# 解直角三角形

## 内容分析

解直角三角形是九年级上学期第二章第二节的内容，通过本节的学习，需要掌握直角三角形中，除直角外其余五个元素之间的关系，并熟练运用锐角三角比的意义解直角三角形，以及解直角三角形的相关应用．重点在于理解仰角、俯角、方向角、坡度、坡角等概念，并能利用其解决实际问题；难点在于，若一个三角形不是直角三角形，要有意识把它化归为解直角三角形的问题．

## 知识结构

解直角三角形
- 解直角三角形
- 解直角三角形的应用

## 模块一：解直角三角形

## 知识精讲

**1、解直角三角形**

在直角三角形中，由已知元素求出所有未知元素的过程，叫做解直角三角形．

在 $Rt\Delta ABC$ 中，如果 $\angle C=90°$，那么它的三条边和两个锐角之间有以下的关系：

（1）三边之间的关系：

$$a^2+b^2=c^2$$

（2）锐角之间的关系：

$$\angle A+\angle B=90°$$

（3）边角之间的关系：

$$\sin A=\cos B=\frac{a}{c}，\quad \cos A=\sin B=\frac{b}{c}$$

$$\tan A=\cot B=\frac{a}{b}，\quad \cot A=\tan B=\frac{b}{a}$$

## 例题解析

【例 1】若菱形的周长为 8，相邻两内角之比为 $3:1$，则菱形的高是______.

【难度】★

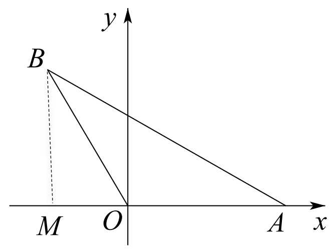
【答案】$\sqrt{2}$.

【解析】菱形周长为 8，则其边长为 2，相邻两内角之比为 $3:1$，则较小内角为$180°\times\dfrac{1}{4}=45°$，

则菱形高为$2\sin45°=\sqrt{2}$.

【总结】考查菱形性质和相关锐角三角比的应用.

【例 2】如图，$\Delta OAB$ 中，$OA=OB$，$\angle AOB=125°$．已知点 $A$ 的坐标是（4，0），则点 $B$ 的坐标是____________．（用锐角三角比表示）




【难度】★★

【答案】$\left(-4\cos55°, 4\sin55°\right)$.

【解析】过点 $B$ 作 $BM\perp x$ 轴交 $x$ 轴于点 $M$，

则有 $\angle BOM=180°-\angle AOB=55°$，

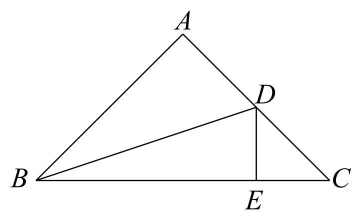
由 $BO=AO=4$，可得 $MO=BO\cdot\cos55°$，

$BM=BO\cdot\sin55°$，点 $B$ 在第二象限，可知其坐标即为$\left(-4\cos55°, 4\sin55°\right)$.

【总结】考查平面直角坐标系中点坐标与线段长度的转换，结合锐角三角比相关知识解题.

【例 3】如图，在 $\Delta ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC$，$D$ 为边 $AC$ 的中点，$DE\perp BC$ 于点 $E$，连接 $BD$，则 $\tan\angle DBC$ 的值为（　　）

A．$\dfrac{1}{3}$　　B．$\sqrt{2}-1$　　C．$2-\sqrt{3}$　　D．$\dfrac{1}{4}$




【难度】★★

【答案】A

【解析】设 $AB=AC=a$，$\angle BAC=90°$，可得 $BC=\sqrt{2}a$，

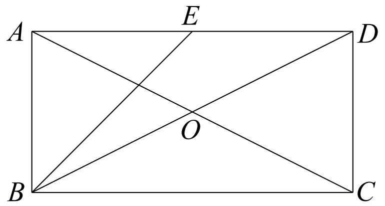
$\angle C=45°$，$D$ 为 $AC$ 中点，则有 $CD=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{1}{2}a$，

$DE\perp BC$，可得 $DE=CE=CD\cdot\sin C=\dfrac{\sqrt{2}}{4}a$，

则 $BE=BC-CE=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}a$，$\tan\angle DBC=\dfrac{DE}{BE}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{4}a}{\dfrac{3\sqrt{2}}{4}a}=\dfrac{1}{3}$.

【总结】考查等腰直角三角形中的锐角三角比的应用.

【例 4】如图，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 $AC$、$BD$ 相交于点 $O$，$E$ 是边 $AD$ 的中点，若 $AC=10$，$DC=2\sqrt{5}$，则 $BO=$______，$\angle EBD$ 的度数约为____° ____'（参考数据：$\tan 26°34'\approx\frac{1}{2}$）.




【难度】★★

【答案】5，18，26.

【解析】根据矩形性质，$BD=AC=10$，$BO=\frac{1}{2}BD=5$，

根据勾股定理，$AB=\sqrt{BD^2-AB^2}=4\sqrt{5}$，$E$ 是 $AD$ 中点，

则 $AE=2\sqrt{5}=AB$，$\tan\angle ADB=\frac{AB}{AD}=\frac{2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}=\frac{1}{2}$，则有 $\angle ADB=26°34'$，$\angle AEB=45°$，

即得：$\angle EBD=\angle AEB-\angle ADB=45°-26°34'=18°26'$.

【总结】本题一方面考查矩形性质，另一方面考查锐角三角比的应用.

【例 5】在锐角 $\Delta ABC$ 中，$AB=14$，$BC=14$，$S_{\Delta ABC}=84$，求 $\cot C$ 的值.

【难度】★★

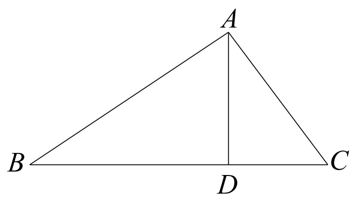
【答案】$\frac{7-\sqrt{13}}{6}$.

【解析】作 $AD\perp BC$ 交 $BC$ 于 $D$，则有 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AD\cdot BC$，得：$AD=\frac{2S_{\Delta ABC}}{BC}=\frac{2\times 84}{14}=12$，

根据勾股定理可得 $BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=2\sqrt{13}$，则 $\cot C=\frac{CD}{AD}=\frac{14-2\sqrt{13}}{12}=\frac{7-\sqrt{13}}{6}$.

【总结】解三角形，通过作高把线段放到直角三角形中即可.

【例 6】如图，$\Delta ABC$ 中，$AB=2\sqrt{3}$，$AC=2$，边 $BC$ 上的高 $AD=\sqrt{3}$，求 $S_{\Delta ABC}$ 和 $\angle BAC$ 的大小.




【难度】★★

【答案】$S_{\Delta ABC}=2\sqrt{3}$，$\angle BAC=90°$.

【解析】$AD\perp BC$，根据锐角三角比的定义，则有

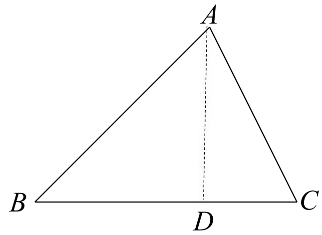
$\sin B=\frac{AD}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$，$\sin C=\frac{AD}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

可得：$\angle B=30°$，$\angle C=60°$，可知 $\angle BAC=90°$，所以 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC=2\sqrt{3}$.

【总结】解直角三角形的应用，直接采用特殊角锐角三角比，也可直接用勾股定理解题.

【例 7】如图，在锐角 $\Delta ABC$， $\sin B=\frac{4}{5}$， $\tan C=2$，且 $S_{\Delta ABC}=40$，求 $BC$ 的长.

【难度】★★




【答案】10

【解析】作 $AD\perp BC$ 交 $BC$ 于点 $D$，

由 $\sin B=\frac{4}{5}$，可设 $AD=4a$，则有 $AB=5a$，

根据勾股定理得： $BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=3a$，因为 $\tan C=2$，则 $CD=2a$，

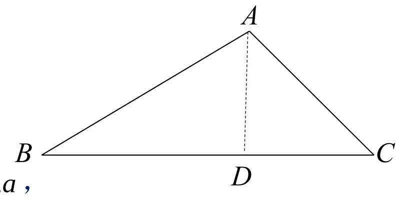
$BC=BD+CD=5a$， $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AD\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot 4a\cdot 5a=40$，即 $a^2=4$，

解得： $a=2$，即得： $BC=5a=10$.

【总结】考查锐角三角比的应用，通过作高把线段放到直角三角形中即可.

【例 8】如图， $\Delta ABC$ 中， $\angle B=30^\circ$， $\angle C=45^\circ$， $AB-AC=2-\sqrt{2}$，求 $BC$ 的长.

【难度】★★




【答案】 $\sqrt{3}+1$.

【解析】过点 $A$ 作 $AD\perp BC$ 交 $BC$ 于 $D$，

设 $AD=a$，由 $\angle B=30^\circ$， $\angle C=45^\circ$，可得： $AB=2a$，

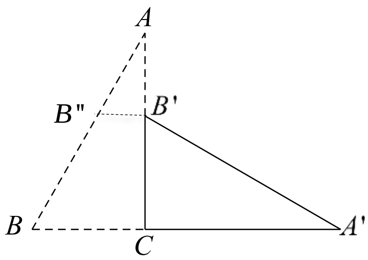
$BD=\sqrt{3}a$， $CD=a$， $AC=\sqrt{2}a$. $\because AB-AC=2-\sqrt{2}$， $\therefore 2a-\sqrt{2}a=2-\sqrt{2}$，

解得： $a=1$，由此可得 $BC=BD+CD=\sqrt{3}a+a=\sqrt{3}+1$.

【总结】考查锐角三角比的应用，通过作高把线段放到直角三角形中，把题目中的线段用一条线段表示出来即可.

【例 9】如图，先将斜边 $AB$ 长 6 $cm$， $\angle A=30^\circ$ 的直角三角板 $ABC$ 绕点 $C$ 顺时针方向旋转 $90^\circ$ 至 $\Delta A'B'C$ 位置，再沿 $CB$ 向左平移，使点 $B$ 落在原三角板 $ABC$ 位置的斜边 $AB$ 上，则平移的距离为______.

【难度】★★




【答案】 $\left(3-\sqrt{3}\right)cm$.

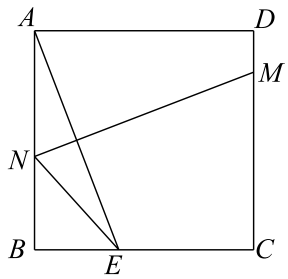
【解析】 $\angle A=30^\circ$，得 $BC=AB\cdot\sin 30^\circ=3cm=B'C$，

$AC=AB\cdot\cos 30^\circ=3\sqrt{3}cm$，则有 $AB'=3\sqrt{3}-3$，

得 $B'B''=AB\cdot\tan A=\left(3\sqrt{3}-3\right)\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\left(3-\sqrt{3}\right)cm$.

【总结】考查锐角三角比的应用，通过作高把线段放到直角三角形中，把题目中的已知线段用一条线段表示出来即可.

【例 10】如图，正方形 $ABCD$ 中，$E$ 为边 $BC$ 上一点，将正方形折叠，使 $A$ 点与 $E$ 点重合，折痕为 $MN$，若 $\tan\angle AEN=\dfrac{1}{3}$，$DC+CE=10$．




（1）求 $\Delta ANE$ 的面积；

（2）求 $\sin\angle ENB$ 的值．

【难度】★★

【答案】（1）$\dfrac{10}{3}$；（2）$\dfrac{3}{5}$．

【解析】(1)设正方形边长为 $a$，由 $\tan\angle AEN=\dfrac{1}{3}$，可得：$BE=\dfrac{1}{3}a$，

则有 $CE=\dfrac{2}{3}a$，$CD=a$，$DC+CE=10$，即 $a+\dfrac{2}{3}a=10$，解得：$a=6$，则 $BE=\dfrac{1}{3}a=2$，

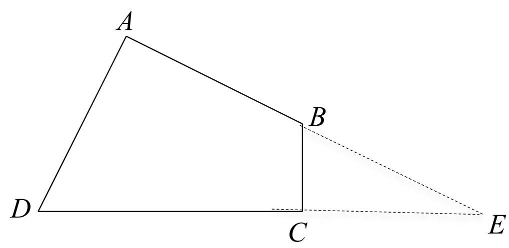
设 $AN=m$，根据翻折的性质，则有 $EN=AN=m$，$BN=6-m$，在 $Rt\Delta BNE$ 中用勾股定理，则有 $BN^2+BE^2=NE^2$，即 $(6-m)^2+2^2=m^2$，解得：$m=\dfrac{10}{3}$，

$S_{\Delta ANE}=\dfrac{1}{2}BE\cdot AN=\dfrac{1}{2}\times 2m=\dfrac{10}{3}$；

（2）由（1）可得 $BE=2$，$NE=\dfrac{10}{3}$，则 $\sin\angle ENB=\dfrac{BE}{NE}=\dfrac{2}{\frac{10}{3}}=\dfrac{3}{5}$．

【总结】解直角三角形的应用，注意充分利用翻折的性质和其中的相关等量关系．

【例 11】如图，四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=\angle C=90°$，$\angle B=120°$，$AB=4$，$BC=2$，求四边形的面积．




【难度】★★★

【答案】$\dfrac{26\sqrt{3}}{3}$．

【解析】延长 $AB$、$DC$ 交于点 $E$，

$\because \angle A=\angle C=90°$，$\angle B=120°$，$\therefore \angle D=\angle CBE=60°$．

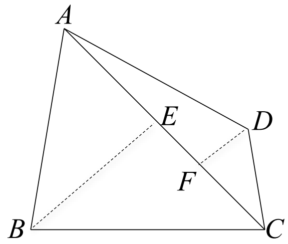
由 $BC=2$，得 $CE=\tan 60°\cdot BC=2\sqrt{3}$，$BE=2BC=4$．

由 $AB=4$，即得 $AE=AB+BE=8$，则有 $AD=AE\cdot\cot 60°=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$．

即得：$S_{ABCD}=S_{\Delta ADE}-S_{\Delta BCE}=\dfrac{1}{2}AD\cdot AE-\dfrac{1}{2}BC\cdot CE=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{8\sqrt{3}}{3}\times 8-\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{3}=\dfrac{26\sqrt{3}}{3}$．

【总结】利用割补法求面积，关键在于对特殊角的利用，不能把特殊角分开，延长即可．

【例 12】如图，在四边形 $ABCD$ 中，已知 $AD = AB = BC$，连接 $AC$，且 $\angle ACD = 30^\circ$，$\tan\angle BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$，$CD = 3$，求 $AC$ 的长.




【难度】★★★

【答案】$\frac{6\sqrt{3}}{5}$ 或 $6\sqrt{3}$.

【解析】过点 $B$ 作 $BE \perp AC$ 交 $AC$ 于 $E$，过点 $D$ 作 $DF \perp AC$ 交 $AC$ 于 $F$，

则有 $AE = CE = \frac{1}{2}AC$，设 $AE = a$，由 $\tan\angle BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$，

可得：$BE = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$，根据勾股定理即可得 $AB = \sqrt{BE^2 + AE^2} = \frac{\sqrt{21}}{3}a = BC = AD$，

由 $\angle ACD = 30^\circ$，$CD = 3$，可得 $DF = CD \cdot \sin 30^\circ = \frac{3}{2}$，$CF = CD \cdot \cos 30^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$，

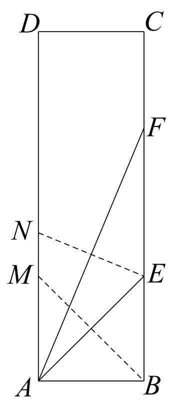
在 $Rt\Delta ADF$ 中用勾股定理，则有 $AF^2 + DF^2 = AD^2$，即 $\left(2a - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{21}}{3}a\right)^2$，

整理，得：$5a^2 - 18\sqrt{3}a + 27 = 0$，解得：$a_1 = \frac{3\sqrt{3}}{5}$，$a_2 = 3\sqrt{3}$，均符合题意，

即得 $AC = 2a = \frac{6\sqrt{3}}{5}$ 或 $AC = 6\sqrt{3}$.

【总结】考查锐角三角比的应用，通过作高把线段放到直角三角形中，把题目中的线段用一条线段表示出来即可.

【例 13】小智在学习特殊角的三角比时发现，将如图所示的矩形纸片 $ABCD$ 沿过 $B$ 点的直线折叠，使点 $A$ 落在 $BC$ 上的点 $E$ 处，折痕 $BM$. 还原后，再沿过点 $E$ 的直线折叠，使点 $A$ 落在 $BC$ 上的点 $F$ 处，折痕 $EN$. 利用这种方法，可以求出 $\tan 67.5^\circ$ 的值是 $\sqrt{2}+1$，试证明之.




【难度】★★★

【答案】略.

【解析】证明：第一次折叠，由翻折的性质，得：$AB = BE$，有 $\angle AEB = 45^\circ$，

第二次折叠，由翻折的性质，得：$AE = EF$，有 $\angle AEB = 2\angle AFB$，

则有 $\angle AFB = 22.5^\circ$，$\angle FAB = 67.5^\circ$，

设 $AB = a$，则有 $BE = a$，$AE = \sqrt{2}a = EF$，则有 $BF = \left(\sqrt{2}+1\right)a$，

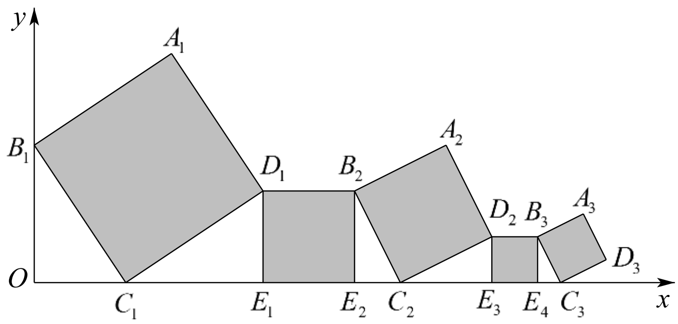
$$\tan 67.5^\circ = \tan\angle FAB = \frac{BF}{AB} = \frac{\left(\sqrt{2}+1\right)a}{a} = \sqrt{2}+1.$$

【总结】考查翻折性质与特殊角锐角三角比的结合运用，注意线段长度的合理转换.

【例 14】在平面直角坐标系内，放置了 5 个如图所示的正方形（用阴影表示）. 点 $B_1$ 在 $y$ 轴

上，点 $C_1$、$E_1$、$E_2$、$C_2$、$E_3$、$E_4$、$C_3$ 在 $x$ 轴上．已知正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的边长为 1，$\angle B_1C_1O=60^\circ$，$B_1C_1 /\!/ B_2C_2 /\!/ B_3C_3$，则点 $A_3$ 到 $x$ 轴的距离是（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{3}+3}{18}$　　B．$\dfrac{\sqrt{3}+1}{18}$　　C．$\dfrac{\sqrt{3}+3}{6}$　　D．$\dfrac{\sqrt{3}+1}{6}$




【难度】★★★

【答案】D

【解析】由 $\angle B_1C_1O=60^\circ$，

$B_1C_1 /\!/ B_2C_2 /\!/ B_3C_3$，可得：

$\angle B_2C_2E_2=\angle B_3C_3E_4=60^\circ$，

由 $\angle B_1C_1D_1=\angle B_2C_2D_2=90^\circ$，

得：$\angle C_1D_1E_1=\angle C_2D_2E_3=60^\circ$，

$D_1E_1=C_1D_1\cdot\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}=B_2E_2$

则 $B_2C_2=\dfrac{B_2E_2}{\sin 60^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}=C_2D_2$，$D_2E_3=C_2D_2\cdot\cos 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{6}=B_3E_4$，由此可得 $A_3$ 到 $x$ 轴的距离即为 $B_3E_4\cdot(1+\cot 60^\circ)=\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\times\dfrac{\sqrt{3}}{6}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{6}$，故选 D．

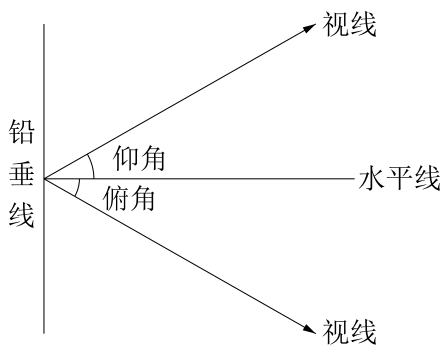
【总结】考查特殊角锐角三角比的应用，注意进行边角转化．

# 模块二：解直角三角形的应用

## 知识精讲

**1、仰角与俯角**

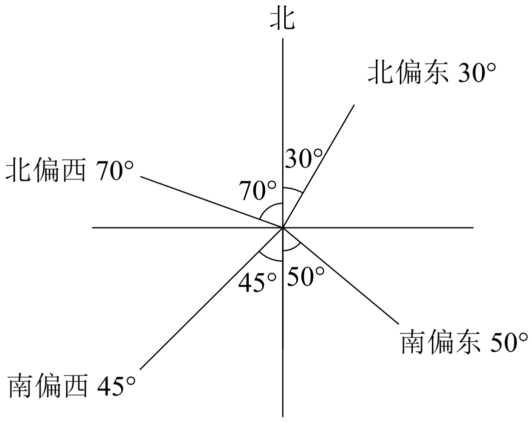
在测量过程中，常常会遇到仰角和俯角．如图，当我们进行测量时，在视线与水平线所成的角中，视线在水平线上方的角叫做**仰角**，视线在水平线下方的角叫做**俯角**．




**2、方向角**

指北或指南方向线与目标方向线所成的小于 90°的角叫做方向角．

如图：北偏东 30°，北偏西 70°，南偏东 50°，南偏西 45°．




**3、坡度（坡比）、坡角**

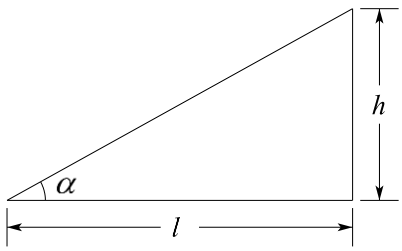
在修路、挖河、开渠等设计图纸上，都需要注明斜坡的倾斜程度．

如图，坡面的铅垂高度 $h$ 和水平宽度 $l$ 的比叫做坡面的**坡度**（或**坡比**），记作 $i$，即 $i=\frac{h}{l}$．

坡度通常写成 $1:m$ 的形式，如 $i=1:1.5$．

坡面与水平面的夹角叫做坡角，记作 $\alpha$．

坡度 $i$ 与坡角 $\alpha$ 之间的关系：$i=\frac{h}{l}=\tan\alpha$．




## 例题解析

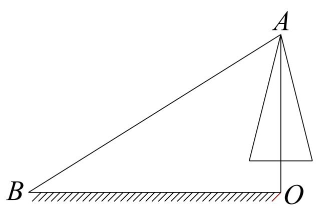
【例 15】如图，为测量一棵与地面垂直的树 $OA$ 的高度，在距离树的底端 30 米的 $B$ 处，测得树顶 $A$ 的仰角 $\angle ABO$ 为 $\alpha$，则树 $OA$ 的高度为（　　）

A．$\frac{30}{\tan\alpha}$　　B．$30\sin\alpha$　　C．$30\tan\alpha$　　D．$30\cos\alpha$

【难度】★

【答案】C

【解析】转化为直角三角形中求长度的问题，根据锐角三角比定义可得 $\tan\alpha=\frac{OA}{OB}$，即得 $OA=30\tan\alpha$，故选 C．




【总结】考查锐角三角比在实际问题中的应用．

【例 16】如图，一艘海轮位于灯塔 $P$ 的北偏东 55° 方向，距离灯塔 2 海里的点 $A$ 处．如果

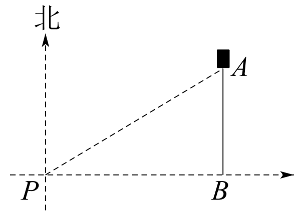
海轮沿着正南方向航行到灯塔的正东方向，那么海轮航行的距离 $AB$ 的长是（　　）海 里

A．2　　B．$2\sin 55^\circ$　　C．$2\cos 55^\circ$　　D．$2\tan 55^\circ$

【难度】★

【答案】C

【解析】转化为直角三角形中求长度的问题，根据锐角三角比定义可得 $\cos\angle PAB=\dfrac{AB}{PA}$，即得 $OA=2\cos 55^\circ$，故选 C．



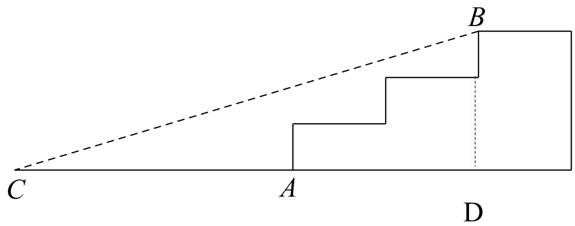

【总结】考查锐角三角比在实际问题中的应用．

【例 17】如图所示，某公园入口处原有三级台阶，每级台阶高为 18 厘米，深为 30 厘米，为方便残疾人士，拟将台阶改为斜坡，设台阶的起点为 $A$，斜坡的起始点为 $C$，现设计斜坡 $BC$ 的坡度 $i=1:5$，那么 $AC$ 的长度是______厘米．

【难度】★

【答案】210

【解析】依题意可得 $BD=3\times18=54$，$AD=2\times30=60$，根据坡度的含义，可得：$CD=\dfrac{BD}{i}=270$，由此可得 $AC=CD-AD=210cm$．




【总结】考查坡度的实际应用和理解．

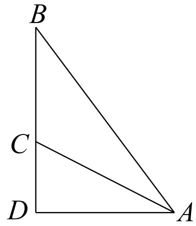
【例 18】如图，斜面 $AC$ 的坡度为 $1:2$，$AC=3\sqrt{5}$ 米，坡顶有一旗杆 $BC$，旗杆顶端 $B$ 点与 $A$ 点有一条彩带相连，若 $AB=10$ 米，则旗杆 $BC$ 的高度为（　　）米

A．5　　B．6　　C．8　　D．$3+\sqrt{5}$

【难度】★★

【答案】A

【解析】斜坡坡度为 1 ：2，即 $\dfrac{CD}{AD}=\dfrac{1}{2}$，设 $CD=a$，则有 $AD=2a$，根据勾股定理可得 $AC=\sqrt{5}a=3\sqrt{5}$，解得 $a=3$，即得：$CD=3$，$AD=6$，根据勾股定理可得 $BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=8$，则 $BC=BD-CD=5m$．




【总结】考查坡度的实际应用和理解，结合勾股定理进行实际计算．

【例 19】如图，要在宽为 22 米的大道 $AB$ 两边安装路灯，路灯的灯臂 $CD$ 长 2 米，且与灯



柱 $BC$ 成 120° 角，路灯采用圆锥形灯罩，灯罩的轴线 $DO$ 与灯臂 $CD$ 垂直．当灯罩的轴线 $DO$ 通过公路路面中心线时照明效果最佳．此时，路灯的灯柱 $BC$ 的高度应该设计为（ ）米

A．$11-2\sqrt{2}$　　　　B．$11-2\sqrt{3}$

C．$11\sqrt{3}-2\sqrt{2}$　　　　D．$11\sqrt{3}-4$

【难度】★★

【答案】D

【解析】延长 $OD$、$DC$ 交于点 $E$．

$\because \angle B=\angle ODC=90°$，$\angle BCD=120°$，

$\therefore \angle DOB=\angle DCE=60°$，由 $BC=2$，

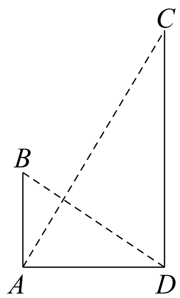
$\therefore DE=\tan 60°\cdot DC=2\sqrt{3}$，$CE=2DC=4$．

依题意可知：$OB=11$，即得：$BE=OB\cdot\tan 60°=11\sqrt{3}$，

则 $BC=BE-CE=\left(11\sqrt{3}-4\right)m$．

【总结】考查利用锐角三角比求线段长度，关键在于对特殊角的利用，不能把特殊角分开，延长即可．

【例 20】如图，为测得一栋大厦 $CD$ 的高度，一人先在附近一楼房的底端 $A$ 点观测大厦顶端 $C$ 处的仰角是 60°，然后爬到该楼房顶端 $B$ 处观测大厦底部 $D$ 处的俯角是 30°，已知楼房高 $AB$ 约是 45 $m$，根据以上观测数据可求大厦的高 $CD$ 是______$m$．




【难度】★★

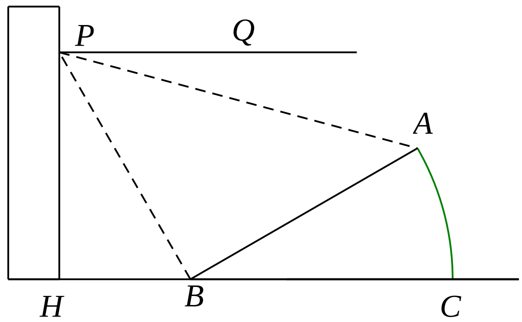
【答案】135．

【解析】$\angle BAD=\angle ADC=90°$，$\angle ADB=30°$，$\angle CAD=60°$，

则有 $AD=AB\cdot\tan 60°=45\sqrt{3}$，$CD=AD\cdot\tan 60°=135m$．

【总结】考查俯角仰角与特殊角锐角三角比的结合应用．

【例 21】如图，小智在大楼 30 米高（即 $PH=30$ 米）的窗口 $P$ 处进行观测，测得山坡上 $A$ 处的俯角为 15°，山脚 $B$ 处的俯角为 60°．已知山坡的坡度为$1:\sqrt{3}$，点 $P$、$H$、$B$、$C$、$A$ 在同一平面上，点 $H$、$B$、$C$ 在同一直线上，且 $PH\perp HC$．则山坡上 $A$、$B$ 两点间的距离为______.




【难度】★★

【答案】$20\sqrt{3}m$．

【解析】依题意有 $\angle PBH=60°$，$\angle QPA=15°$，

山坡坡度为$1:\sqrt{3}$，则有 $\angle ABC=30°$，

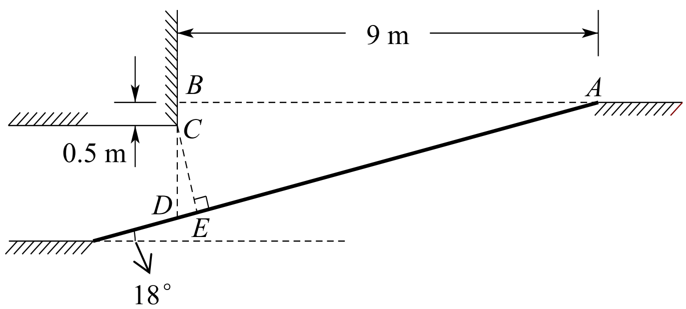
由此可得:$\angle BPH=90°-\angle PBH=30°$，$\angle ABP=90°$，

$\angle APB=90°-\angle BPH-\angle QPA=45°$，

则有 $BP=\dfrac{PH}{\sin 60°}=20\sqrt{3}$，$AB=PB=20\sqrt{3}m$．

【总结】考查俯角仰角与特殊角锐角三角比的结合应用.

【例 22】某单位拟建造地下停车库，设计师提供了车库入口设计示意图（如图），按规定，地下停车库坡道口上方要张贴限高标志，以便告知停车人车辆能否安全驶入，为标明限高，请你计算图中 $CE$ 的长.（参考数据：$\sin 18°\approx 0.309$，$\cos 18°\approx 0.951$，$\tan 18°\approx 0.325$，$\cot 18°\approx 3.078$，结果精确到 0.1 $m$）




【难度】★★

【答案】$2.3m$．

【解析】依题意得 $\angle BAD=18°$，

$BD=AB\cdot\tan\angle BAD=9\tan 18°$，

$CD=BD-BD=9\tan 18°-0.5$，

$\angle BDA=90°-\angle BAD=72°$，

则有 $\angle DCE=90°-\angle BDA=18°$，

由此可得 $CE=CD\cdot\cos\angle DCE=\left(9\tan 18°-0.5\right)\times\cos 18°=9\sin 18°-0.5\cos 18°$

由上述数据，即可得 $CE\approx 9\times 0.309-0.5\times 0.951=2.3055\approx 2.3m$．

【总结】考查锐角三角比在解决实际问题中的具体应用，注意题目要求，考虑需要涉及到哪些相关的锐角三角比.

【例 23】小方在课外活动中观察吊车的工作过程，绘制了如图所示的平面图形．已知吊车

吊臂的支点 $O$ 距离地面高 $OO'=2$ 米．当吊臂顶端由点 $A$ 抬升至点 $A'$（吊臂长度不变）时，地面 $B$ 处的重物（高度不计）被吊至 $B'$ 处，紧绷着的吊缆 $A'B'=AB$．$AB$ 垂直地面 $O'B$ 于点 $B$，直线 $A'B'$ 垂直地面 $O'B$ 于点 $C$，吊臂长度 $OA'=OA=10$ 米，且 $\cos A=\frac{3}{5}$，$\sin A'=\frac{1}{2}$．

（1）求重物在水平方向移动的距离 $BC$；

（2）求重物在竖直方向提升的高度 $B'C$．

【难度】★★

【答案】（1）$3m$；（2）$\left(5\sqrt{3}-6\right)m$．

【解析】（1）如图，则有 $OD=OA\cdot\sin A=10\times\frac{4}{5}=8m$，

$OF=OA^{'}\cdot\sin A^{'}=10\times\frac{1}{2}=5m$，则 $BC=FD=OD-OF=3m$；

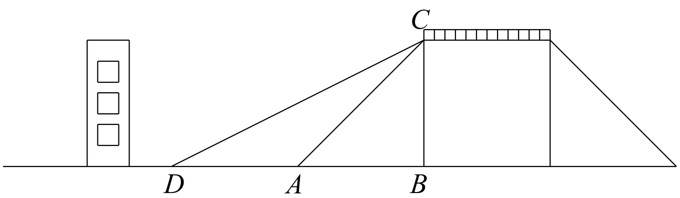
（2）由（1）可得：$AD=OA\cdot\cos A=6m$，则 $AB=AD+DB=AD+OO^{'}=8m=A^{'}B^{'}$，

$A^{'}F=\sqrt{OA^{'2}-OF^{2}}=5\sqrt{3}m$，则 $B^{'}C=A^{'}F+FC-A^{'}B^{'}=5\sqrt{3}+2-8=\left(5\sqrt{3}-6\right)m$．

【总结】考查锐角三角比在解决实际问题中的具体应用，注意题目要求，考虑需要涉及到哪些相关的锐角三角比，注意看清楚题目提供的条件．

【例 24】如图，是一座人行天桥的示意图，天桥的高度是 10 米，$CB\perp DB$，坡面 $AC$ 的坡角为 45°．为了方便行人推车过天桥，市政部门决定降低坡度，使新坡面 $DC$ 的坡度为 $i=\sqrt{3}:3$．若新坡角下需留 3 米宽的人行道，问离原坡角（$A$ 点处）10 米的建筑物是否需要拆除？（参考数据：$\sqrt{2}\approx1.414$，$\sqrt{3}\approx1.732$）

【难度】★★




【答案】需要拆除．

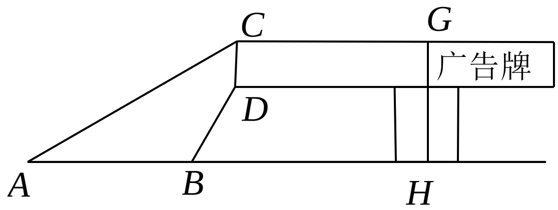
【解析】依题意有 $\angle CAB=45°$，

则 $AB=BC=10$，$DC$ 的坡度为 $i=\sqrt{3}:3$，即得：$BD=\frac{CD}{i}=10\sqrt{3}$，

由此可得：$AD=BD-AB=10\sqrt{3}-10$，则点 $A$ 距人行道外侧距离至少为 $10\sqrt{3}-10+3=10\sqrt{3}-7\approx10.32>10$，由此可知建筑物需要拆除．

【总结】考查锐角三角比在解决实际问题中的具体应用．

【例 25】数学兴趣小组准备利用所学的知识测量公路旁某广告牌的高度．如图所示，先在水平面上点 $A$ 处测得对广告牌上沿点 $C$ 的仰角为 30°，然后沿 $AH$ 方向前进 10 米至点 $B$ 处，测得对广告牌下沿点 $D$ 的仰角为 60°．已知矩形广告牌垂直于地面的一边 $CD$ 高 2 米．求广告牌的高度 $GH$（结果保留根号）．




【难度】★★

【答案】$\left(5\sqrt{3}-1\right)m$．

【解析】作 $DE\perp BH$ 交 $BH$ 于 $E$，

设 $BE=a$，则有

$DE=BE\cdot\tan\angle DBE=\sqrt{3}a$，

$CE=CD+DE=\sqrt{3}a+2$，

由 $\angle CAE=30°$，得 $AE=\sqrt{3}CE=3a+2\sqrt{3}=AB+BE=10+a$，

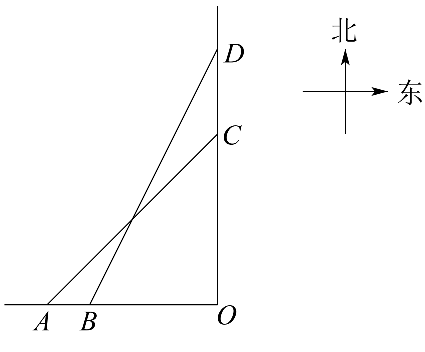
解得：$a=5-\sqrt{3}$，由此可得 $GH=CE=\sqrt{3}a+2=\sqrt{3}\times\left(5-\sqrt{3}\right)+2=\left(5\sqrt{3}-1\right)m$．

【总结】考查锐角三角比在解决实际问题中的具体应用，注意线段长度的转化和等量关系．

【例 26】如图，轮船甲位于码头 $O$ 的正西方向 $A$ 处，轮船乙位于码头 $O$ 的正北方向 $C$ 处，测得 $\angle CAO=45°$．轮船甲自西向东匀速行驶，同时轮船乙沿正北方向匀速行驶，它们的速度分别为 45 $km/h$ 和 36 $km/h$．经过 0.1 $h$，轮船甲行驶至 $B$ 处，轮船乙行驶至 $D$ 处，测得 $\angle DBO=58°$．此时 $B$ 处距离码头 $O$ 有多远？（参考数据：$\sin58°\approx0.85$，$\cos58°\approx0.53$，$\tan58°\approx1.60$）

【难度】★★

【答案】13.5$km$．




【解析】依题意可得：$AB=45\times0.1=4.5km$，

$CD=36\times0.1=3.6km$，由 $\angle CAO=45°$，可知

$AO=CO=BO+4.5$，$DO=CO+CD=BO+8.1$，

$\angle DBO=58°$，得 $\tan\angle DBO=\dfrac{DO}{BO}=\tan58°$，

即 $\dfrac{BO+8.1}{BO}\approx1.60$，解得：$BO=13.5km$．

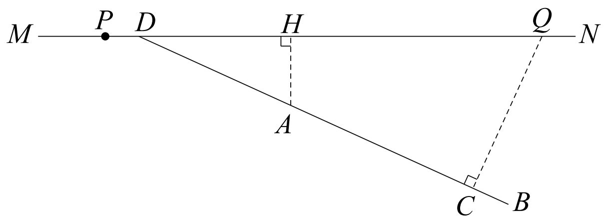
【总结】考查锐角三角比在解决实际问题中的具体应用，注意线段长度的转化和等量关系．

【例 27】如图，$MN$ 表示一段笔直的高架道路，线段 $AB$ 表示高架道路旁的一排居民楼．已

知点 $A$ 到 $MN$ 的距离为 15 米，$BA$ 的延长线与 $MN$ 相交于点 $D$，且 $\angle BDN=30°$，假设汽车在高架道路上行驶时，周围 39 米以内会受到噪音的影响.

（1）过点 $A$ 作 $MN$ 的垂线，垂足为 $H$. 如果汽车沿着从 $M$ 到 $N$ 的方向在 $MN$ 上行驶，当汽车到达点 $P$ 处时，噪音开始影响这一排居民楼，那么此时汽车与点 $H$ 的距离为多少米？

（2）降低噪音的一种方法是在高架道路旁安装隔音板．当汽车行驶到点 $Q$ 时，它与这一排居民楼的距离 $QC$ 为 39 米，那么对于这一排居民楼，高架道路旁安装的隔音板至少需要多少米长？（结果精确到 1 米，参考数据：$\sqrt{3}\approx 1.7$）




【难度】★★★

【答案】（1）36；（2）89.

【解析】（1）$AP=39$，根据勾股定理可得：

$PH=\sqrt{AP^2-AH^2}=\sqrt{39^2-15^2}=36m$；

（2）$\angle BDN=30°$，得 $DQ=2QC=78m$，

$DH=AH\cdot\cot 30°=15\sqrt{3}m$，

由此可得隔音板长度：$PQ=PH-DH+DQ=36-15\sqrt{3}+78=114-15\sqrt{3}\approx 89m$.

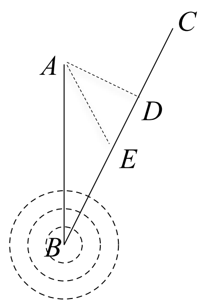
【总结】考查锐角三角比在解决实际问题中的具体应用，注意将题目中的语言转化为数学符号语言.

【例 28】台风是一种自然灾害，它以台风中心为圆心，在周围数十千米范围内形成气旋风暴，有极强的破坏力．据气象部门观测，某沿海城市 $A$ 正南方向相距 220 $km$ 的 $B$ 处有一台风中心，中心最大风力为 12 级，每远离台风中心 20 $km$，风力就会减弱一级．现台风中心正以 15 $km/h$ 的速度沿北偏东 30° 方向移动，如图所示．若城市所受风力达到或超过 4 级，则称为受台风影响.

（1）设台风中心风力不变，该城市是否会受到这次台风的影响？请说明理由.

（2）如该城市受台风影响，那么台风影响该城市的持续时间有多长？

（3）该城市受到台风影响时的最大风力为几级？




【难度】★★★

【答案】（1）会受影响；（2）$4\sqrt{15}h$；（3）6.5 级.

【解析】（1）作 $AD\perp BC$ 交 $BC$ 于 $D$，

则有 $AD=AB\cdot\sin B=110km$，

不受台风影响的最小距离为 $(12-4)\times 20=160km$，

因为 $110<160$，故该城市会受到台风影响；

（2）设在 $E$ 点处该城市开始受到台风影响，则有 $AE=160km$，

根据勾股定理可得：$DE=\sqrt{AE^2-AD^2}=30\sqrt{15}$，

则受影响时间为$2\times30\sqrt{15}\div15=4\sqrt{15}h$；

（3）台风中心到达 $D$ 点处距该城市最近，受到最大风力影响，

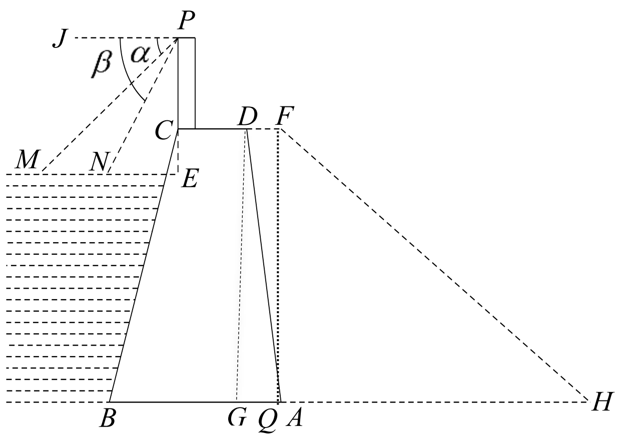
受到的最大风力即为$12-110\div20=6.5$级.

【总结】考查锐角三角比在解决实际问题中的具体应用，关键是找准题目要求的临界位置结合题意进行求解.

【例 29】某水库大坝的横截面积是如图所示的四边形 $ABCD$，其中 $AB\parallel CD$．瞭望台 $PC$ 正前方水面上有两艘渔船 $M$、$N$，观察员在瞭望台顶端 $P$ 处观测渔船 $M$ 的俯角 $\alpha=31^\circ$，观测渔船 $N$ 的俯角 $\beta=45^\circ$．已知 $MN$ 所在直线与 $PC$ 所在直线垂直，垂足为 $E$，$PE$ 长为 30 米．

（1）求两渔船 $M$、$N$ 之间的距离（结果精确到 1 米）

（2）已知坝高 24 米，坝长 100 米，背水坡 $AD$ 的坡度 $i=1:0.25$．为了提高大坝的防洪能力，某施工队在大坝的背水坡填筑土石方加固，加固后坝顶加宽 3 米，背水坡 $FH$ 的坡度为 $i=1:1.5$．施工 12 天后，为尽快完成加固任务，施工队增加了机械设备，工作效率提高到原来的 1.5 倍，结果比原计划提前 20 天完成加固任务．施工队原计划平均每天填筑土石方多少立方米？（参考数据：$\tan31^\circ\approx0.60$，$\sin31^\circ\approx0.52$）




【难度】★★★

【答案】（1）$20m$；（2）600.

【解析】（1）$ME=\dfrac{PE}{\tan\alpha}\approx\dfrac{30}{0.60}=50m$，

$NE=\dfrac{PE}{\tan\beta}=30m$，由此可得：

$MN=ME-NE=20m$；

（2）作 $DG\perp AB$ 交 $AB$ 于 $G$，作 $FQ\perp BH$ 交 $BH$ 于 $Q$.

依题意有：$DG=FQ=24$，

$AD$ 坡度 $i=1:0.25$，即得：$AG=\dfrac{DG}{i_1}=6$，　$FH$ 坡度 $i=1:1.5$，即得：$HQ=\dfrac{FQ}{i_2}=36$，

由此可得 $AH=GQ+HQ-AG=3+36-6=33$，

则填筑土石方总量为$\dfrac{1}{2}DG\cdot(DF+AH)\times100=50\times24\times(3+33)=43200$方，

设原计划每天填筑 $x$ 方，可列方程$12x+1.5x\left(\dfrac{43200}{x}-12-20\right)=43200$，

解得：$x=600$，经检验，$x=600$是原方程的根，

即原计划每天填筑土石方 600 立方米.

【总结】考查实际问题的应用，主要是对题目要求进行准确分析.

## 随堂检测

【习题 1】如图，菱形 $ABCD$ 的边长为 15，$\sin\angle BAC=\frac{3}{5}$，则对角线 $AC$ 的长为______.

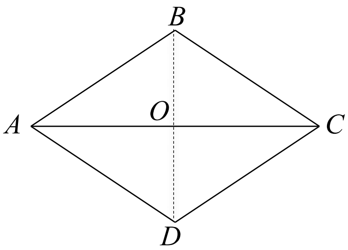
【难度】★

【答案】24.

【解析】连结 $BD$ 交 $AC$ 于点 $O$，则有 $AC\perp BD$，

$AC=2AO$，由 $\sin\angle BAC=\frac{3}{5}$，即 $\frac{BO}{AB}=\frac{3}{5}$，得 $BO=9$，

勾股定理得 $AO=\sqrt{AO^2-BO^2}=12$，则 $AC=2AO=24$.




【总结】考查菱形的性质结合锐角三角比基础知识的应用.

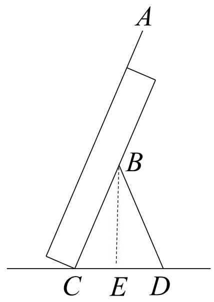
【习题 2】有一个相框的侧面抽象为如图所示的几何图形，已知 $BC=BD=15\ cm$，$\angle CBD=40°$，则点 $B$ 到 $CD$ 的距离为______$cm$.（参考数据：$\sin20°\approx0.342$，$\cos20°\approx0.940$，$\sin40°\approx0.642$，$\cos40°\approx0.766$，结果精确到 0.1 $cm$）

【难度】★

【答案】14.1.

【解析】作 $BE\perp CD$，则有 $\angle CBE=\frac{1}{2}\angle CBD=20°$，

故 $B$ 到 $CD$ 的距离 $BE=BC\cdot\cos\angle CBE\approx15\times0.940=14.1cm$.




【总结】考查锐角三角比和等腰三角形性质的结合应用.

【习题 3】如图，为了测得电视塔的高度 $AB$，在 $D$ 处用高为 1 米的测角仪 $CD$ 测得电视塔顶端 $A$ 的仰角为 30°，再向电视塔方向前进 100 米到达 $F$ 处，又测得电视塔顶端 $A$ 的仰角为 60°，则这个电视塔的高度 $AB$ 为（　　）

A．$50\sqrt{3}$ 米　　B．51 米　　C．$\left(50\sqrt{3}+1\right)$米　　D．101 米

【难度】★★

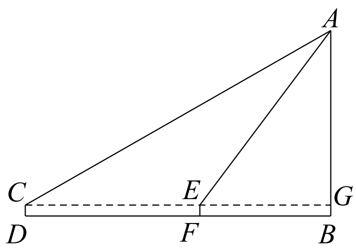
【答案】C

【解析】$\angle AEG=60°$，得：$AG=EG\cdot\tan60°=\sqrt{3}EG$，

$\angle ACG=30°$，则有 $CG=AG\cdot\cot30°=\sqrt{3}AG=3EG$，

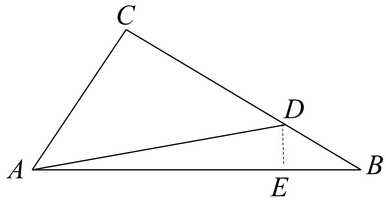
则有 $CE=CG-EG=2EG=100$，

得：$EG=50$，$AG=\sqrt{3}EG=50\sqrt{3}$，$AB=AG+BG=\left(50\sqrt{3}+1\right)m$. 故选 C.




【总结】考查特殊角锐角三角比的实际应用，相应线段长度转化.

【习题 4】如图，$\Delta ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\sin B=\frac{3}{5}$．$D$ 是 $BC$ 上一点，已知 $\angle ADC=45°$，$DC=6$，求 $\tan\angle BAD$ 的值．




【难度】★★

【答案】$\frac{1}{7}$．

【解析】过点 $D$ 作 $DE\perp AB$ 交 $AB$ 于点 $E$．

由 $\angle C=90°$，$\sin B=\frac{3}{5}$，可设 $AC=3a$，则 $AB=5a$，

根据勾股定理可得 $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=4a$，由 $\angle ADC=45°$，可得 $CD=AC=3a$，

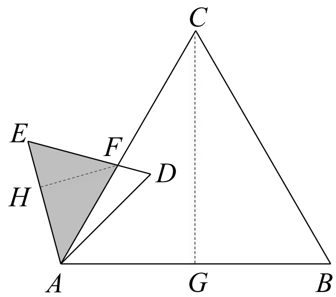
则 $BD=BC-CD=a$，由 $\angle C=\angle DEB=90°$，$\angle B=\angle B$，即得 $\Delta ACB\backsim\Delta DEB$，

则有 $\frac{AC}{DE}=\frac{BC}{BE}=\frac{AB}{BD}=\frac{5a}{a}=5$，由此可得 $DE=\frac{3}{5}a$，$BE=\frac{4}{5}a$，则 $AE=AB-BE=\frac{21}{5}a$，

即得 $\tan\angle BAD=\frac{DE}{AE}=\frac{\frac{3}{5}a}{\frac{21}{5}a}=\frac{1}{7}$．

【总结】解直角三角形，通过作高把线段放到直角三角形中再通过相应的线段比例关系把三角形中的相关线段表示出来即可．

【习题 5】如图，$\Delta ABC$ 和 $\Delta ADE$ 都是等边三角形，$AB=2AD$，已知 $\angle BAD=45°$，$AC$ 与 $DE$ 相交于点 $F$，$\Delta ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$，求阴影部分的面积．




【难度】★★

【答案】$\frac{3-\sqrt{3}}{4}$

【解析】作 $CG\perp AB$ 交 $AB$ 于点 $G$，作 $FH\perp AE$ 交 $AE$ 于点 $H$，

则有 $\angle E=\angle B=60°$，$\angle EAF=\angle BAD=45°$．

设 $\Delta ABC$ 边长为 $a$，则有 $BG=\frac{1}{2}a$，$CG=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}CG\cdot AB=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot a=\sqrt{3}$，即得 $a^2=4$，解得：$a=2$，即 $AB=2AD=2$，

得 $\Delta ADE$ 边长为 1，则有 $AE=1$，设 $FH=h$，则有 $EH=EF\cdot\cot 60°=\frac{\sqrt{3}}{3}h$，$AH=FH=h$，

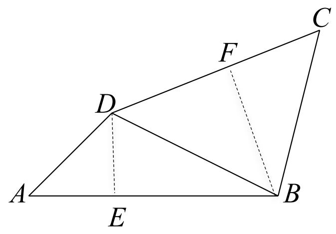
即得 $AE=AH+FH=\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)h=1$，解得 $h=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$，$S_{阴}=\frac{1}{2}AE\cdot FH=\frac{3-\sqrt{3}}{4}$．

【总结】考查特殊角的锐角三角比与特殊图形的结合应用．

【习题 6】如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=\angle C=45°$，$\angle ADB=\angle ABC=105°$．

（1）若 $AD=2$，求 $AB$；

（2）若 $AB+CD=2\sqrt{3}+2$，求 $AB$．




【难度】★★

【答案】（1）$\sqrt{6}+\sqrt{2}$；（2）$\sqrt{3}+1$．

【解析】（1）作 $DE\perp AB$ 交 $AB$ 于点 $E$，

由 $\angle A=45°$，可得：$AE=AD\cdot\cos45°=\sqrt{2}=DE$，

由 $\angle ADB=105°$，可得：$\angle ABD=30°$，即得 $BE=DE\cdot\cot30°=\sqrt{6}$，则 $AB=\sqrt{6}+\sqrt{2}$；

（2）作 $BF\perp CD$ 交 $CD$ 于点 $F$，由（1）可得 $AB=\left(\sqrt{3}+1\right)DE$，设 $DE=a$，则有 $BD=2a$，

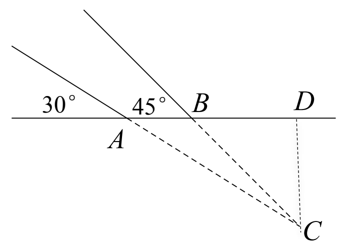
由 $\angle A=\angle C=45°$，$\angle ADB=\angle ABC=105°$，可得 $\angle BDC=60°$，则有 $DF=BD\cdot\cos60°=a$，$BF=\sqrt{3}a=CF$，即得 $CD=\left(\sqrt{3}+1\right)a=AB$，由 $AB+CD=2\sqrt{3}+2$，即可得 $AB=\sqrt{3}+1$．

【总结】考查特殊角锐角三角比的应用，通过作高解直角三角形即可．

【习题 7】2015 年 4 月 25 日 14 时 11 分，尼泊尔发生 8.1 级地震，震源深度为 20 千米．中国救援队火速赶往灾区救援，探测出某建筑物废墟下方 $C$ 处有生命迹象．在废墟一侧某面上选两探测点 $A$、$B$，点 $A$、$B$ 相距 2 米，探测线与该面的夹角分别是 30° 和 45°（如图），试确定生命所在的点 $C$ 与探测面的距离（参考数据：$\sqrt{2}\approx1.414$，$\sqrt{3}\approx1.732$）

【难度】★★

【答案】$2.732m$．




【解析】作 $CD\perp AB$ 交直线 $AB$ 于点 $D$．

由题意可得：$\angle CAD=30°$，$\angle CBD=45°$，

则有 $AD=CD\cdot\cot30°=\sqrt{3}CD$，$BD=CD$，

即 $AB=AD-BD=\left(\sqrt{3}-1\right)CD=2$，

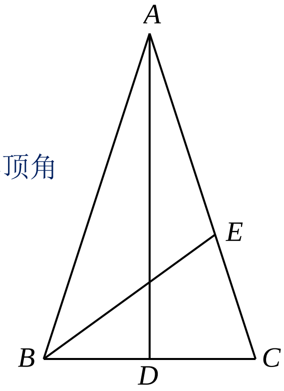
解得：$CD=\sqrt{3}+1\approx2.732m$

【总结】考查特殊角锐角三角比的应用，通过作高解直角三角形即可．

【习题 8】利用几何图形，求 $sin\ 18°$ 的值.

【难度】★★★

【答案】$\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.




【解析】如图，$\Delta ABC$ 为“黄金三角形”，$AD$、$BE$ 分别为其顶角和一底角角平分线，则有 $\angle BAD = 18°$，$BD = \dfrac{1}{2}BC$，

根据相似可证得“黄金三角形中” $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，

则有 $\sin 18° = \dfrac{BD}{AC} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

【总结】考查“黄金三角形”的性质的应用.

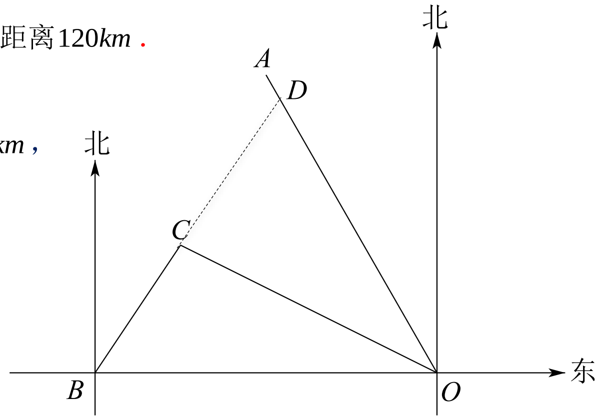
【习题 9】如图，港口 $B$ 位于港口 $O$ 正西方向 120 $km$ 处，小岛 $C$ 位于港口 $O$ 北偏西 60° 方向上．一艘游船从港口 $O$ 出发，沿 $OA$ 方向（北偏西 30° ）以 $v$ $km/h$ 的速度驶离港口 $O$，同时一艘快艇从港口 $B$ 出发，沿北偏东 30° 的方向以 60 $km/h$ 的速度驶向小岛 $C$，在小岛 $C$ 用 1 $h$ 加装补给物资后，立即按原来的速度给游船送去.

（1）快艇从港口 $B$ 到小岛 $C$ 需要多长时间？

（2）若快艇从小岛 $C$ 到与游船相遇恰好用时 1 $h$，求 $v$ 的值及相遇处与港口 $O$ 的距离.

【难度】★★

【答案】（1）$1h$；（2）$v = 40$，相遇处与港口 $O$ 的距离 $120km$.




【解析】（1）依题意可得 $\angle CBO = 60°$，$\angle BOC = 30°$，

则有 $\angle ACB = 90°$，此时 $BC = OB \cdot \sin\angle BOC = 60km$，

则快艇到小岛的时间为 $60 \div 60 = 1h$；

（2）延长 $BC$ 交 $AO$ 于点 $D$.

由题意可知 $CD = 60 = BC$，则有 $AB = BO$，

由 $\angle AOC = 30°$，可得 $\angle BOD = 60°$，

即 $\Delta BOD$ 为等边三角形，

相遇点 $D$ 与港口距离 $OD = OB = 120km$，船速 $v = 120 \div (1+1+1) = 40km/h$.

【总结】考查方位角的应用，计算速度时注意不要遗漏时间.

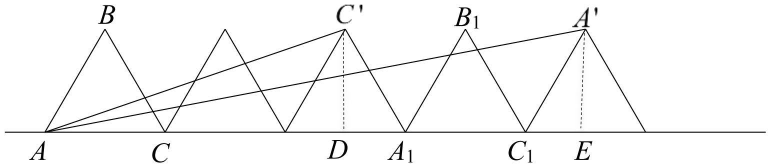
【习题 10】如图所示，已知边长为 2 的正三角形 $ABC$ 沿直线 $l$ 顺时针滚动.

（1）当 $\Delta ABC$ 滚动一周到 $\Delta A_1B_1C_1$ 的位置时，$A$ 点所运动的路程约为______；（精确到 0.1）

（2）设 $\Delta ABC$ 滚动 $240°$ ，$C$ 点的位置为 $C'$，当 $\Delta ABC$ 滚动 $480°$ 时，$A$ 点的位置再 $A'$，请你利用正切的两角和公式 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$，求出 $\angle CAC'+\angle CAA'$ 的度数.

【难度】★★★

【答案】（1）8.4；（2）$30°$.




【解析】（1）A 点转过的圆心角度数

为 $120°\times 2=240°$，

由此可得运动路程为：

$\dfrac{240\pi\times 2}{180}=\dfrac{8\pi}{3}\approx\dfrac{8\times 3.14}{3}\approx 8.4$；

（2）作 $C'D\perp AC$ 交直线 $AC$ 于点 $D$，作 $A'E\perp AC$ 交直线 $AC$ 于点 $E$.

则有 $C'D=A'E=2\sin 60°=\sqrt{3}$，$AD=2\times 2+1=5$，$AE=4\times 2+1=9$，

则有 $\tan\angle CAC'=\dfrac{C'D}{AD}=\dfrac{\sqrt{3}}{5}$，$\tan\angle CAA'=\dfrac{A'E}{AE}=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$，根据上述公式，代值计算，

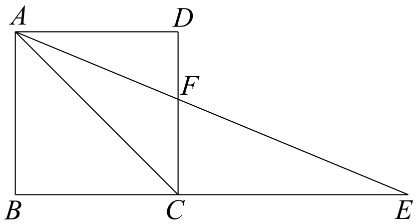
则有 $\tan\left(\angle CAC'+\angle CAA'\right)=\dfrac{\tan\angle CAC'+\tan\angle CAA'}{1-\tan\angle CAC'\cdot\tan\angle CAA'}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{5}+\dfrac{\sqrt{3}}{9}}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{5}\times\dfrac{\sqrt{3}}{9}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

即得 $\angle CAC'+\angle CAA'=30°$.

【总结】阅读题，抓住题目中的运动过程，准确分析即可进行解题应用.

## 课后作业

【作业 1】如图，将正方形 $ABCD$ 的边 $BC$ 延长到点 $E$，使得 $CE=AC$，$AE$ 与 $CD$ 相交于点 $F$，求 $\angle E$ 的余切值．




【难度】★

【答案】$\sqrt{2}+1$.

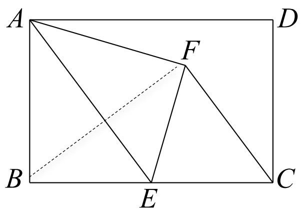
【解析】设正方形边长为 $a$，则有 $AC=\sqrt{2}a=CE$，

$BE=BC+CE=\left(\sqrt{2}+1\right)a$，

$$\cot E=\frac{BE}{AB}=\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)a}{a}=\sqrt{2}+1.$$

【总结】考查根据一些特殊角锐角三角比计算一些相关锐角三角比的思想方法.

【作业 2】如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=8$，$BC=12$，$E$ 是 $BC$ 的中点，连接 $AE$，将 $\Delta ABE$ 沿 $AE$ 折叠，点 $B$ 落在点 $F$ 处，连接 $FC$，则 $\sin\angle EFC$ 的值为______.




【难度】★★

【答案】$\frac{4}{5}$.

【解析】连结 $BF$，

根据翻折的性质，可得 $BE=EF=FC$，可证得 $\Delta BFC$ 为直角三角形，$AE\perp BF$，即得 $AE//CF$，所以 $\angle EFC=\angle AEF=\angle AEB$.

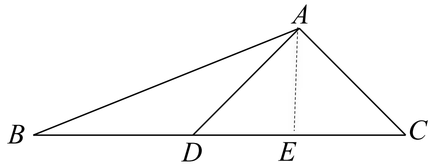
由 $AB=8$，$BE=6$，勾股定理得：$AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=10$，

则 $\sin\angle EFC=\sin\angle AEB=\frac{AB}{AE}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$.

【总结】考查翻折性质的应用，通过等角转化求角的锐角三角比.

【作业 3】如图，$AD$ 是 $\Delta ABC$ 的中线，$\tan B=\frac{1}{3}$，$\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$AC=\sqrt{2}$．求：

（1）$BC$ 的长；（2）$\sin\angle ADC$ 的值．




【难度】★★

【答案】（1）4；（2）$\frac{\sqrt{2}}{2}$．

【解析】（1）作 $AE\perp BC$ 交 $BC$ 于点 $E$，

则 $CE=AC\cdot\cos C=1=AE$，由 $\tan B=\frac{AE}{BE}=\frac{1}{3}$，

即得：$BE=3$，则 $BC=CE+CE=4$；

（2）因为 $AD$ 是 $\Delta ABC$ 中线，则有 $BD=CD=2$，即得：$DE=CD-CE=1$，

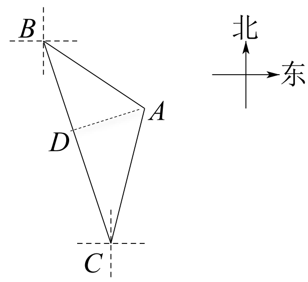
由勾股定理，得：$AD=\sqrt{AE^2+DE^2}=\sqrt{2}$，则有 $\sin\angle ADC=\frac{AE}{AD}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

【总结】解三角形，通过作高把边转化到直角三角形中即可．

【作业 4】如图，轮船从 $B$ 处以每小时 60 海里的速度沿南偏东 $20^\circ$ 的方向匀速航行，在 $B$ 处观测灯塔 $A$ 位于南偏东 $50^\circ$ 方向上．轮船航行 40 分钟到达 $C$ 处，在 $C$ 处观测灯塔 $A$ 位于北偏东 $10^\circ$ 方向上，则 $C$ 处与灯塔 $A$ 的距离是（　　）

$A$．20 海里　　$B$．40 海里　　$C$．$\frac{20}{3}\sqrt{3}$ 海里　　$D$．$\frac{40}{3}\sqrt{3}$ 海里

【难度】★★




【答案】D．

【解析】依题意可得：$\angle ABC=\angle ACB=30^\circ$，则有 $AB=AC$，

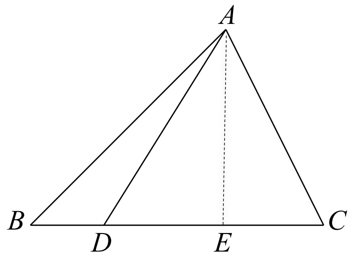
作 $AD\perp BC$ 交 $BC$ 于 $D$，轮船行程即 $BC=60\times\frac{2}{3}=40$，

则有 $BD=CD=\frac{1}{2}BC=20$，$AC=\frac{CD}{\cos\angle ACB}=\frac{40\sqrt{3}}{3}$．

【总结】考查方位角知识的应用，本题重点在于准确分析相关角度的大小再利用特殊角的锐角三角比解决问题．

【作业 5】如图，在 $\Delta ABC$ 中，$\angle B=45^\circ$，$AB=\frac{5\sqrt{6}}{2}$，$D$ 是 $BC$ 上一点，$AD=5$，$CD=3$，

求 $\angle ADC$ 的度数及 $AC$ 的长.




【难度】★★

【答案】$\angle ADC=60^\circ$，$AC=\sqrt{19}$.

【解析】作 $AE\perp BC$ 交 $BC$ 于点 $E$，

则有 $AE=AB\cdot\sin B=\frac{5\sqrt{6}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$，

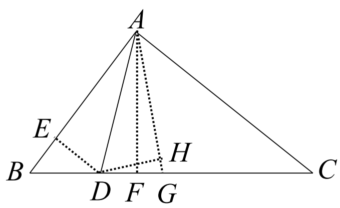
$\sin\angle ADE=\frac{AE}{AD}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，即得 $\sin\angle ADE=60^\circ$，

则 $DE=\frac{1}{2}AD=\frac{5}{2}$，则 $CE=CD-DE=\frac{1}{2}$，勾股定理得 $AC=\sqrt{AE^2+CE^2}=\sqrt{19}$.

【总结】考查特殊角锐角三角比的应用，作高把线段放到直角三角形中即可.

【作业 6】如图，点 $D$ 在 $\Delta ABC$ 的边 $BC$ 上，$\angle C+\angle BAD=\angle DAC$，$\tan\angle BAD=\frac{4}{7}$，$AD=\sqrt{65}$，

$CD=13$，求线段 $AC$ 的长.




【难度】★★

【答案】$2\sqrt{65}$.

【解析】作 $DE\perp AB$ 交 $AB$ 于点 $E$，作 $AF\perp BC$ 交 $BC$ 于点 $F$，

作 $\angle DAG=\angle BAD$ 交 $CD$ 于点 $G$，作 $DH\perp AG$ 交 $AG$ 于点 $H$.

$\because\tan\angle BAD=\frac{DE}{AE}=\frac{4}{7}$，勾股定理得 $AE^2+DE^2=AD^2=65$，$\therefore DE=4$，$AE=7$.

$\because AD$ 为角平分线，根据角平分线性质有 $DH=DE=4$，$AH=AE=7$，

$\angle C+\angle BAD=\angle DAC$，即 $\angle C+\angle BAD=\angle DAH+\angle GAC$，即得：$\angle C=\angle GAC$.

$\therefore AG=CG$，设 $AG=a$，则有 $GH=a-7$，$DG=13-a$，

在 $Rt\Delta DGH$ 中，$\because DH^2+HG^2=DG^2$，$\therefore 4^2+(a-7)^2=(13-a)^2$，解得：$a=\frac{26}{3}$，

即 $AG=GC=\frac{26}{3}$，此时 $DG=13-a=\frac{13}{3}$.

在 $\Delta ADG$ 中用面积法，则有 $DH\cdot AG=AF\cdot DG$，即 $4\times\frac{26}{3}=AF\cdot\frac{13}{3}$，

即得 $AF=8$，$Rt\Delta ADF$ 勾股定理，得 $DF=\sqrt{AD^2-AF^2}=\sqrt{\left(\sqrt{65}\right)^2-8^2}=1$，

则 $CF=CD-DF=12$，由此可得 $AC=\sqrt{AF^2+CF^2}=\sqrt{8^2+12^2}=4\sqrt{13}$.

【总结】本题综合性较强，综合应用了锐角三角比、角平分线的性质、面积法等解三角形常用的方法，主要是根据题目条件进行变化得出最终结果.

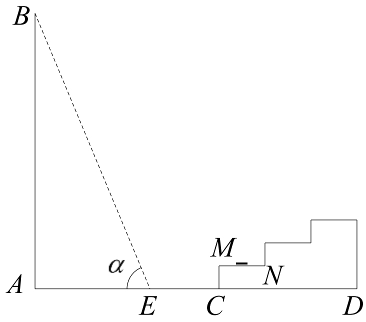
【作业 7】如图，一栋楼房 $AB$ 背后有一台阶 $CD$，台阶每层高 0.2 米，且 $AC=17.2$ 米．设太阳光线与水平地面的夹角为 $\alpha$，当 $\alpha=60°$ 时，测得楼房在地面上的影长 $AE=10$ 米．现有一只小猫睡在台阶的 $MN$ 这层上晒太阳．（参考数据：$\sqrt{3}\approx1.73$）

（1）楼房的高度约为多少米？

（2）过了一会儿，当 $\alpha=45°$ 时，问小猫能否还晒到太阳？请说明理由．

【难度】★★

【答案】（1）$17.3m$；（2）能．




【解析】（1）根据锐角三角比的含义，$\tan\alpha=\dfrac{AB}{AE}$，则有

$AB=AE\cdot\tan\alpha=10\sqrt{3}\approx17.3m$；

（2）$\alpha=45°$ 时，影长即为 $AB\cdot\tan\alpha=17.3m$，

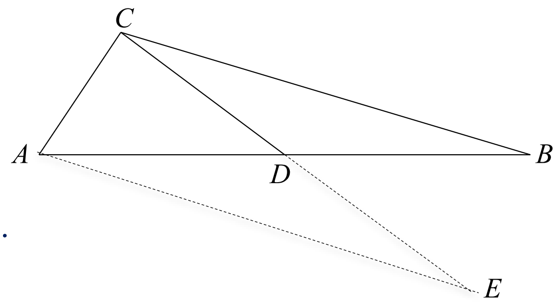
$17.3-17.2=0.1m<0.2m$，即影子的落点正在在台阶侧面 $CM$ 上，此时小猫还是可以晒到太阳的．

【总结】考查利用锐角三角比解决实际问题，化为实际三角形模型即可．

【作业 8】如图，$CD$ 是 $\Delta ABC$ 的中线，已知 $\angle ACD=90°$，$\cos A=\dfrac{3}{5}$，求 $\tan\angle BCD$ 的值．

【难度】★★★

【答案】$\dfrac{3}{8}$．




【解析】由 $\angle ACD=90°$，$\cos A=\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{3}{5}$，

可设 $AC=3a$，则 $AD=5a$，

根据勾股定理，可得：$CD=\sqrt{AD^2-AC^2}=4a$．

延长 $CD$ 到 $E$，使 $DE=CD$，连结 $AE$．

由 $AD=BD$，$\angle CDB=\angle ADE$，可证 $\Delta CDB\cong\Delta EDA$，则有 $\angle BCD=\angle E$，

由此可得：$\tan\angle BCD=\tan\angle E=\dfrac{AC}{CE}=\dfrac{3a}{2\times4a}=\dfrac{3}{8}$．

【总结】考查“倍长中线法”在解三角形中的应用，可进行等角转化，将不便计算的角放到直角三角形中即可．

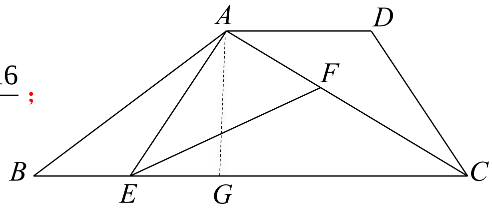
【作业 9】如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AD // BC$，$AB=4$，$BC=6$，$\angle DAC=\angle B=\angle AEF$，点 $E$、$F$ 分别在 $BC$、$AC$ 上（点 $E$ 与 $B$、$C$ 不重合），设 $BE=x$，$AF=y$.

（1）求 $\cos B$；

（2）求证：$\Delta ABE \backsim \Delta ECF$；

（3）求 $y$ 关于 $x$ 的代数式；

（4）当点 $E$ 在 $BC$ 上移动时，$\Delta AEF$ 是否有可能是直角三角形？若有可能，请求出 $BE$ 的长；若不能，请说明理由.




【难度】★★★

【答案】（1）$\dfrac{3}{4}$；（2）略；（3）$y=\dfrac{x^2-6x+16}{4}$；

（4）$BE=\dfrac{2}{3}$ 或 $BE=3$.

【解析】（1）作 $AG\perp BC$ 交 $BC$ 于点 $G$，

$\because AD//BC$，　　$\therefore \angle DAC=\angle ACB$.

$\because \angle DAC=\angle B$，　　$\therefore \angle B=\angle ACB$.

$\therefore AB=AC$，　　$\therefore BG=CG=\dfrac{1}{2}BC=3$.

$\therefore \cos B=\dfrac{BG}{AB}=\dfrac{3}{4}$.

（2）证明：$\because \angle AEC=\angle B+\angle BAE=\angle AEF+\angle FEC$，又 $\angle B=\angle AEF$，

$\therefore \angle BAE=\angle FEC$，　　$\because \angle B=\angle ACB$，

$\therefore \Delta ABE\backsim \Delta ECF$.

（3）由 $\Delta ABE\backsim \Delta ECF$，则有 $\dfrac{AB}{EC}=\dfrac{BE}{CF}$，

即 $\dfrac{4}{6-x}=\dfrac{x}{4-y}$，整理得：$y=\dfrac{x^2-6x+16}{4}$；

（4）① $\angle AEF=\angle B<90^\circ$，即 $\angle AEF$ 不可能为直角；

② $\angle EAF=90^\circ$，则有 $\cos\angle ACE=\dfrac{AC}{EC}=\cos B=\dfrac{3}{4}$，$AC=AB=4$，则有 $EC=\dfrac{16}{3}$，

则 $BE=BC-EC=6-\dfrac{16}{3}=\dfrac{2}{3}$；

③ $\angle AFE=90^\circ$，此时则有 $\angle AEB=\angle EFC=90^\circ$，此时点 $E$ 与点 $G$ 重合，即为 $BC$ 中点，此时 $BE=3$；

综上所述，$BE=\dfrac{2}{3}$ 或 $BE=3$.

【总结】考查“一线三等角”证相似的基本模型，同时对直角三角形的存在性问题可转化为固定角的锐角三角比不变的问题.

【作业 10】如图（$a$）所示，已知正方形 $ABCD$ 在直线 $MN$ 的上方，$BC$ 在直线 $MN$ 上，$E$ 是 $BC$ 上一点，以 $AE$ 为边在直线 $MN$ 的上方作正方形 $AEFG$.

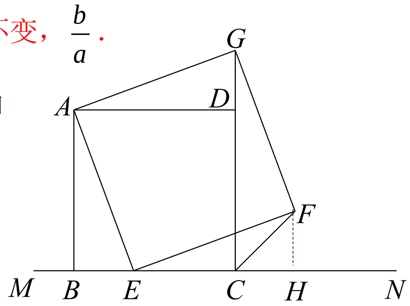
（1）连接 $GD$，求证：$\Delta ADG \cong \Delta ABE$；

（2）连接 $FC$，观察并猜测 $\angle FCN$ 的度数，并说明理由；

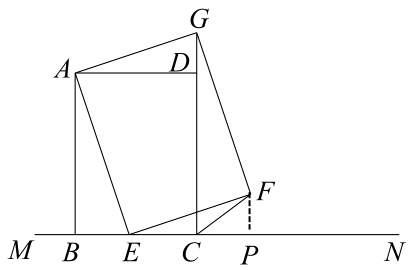
（3）如图（$b$）所示，将图（$a$）中正方形 $ABCD$ 改为矩形 $ABCD$，$AB = a$，$BC = b$（$a$、$b$ 为常数），$E$ 是线段 $BC$ 上一动点（不含端点 $B$、$C$），以 $AE$ 为边在直线 $MN$ 上方作矩形 $AEFG$，使顶点 $G$ 恰好落在射线 $CD$ 上．判断当点 $E$ 由 $B$ 向 $C$ 运动时，$\angle FCN$ 的大小是否总保持不变，若 $\angle FCN$ 的大小不变，请用含 $a$、$b$ 的代数式表示 $\tan\angle FCN$ 的值；若 $\angle FCN$ 的大小改变，请举例说明．

【难度】★★★

【答案】（1）略；（2）45°；（3）不变，$\dfrac{b}{a}$．



图（$a$）



图（$b$）

【解析】（1）证明：$\because$ 四边形 $ABCD$ 和 $AEFG$ 是正方形，

$\therefore AB = AD$，$AE = AG$，

$\angle BAD = \angle EAG = 90°$

$\therefore \angle BAD - \angle DAE = \angle EAG - \angle DAE$

即 $\angle BAE = \angle DAG$

$\therefore \Delta ADG \cong \Delta ABE$．

（2）作 $FH \perp MN$ 交 $MN$ 于点 $H$，

$\because \angle AEF = \angle ABE = 90°$，

$\therefore \angle AEB + \angle BAE = \angle AEB + \angle FEC = 90°$，$\therefore \angle BAE = \angle FEC$．

$\because AE = EF$，$\angle ABE = \angle FHE = 90°$，

$\therefore \Delta ABE \cong \Delta EHF$．$\therefore AB = EH$，$BE = FH$．

即 $AB = BC = BE + EC = EC + CH$，$\therefore BE = CH = FH$．

$\because \angle FHC = 90°$，$\therefore \angle FCN = 45°$．

（3）作 $FP \perp MN$ 交 $MN$ 于点 $P$，

$\because \angle AEF = \angle ABE = 90°$，

$\therefore \angle AEB + \angle BAE = \angle AEB + \angle FEC = 90°$，$\therefore \angle BAE = \angle FEC$．

$\because \angle ABE = \angle FPE = 90°$，$\therefore \Delta ABE \backsim \Delta EPF$．

同时由 $AG = EF$，得 $\Delta ADG \cong \Delta EPF$．

$\therefore EP = AD = BC$，$\therefore BE = CP$，

$\therefore \dfrac{EP}{AB} = \dfrac{FP}{BE} = \dfrac{FP}{CP}$，$\therefore \tan\angle FCN = \dfrac{FP}{CP} = \dfrac{EP}{AB} = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{b}{a}$．

【总结】本题综合性较强，主要考查相似全等叠加的复合图形，进行边角转化解决问题．