三角形的外接圆**，外接圆的圆心叫做这个**三角形的外心**；这个三角形叫做这个**圆的内接三角形**.

如果一个圆经过一个多边形的各顶点，那么这个圆叫做这个**多边形的外接圆**，这个多边形叫做这个**圆的内接多边形**.

4、 圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理

在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦相等，所对的弦的弦心距相等.

5、 圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理的推论

在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条劣弧（或优弧）、两条弦、两条弦的弦心距得到的四组量中有一组量相等，那么它们所对应的其余三组量也分别相等.

6、 垂径定理

如果圆的一条直径垂直于一条弦，那么这条直径平分这条弦，并且平分这条弦所对的弧.

7、 垂径定理的相关结论

（1）如果圆的直径平分弦（这条弦不是直径），那么这条直径垂直于这条弦，并且平分这条弦所对的弧.

（2）如果圆的直径平分弧，那么这条直径就垂直平分这条弧所对的弦.

（3）如果一条直线是弦的垂直平分线，那么这条直线经过圆心，并且平分这条弦所对的弧.

（4）如果一条直线平分弦和弦所对的一条弧，那么这条直线经过圆心，并且垂直于这条弦.

（5）如果一条直线垂直于弦，并且平分弦所对的一条弧，那么这条直线经过圆心，并且平分这条弦.

总结：在圆中，对于某一条直线“经过圆心”、“垂直于弦”、“平分弦”、“平分弦所对的弧”这四组关系中，如果有两组关系成立，那么其余两组关系也成立.

例题解析

【例 1】 在平面直角坐标系内，$\odot P$ 的半径为 5，圆心 P 的坐标为（1，2），分别判断点 A（2，-5），B（-2，6），C（1，-2）与 $\odot P$ 的位置关系.

【难度】★

【例 2】 下列判断中，正确的是（　　）

A．平分一条弦所对的弧的直线必垂直于这条弦

B．不与直径垂直的弦不能被该直径平分

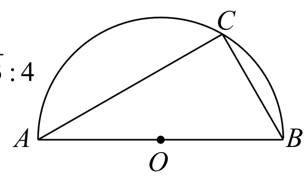
C．互相平分的两条弦必定是圆的两条直径

D．同圆中，相等的弦所对的弧也相等

【难度】★

【例 3】 如图，C 是以 AB 为直径的半圆弧上一点，已知 $\overset{\frown}{AC}$ 所对的圆心角为 120°，BC 的弦心距与直径 AB 的比为（　　）

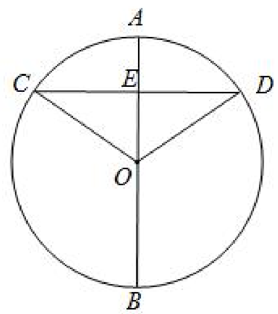
A．$\sqrt{3}:2$　　B．$\sqrt{3}:1$　　C．$\sqrt{5}:4$　　D．$\sqrt{3}:4$



【难度】★★

【例 4】 如图，AB 是 $\odot O$ 直径，E 是弦 CD 中点，若 $\angle EOC=2\angle OCE$，则 $\angle D=$______，$\angle AOC=$______.

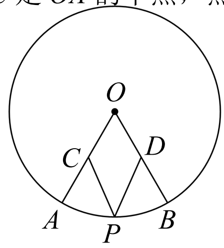
【难度】★★



【例 5】 如图，OA、OB 是 $\odot O$ 的两条半径，P 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，点 C 是 OA 的中点，点 D 是 OB 的中点.

求证：$PC = PD$.

【难度】★★

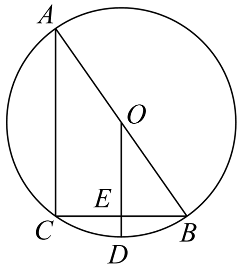


【例 6】 如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，CB 是弦，$OD \perp CB$ 于 E，交 $\overset{\frown}{CB}$ 于 D，联结 AC.

（1）请写出两个正确结论；

（2）若 $CB = 8$，$ED = 2$，求 $\odot O$ 的半径.

【难度】★★

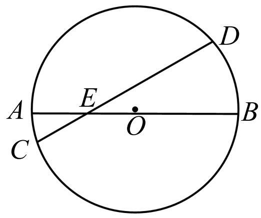


【例 7】 如图，$\odot O$ 的直径 AB 和弦 CD 相交于点 E，若 $AE = 2$ 厘米，$BE = 6$ 厘米，$\angle CEA = 30°$，求：

（1）CD 的长；

（2）点 C 到 AB 的距离与点 D 到 AB 的距离之比.

【难度】★★

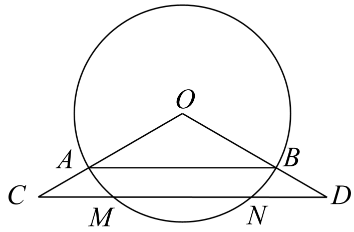


【例 8】 如图，点 C、D 分别在扇形 AOB 的半径 OA、OB 的延长线上，且 $OA=3$，$AC=2$，CD 平行于 AB，并与弧 AB 相交于点 M、N.

（1）求线段 OD 的长；

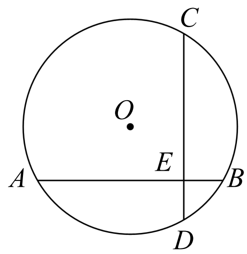
（2）若 $\tan C=\dfrac{1}{2}$，求弦 MN 的长.

【难度】★★



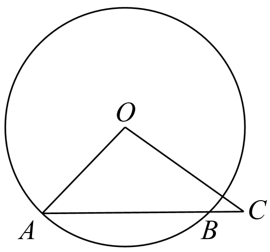
【例 9】 如图，半径为 2 的圆内有两条互相垂直的弦 AB 和 CD，它们的交点 E 到圆心 O 的距离等于 1，求 AB^2+CD^2 的值.

【难度】★★★



【例 10】如图，某休闲公园有一圆形人工湖，湖中心 O 处有一喷泉．小明为测量湖的半径，在湖边选择 A、B 两个观测点，在 A 处测得 $\angle OAB=\alpha$，在 AB 延长线上 C 处测得 $\angle OCB=\beta$．若 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$， $\tan\beta=\dfrac{2}{3}$，$BC=50$ 米，求人工湖的半径.

【难度】★★★



模块二：直线与圆、圆与圆的位置关系补充练习

知识精讲

1、 直线与圆的位置关系：相离、相切、相交

如果$\odot O$的半径长为R，圆心O到直线l的距离为d，那么：

直线l与相交$\Leftrightarrow 0 \le d < R$；

直线l与相切$\Leftrightarrow d = R$；

直线l与相离$\Leftrightarrow d > R$．

2、切线的判定定理

经过半径的外端且垂直于这条半径的直线是圆的切线．

3、相关概念

圆心距：两个圆的圆心之间的距离叫做**圆心距**．

连心线：经过两个圆圆心的直线叫做**连心线**．

4、圆与圆的位置关系：外离、外切、相交、内切、内含

如果两圆的半径长分别为R_1和R_2，圆心距为d，那么：

两圆外离$\Leftrightarrow d > R_1 + R_2$；

两圆外切$\Leftrightarrow d = R_1 + R_2$；

两圆相交$\Leftrightarrow |R_1 - R_2| < d < R_1 + R_2$；

两圆内切$\Leftrightarrow 0 < d = |R_1 - R_2|$；

两圆内含$\Leftrightarrow 0 \le d < |R_1 - R_2|$．

5、相关定理

（1）如果两圆相交，那么它们的两个交点关于连心线对称，于是，可推出以下**定理**：相交两圆的连心线垂直平分两圆的公共弦．

（2）如果两圆相切，可归纳出以下**定理**：相切两圆的连心线经过切点．

例题解析

【例11】下列直线中，必为切线的是（　　）

A．与圆有公共点的直线　　B．到圆心距离等于半径的直线

C．垂直于圆的半径的直线　　D．过圆的半径外端的直线

【难度】★

【例12】正方形$ABCD$中，$AB = 1$，分别以A、C为圆心作两个半径为R、r（$R > r$）的

圆，当⊙A与⊙C有两个交点，R、r满足的条件是（　　）

A．$R+r>\sqrt{2}$　　　　B．$R-r<\sqrt{2}<R+r$

C．$R-r>\sqrt{2}$　　　　D．$0<R-r<\sqrt{2}$

【难度】★

【例 13】已知两圆的半径分别为 2 和 5，当两圆相切时，圆心距为______.

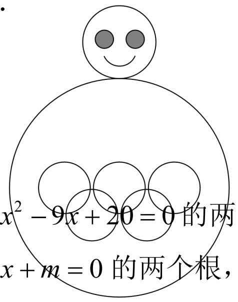
【难度】★★

【例 14】⊙O 的半径为 6，⊙O 的一条弦 AB 长为$3\sqrt{3}$，以 3 为半径的同心圆与 AB 的关系是______.

【难度】★★

【例 15】两圆有多种位置关系，如图中不存在的位置关系是______.

【难度】★★



【例 16】设圆心 O 到直线 l 的距离为 d，半径为 R，当 d、R 是方程 $x^2-9x+20=0$ 的两个根，则直线与圆的位置关系是______；当 d、R 是方程 $x^2-4x+m=0$ 的两个根，且直线与圆相切，则 $m=$______.

【难度】★★

【例 17】已知 A 点为（0，3），⊙A 的半径为 1，点 B 在 x 轴上.

（1）若 B 点为（4，0），⊙B 半径为 3，试判断⊙A 与⊙B 的位置关系；

（2）若⊙B 过点 M（2，0），且与⊙A 相切，求 B 点的坐标.

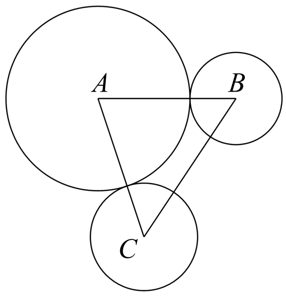
【难度】★★

【例 18】已知 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相切，两圆的圆心距为 9 厘米，$\odot O_1$ 的半径为 4 厘米，求 $\odot O_2$ 的半径.

【难度】★★

【例 19】如图，$\odot A$ 的直径为，$\odot B$ 的直径为，$\odot C$ 的直径为 2，$\odot A$ 和 $\odot B$ 外切，$\odot A$ 和 $\odot C$ 外切，$\angle BAC = 60°$，求 BC 的长度及 $\angle C$ 的正弦值.

【难度】★★

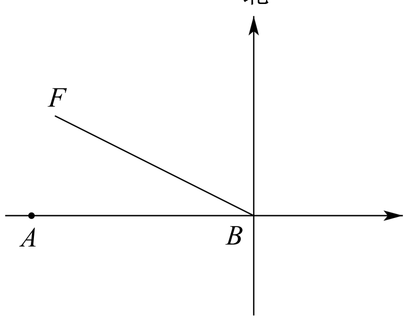


【例 20】如图，A 市气象站测得台风中心在 A 市正东方向 300 千米的 B 处，并且以 10 千米/时的速度向北偏西 60° 的 BF 方向移动，距台风中心 200 千米范围内是受台风影响的区域.

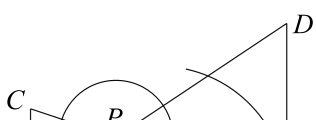
（1）A 市是否会受到台风的影响?并说明理由；

（2）如果 A 市受这次台风的影响，那么受台风影响的时间有多长?

【难度】★★



【例 21】如图，$\angle CAB = \angle ABD = 90°$，$AB = AC + BD$，$AD$ 交 BC 于 P，作 $\odot P$ 使其与



AB 相切．试问：以 AB 为直径作出的 $\odot O$ 与 $\odot P$ 是相交?是内切?还是内含?请作出判断并加以证明．

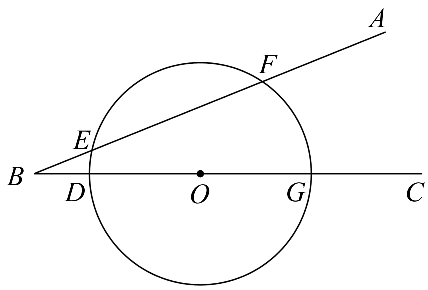
【难度】★★★

【例 22】如图，已知 $\sin\angle ABC=\dfrac{1}{3}$，$\odot O$ 的半径为 2，圆心 O 在射线 BC 上，$\odot O$ 与射线 BA 相交于 E、F 两点，$EF=2\sqrt{3}$．

（1）求 BO 的长；

（2）点 P 在射线 BC 上，以点 P 为圆心作圆，使得 $\odot P$ 同时与 $\odot O$ 和射线 BA 相切，求所有满足条件的 $\odot P$ 的半径．

【难度】★★★



模块三：正多边形与圆

知识精讲

1、 正多边形

各边相等，各角也相等的多边形叫做正多边形.

有 n 条边的正多边形（n 是正整数，且 $n \geq 3$）就称作正 n 边形.

2、 正 n 边形的对称性

正 n 边形是轴对称图形，对称轴的条数 $=n$.

当 n 为偶数时，正 n 边形是中心对称图形，对称中心是它的两条对称轴的交点.

3、 正多边形的外接圆和内切圆

任何一个正多边形都有一个外接圆和一个内切圆，外接圆和内切圆的圆心都是这个正多边形的对称轴的交点.

正多边形外接圆（或内切圆）的圆心叫做**正多边形的中心**.

正多边形外接圆的半径叫做**正多边形的半径**.

正多边形内切圆的半径长叫做**正多边形的边心距**.

正多边形一边所对的关于外接圆的圆心角叫做**正多边形的中心角**.

例题解析

【例 23】正十边形有______条对称轴，它不仅是______对称图形，还是______对称图形，它的中心角是______°.

【难度】★

【例 24】圆内接正五边形 $ABCDE$ 中，对角线 AC 和 BD 相交于点 P，则 $\angle APB$ 的度数是______.

【难度】★

【例 25】下列命题中，假命题是（　　）

A．各边相等的圆内接多边形是正多边形

B．正多边形的任意两个角的平分线如果相交，则交点为正多边形的中心

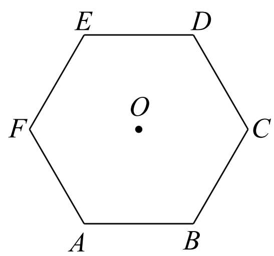
C．正多边形的任意两条边的中垂线如果相交，则交点为正多边形的中心

D．一个外角小于一个内角的正多边形一定是正五边形

【难度】★★

【例 26】如图，已知正六边形 $ABCDEF$ 的半径为 a，中心为 O，求它的周长和面积．

【难度】★★



【例 27】正三角形的边心距、半径和高的比是________________．

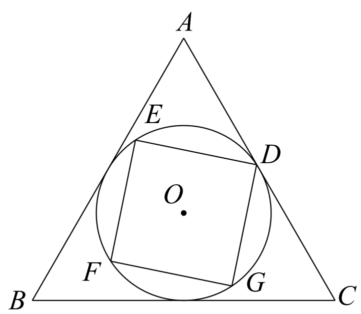
【难度】★★

【例 28】正多边形的面积是 240 平方厘米，周长是 60 厘米，则边心距是______厘米．

【难度】★★

【例 29】如图，已知等边 ΔABC 的边长为 a，求其内切圆的内接正方形 $DEFG$ 的面积．

【难度】★★★

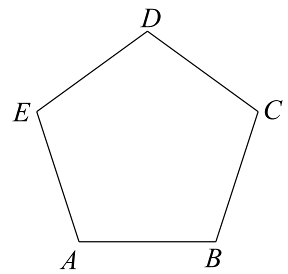


【例 30】如图，正五边形 $ABCDE$ 的对角线 AC、BE 相交于点 M.

（1）求证：四边形 $CDEM$ 是菱形；

（2）设，若 $AB=4$，求 BE 的长.

【难度】★★★



随堂检测

【习题 1】 两个等圆只有一个公共点，则这两圆的位置关系可以是（　　）

A．相离　　B．外切　　C．相交　　D．内切

【难度】★

【习题 2】 已知圆 O 的弦 $AB=10$，相应的弦心距 $OC=3$，则圆 O 的半径等于______.

【难度】★

【习题 3】 下列语句中，正确的个数是（　　）

①直角三角形的两条直角边长分别是 6 和 8，则外接圆半径为 $\frac{24}{5}$；

②已知两圆的直径为 10 厘米，6 厘米，圆心距为 16 厘米，则两圆外切；

③过三点可以确定一个圆；

④两圆的公共弦垂直平分连心线.

A．0 个　　B．1 个　　C．2 个　　D．3 个

【难度】★★

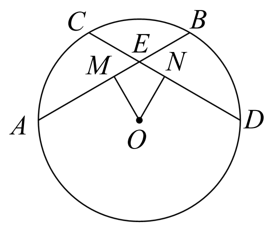
【习题 4】 一个正六边形和一个正三角形的周长相等，则它们的面积之比是______.

【难度】★★

【习题 5】 在 ΔABC 中，$BC=6$，$\angle B=30^\circ$，$\angle C=45^\circ$，以 A 为圆心，当半径多长时所作的 $\odot A$ 与 BC 相切、相交、相离.

【难度】★★

【习题 6】 如图，在 $\odot O$ 中，弦 AB、CD 相交于 E，OM、ON 分别是弦 AB、CD 的弦心距.



（1）如果 $OM=ON$，求证：$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$；

（2）如果 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$，求证：$EO$ 平分 $\angle AED$.

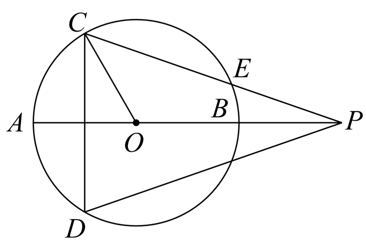
【难度】★★

【习题 7】 如图，P 是 $\odot O$ 的直径 AB 延长线上的一点，PC 与 $\odot O$ 分别相交于点 E 和点 C，过点 C 作 $CD\perp AB$，交 $\odot O$ 于点 D，联结 PD.

（1）求证：$PC=PD$；

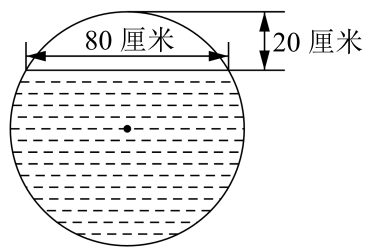
（2）如果 PE 的长等于 $\odot O$ 的半径 OC，求证：$\angle AOC=3\angle APC$.

【难度】★★



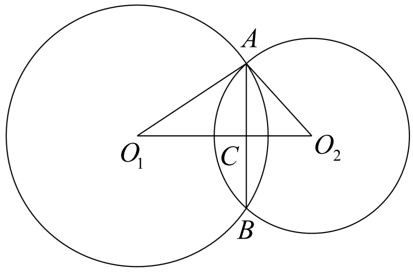
【习题 8】 某小区一圆形管道破裂，修理工准备更换一段新管道，现在量得污水水面宽度为 80 厘米，水面到管道顶部距离为 20 厘米．修理工应准备内直径为多少厘米的管道?

【难度】★★



【习题 9】 如图，已知 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 相交于 A、B 两点，若 $\tan\angle AO_1O_2=\frac{1}{2}$，$\tan\angle AO_2O_1=\frac{3}{4}$，且 $O_1O_2=30$，求 AB 的长.

【难度】★★



【习题 10】 如图 1，已知 $Rt\Delta ABC$ 中，$\angle CAB=30°$，$BC=5$．过点 A 作 $AE\perp AB$，且 $AE=15$，连接 BE 交 AC 于点 P.

（1）求 PA 的长；

（2）以点 A 为圆心，AP 为半径作 $\odot A$，试判断 BE 与 $\odot A$ 是否相切，并说明理由；

（3）如图 2，过点 C 作 $CD\perp AE$，垂足为点 D．以点 A 为圆心，r 为半径作 $\odot A$；以点 C 为圆心，R 为半径作 $\odot C$．若 r 和 R 的大小可变化，并且在变化过程中保持 $\odot A$ 和 $\odot C$ 相切，且使 D 点在 $\odot A$ 的内部，B 点在 $\odot A$ 的外部，求 r 和 R 的变化范围.

【难度】★★★

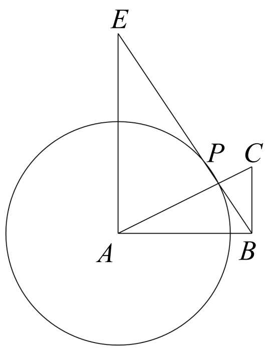


图 1

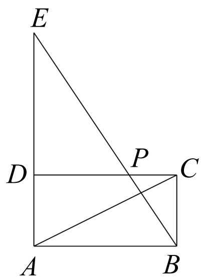


图 2

课后作业

【作业 1】 下列说法正确的是（　　）

A．平分弦的直径垂直于弦

B．相等的圆心角所对的弧相等

C．弦的垂直平分线经过圆心且平分弦所对的弧

D．半径都相等

【难度】★

【作业 2】 正九边形的中心角等于______°．

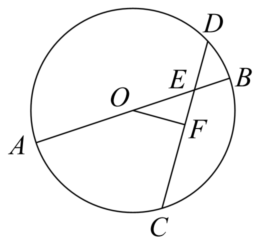
【难度】★

【作业 3】 等边三角形的外接圆的面积是内切圆面积的______倍．

【难度】★

【作业 4】 如图，$\odot O$ 中，AB 是直径，CD 与 AB 交于点 E，$\angle BED = 45^\circ$，$OF \perp CD$，$OF = 2$ 厘米，$ED = 3$ 厘米，则 $CD =$______厘米．

【难度】★★

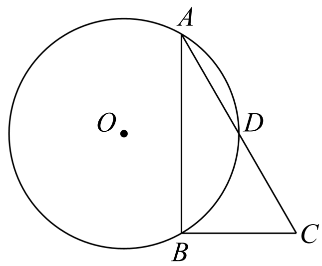


【作业 5】 在 ΔOAB 中，若 $OA = OB = 2$，$\odot O$ 的半径为 1，当 $\angle AOB$ 的度数在何范围内，直线 AB 与 $\odot O$ 相切、相交、相离．

【难度】★★

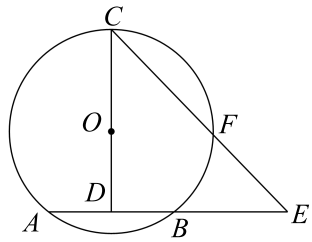
【作业6】 如图，AB 是 $\odot O$ 的弦，点 D 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，过 B 作 AB 的垂线交 AD 的延长线与点 C．求证：$AD = DC$．

【难度】★★



【作业7】 如图，已知 $\odot O$ 的半径为5，弦 AB 的长等于8，$OD \perp AB$ 于点 D，DO 的延长线与 $\odot O$ 相交于点 C，点 E 在弦 AB 的延长线上，CE 与 $\odot O$ 相交于点 F，$\cos C = \dfrac{3}{5}$．求：（1）CD 的长；（2）EF 的长．

【难度】★★

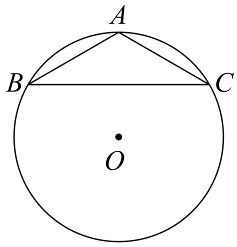


【作业8】 如图，等腰 ΔABC 内接于半径为5厘米的 $\odot O$，$AB = AC$，$\tan B = \dfrac{1}{3}$．求：

（1）BC 的长；

（2）AB 边上高的长．

【难度】★★



【作业9】 AB 是 $\odot O$ 的直径，点 P 在 BA 的延长线上，弦 $CD \perp AB$ 于点 E，PC 是切线，若 $OE : OA = 1 : 2$，$PA = 6$，求：

（1）$\odot O$ 的半径

（2）$\sin\angle PCA$ 的值．

【难度】★★★

【作业 10】 如图，已知 $AB=2$，$AD=4$，$\angle DAB=90^\circ$，$AD\,//\,BC$．点 E 是射线 BC 上的动点（点 E 与点 B 不重合），M 是线段 DE 的中点．

（1）设 $BE=x$，ΔABM 的面积为 y，求 y 关于 x 的函数解析式，并写出函数的定义域；

（2）如果以线段 AB 为直径的圆与以线段 DE 为直径的圆外切，求线段 BE 的长．

【难度】★★★