

二次函数解析式的确定

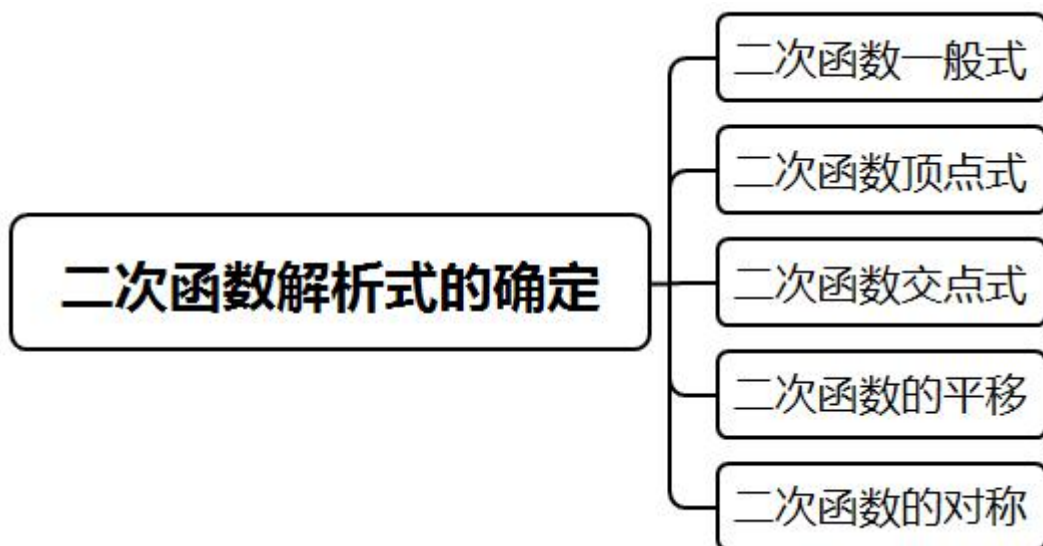


内容分析

二次函数的学习必然离不开二次函数解析式的确定，因为求解二次函数的解析式是二次函数知识的实际运用中的必不可少的一环。本讲主要讲解利用二次函数的一般式、顶点式和交点式，以及通过二次函数的平移和对称求解二次函数解析式的方法，重点在于根据不同的条件，灵活选择求解二次函数解析式的方法，从而快速准确的确定二次函数的解析式，为二次函数的综合应用打好基础。



知识结构



模块一：一般式 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$



知识精讲

1、一般式 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$

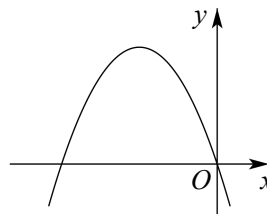
- (1) 任何二次函数都可以整理成一般式 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的形式；
- (2) 如果已知二次函数的图像上三点的坐标，可用一般式求解二次函数的解析式。



例题解析

【例 1】 如图所示的抛物线是二次函数 $y = ax^2 - 3x + a^2 - 1$ 的图像，那么 a 的值为_____.

【难度】★



【例 2】 已知二次函数的图像经过点 $(0, 2)$ 、 $(1, 1)$ 、 $(3, 5)$ ，求这个函数关系式.

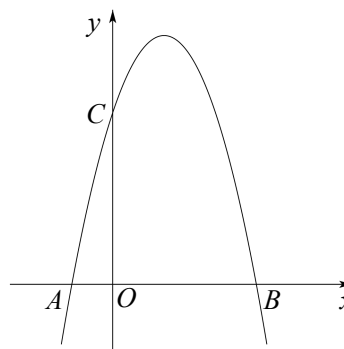
【难度】★

【例 3】 如图，二次函数图像过 A 、 B 、 C 三点，点 A 的坐标为 $(-1, 0)$ ，点 B 的坐标为 $(4, 0)$ ，点 C 在 y 轴的正半轴上，且 $AB = OC$.

(1) 求点 C 的坐标；

(2) 求二次函数的解析式，并求出函数的最大值.

【难度】★★





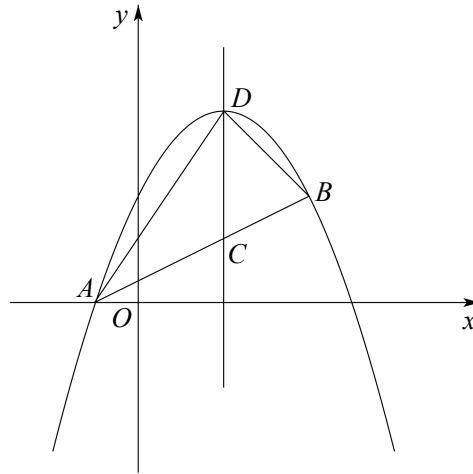
【例 4】如图，抛物线 $y = ax^2 + bx + \frac{5}{2}$ 与直线 AB 交于点 $A(-1, 0)$ ， $B(4, \frac{5}{2})$ ， D 是

抛物线 A 、 B 两点间部分上的一个动点（不与 A 、 B 重合），直线 CD 与 y 轴平行，交直线 AB 于点 C ，连接 AD 、 BD 。

(1) 求抛物线的解析式；

(2) 设点 D 的横坐标为 m ， $\triangle ADB$ 的面积为 S ，求 S 关于 m 的函数关系式，并求出 S 取得最大值时点 C 的坐标。

【难度】★★★





模块二：顶点式 $y = a(x+m)^2 + k \ (a \neq 0)$



知识精讲

1、顶点式 $y = a(x+m)^2 + k \ (a \neq 0)$

(1) 任何二次函数经过配方都可以整理成 $y = a(x+m)^2 + k \ (a \neq 0)$ 的形式，这叫做二次函数的顶点式，而 $(-m, k)$ 为抛物线的顶点坐标；

(2) 如果已知二次函数的顶点坐标和图像上任意一点的坐标，都可以用顶点式来求解二次函数的解析式；

(3) 对于任意的二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ，都可以配方为： $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$ 的形式。



例题解析

【例 5】顶点为 $(-2, -5)$ 且过点 $(1, -14)$ 的抛物线的解析式为_____。

【难度】★

【例 6】已知函数 $y = ax^2 + 2x + c$ 的图像的对称轴为直线 $x = 2$ ，函数的最大值是 -3 ，

则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $c = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【难度】★

【例 7】二次函数的图像顶点在 y 轴上，图像有最低点 $(0, 2)$ ，且经过点 $(2, 3)$ ，则函数的解析式为_____。

【难度】★★



【例 8】顶点为 $(-3, -6)$ 的抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过点 $(-1, -4)$ ，则下列结论错

误的是 ()

A. $b^2 > 4ac$

B. $ax^2 + bx + c \geq -6$

C. 若点 $(-2, m)$ 、 $(-5, n)$ 在抛物线上，则 $m > n$

D. 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = -4$ 的两根为 $x_1 = -5$ 和 $x_2 = -1$

【难度】★★

【例 9】已知二次函数 $y = x^2 + px + q$ ，顶点坐标为 $(2, -9)$ 。

(1) 求 p 、 q 的值；

(2) 这条抛物线与 x 轴的两个交点 A 、 B ，设点 M 在这条抛物线上，且 $S_{\triangle ABM} = 24$ ，求 M 的坐标。

【难度】★★

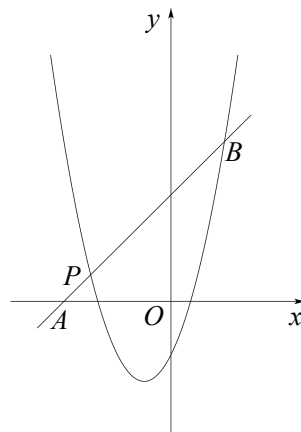
【例 10】二次函数 $y = x^2 + mx + n$ 的图像经过点 $P(-3, 1)$ ，对称轴是经过点 $(-1, 0)$

且平行于 y 轴的直线。

(1) 求二次函数解析式；

(2) 如图，一次函数 $y = kx + b$ 的图像经过点 P ，与 x 轴相交于点 A ，与二次函数的图像相交于另一点 B ，点 B 在点 P 的右侧， $PA:PB = 1:5$ ，求一次函数的解析式。

【难度】★★





模块三：交点式 $y = a(x - x_1)(x - x_2) (a \neq 0)$



知识精讲

1、交点式 $y = a(x - x_1)(x - x_2) (a \neq 0)$

(1) 交点式： $y = a(x - x_1)(x - x_2) (a \neq 0)$ ，其中 x_1, x_2 为二次函数图像与 x 轴的两个交点的横坐标；

(2) 已知二次函数与 x 轴的交点坐标，和图像上任意一点时，可用交点式求解二次函数解析式；

(3) 已知二次函数与 x 轴的交点坐标 $(x_1, 0)$ 、 $(x_2, 0)$ ，可知其对称轴为 $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ；

(4) 根据二次函数的对称性可知，对于函数图像上的两点 (x_1, a) 、 (x_2, a) ，如果它们有相同的纵坐标，则可知二次函数的对称轴为 $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ；

(5) 对于任意二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ，当 $x = 0$ 时，即 $ax^2 + bx + c = 0$ ，根据一元二次方程的求根公式可得： $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 、 $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ；

(6) 对称式： $y = a(x - x_1)(x - x_2) + k (a \neq 0)$ ，当抛物线经过点 (x_1, k) 、 (x_2, k) 时，可以用对称式来求解二次函数的解析式。



例题解析

【例 11】 已知抛物线与 x 轴的交点的横坐标分别是 -2 、 2 ，且与 y 轴的交点的纵坐标是 -3 ，求该抛物线的解析式。

【难度】★



【例 12】 已知一抛物线的形状与 $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}$ 的形状相同，对称轴为 $x = -2$ ，它与 x 轴的两交点之间的距离为 2，求此抛物线的解析式.

【难度】★★

【例 13】 设二次函数 $y_1 = a(x - x_1)(x - x_2)$ ($a \neq 0, x_1 \neq x_2$) 的图像与一次函数 $y_2 = dx + e$ ($d \neq 0$) 的图像交于点 $(x_1, 0)$. 若函数 $y = y_1 + y_2$ 的图像与 x 轴仅有一个交点，

则 ()

A. $a(x_1 - x_2) = d$

B. $a(x_2 - x_1) = d$

C. $a(x_1 - x_2)^2 = d$

D. $a(x_1 + x_2)^2 = d$

【难度】★★

【例 14】 二次函数 $y = -x^2 + kx + 12$ 的图像与 x 轴交点都位于 $(6, 0)$ 左侧，求 k 的取值范围.

【难度】★★★



【例 15】 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 在 $x = -1$ 时， y 有最小值 -4 ，它的图像与 x 轴交点的

横坐标分别为 x_1 和 x_2 ，且 $x_1^2 + x_2^2 = 10$ ．求该二次函数的解析式．

【难度】★★★

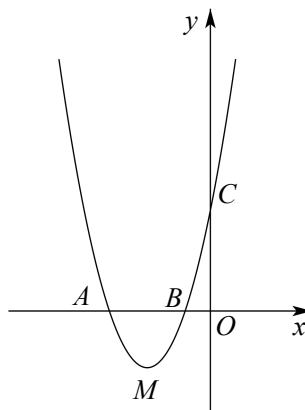
【例 16】 如图，抛物线经过 $A(-2, 0)$ 、 $B(-\frac{1}{2}, 0)$ 、 $C(0, 2)$ 三点．

(1) 求抛物线的解析式；

(2) 在直线 AC 下方的抛物线上有一点 D ，使得 $\triangle DCA$ 的面积最大，求点 D 的坐标；

(2) 设 M 是抛物线的顶点，试判断抛物线上是否存在点 H 满足 $\angle AMH = 90^\circ$ ，若存在，请求出点 H 的坐标；若不存在，请说明理由．

【难度】★★★



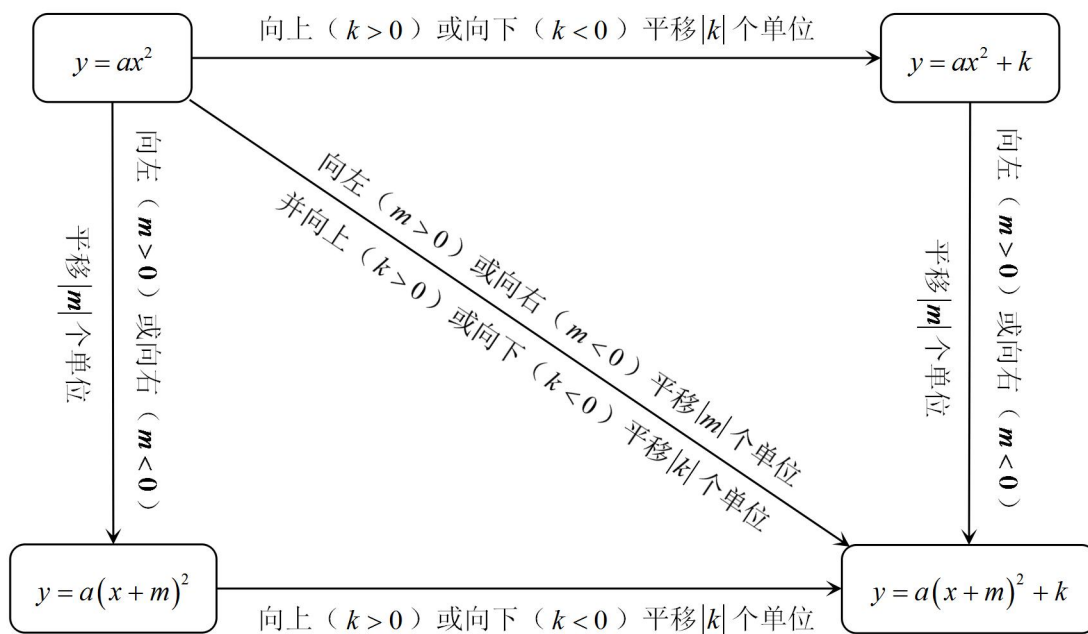


模块四：二次函数的平移



知识精讲

1、几种特殊的二次函数解析式之间的平移关系：

2、二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的平移

(1) 将二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 左右平移：

向左平移 m 个单位，函数解析式变为 $y = a(x+m)^2 + b(x+m) + c$ ；

向右平移 m 个单位，函数解析式变为 $y = a(x-m)^2 + b(x-m) + c$ 。

(2) 将二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 上下平移：

向上平移 n 个单位，函数解析式变为 $y = ax^2 + bx + c + n$ ；

向下平移 n 个单位，函数解析式变为 $y = ax^2 + bx + c - n$ 。

(3) 通常，在平移前，将二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 化成 $y = a(x+m)^2 + k$ 的形式，再根据平移的情况写出平移后函数的顶点式，再将顶点式整理成一般式。



例题解析

【例 17】 抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 向左平移 8 个单位，再向下平移 9 个单位，所得的抛物线的解析式是_____.

【难度】★

【例 18】 已知抛物线 $y = a(x-h)^2$ 向右平移 3 个单位后得到的抛物线是 $y = 2(x+1)^2$ ，求 a 、 h 的值.

【难度】★

【例 19】 如果将抛物线 $y = x^2 + 2x - 1$ 向上平移，使它经过点 $A(0, 3)$ ，那么所得的新抛物线的解析式是_____.

【难度】★★

【例 20】 如果一种变换是将抛物线向右平移 2 个单位长度或向上平移 1 个单位长度，我们把这种变换称为抛物线的简单变换. 已知一条抛物线经过两次简单变换后得到的抛物线是 $y = x^2 + 1$ ，则原抛物线的解析式不可能是（ ）

A. $y = x^2 - 1$

B. $y = x^2 + 6x + 5$

C. $y = x^2 + 4x + 4$

D. $y = x^2 + 8x + 17$

【难度】★★★

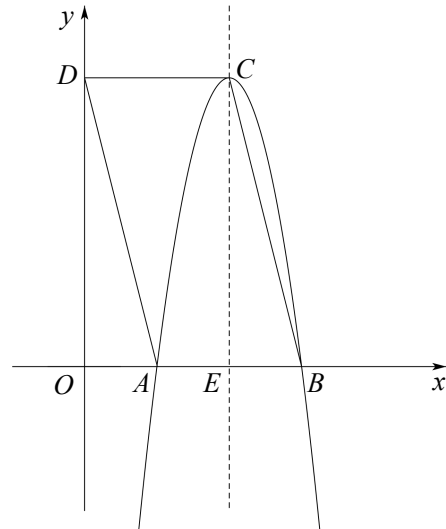


【例 21】 如图，平行四边形 $ABCD$ 中， $AB = 4$ ，点 D 的坐标为 $(0, 8)$ ，以 C 为顶点的抛物线 y_1 经过 x 轴上的点 A 和点 B .

(1) 求抛物线 y_1 的解析式；

(2) 将抛物线 y_1 向上平移，使它经过点 D ，求所得抛物线 y_2 的解析式.

【难度】★★★





模块五：二次函数的对称



知识精讲

1、关于 x 轴对称：

$y = ax^2 + bx + c$ 关于 x 轴对称后，得到的解析式是 $y = -ax^2 - bx - c$ ；

$y = a(x + m)^2 + k$ 关于 x 轴对称后，得到的解析式是 $y = -a(x + m)^2 - k$ 。

2、关于 y 轴对称：

$y = ax^2 + bx + c$ 关于 y 轴对称后，得到的解析式是 $y = ax^2 - bx + c$ ；

$y = a(x + m)^2 + k$ 关于 y 轴对称后，得到的解析式是 $y = a(x - m)^2 + k$ 。

3、关于原点对称：

$y = ax^2 + bx + c$ 关于原点对称后，得到的解析式是 $y = -ax^2 + bx - c$ ；

$y = a(x + m)^2 + k$ 关于原点对称后，得到的解析式是 $y = -a(x - m)^2 - k$ 。

4、关于顶点对称：

$y = ax^2 + bx + c$ 关于顶点对称后，得到的解析式是 $y = -ax^2 - bx + c - \frac{b^2}{2a}$ ；

$y = a(x + m)^2 + k$ 关于顶点对称后，得到的解析式是 $y = -a(x + m)^2 + k$ 。

5、关于点 (p, q) 对称：

$y = a(x + m)^2 + k$ 关于点 (p, q) 对称后，得到的解析式是 $y = -a(x - m - 2p)^2 + 2q - k$ 。



例题解析

【例 22】 抛物线 $y = 2x^2 - 4x + 3$ 绕坐标原点旋转 180° 所得的抛物线的解析式_____。

【难度】★



【例 23】 以 x 轴为对称轴，将抛物线 $y = 2x^2 - 5$ 翻折后，再向左平移 3 个单位，所得的抛物线对应的函数解析式为_____.

【难度】★

【例 24】 抛物线 $y = 2x^2 + 4x - 5$ 关于 y 轴对称的抛物线的解析式为_____, 关于直线 $x = 3$ 对称的抛物线的解析式为_____, 关于直线 $y = 3$ 对称的抛物线的解析式为_____.

【难度】★★

【例 25】 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与抛物线 $y = x^2 - 6x + 7$ 关于点 $A(1, 2)$ 对称，则 $a = \underline{\hspace{1cm}}$, $b = \underline{\hspace{1cm}}$, $c = \underline{\hspace{1cm}}$.

【难度】★★



【例 26】 如图，已知抛物线 $C_1: y = a(x+2)^2 - 5$ 的顶点为 P ，与 x 轴相交于 A 、 B 两点（点 A 在点 B 的左边），点 B 的横坐标是 1.

(1) 求点 P 的坐标及 a 的值；

(2) 如图 (1)，抛物线 C_1 与抛物线 C_2 关于 x 轴对称，将抛物线 C_2 向右平移，平移后的抛物线记为 C_3 ， C_3 的顶点为 M ，当点 P 、 M 关于点 B 成中心对称时，求 C_3 的解析式；

(3) 如图(2)，点 Q 是 x 轴正半轴上一点，将抛物线 C_1 绕点 Q 旋转 180° 后得到抛物线 C_4 . 抛物线 C_4 的顶点为 N ，与 x 轴相交于 E 、 F 两点（点 E 在 F 的左边），当以点 P 、 N 、 F 为顶点的三角形是直角三角形是，求点 Q 的坐标.

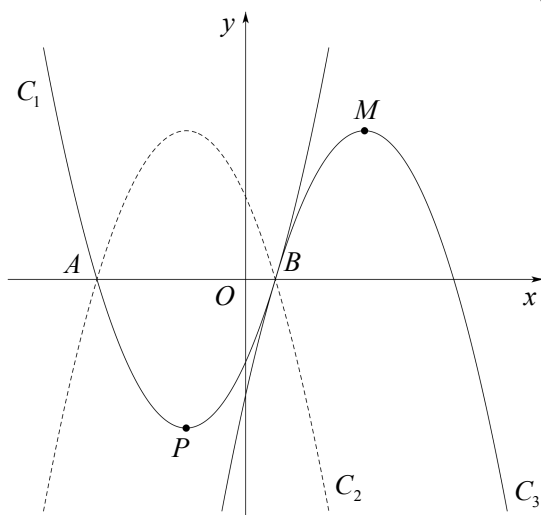


图 1

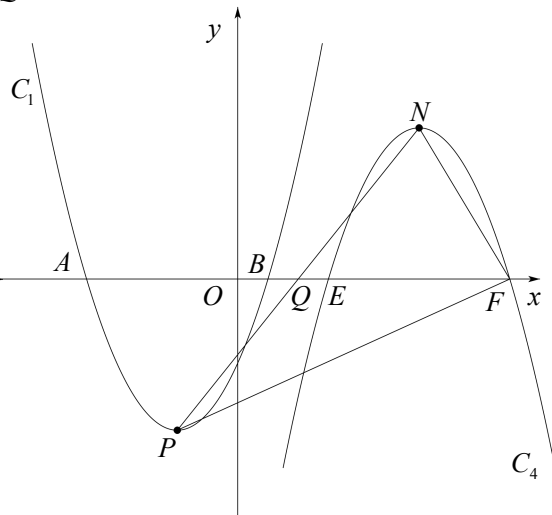


图 2

【难度】★★★★



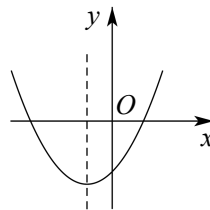
随堂检测

【习题 1】 已知抛物线的顶点为 $M(1, 4)$ ，图像与 x 轴的两个交点的距离是 6，则抛物线的解析式为_____.

【难度】★

【习题 2】 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 图像如图所示，则点 $A(b^2 - 4ac, -\frac{b}{a})$ 在第_____象限.

【难度】★



【习题 3】 已知一次函数 $y = -\frac{1}{2}x + m$ 的图像经过点 $A(-2, 3)$ ，并与 x 轴相交于点 B ，二次函数 $y = ax^2 + bx - 2$ 的图像经过点 A 和点 B 。

(1) 分别求这两个函数的解析式；

(2) 如果将二次函数的图像沿 y 轴的正方向平移，平移后的图像与一次函数的图像相交于点 P ，与 y 轴相交于点 Q ，当 $PQ \parallel x$ 轴时，试问二次函数的图像平移了几个单位？

【难度】★★

【习题 4】 已知抛物线 $y = (1-m)x^2 + 4x - 3$ 开口向下，与 x 轴交于点 $A(x_1, 0)$ 和点 $B(x_2, 0)$ ，其中 $x_1 < x_2$ ，若 $x_1^2 + x_2^2 = 10$ ，则抛物线的解析式为_____.

【难度】★★



【习题 5】 在直角坐标系中，把点 $A(-1, a)$ (a 为常数) 向右平移 4 个单位得到点 A' ，经过 A 、 A' 的抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 y 轴的交点的纵坐标为 2.

(1) 求这条抛物线的解析式；

(2) 设该抛物线的顶点为点 P ，点 B 的坐标为 $(1, m)$ ，且 $m < 3$ ，若 $\triangle ABP$ 是等腰三角形，求点 B 的坐标.

【难度】★★★

【习题 6】 对于任意两个二次函数： $y_1 = a_1x^2 + b_1x + c_1$ ， $y_2 = a_2x^2 + b_2x + c_2$ ($a_1a_2 \neq 0$)，

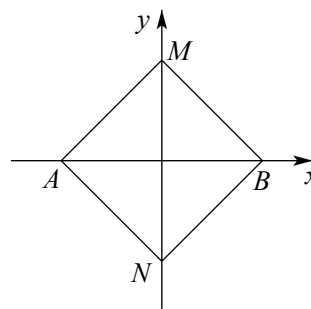
当 $|a_1| = |a_2|$ 时，我们称这两个二次函数的图像为全等抛物线. 现有 $\triangle ABM$ ， $A(-1,$

$0)$ ， $B(1, 0)$. 记过三点的二次函数抛物线为 “ $C_{\square\square\square}$ ” (“ $\square\square\square$ ” 中填写相应三

个点的字母). 已知 $M(0, 1)$ ， $\triangle ABM \cong \triangle ABN$ ，如图. 请通过计算判断 C_{ABM} 与 C_{ABN}

是否为全等抛物线.

【难度】★★★



【习题 7】 已知抛物线 $y = mx^2 - \left(3m + \frac{3}{4}\right)x + 4$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点，与 y 轴交于点 C ，

若 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，求抛物线的解析式.

【难度】★★★



课后作业

【作业 1】 二次函数的图像的对称轴是 $x = \frac{1}{2}$ ，在 y 轴上的截距是 3，且过点 $(2, 7)$ ，

则它的解析式为_____.

【难度】★

【作业 2】 抛物线 $y = 2(x-1)^2 + 4$ 关于原点对称的抛物线的表达式为_____.

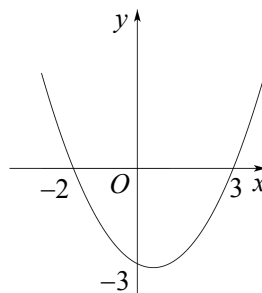
【难度】★

【作业 3】 若二次函数的图像与 x 轴只有一个交点，对称轴是直线 $x = 3$ ，与 y 轴的交点是 $(0, 6)$ ，则二次函数解析式为_____.

【难度】★

【作业 4】 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像如图所示，函数的解析式为_____.

【难度】★★





【作业 5】 已知抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + (3 - \sqrt{m^2})x + m - 1$ 的顶点在 y 轴的正半轴上，求抛物线的表达式、顶点坐标、对称轴，并分析抛物线的上升、下降趋势。

【难度】★★

【作业 6】 已知直线 l 经过点 $(4, 0)$ ，且与 x 轴、 y 轴围成的直角三角形的面积等于 8。如果一个二次函数的图像经过直线 l 与两条坐标轴的交点，以直线 $x = 3$ 为对称轴，且开口向下，求这个二次函数的解析式。

【难度】★★

【作业 7】 若抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 与 $y = -x^2 + 3x + 2$ 的两交点关于原点对称，求 a 、 b 的值。

【难度】★★



【作业 8】 已知在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 - 4$ 与 x 轴的负半轴相交于点 A ，与 y 轴相交于点 B ， $AB = 2\sqrt{5}$ ．点 P 在抛物线上，线段 AP 与 y 轴的正半轴交于点 C ，线段 BP 与 x 轴交于点 D ．设点 P 的横坐标为 m ．

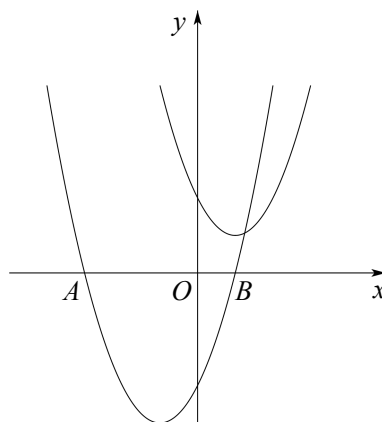
- (1) 求这条抛物线的解析式；
- (2) 用含 m 的代数式表示线段 CO 的长；
- (3) 当 $\tan \angle ODC = \frac{3}{2}$ 时，求 $\angle PAD$ 的正弦值．

【难度】★★★

【作业 9】 已知抛物线 $y_1 = x^2 - mx + \frac{m^2}{2}$ 与抛物线 $y_2 = x^2 + mx - \frac{3}{4}m^2$ 在同一平面直角坐标系中的位置如图所示．

- (1) 试判断哪条抛物线经过 A 、 B 两点，并说明理由；
- (2) 若 A 、 B 两点到原点的距离 AO 、 BO 的长满足 $\frac{1}{OB} - \frac{1}{OA} = \frac{2}{3}$ ，求经过 A 、 B 两点的抛物线解析式．

【难度】★★★





【作业 10】已知抛物线 $y = ax^2 + 4ax + t$ 与 x 轴的一个交点为 $A(-1, 0)$.

(1) 求抛物线与 x 轴的另一个交点 B 的坐标；

(2) D 是抛物线与 y 轴的交点， C 是抛物线上一点，且以 AB 为一底的梯形 $ABCD$ 的面积为 9，求此抛物线的解析式；

(3) E 是第二象限内到 x 轴、 y 轴距离的比为 $5:2$ 的点，如果点 E 在 (2) 中的抛物线上且它与点 A 在此抛物线对称轴的同侧，问：在抛物线的对称轴上是否存在点 P ，使 $\triangle APE$ 的周长最小？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.

【难度】★★★