锐角的三角比

内容分析

锐角的三角比的意义是九年级数学上学期第二章第一节的内容．本讲主要讲解锐角的三角比的意义和特殊的锐角的三角比的值，以及各锐角的三角比的关系．重点是会根据直角三角形中两边的长求相应的锐角的三角比的值，熟练运用特殊的锐角的三角比的值进行相关计算，难点是在几何图形和直角坐标系中灵活运用锐角的三角比进行解题，以及各锐角的三角比的关系在代数中的灵活运用．

知识结构

锐角的三角比

- 锐角的三角比的意义
- 特殊锐角的三角比的值
- 锐角的三角比的关系及应用

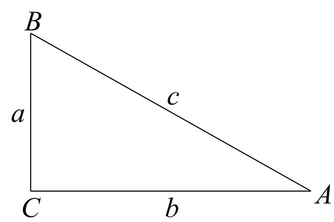
模块一：锐角的三角比的意义

知识精讲

1、正切

直角三角形中一个锐角的对边与邻边的比

叫做这个锐角的正切（tangent）．锐角 A 的正切记作 $\tan A$．



$$\tan A=\frac{\text{锐角}A\text{的对边}}{\text{锐角}A\text{的邻边}}=\frac{BC}{AC}=\frac{a}{b}.$$

2、余切

直角三角形中一个锐角的邻边与对边的比

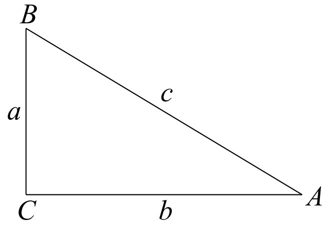
叫做这个锐角的余切（cotangent）．锐角 A 的余切记作 $\cot A$．

$$\cot A=\frac{\text{锐角}A\text{的邻边}}{\text{锐角}A\text{的对边}}=\frac{AC}{BC}=\frac{b}{a}.$$

3、正弦

直角三角形中一个锐角的对边与斜边的比叫做这个锐角的正弦（sine）．锐角 A 的正弦记作 $\sin A$．

$$\sin A=\frac{\text{锐角}A\text{的对边}}{\text{斜边}}=\frac{BC}{AB}=\frac{a}{c}.$$



4、余弦

直角三角形中一个锐角的邻边与斜边的比叫做这个锐角的余弦（cosine）．锐角 A 的余弦记作 $\cos A$．

$$\cos A=\frac{\text{锐角}A\text{的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{AC}{AB}=\frac{b}{c}.$$

例题解析

【例 1】在 ΔABC 中，$\angle B=90^\circ$，$BC=2AB$，则 $\cos A$ 的值为______.

【难度】★

【答案】$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

【解析】根据勾股定理，可得 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{5}AB$，根据三角比的定义，

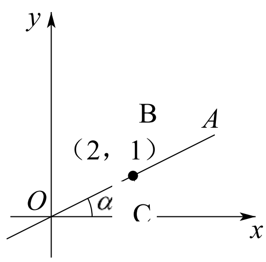
则有 $\cos A=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AB}{\sqrt{5}AB}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

【总结】考查锐角三角比相关定义，结合勾股定理进行计算.

【例 2】如图，在平面直角坐标系中，直线 OA 过点（2，1），则 $\tan\alpha$ 的值是______.

【难度】★★

【答案】$\dfrac{1}{2}$.

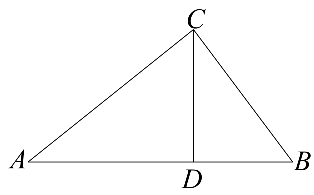


【解析】设这个点是 $B(2,1)$，作 $BC\perp x$ 轴交 x 轴于点 C，

则有 $OC=2$，$BC=1$，故 $\tan\alpha=\dfrac{BC}{OC}=\dfrac{1}{2}$.

【总结】考查“数形结合”，平面直角坐标系中点坐标转化为长度，同时可简单认识斜率与 x 轴夹角的关系.

【例 3】如图，$Rt\Delta ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$AC=8$，$BC=6$，$CD\perp AB$，垂足为 D，则 $\tan\angle BCD$ 的值是______.



【难度】★★

【答案】$\frac{3}{4}$

【解析】“子母三角形”中，易得 $\angle BCD=\angle A$，

则有 $\tan\angle BCD=\tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$.

【总结】考查“子母三角形”，通过等角的转化进行求解.

【例 4】ΔABC 中，已知 $\angle C=90^\circ$，$\sin A=\frac{2}{3}$，求 $\cos A$、$\tan A$ 的值.

【难度】★★

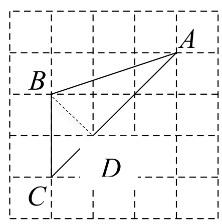
【答案】$\cos A=\frac{\sqrt{5}}{3}$，$\tan A=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

【解析】根据锐角三角比的概念，$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{2}{3}$，设 $BC=2a$，则 $AB=3a$，勾股定理得：

$$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{5}a，则 \cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{5}a}{3a}=\frac{\sqrt{5}}{3}，\tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{2a}{\sqrt{5}a}=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

【总结】考查锐角三角比的概念，初步建立锐角三角比相互关联的概念.

【例 5】如图，ΔABC 的三个顶点均在格点上，则 $\cos A$ 的值为______.



【难度】★★★

【答案】$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

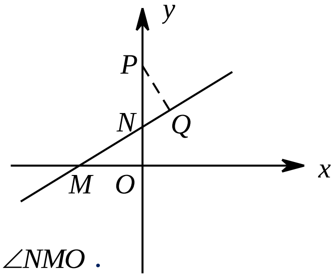
【解析】连结 BD，易得 $\angle BDA=90^\circ$，

由图可知 $AB=\sqrt{10}$，$BD=CD=\sqrt{2}$，$AD=2\sqrt{2}$，

则有 $\cos A=\frac{AD}{AB}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

【总结】格点可类似于在平面直角坐标系中，作高进行转化计算即可.

【例 6】在平面直角坐标系中，过点 P（0，2）作直线 l：$y=\frac{1}{2}x+b$（b 为常数，且 $b<2$）的垂线，垂足为 Q，则 $\tan\angle OPQ=$______.



【难度】★★★

【答案】$\frac{1}{2}$.

【解析】设直线 l 与 x 轴、y 轴交点分别为 M、N，

则有 $M(-2b,0)$，$N(0,b)$，由等角的余角相等，可得 $\angle OPQ=\angle NMO$.

则有 $\tan\angle OPQ=\tan\angle NMO=\frac{ON}{OM}=\frac{|b|}{|-2b|}=\frac{1}{2}$.

【总结】考查直线的斜率等于其与 x 轴夹角的正切值.

模块二：特殊锐角的三角比的值

知识精讲

1、特殊锐角的三角比的值

α	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
30°	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	1	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

2、补充（仅作了解，若填空、选择中出现，可直接使用）

α	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
15°	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
75°	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

3、通过观察上面的表格，可以总结出：

当 $0^\circ<\alpha<90^\circ$，α 的正弦值随着角度的增大而增大，α 的余弦值随着角度的增大而减小；α 的正切值随着角度的增大而增大，α 的余切值随着角度的增大而减小.

例题解析

【例 7】已知，在 ΔABC 中，$\sin A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\tan B=\sqrt{3}$，则 $\angle C=$______.

【难度】★★

【答案】75°

【解析】由 $\sin A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，可得 $\angle A=45^\circ$，由 $\tan B=\sqrt{3}$，可得 $\angle B=60^\circ$，根据三角形内角和为 180°，

可得：$\angle C=180^\circ-\angle A-\angle B=75^\circ$.

【总结】考查一些特殊的锐角三角比值的应用，通过值求对应的角.

【例 8】在 ΔABC 中，$\angle C=90^\circ$，已知 $a=2\sqrt{3}$，$c=4$，求 $\angle B$.

【难度】★★

【答案】30°.

【解析】根据锐角三角比的概念，可得 $\sin A=\dfrac{a}{c}=\dfrac{2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，即得 $\angle A=60^\circ$，根据直角三角形两锐角互余，可得：$\angle B=90^\circ-\angle A=30^\circ$.

【总结】考查一些特殊的锐角三角比值的应用，通过值求对应的角.

【例 9】在 ΔABC 中，三边之比 $a:b:c=1:\sqrt{3}:2$，则 $\sin A+\tan A=$______.

【难度】★★

【答案】$\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

【解析】由 $a:b:c=1:\sqrt{3}:2$，可设 $a=k$，则 $b=\sqrt{3}k$，$c=2k$，则有 $a^2+b^2=4k^2=c^2$，

即得 $\angle C=90^\circ$，则有 $\sin A=\dfrac{a}{c}=\dfrac{1}{2}$，$\tan A=\dfrac{a}{b}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

【总结】考查锐角三角比的基本概念，部分图形中可以先通过勾股定理的逆定理证明图形是直角三角形再来进行应用.

【例 10】在 ΔABC 中，若 $\left|\sin A-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|+\left(\sqrt{3}-\tan B\right)^2=0$，则 ΔABC 属于哪种三角形？

【难度】★★

【答案】等边三角形.

【解析】由 $\left|\sin A-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|+\left(\sqrt{3}-\tan B\right)^2=0$，可得 $\sin A-\frac{\sqrt{3}}{2}=0$，$\sqrt{3}-\tan B=0$，由此可得

$\angle A=\angle B=60°$，即得 ΔABC 是等边三角形.

【总结】考查特殊锐角三角比结合非负数相加和为 0 的知识，求对应角度大小的知识.

【例 11】$(\pi-3)^0+\sqrt{18}-2\sin 45°-\left(\frac{1}{8}\right)^{-1}+\frac{\tan 45°}{\sin 60°-\cos 45°}$.

【难度】★★

【答案】$4\sqrt{2}+2\sqrt{3}-7$.

【解析】原式 $=1+3\sqrt{2}-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}-8+\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{2}-7+2\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$

$=4\sqrt{2}+2\sqrt{3}-7$.

【总结】考查一些特殊角的锐角三角比以及有理数的有关计算，可直接用来计算，注意运算顺序.

【例 12】已知公式：

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$；

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.

求：$\sin 75°$、$\cos 75°$ 的值.

【难度】★★★

【答案】$\sin 75°=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\cos 75°=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

【解析】令 $\alpha=45°$，$\beta=30°$，根据上述公式，即可得

$\sin 75°=\sin(45°+30°)=\sin 45°\cos 30°+\cos 45°\sin 30°=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$；

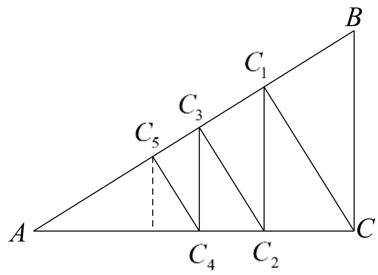
$\cos 75°=\cos(45°+30°)=\cos 45°\cos 30°-\sin 45°\sin 30°=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

【总结】考查特殊角的锐角三角比的值结合公式的理解应用.

【例 13】如图，在 ΔABC 中，$\angle ACB=90°$，$\angle A=30°$，$BC=1$．过点 C 作 $CC_1\perp AB$ 于 C_1，

过点 C_1 作 $C_1C_2\perp AB$ 于 C_2，过点 C_2 作 $C_2C_3\perp AB$ 于 C_3，…，按这样的规律继续，则 AC_n 的长为（　　）

A．$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$　　B．$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$　　C．$\dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^n}{2^{n+1}}$　　D．$\dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^{n+1}}{2^n}$



【难度】★★★

【答案】D

【解析】由图可得 $AC=\sqrt{3}$，则有 $AC_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}AC$，

$AC_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}AC_1$ … 由 此 可 得 $AC_n=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\cdot AC$ ， 即 得

$AC_n=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\cdot\sqrt{3}=\dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^{n+1}}{2^n}$，故选 D.

【总结】考查特殊角 $30°$ 角在直角三角形中的边角关系，通过找规律解决问题.

模块三：锐角的三角比的关系及运用

知识精讲

1、锐角的三角比

一个锐角的正切、余切、正弦、余弦统称为这个锐角的三角比.

	定义	表达式		取值范围	相互关系
正切	$\tan A=\dfrac{\angle A\text{的对边}}{\angle A\text{的邻边}}$	$\tan A=\dfrac{a}{b}$	$\tan B=\dfrac{b}{a}$	$\tan A>0$ （$\angle A$ 为锐角）	$\tan A=\dfrac{1}{\cot A}$ $\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}$ $\cot A=\dfrac{\cos A}{\sin A}$
余切	$\cot A=\dfrac{\angle A\text{的邻边}}{\angle A\text{的对边}}$	$\cot A=\dfrac{b}{a}$	$\cot B=\dfrac{a}{b}$	$\cot A>0$ （$\angle A$ 为锐角）	
正弦	$\sin A=\dfrac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}}$	$\sin A=\dfrac{a}{c}$	$\sin B=\dfrac{b}{c}$	$0<\sin A<1$ （$\angle A$ 为锐角）	$\sin A=\cos\left(90°-\angle A\right)$
余弦	$\cos A=\dfrac{\angle A\text{的邻边}}{\text{斜边}}$	$\cos A=\dfrac{b}{c}$	$\cos B=\dfrac{a}{c}$	$0<\cos A<1$ （$\angle A$ 为锐角）	$\cos A=\sin\left(90°-\angle A\right)$

例题解析

				$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

【例 14】在 ΔABC 中，$\angle C = 90°$，下列四个等式：① $\sin A = \cos B$；② $\cos A = \cos B$；③ $\dfrac{1}{\tan A} = \tan B$；④ $\tan A = \tan B$．其中一定成立的是______．（填序号）

【难度】★

【答案】①③.

【解析】根据锐角三角比的概念，则有 $\sin A = \dfrac{a}{c}$，$\cos B = \dfrac{a}{c}$，①一定成立；$\cos A = \dfrac{b}{c}$，$\cos B = \dfrac{a}{c}$，②不一定成立；$\tan A = \dfrac{a}{b}$，$\tan B = \dfrac{b}{a}$，③一定成立，④不一定成立.

【总结】考查直角三角形中锐角三角比的相互关系.

【例 15】已知 α 是锐角，化简：$\sqrt{\cos^2\alpha - 2\cos\alpha + 1}$．

【难度】★

【答案】$1-\cos\alpha$．

【解析】α 是锐角，则有 $0<\cos\alpha<1$，原式 $=\sqrt{(\cos\alpha-1)^2} = |\cos\alpha - 1| = 1-\cos\alpha$．

【总结】考查锐角三角比的取值范围.

【例 16】求值：$\cos 48° + \dfrac{\cos 40°}{\sin 50°} - \sin 42°$．

【难度】★

【答案】1.

【解析】原式 $= \cos 48° + \dfrac{\cos 50°}{\cos 50°} - \cos 48° = 1$．

【总结】考查锐角三角比之间的相互关系和相互转化.

【例 17】化简：$\sin^2 1° + \sin^2 2° + \cdots + \sin^2 88° + \sin^2 89°$．

【难度】★★

【答案】$\dfrac{89}{2}$．

【解析】根据锐角三角比之间的相互关系，$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\sin^2\alpha+\sin^2(90°-\alpha)=1$，

原式$=(\sin^2 1°+\sin^2 89°)+(\sin^2 2°+\sin^2 88°)+\cdots+\sin^2 45°$

$=1+1+\cdots+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\dfrac{89}{2}$.

【总结】考查锐角三角比之间的相互关系和相互转化，注意进行准确的分组．

【例 18】化简：$\dfrac{\tan^2\alpha\bullet\sin^2\alpha}{\tan^2\alpha-\sin^2\alpha}$.

【难度】★★

【答案】1．

【解析】根据锐角三角比之间的相互关系，则有$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，

原式$=\dfrac{\left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2\cdot\sin^2\alpha}{\left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2-\sin^2\alpha}=\dfrac{\sin^4\alpha}{\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}=1$.

【总结】考查锐角三角比之间的相互关系和相互转化．

【例 19】已知：$\sin\alpha+\cos\alpha=m$，$\sin\alpha-\cos\alpha=n$，则 m，n 之间的关系是（　　）

A．$m=n$　　B．$m=2n+1$　　C．$m^2=2-n^2$　　D．$m^2=1-2n$

【难度】★★

【答案】C

【解析】由$\begin{cases}\sin\alpha+\cos\alpha=m\\ \sin\alpha-\cos\alpha=n\end{cases}$，可得$\begin{cases}\sin\alpha=\dfrac{m+n}{2}\\ \cos\alpha=\dfrac{m-n}{2}\end{cases}$，由$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，

即为$\left(\dfrac{m+n}{2}\right)^2+\left(\dfrac{m-n}{2}\right)^2=1$，整理得：$m^2+n^2=2$，故选 C．

【总结】考查锐角三角比之间的相互关系和相互转化．

【例 20】已知方程 $4x^2-2(m+1)x+m=0$ 的两个根恰好是一个直角三角形的两个锐角的余弦，试求 m 的值.

【难度】★★

【答案】 $m=\sqrt{3}$.

【解析】根据一元二次方程的韦达定理，可得方程两根满足 $x_1+x_2=\dfrac{2(m+1)}{4}=\dfrac{m+1}{2}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{m}{4}$，

方程两根恰是直角三角形两锐角的余弦，则 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=1$，

即 $\left(\dfrac{m+1}{2}\right)^2-2\times\dfrac{m}{4}=1$，整理得 $m^2=3$，所以 $m=\pm\sqrt{3}$.

当 $m=\sqrt{3}$ 时，原方程为： $4x^2-2(\sqrt{3}+1)x+\sqrt{3}=0$ ，解得： $x_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$x_2=\dfrac{1}{2}$，满足题意；

当 $m=-\sqrt{3}$ 时，原方程为： $4x^2+2(\sqrt{3}-1)x-\sqrt{3}=0$ ，解得： $x_1=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$x_2=\dfrac{1}{2}$，不满足题意，所以 m 的值为 $\sqrt{3}$.

【总结】考查一元二次方程韦达定理与锐角三角比知识的结合应用，本题也可直接通过因式分解法解方程得出答案.

【例 21】若 α 为锐角，且 $2\cos^2\alpha+7\sin\alpha-5=0$ ，求 α 的度数.

【难度】★★

【答案】 $\alpha=30°$.

【解析】根据锐角三角比的相互关系，则有 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，故 $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ ，原方程即为 $2(1-\sin^2\alpha)+7\sin\alpha-5=0$ ，整理得 $2\sin^2\alpha-7\sin\alpha+3=0$ ，解得 $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$ 或 $\sin\alpha=3$ ，

α 为锐角，则 $0<\sin\alpha<1$，可得 $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$， $\alpha=30°$.

【总结】考查一元二次方程与锐角三角比知识的结合应用，把相关量当作整体未知量即可.

【例 22】$Rt\Delta ABC$ 中，$\angle C=90°$，$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$．利用锐角三角比的定义证明：

（1）$\sin^2 A+\cos^2 A=1$；　　（2）$\tan A\bullet\tan B=1$；

（3）$\dfrac{\sin A}{\cos A}=\tan A$；　　（4）$\sin A+\cos A>1$．

【难度】★★★

【答案】略．

【解析】根据锐角三角比的定义，则有 $\sin A=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{a}{c}$，$\cos A=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{b}{c}$，$\sin B=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{b}{c}$，

$\tan A=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{a}{b}$，$\tan B=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{b}{a}$，直角三角形满足勾股定理，即有 $a^2+b^2=c^2$

由此可证得：（1）$\sin^2 A+\cos^2 A=\left(\dfrac{a}{c}\right)^2+\left(\dfrac{b}{c}\right)^2=\dfrac{a^2+b^2}{c^2}=1$；

（2）$\tan A\bullet\tan B=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{b}{a}=1$；

（3）$\dfrac{\sin A}{\cos A}=\dfrac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}=\dfrac{a}{b}=\tan A$；

（4）$\sin A+\cos A=\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}=\dfrac{a+b}{c}>1$．

【总结】考查利用锐角三角比的定义证明锐角三角比之间的相互关系和转化．

【例 23】如果直角三角形的两条直角边分别为 a 和 b，斜边上的高为 h，求证：$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{h^2}$．

【难度】★★★

【答案】略．

【解析】证明：设直角三角形斜边为 c，根据勾股定理则有 $a^2+b^2=c^2$，由面积法，即可得 $ab=ch$，

平方得：$a^2b^2=c^2h^2=\left(a^2+b^2\right)h^2$，求倒得 $\dfrac{1}{a^2b^2}=\dfrac{1}{\left(a^2+b^2\right)h^2}$，两边同乘 $\left(a^2+b^2\right)$，

整理即得：$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{h^2}$．

【总结】考查“子母三角形”中相关量之间的关系和转化．

【例 24】已知α为锐角，且$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\frac{1}{3}(\sin\alpha-\cos\alpha)=1$，求以$\tan\alpha$、$\cot\alpha$为两个根的一元二次方程.

【难度】★★★

【答案】$x^2-2x+1=0$或$4x^2-9x+4=0$.

【解析】$2\sin\alpha\cos\alpha=\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)-(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$，

又$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\frac{1}{3}(\sin\alpha-\cos\alpha)=1$，则$1-(\sin\alpha-\cos\alpha)^2+\frac{1}{3}(\sin\alpha-\cos\alpha)=1$，

整理，得：$(\sin\alpha-\cos\alpha)\left[(\sin\alpha-\cos\alpha)-\frac{1}{3}\right]=0$，得：$\sin\alpha-\cos\alpha=0$或$\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{3}$，

由此进行以下分类讨论：

（1）$\sin\alpha-\cos\alpha=0$，此时可得$\sin\alpha=\cos\alpha$，则有$\tan\alpha=\cot\alpha=1$，根据一元二次方程的韦达定理，$\tan\alpha+\cot\alpha=2$，$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$，则以$\tan\alpha$、$\cot\alpha$为两根的一元二次方程是$x^2-2x+1=0$；

（2）$\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{3}$，由已知等式可得$2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{8}{9}$，则

$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=1+\frac{8}{9}=\frac{17}{9}$，$\alpha$为锐角，则有

$\sin\alpha+\cos\alpha>0=\frac{\sqrt{17}}{3}$，得$\begin{cases}\sin\alpha=\frac{\sqrt{17}+1}{6}\\ \cos\alpha=\frac{\sqrt{17}-1}{6}\end{cases}$，则$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{17}+1}{6}}{\frac{\sqrt{17}-1}{6}}=\frac{9+\sqrt{17}}{8}$，

$\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{17}-1}{6}}{\frac{\sqrt{17}+1}{6}}=\frac{9-\sqrt{17}}{8}$，根据一元二次方程的韦达定理，$\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{9}{4}$，

$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$，则以$\tan\alpha$、$\cot\alpha$为两根的一元二次方程是$4x^2-9x+4=0$.

【总结】考查一元二次方程韦达定理与锐角三角比知识的结合应用.

随堂检测

【习题 1】ΔABC 中，$\angle C=90°$，a、b、c 分别是 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边，已知 $b=5$，$c=13$，则 $\sin A=$______，$\cos A=$______，$\tan A=$______．

【难度】★

【答案】$\dfrac{12}{13}$，$\dfrac{5}{13}$，$\dfrac{12}{5}$

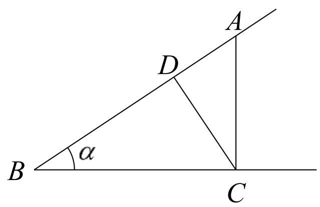
【解析】根据勾股定理，可得 $a=\sqrt{c^2-b^2}=12$，根据三角比的定义，则有 $\sin A=\dfrac{a}{c}=\dfrac{12}{13}$，$\cos A=\dfrac{b}{c}=\dfrac{5}{13}$，$\tan A=\dfrac{a}{b}=\dfrac{12}{5}$．

【总结】考查锐角三角比相关定义，结合勾股定理进行计算．

【习题 2】如图，点 A 为 $\angle\alpha$ 边上的任意一点，作 $AC\perp BC$ 于点 C，$CD\perp AB$ 于点 D，下列用线段比表示 $\cos\alpha$ 的值，错误的是（　　）

A．$\dfrac{BD}{BC}$　　B．$\dfrac{BC}{AB}$

C．$\dfrac{AD}{AC}$　　D．$\dfrac{CD}{AC}$



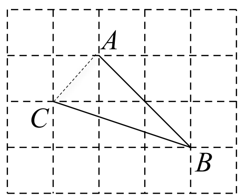
【难度】★

【答案】C

【解析】$\angle B+\angle BAC=\angle ACD+\angle BAC=90°$，可得 $\angle B=\angle ACD=\alpha$，则 $\cos\alpha=\cos\angle ACD=\dfrac{CD}{AC}$，可知 C 错误．

【总结】本题考查“子母三角形”，进行等角转化，把握相应的锐角三角比定义即可．

【习题 3】如图，在网格中，小正方形的边长均为 1，点 A、B、C 都在格点上，则 $\angle ABC$ 的正切值是______．



【难度】★

【答案】$\dfrac{1}{2}$．

【解析】连结 AC，在格点中可得 $AC=\sqrt{2}$，$AB=2\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{10}$，根据勾股定理逆定理，则有 $\angle BAC=90°$，$\tan\angle BAC=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$．

【总结】考查格点三角形，主要要找准直角．

【习题 4】若 $\left(2\sin\alpha-\sqrt{2}\right)^2+\left|1-2\cos\beta\right|=0$，求 α、β 的值（α、β 都是锐角）.

【难度】★★

【答案】$\alpha=45^\circ$，$\beta=60^\circ$

【解析】由 $\left(2\sin\alpha-\sqrt{2}\right)^2+\left|1-2\cos\beta\right|=0$，可得 $\begin{cases}2\sin\alpha-\sqrt{2}=0\\1-2\cos\beta=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\\cos\beta=\dfrac{1}{2}\end{cases}$，$\alpha$、$\beta$ 都是锐角，由此可得 $\alpha=45^\circ$，$\beta=60^\circ$.

【总结】考查非负数相加和为 0，则每个式子都为 0，结合特殊角的锐角三角比求角的大小.

【习题 5】$\dfrac{\tan 45^\circ}{\cot 30^\circ \bullet \sin 60^\circ}-\sqrt{\left(\cos 45^\circ-1\right)^2}-\sin 45^\circ+\cot 60^\circ\tan 30^\circ$.

【难度】★★

【答案】0.

【解析】原式 $=\dfrac{1}{\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}-\left(1-\cos 45^\circ\right)-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$=\dfrac{2}{3}-1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{3}$

$=0$.

【总结】考查一些特殊角的锐角三角比，可直接用来计算，注意运算顺序.

【习题 6】化简：$\tan 1^\circ \bullet \tan 2^\circ \bullet \cdots \bullet \tan 88^\circ \bullet \tan 89^\circ$.

【难度】★★

【答案】1.

【解析】根据锐角三角比之间的相互关系，$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=\tan\alpha\cdot\tan\left(90^\circ-\alpha\right)=1$，

原式 $=\left(\tan 1^\circ\cdot\tan 89^\circ\right)\cdot\left(\tan 2^\circ\cdot\tan 88^\circ\right)\cdot\cdots\cdot\tan 45^\circ$

$=1\times1\times\cdots\times1=1$

【总结】考查锐角三角比之间的相互关系和相互转化，注意进行准确的分组.

【习题 7】求值：$\dfrac{\tan^2 60°+2\cos 45°}{\sin^2 27°+\sin^2 63°}-\dfrac{\tan 45°+\cot^2 30}{\cos^2 27°+\cos^2 63°}$.

【难度】★★

【答案】$\sqrt{2}-1$.

【解析】原式$=\dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^2+2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{1}-\dfrac{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}{1}=\left(3+\sqrt{2}\right)-4=\sqrt{2}-1$.

【总结】考查一些特殊角的锐角三角比，可直接用来计算，注意运算顺序，同时注意好锐角三角比之间的一些相互关系的应用.

【习题 8】等腰三角形底边长为 8 cm，面积为$8\sqrt{5}$ cm²，求底角的正切值.

【难度】★★

【答案】$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

【解析】作底边上的高，可得高长$h=\dfrac{2S}{a}=\dfrac{2\times 8\sqrt{5}}{8}=2\sqrt{5}cm$，根据等腰三角形的性质，底边上的高平分底边，即可得底角正切值为$\dfrac{h}{\frac{1}{2}a}=\dfrac{2\sqrt{5}}{\frac{1}{2}\times 8}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

【总结】考查利用等腰三角形的性质求解等腰三角形中相关锐角三角比，通过作高将角放到直角三角形中.

【习题 9】在 $Rt\Delta ABC$ 中，$\angle C=90°$，$S_{\Delta ABC}=\dfrac{m}{2}$，且两直角边长满足条件 $3a+2b=m$．当 m 取最小值时，求 ΔABC 中最小内角的正切值.

【难度】★★★

【答案】$\dfrac{2}{3}$.

【解析】$S_{\Delta ABC}=\dfrac{m}{2}$，即得 $ab=m$，由 $3a+2b=m$ 得 $b=\dfrac{m-3a}{2}$，则有 $a\cdot\dfrac{m-3a}{2}=m$，即关于实数 a 的方程 $3a^2-ma+2m=0$ 有实数根，则有 $\Delta=m^2-24m\geq 0$，由 $m>0$ 可得 $m\geq 24$，即 $m_{\min}=24$，此时方程解为 $a=4$，代入得 $b=6$，由此可得 ΔABC 最小内角正切值即为 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$.

【总结】通过转化把问题变作一元二次方程根的问题，关键在于对 m 取最小值这一关键条件的把握.

【习题 10】已知 a、b、c 分别是ΔABC中$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的对边，关于 x 的一元二次方程 $a\left(1-x^2\right)+2bx+c\left(1+x^2\right)=0$ 有两个相等的实数根，且 $3c=a+3b$.

（1）判断ΔABC的形状；

（2）求 $\sin A$、$\sin B$.

【难度】★★★

【答案】（1）直角三角形；（2）$\sin A=\frac{3}{5}$，$\sin B=\frac{4}{5}$.

【解析】（1）将一元二次方程整理成一般形式，即为$\left(c-a\right)x^2+2bx+\left(c+a\right)=0$，方程有两个相等的实数根，则有$\Delta=\left(2b\right)^2-4\left(c-a\right)\left(c+a\right)=0$，由此得$c^2=a^2+b^2$，即$\Delta ABC$为直角三角形；

（2）由已知 $3c=a+3b$，可得$c-b=\frac{1}{3}a$，根据勾股定理，$c^2-b^2=\left(c+b\right)\left(c-b\right)=a^2$，由此可得$c+b=3a$，由此则有$c=\frac{5}{3}a$，$b=\frac{4}{3}a$，由此可得$\sin A=\frac{a}{c}=\frac{3}{5}$，$\sin B=\frac{b}{c}=\frac{4}{5}$.

【总结】考查一元二次方程知识与锐角三角比知识的结合应用，根据题目条件得出等量关系解决问题.

课后作业

【作业 1】$Rt\Delta ABC$ 中，已知 $\angle A=90^\circ$，$AB=2$，$AC=4$，则 $\tan B=$______，$\cos C=$______，$\sin B=$______.

【难度】★

【答案】2，$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

【解析】根据勾股定理，可得 $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=2\sqrt{5}$，根据锐角三角比的定义，则有

$$\tan B=\frac{AC}{AB}=\frac{4}{2}=2,\ \cos C=\frac{AC}{BC}=\frac{4}{2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5},\ \sin B=\frac{AC}{BC}=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

【总结】考查锐角三角比相关定义，结合勾股定理进行计算.

【作业 2】在 ΔABC 中，$\angle C=90^\circ$，若斜边 AB 是直角边 BC 的 3 倍，则 $\tan B$ 的值是（　　）

A．$\dfrac{1}{3}$　　B．3　　C．$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　D．$2\sqrt{2}$

【难度】★

【答案】D

【解析】根据勾股定理，可得 $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{(3BC)^2-BC^2}=2\sqrt{2}BC$，根据锐角三角比的定义，则有 $\tan B=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{2\sqrt{2}BC}{BC}=2\sqrt{2}$.

【总结】考查锐角三角比相关定义，结合勾股定理进行计算.

【作业 3】在 $Rt\Delta ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，如果各边的长都延长到原来的两倍，那么锐角 A 的各三角比的值（　　）

A．都扩大到原来的 2 倍　　B．都缩小为原来的一半

C．没有变化　　D．不能确定

【难度】★

【答案】C

【解析】锐角三角比的大小只与角本身的大小有关，与夹这个角的边的大小无关.

【总结】考查一个固定角的锐角三角比只与这个角本身大小有关.

【作业 4】$2016^0-\cot 30°+\dfrac{1}{\sqrt{3}-2\cos 45°}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$.

【难度】★★

【答案】$\sqrt{2}-3$.

【解析】原式$=1-\sqrt{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}-2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}}-4=-3-\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}-3$.

【总结】考查一些特殊角的锐角三角比结合相关有理数的计算，可直接用来计算，注意运算顺序.

【作业 5】若$a\sin\theta+\cos\theta=1$，$b\sin\theta-\cos\theta=1$，求证$ab=1$.

【难度】★★

【答案】略.

【解析】证明：$a\sin\theta+\cos\theta=1$，$b\sin\theta-\cos\theta=1$，得$\begin{cases}\sin\theta=\dfrac{2}{a+b}\\ \cos\theta=\dfrac{b-a}{a+b}\end{cases}$，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，

所以$\left(\dfrac{2}{a+b}\right)^2+\left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)^2=1$，由此即得：$4+(b-a)^2=(a+b)^2$，即可得$ab=1$.

【总结】根据$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$变形即可得到求证的结果.

【作业 6】在$Rt\Delta ABC$中，$\angle C=90°$，$a+b=28$，$\sin A+\sin B=\dfrac{7}{5}$，求斜边$c$的长.

【难度】★★

【答案】20.

【解析】根据锐角三角比的定义，可得$\sin A+\sin B=\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}=\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{7}{5}$，由$a+b=28$，代入即可得$c=20$.

【总结】考查对锐角三角比定义的充分利用.

【作业 7】已知关于x的一元二次方程$(m+2)x^2-(2m-11)x+12=0$的两个根是一个直角三角形的两个锐角的正弦，求实数m的值.

【难度】★★

【答案】$m=23$.

【解析】根据一元二次方程的韦达定理，则方程两根满足$x_1+x_2=\dfrac{2m-11}{m+2}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{12}{m+2}$，

方程两根恰是一个直角三角形两锐角的正弦，则 $x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=1$，

即 $\left(\frac{2m-11}{m+2}\right)^2-2\times\frac{12}{m+2}=1$，整理得：$m^2-24m+23=0$，解得：$m_1=1$，$m_2=23$．

当 $m=1$ 时，原方程为：$x^2+3x+4=0$，此时方程无解，舍去；

当 $m=23$ 时，原方程为：$25x^2-35x+12=0$，解得：$x_1=\frac{4}{5}$，$x_2=\frac{3}{5}$，满足题意．

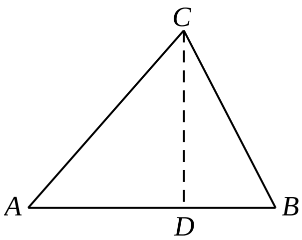
所以，实数 m 的值为 23．

【总结】考查一元二次方程韦达定理与锐角三角比知识的结合应用．

【作业 8】已知锐角 ΔABC 中，$AB=c$，$AC=b$，$BC=a$，利用锐角三角比的意义证明：$c=a\cos B+b\cos A$．

【难度】★★

【答案】略．



【解析】证明：如图，作 $CD\perp AB$ 交 AB 于点 D，

根据锐角三角比的定义，则有

$\cos B=\frac{BD}{BC}=\frac{BD}{a}$，$\cos A=\frac{AD}{AC}=\frac{AD}{b}$．

由此可得：$BD=a\cos B$，$AD=b\cos A$，

因为 $AB=AD+BD$，

所以 $c=a\cos B+b\cos A$．

【总结】考查锐角三角比定义的应用，只需要通过作高把角和线段放到直角三角形中即可进行求解．

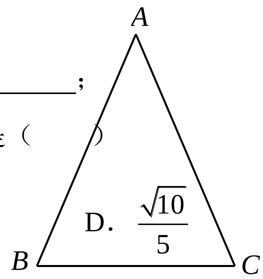
【作业 9】我们知道，在直角三角形中，一个锐角的三角比由三角形中相应两条边边长的比值确定，由此建立了直角三角形中边角之间的联系．类似的，可以在等腰三角形中建立边角之间的联系．我们定义：等腰三角形中底边与腰的比值叫做顶角的“正对”（sad）．如图（a），在 ΔABC 中，$AB=AC$，顶角 A 的正对记作 sad A，这时 sad $A=\frac{BC}{AB}$．容易知道，一个角的大小与这个角的正对值也是互相唯一确定的．根据定义，求解下列问题：

（1）sad 60° =______；

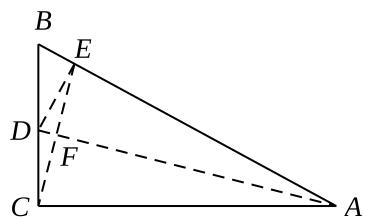
（2）对于 0° $<A<180°$，sad A 的取值范围是______；

（3）如图（b），已知 $\sin A=\frac{3}{5}$，则 sad A 的值是（　　）

A．$\frac{6}{5}$　　B．$\frac{2}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{5}}{4}$　　D．$\frac{\sqrt{10}}{5}$



(a)



(b)

【难度】★★★

【答案】（1）1；（2）$0 < sadA < 2$；

（3）D

【解析】（1）顶角为60°，即这个等腰三角

形是等边三角形，三边长都相等，

由此可知 $sad60° = 1$；

（2）根据三角形三边关系，

可知 $0 < BC < AB + AC = 2AB$，由此可得 $0 < sadA < 2$；

（3）取 $\angle BAC$ 的角平分线 AD 交 BC 于点\ D，作 $DE \perp AB$ 交 AB 于点 E，连结 CE 交 AD 于点 F，由 $\angle BCA = 90°$，则有 $CD = DE$，AD 垂直平分 CE，

$\sin\angle BAC = \frac{3}{5}$，可设 $BC = 3a$，则有 $AB = 5a$，$AC = 4a$，$\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{5}$，

则有 $BD = \frac{5}{4}DE = \frac{5}{4}CD$，由 $BD + CD = BC = 3a$，即得 $CD = \frac{4}{3}a$，根据勾股定理，

则有 $AD = \sqrt{CD^2 + AC^2} = \frac{4}{3}\sqrt{10}a$，由三角形的面积法，则有 $CF \cdot AD = CD \cdot AC$，

可得 $CF = \frac{AC \cdot CD}{AD} = \frac{2}{5}\sqrt{10}a$，则 $CE = 2CF = \frac{4}{5}\sqrt{10}a$，

由此可得：$sad\angle BAC = \frac{CE}{AC} = \frac{\frac{4}{5}\sqrt{10}a}{4a} = \frac{\sqrt{10}}{5}$，故选 D．

【总结】新定义题型，抓准题目所提供的基本条件，利用等腰三角形的特殊性质，过程中注意利用面积法等相关几何解题方法．

【作业 10】在锐角 ΔABC 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 所对的边分别为 a、b、c．

求证：（1）$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$；

（2）$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A$．

【难度】★★★

【答案】略．

【解析】证明：（1）如图，构造 ΔABC 的外接圆 $\odot O$，连结 AO 并延长交 BC 于 D，连结 OB、OC，过点 O 作 $OE \perp BC$ 交 BC 于点 E，则有 $BE = CE = \frac{1}{2}BC$，$\angle BOE = \angle COE = \frac{1}{2}\angle BOC$．

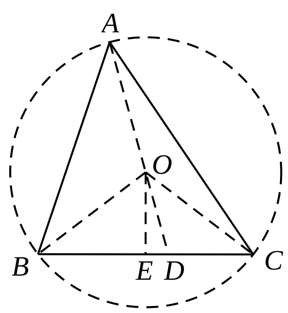
$\because OA = OB = OC$，

$\therefore \angle BAO = \angle ABO$，$\angle CAO = \angle ACO$．

$\therefore \angle BOD = 2\angle BAO$，$\angle COD = 2\angle CAO$．

$\therefore \angle BOD + \angle COD = 2\angle BAO + 2\angle CAO$．

即得 $\angle BOC = 2\angle BAC$．$\therefore \angle BOE = \angle BAC$．



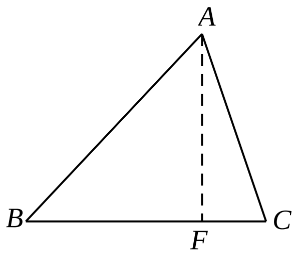
根据锐角三角比定义，可得：$\sin\angle BOE=\dfrac{BE}{BO}$，

由此可得：$BO=\dfrac{\frac{1}{2}BC}{\sin\angle BOE}=\dfrac{\frac{1}{2}b}{\sin\angle BAC}$，则$\dfrac{b}{\sin\angle BAC}=2r$．

同理$\dfrac{b}{\sin\angle ABC}=\dfrac{c}{\sin\angle ACB}=2r$，

即证$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$．

（2）过点A作$AF\perp BC$交BC于点F，



根据锐角三角比定义，则有$\sin B=\dfrac{AF}{AB}=\dfrac{AF}{c}$．

$\therefore AF=c\sin B$．

$\therefore S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AF\cdot BC=\dfrac{1}{2}ac\sin B$．

同理$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}bc\sin\angle BAC$，

即证$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}bc\sin A$．

【总结】考查利用锐角三角比进行三角形三边关系的关联，通过作高把相应的边角放到直角三角形中表示出来即可．