锐角的三角比

内容分析

锐角的三角比的意义是九年级数学上学期第二章第一节的内容．本讲主要讲解锐角的三角比的意义和特殊的锐角的三角比的值，以及各锐角的三角比的关系．重点是会根据直角三角形中两边的长求相应的锐角的三角比的值，熟练运用特殊的锐角的三角比的值进行相关计算，难点是在几何图形和直角坐标系中灵活运用锐角的三角比进行解题，以及各锐角的三角比的关系在代数中的灵活运用．

知识结构

锐角的三角比
- 锐角的三角比的意义
- 特殊锐角的三角比的值
- 锐角的三角比的关系及应用

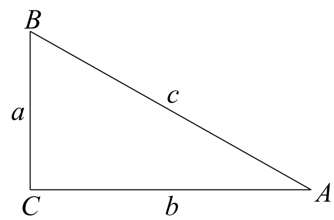
模块一：锐角的三角比的意义

知识精讲

1、 正切

直角三角形中一个锐角的对边与邻边的比叫做这个锐角的正切（tangent）．锐角 A 的正切记作 $\tan A$．

$$\tan A=\frac{\text{锐角}A\text{的对边}}{\text{锐角}A\text{的邻边}}=\frac{BC}{AC}=\frac{a}{b}.$$



2、 余切

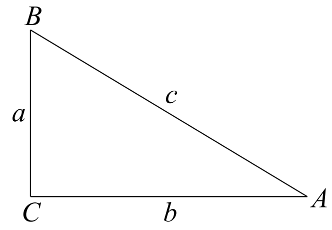
直角三角形中一个锐角的邻边与对边的比叫做这个锐角的余切（cotangent）．锐角 A 的余切记作 $\cot A$．

$$\cot A=\frac{\text{锐角}A\text{的邻边}}{\text{锐角}A\text{的对边}}=\frac{AC}{BC}=\frac{b}{a}.$$

3、 正弦

直角三角形中一个锐角的对边与斜边的比叫做这个锐角的正弦（sine）．锐角 A 的正弦记作 $\sin A$．

$$\sin A=\frac{\text{锐角}A\text{的对边}}{\text{斜边}}=\frac{BC}{AB}=\frac{a}{c}.$$



4、 余弦

直角三角形中一个锐角的邻边与斜边的比叫做这个锐角的余弦（cosine）．锐角 A 的余弦记作 $\cos A$．

$$\cos A=\frac{\text{锐角}A\text{的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{AC}{AB}=\frac{b}{c}.$$

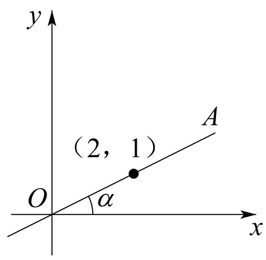
例题解析

【例 1】 在 ΔABC 中， $\angle B=90°$，$BC=2AB$，则 $\cos A$ 的值为______．

【难度】★

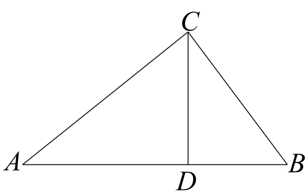
【例 2】 如图，在平面直角坐标系中，直线 OA 过点（2，1），则 $\tan\alpha$ 的值是______．

【难度】★★



【例 3】 如图，$Rt\Delta ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=8$，$BC=6$，$CD\perp AB$，垂足为 D，则 $\tan\angle BCD$ 的值是______．

【难度】★★

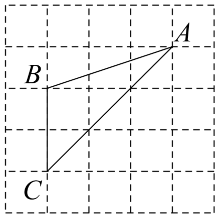


【例 4】 ΔABC 中，已知 $\angle C=90°$， $\sin A=\dfrac{2}{3}$，求 $\cos A$ 、 $\tan A$ 的值.

【难度】★★

【例 5】 如图，ΔABC 的三个顶点均在格点上，则 $\cos A$ 的值为______.

【难度】★★★



【例 6】 在平面直角坐标系中，过点 P（0，2）作直线 l： $y=\dfrac{1}{2}x+b$（b 为常数，且 $b<2$）的垂线，垂足为 Q，则 $\tan\angle OPQ=$______.

【难度】★★★

模块二：特殊锐角的三角比的值

知识精讲

1、特殊锐角的三角比的值

α	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
30°	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
45°	1	1	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\sqrt{3}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$

2、补充（仅作了解，若填空、选择中出现，可直接使用）

α	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
15°	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
75°	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$	$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

3、通过观察上面的表格，可以总结出：

当 $0^\circ<\alpha<90^\circ$，α 的正弦值随着角度的增大而增大，α 的余弦值随着角度的增大而减小；α 的正切值随着角度的增大而增大，α 的余切值随着角度的增大而减小.

例题解析

【例 7】已知，在 ΔABC 中，$\sin A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\tan B=\sqrt{3}$，则 $\angle C=$______.

【难度】★★

【例 8】 在 ΔABC 中， $\angle C=90^{\circ}$，已知 $a=2\sqrt{3}$， $c=4$，求 $\angle B$.

【难度】★★

【例 9】 在 ΔABC 中，三边之比 $a:b:c=1:\sqrt{3}:2$，则 $\sin A+\tan A=$______.

【难度】★★

【例 10】 在 ΔABC 中，若 $\left|\sin A-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|+\left(\sqrt{3}-\tan B\right)^{2}=0$，则 ΔABC 属于哪种三角形？

【难度】★★

【例 11】 $(\pi-3)^{0}+\sqrt{18}-2\sin 45^{\circ}-\left(\frac{1}{8}\right)^{-1}+\frac{\tan 45^{\circ}}{\sin 60^{\circ}-\cos 45^{\circ}}$.

【难度】★★

【例 12】 已知公式： $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$；

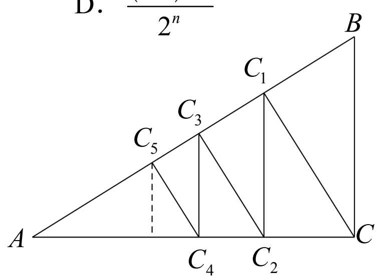
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.

求： $\sin 75^{\circ}$ 、 $\cos 75^{\circ}$ 的值.

【难度】★★★

【例 13】　如图，在 ΔABC 中，$\angle ACB=90^\circ$，$\angle A=30^\circ$，$BC=1$．过点 C 作 $CC_1\perp AB$ 于 C_1，过点 C_1 作 $C_1C_2\perp AB$ 于 C_2，过点 C_2 作 $C_2C_3\perp AB$ 于 C_3，…，按这样的规律继续，则 AC_n 的长为（　　）

A．$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$　　B．$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$　　C．$\dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^n}{2^{n+1}}$　　D．$\dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^{n+1}}{2^n}$



【难度】★★★

模块三：锐角的三角比的关系及运用

知识精讲

1、锐角的三角比

一个锐角的正切、余切、正弦、余弦统称为这个锐角的三角比．

<table>
<tr><th></th><th>定义</th><th colspan="2">表达式</th><th>取值范围</th><th>相互关系</th></tr>
<tr><td>正切</td><td>$\tan A=\dfrac{\angle A\text{的对边}}{\angle A\text{的邻边}}$</td><td>$\tan A=\dfrac{a}{b}$</td><td>$\tan B=\dfrac{b}{a}$</td><td>$\tan A>0$（$\angle A$ 为锐角）</td><td rowspan="2">$\tan A=\dfrac{1}{\cot A}$
$\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}$
$\cot A=\dfrac{\cos A}{\sin A}$</td></tr>
<tr><td>余切</td><td>$\cot A=\dfrac{\angle A\text{的邻边}}{\angle A\text{的对边}}$</td><td>$\cot A=\dfrac{b}{a}$</td><td>$\cot B=\dfrac{a}{b}$</td><td>$\cot A>0$（$\angle A$ 为锐角）</td></tr>
<tr><td>正弦</td><td>$\sin A=\dfrac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}}$</td><td>$\sin A=\dfrac{a}{c}$</td><td>$\sin B=\dfrac{b}{c}$</td><td>$0<\sin A<1$（$\angle A$ 为锐角）</td><td rowspan="2">$\sin A=\cos\left(90^\circ-\angle A\right)$
$\cos A=\sin\left(90^\circ-\angle A\right)$
$\sin^2 A+\cos^2 A=1$</td></tr>
<tr><td>余弦</td><td>$\cos A=\dfrac{\angle A\text{的邻边}}{\text{斜边}}$</td><td>$\cos A=\dfrac{b}{c}$</td><td>$\cos B=\dfrac{a}{c}$</td><td>$0<\cos A<1$（$\angle A$ 为锐角）</td></tr>
</table>

例题解析

【例 14】 在 ΔABC 中，$\angle C=90°$，下列四个等式：① $\sin A=\cos B$；② $\cos A=\cos B$；③ $\dfrac{1}{\tan A}=\tan B$；④ $\tan A=\tan B$．其中一定成立的是______．（填序号）

【难度】★

【例 15】 已知 α 是锐角，化简：$\sqrt{\cos^2\alpha-2\cos\alpha+1}$．

【难度】★

【例 16】 求值：$\cos 48°+\dfrac{\cos 40°}{\sin 50°}-\sin 42°$．

【难度】★

【例 17】 化简：$\sin^2 1°+\sin^2 2°+\cdots+\sin^2 88°+\sin^2 89°$．

【难度】★★

【例 18】 化简：$\dfrac{\tan^2\alpha\bullet\sin^2\alpha}{\tan^2\alpha-\sin^2\alpha}$．

【难度】★★

【例 19】 已知：$\sin\alpha+\cos\alpha=m$，$\sin\alpha-\cos\alpha=n$，则 m，n 之间的关系是（　　）

A．$m=n$　　B．$m=2n+1$　　C．$m^2=2-n^2$　　D．$m^2=1-2n$

【难度】★★

【例 20】 已知方程 $4x^2-2(m+1)x+m=0$ 的两个根恰好是一个直角三角形的两个锐角的余弦，试求 m 的值．

【难度】★★

【例 21】 若 α 为锐角，且 $2\cos^2\alpha+7\sin\alpha-5=0$，求 α 的度数．

【难度】★★

【例 22】 $Rt\Delta ABC$ 中，$\angle C=90°$，$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$．利用锐角三角比的定义证明：

（1）$\sin^2 A+\cos^2 A=1$；　　（2）$\tan A\bullet\tan B=1$；

（3）$\dfrac{\sin A}{\cos A}=\tan A$；　　（4）$\sin A+\cos A>1$．

【难度】★★★

【例 23】　如果直角三角形的两条直角边分别为 a 和 b，斜边上的高为 h，

求证：$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{h^2}$.

【难度】★★★

【例 24】　已知 α 为锐角，且 $2\sin\alpha \cdot \cos\alpha+\dfrac{1}{3}(\sin\alpha-\cos\alpha)=1$，求以 $\tan\alpha$ 、 $\cot\alpha$ 为两个根的一元二次方程.

【难度】★★★

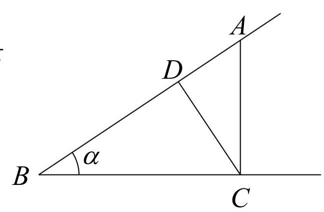
随堂检测

【习题 1】　ΔABC 中，$\angle C=90°$，a、b、c 分别是 $\angle A$ 、$\angle B$ 、$\angle C$ 的对边，已知 $b=5$，$c=13$，则 $\sin A=$______，$\cos A=$______，$\tan A=$______.

【难度】★

【习题 2】　如图，点 A 为 $\angle\alpha$ 边上的任意一点，作 $AC\perp BC$ 于点 C，$CD\perp AB$ 于点 D，下列用线段比表示 $\cos\alpha$ 的值，错误的是（　　）

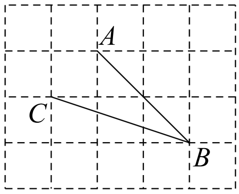
A. $\dfrac{BD}{BC}$　　B. $\dfrac{BC}{AB}$　　C. $\dfrac{AD}{AC}$　　D. $\dfrac{CD}{AC}$



【难度】★

【习题 3】 如图，在网格中，小正方形的边长均为 1，点 A、B、C 都在格点上，则 $\angle ABC$ 的正切值是______.

【难度】★



【习题 4】 若 $\left(2\sin\alpha-\sqrt{2}\right)^2+\left|1-2\cos\beta\right|=0$，求 α、β 的值（α、β 都是锐角）.

【难度】★★

【习题 5】 $\dfrac{\tan 45^\circ}{\cot 30^\circ \bullet \sin 60^\circ}-\sqrt{\left(\cos 45^\circ-1\right)^2}-\sin 45^\circ+\cot 60^\circ\tan 30^\circ$.

【难度】★★

【习题 6】 化简：$\tan 1^\circ \bullet \tan 2^\circ \bullet \cdots \bullet \tan 88^\circ \bullet \tan 89^\circ$.

【难度】★★

【习题 7】 求值：$\dfrac{\tan^2 60^\circ+2\cos 45^\circ}{\sin^2 27^\circ+\sin^2 63^\circ}-\dfrac{\tan 45^\circ+\cot^2 30}{\cos^2 27^\circ+\cos^2 63^\circ}$.

【难度】★★

【习题 8】 等腰三角形底边长为 8 cm，面积为 $8\sqrt{5}$ cm²，求底角的正切值.

【难度】★★

【习题 9】 在 $Rt\Delta ABC$ 中，$\angle C=90°$，$S_{\Delta ABC}=\dfrac{m}{2}$，且两直角边长满足条件 $3a+2b=m$. 当 m 取最小值时，求 ΔABC 中最小内角的正切值.

【难度】★★★

【习题 10】 已知 a、b、c 分别是 ΔABC 中 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边，关于 x 的一元二次方程 $a\left(1-x^2\right)+2bx+c\left(1+x^2\right)=0$ 有两个相等的实数根，且 $3c=a+3b$.

（1）判断 ΔABC 的形状；

（2）求 $sin\,A$、$sin\,B$.

【难度】★★★

课后作业

【作业 1】 $Rt\Delta ABC$ 中，已知 $\angle A=90°$，$AB=2$，$AC=4$，则 $\tan B=$______，$\cos C=$______，

$\sin B =$______.

【难度】★

【作业2】 在ΔABC中，$\angle C = 90°$，若斜边AB是直角边BC的3倍，则$\tan B$的值是（ ）

A．$\frac{1}{3}$ B．3 C．$\frac{\sqrt{2}}{4}$ D．$2\sqrt{2}$

【难度】★

【作业3】 在$Rt\Delta ABC$中，$\angle C = 90°$，如果各边的长都延长到原来的两倍，那么锐角A的各三角比的值（ ）

A．都扩大到原来的2倍 B．都缩小为原来的一半

C．没有变化 D．不能确定

【难度】★

【作业4】 $2016^0 - \cot 30° + \frac{1}{\sqrt{3} - 2\cos 45°} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$．

【难度】★★

【作业5】 若$a\sin\theta + \cos\theta = 1$，$b\sin\theta - \cos\theta = 1$，求证：$ab = 1$．

【难度】★★

【作业 6】 在 $Rt\Delta ABC$ 中，$\angle C=90°$，$a+b=28$，$\sin A+\sin B=\frac{7}{5}$，求斜边 c 的长.

【难度】★★

【作业 7】 已知关于 x 的一元二次方程 $(m+2)x^2-(2m-11)x+12=0$ 的两个根是一个直角三角形的两个锐角的正弦，求实数 m 的值.

【难度】★★

【作业 8】 已知锐角 ΔABC 中，$AB=c$，$AC=b$，$BC=a$，利用锐角三角比的意义证明：$c=a\cos B+b\cos A$.

【难度】★★

【作业 9】 我们知道，在直角三角形中，一个锐角的三角比由三角形中相应两条边边长的比值确定，由此建立了直角三角形中边角之间的联系．类似的，可以在等腰三角形中建立边角之间的联系．我们定义：等腰三角形中底边与腰的比值叫做顶角的“正对”（sad）．如图（a），在 ΔABC 中，$AB=AC$，顶角 A 的正对记作 sad A，这时 $\text{sad } A=\frac{BC}{AB}$．容易知道，一个角的大小与这个角的正对值也是互相唯一确定的．根据定义，求解下列问题：

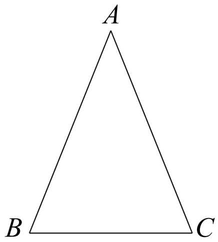
（1）$\text{sad } 60°=$______；

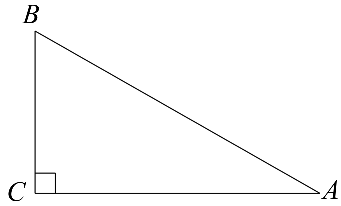
（2）对于 $0°<A<180°$，sad A 的取值范围是______；

（3）如图（b），已知 $\sin A=\frac{3}{5}$，则 sad A 的值是（　　）

A．$\frac{6}{5}$　　B．$\frac{2}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{5}}{4}$　　D．$\frac{\sqrt{10}}{5}$

【难度】★★★





【作业 10】 在锐角ΔABC中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$所对的边分别为a、b、c.

求证：（1）$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$；

（2）$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}bc\sin A$.

【难度】★★★