

## 相似三角形综合



### 内容分析

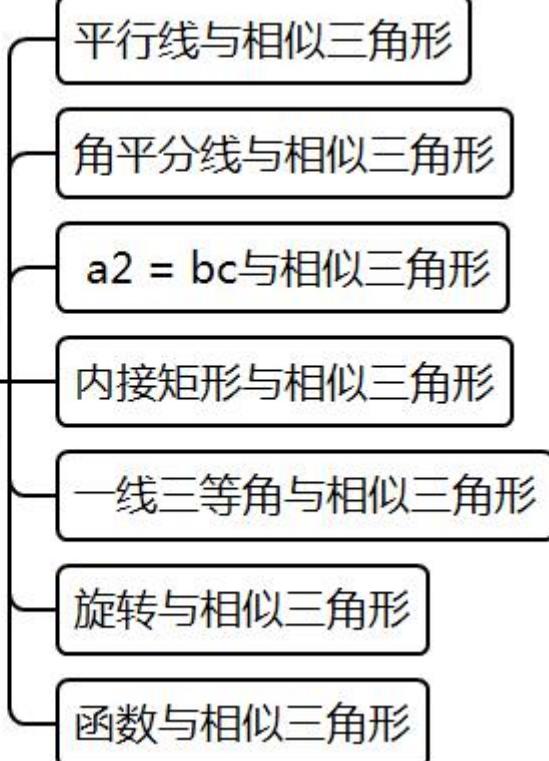
相似三角形是初中数学中的重点，也是难点。相当多的知识点可以与相似三角形综合起来考察。本讲将从以下几个方面学习相似三角形的应用，旨在灵活运用相似三角形的判定和性质解决问题。



### 知识结构



## 相似三角形综合





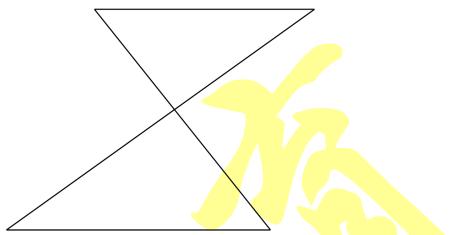
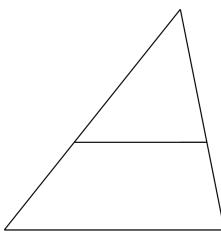
## 模块一：平行线与相似三角形



### 知识精讲

#### 1、平行线与相似三角形

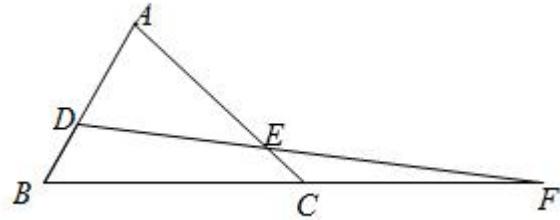
利用平行线构造的相似主要有两个基本的模型，即：“A”字型和“X”字型。



### 例题解析

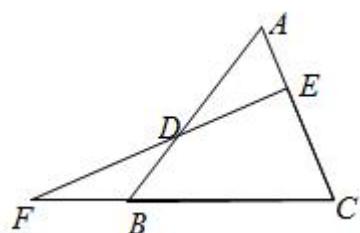
**【例 1】**如图，在 $\triangle ABC$ 中，设 $D$ 、 $E$ 是 $AB$ 、 $AC$ 上的两点，且 $BD=CE$ ，延长 $DE$ 交 $BC$ 的延长线于点 $F$ ， $AB:AC=3:5$ ， $EF=12\text{cm}$ ，求 $DF$ 的长。

**【难度】★★**



**【例 2】**如图，已知 $\triangle ABC$ 中，点 $D$ 、 $E$ 分别在边 $AB$ 、 $AC$ 上，且 $AD:DB=3:2$ ， $AE:EC=1:2$ ，直线 $ED$ 和 $CB$ 的延长线交于点 $F$ ，求 $FB:FC$ 。

**【难度】★★**





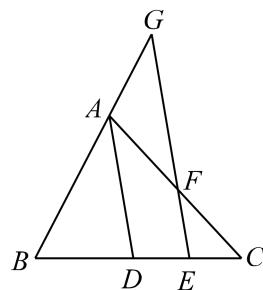
喵伴教育

认真负责，引导思路！

【例 3】已知：在  $\triangle ABC$  中， $D$ 、 $E$  是  $BC$  上的两点，且  $AD \parallel EG$ ， $EG$  交  $AC$  于  $F$ ，交  $BA$  的延长线于  $G$ ，若  $EF + EG = 2AD$ .

求证： $AD$  是  $\triangle ABC$  的中线.

【难度】★★★



【例 4】如图，点  $G$  是  $\triangle ABC$  的重心，过点  $G$  作直线  $k$ ，交  $AB$  于点  $E$ ，交  $AC$  于点  $F$ .

求证： $\frac{BE}{AE} + \frac{CF}{AF} = 1$ .

【难度】★★★



喵伴  
教育



喵伴教育

认真负责，引导思路！

【例 5】 $AD$  是  $\triangle ABC$  的中线，将  $BC$  边所在直线绕点  $D$  顺时针旋转  $\alpha$  角，交边  $AB$  于点  $M$ ，交射线  $AC$  于点  $N$ ，设  $AM = x \cdot AB$ ,  $AN = y \cdot AC$ , ( $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$ ).

(1) 如图 1, 当  $\triangle ABC$  为等边三角形且  $\alpha = 30^\circ$  时, 求证:  $\triangle AMN \sim \triangle DMA$ ;

(2) 如图 2, 证明  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$ .

【难度】★★★

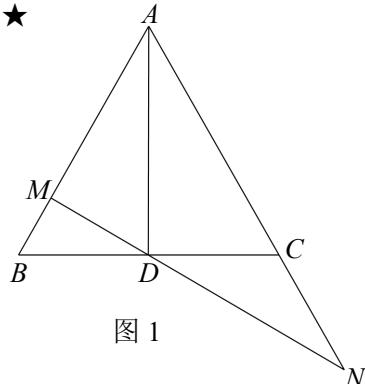


图 1

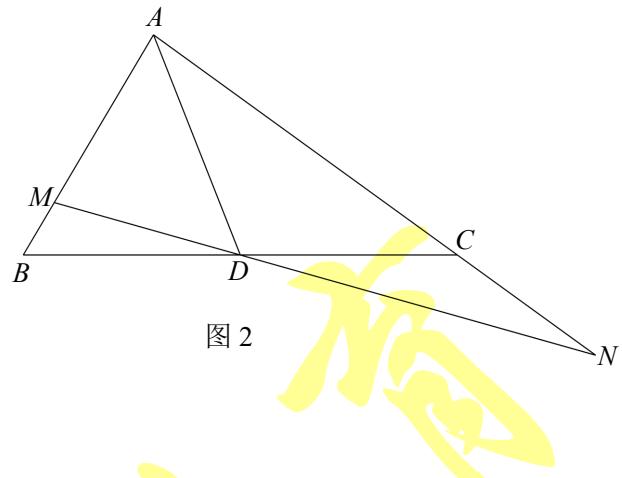


图 2

数  
学  
学

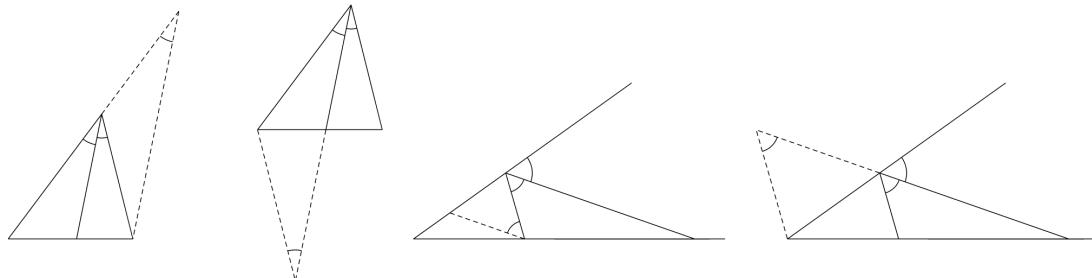
## 模块二：角平分线与相似三角形



知识精讲

### 1、角平分线与相似三角形

角平分线类的相似模型如下:



分为“内角平分线”和“外角平分线”两种类型，虚线部分为辅助线的作法.



喵伴教育

认真负责，引导思路！

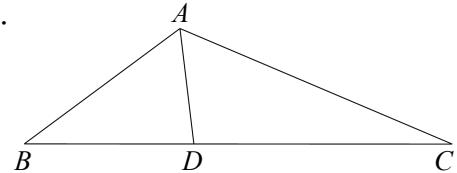


## 例题解析

**【例 6】**在  $\triangle ABC$  中， $\angle BAC = 120^\circ$ ， $AD$  平分  $\angle BAC$  交  $BC$  于点  $D$ .

$$\text{求证: } \frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}.$$

**【难度】★★**

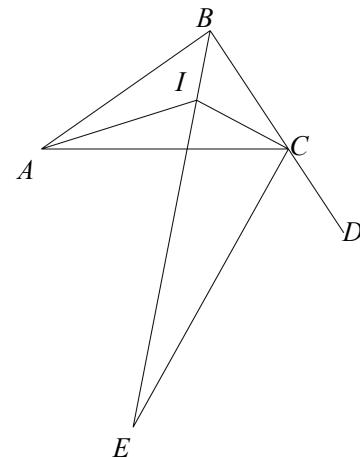


**【例 7】**如图， $\triangle ABC$  中， $AI$ 、 $BI$  分别平分  $\angle BAC$ 、 $\angle ABC$ ， $CE$  是  $\triangle ABC$  的外角  $\angle ACD$  的平分线，交  $BI$  延长线于  $E$ ，连接  $CI$ .

(1)  $\triangle ABC$  变化时，设  $\angle BAC = 2\alpha$ . 若用  $\alpha$  表示  $\angle BIC$  和  $\angle E$ ，那么  $\angle BIC = \underline{\hspace{2cm}}$ ，  
 $\angle E = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

(2) 若  $AB = 1$ ，且  $\triangle ABC$  与  $\triangle ICE$  相似，求  $AC$  长.

**【难度】★★**





喵伴教育

认真负责，引导思路！

## 模块三： $a^2 = b \cdot c$ 与相似三角形



### 知识精讲

#### 1、 $a^2 = b \cdot c$ 与相似三角形

常见及扩展模型如下：

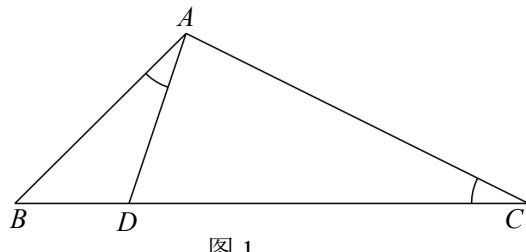


图 1

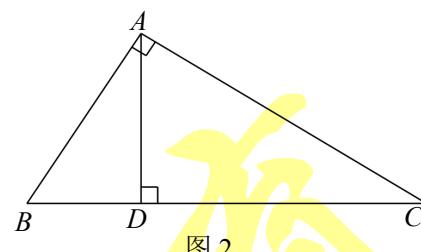


图 2

由图 1 可证：  $AB^2 = BD \cdot BC$ ；

由图 2 可证：  $AB^2 = BD \cdot BC$ ，  $AD^2 = BD \cdot DC$ ，  $AC^2 = CD \cdot CB$ 。

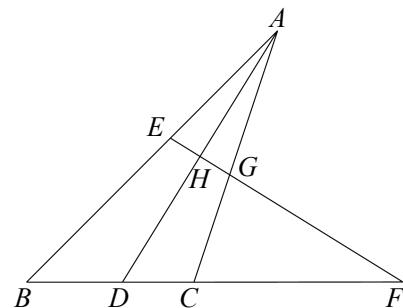


### 例题解析

【例 8】如图，在  $\triangle ABC$  中， $AD$  平分  $\angle BAC$ ， $AD$  的垂直平分线交  $AB$  于点  $E$ ，交  $AD$  于点  $H$ ，交  $AC$  于点  $G$ ，交  $BC$  的延长线于点  $F$ 。

求证： $DF^2 = CF \cdot BF$ 。

【难度】★★



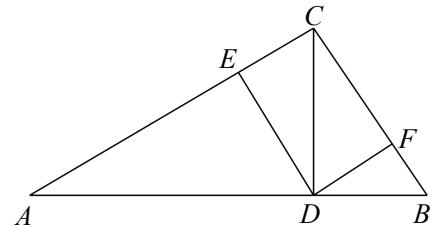


喵伴教育

认真负责，引导思路！

【例 9】如图，在  $Rt\triangle ABC$  中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $CD \perp AB$  于  $D$ ， $DE \perp AC$  于  $E$ ， $DF \perp BC$  于  $F$ . 求证： $\frac{AE}{BF} = \frac{AC^3}{BC^3}$ .

【难度】★★★



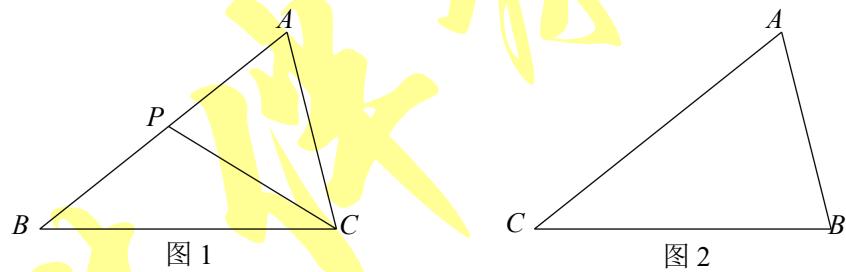
【例 10】如图 1，在  $\triangle ABC$  中， $P$  是边  $AB$  上的一点，联结  $CP$ ，要使  $\triangle ACP \sim \triangle ABC$ ，还需要补充一个条件.

(1) 补充的条件是\_\_\_\_\_，或者\_\_\_\_\_.

(2) 请你参考上面的图形和结论，解答下面的问题：

如图 2，在  $\triangle ABC$  中， $\angle A = 60^\circ$ ， $AC^2 = AB^2 + AB \cdot BC$ ，求  $\angle B$  的度数.

【难度】★★★





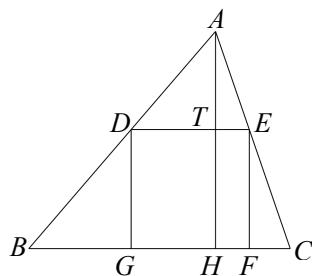
## 模块四：内接矩形与相似三角形



### 知识精讲

#### 1、内接矩形与相似三角形

相关模型：



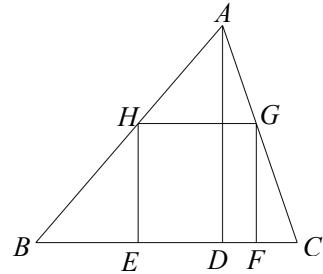
常用结论： $\frac{AT}{AH} = \frac{DE}{BC}$ .



### 例题解析

【例 11】 $\triangle ABC$  中，正方形  $EFGH$  的两个顶点  $E, F$  在  $BC$  上，另两个顶点  $G, H$  分别在  $AC, AB$  上， $BC = 15$ ， $BC$  边上的高  $AD = 10$ ，求正方形  $EFGH$  的面积。

【难度】★★



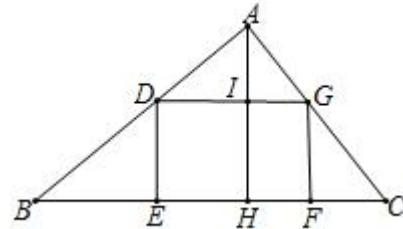


喵伴教育

认真负责，引导思路！

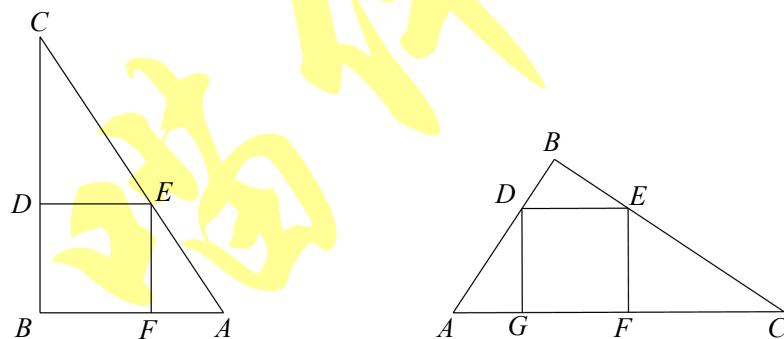
【例 12】在锐角  $\triangle ABC$  中，矩形  $DEFG$  的顶点  $D$  在  $AB$  边上，顶点  $E$ 、 $F$  在  $BC$  边上，顶点  $G$  在  $AC$  边上，如果矩形  $DEFG$  的长为 6，宽为 4，设底边  $BC$  上的高为  $x$ ， $\triangle ABC$  的面积为  $y$ ，求  $y$  与  $x$  的函数关系式。

【难度】★★★



【例 13】一块直角三角形木板的一条直角边  $AB$  长为  $1.5m$ ，面积为  $1.5m^2$ ，现需把它加工成一个面积最大的正方形桌面，请甲、乙两位同学设计加工方案，甲设计方案如图（1），乙设计方案如图（2）。你认为哪位同学设计的方案较好？请说明理由（加工损耗忽略不计，计算结果中可保留分数）。

【难度】★★★





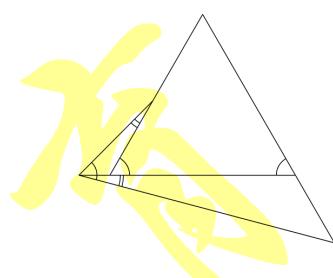
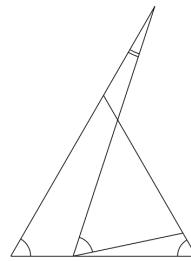
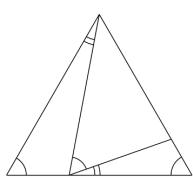
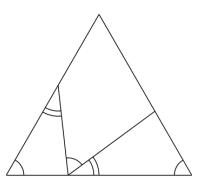
## 模块五：一线三等角与相似三角形



### 知识精讲

#### 1、一线三等角与相似三角形

相关模型如下图所示：



### 例题解析

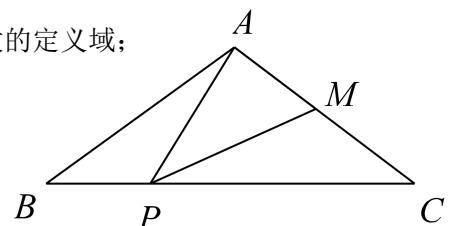
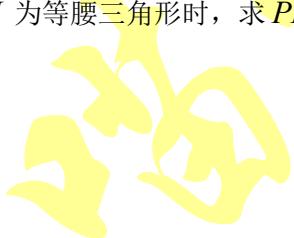


【例 14】如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 5cm, BC = 8cm$ ，点 $P$ 为 $BC$ 边上一动点（不与点 $B, C$ 重合），过点 $P$ 作射线 $PM$ 交 $AC$ 于点 $M$ ，使 $\angle APM = \angle B$ .

(1) 求证： $\triangle ABP \sim \triangle PCM$

(2) 设 $BP = x, CM = y$ . 求 $y$ 与 $x$ 的函数解析式，并写出函数的定义域；

(3) 当 $\triangle APM$ 为等腰三角形时，求 $PB$ 的长





喵伴教育

认真负责，引导思路！

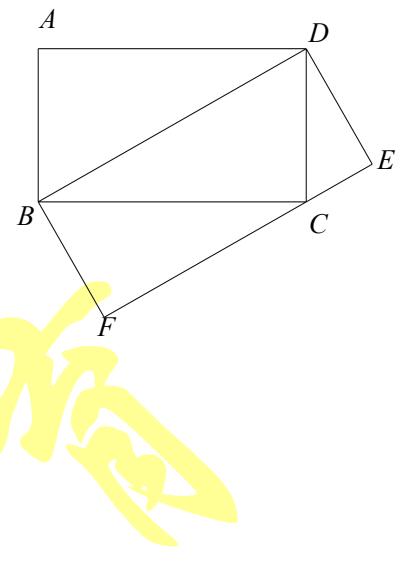
**【例 15】**矩形  $ABCD$  中，以对角线  $BD$  为一边构造一个矩形  $BDEF$ ，使得另一边  $EF$  过原矩形的顶点  $C$ 。

(1) 设  $Rt\triangle CBD$  的面积为  $S_1$ ， $Rt\triangle BFC$  的面积为  $S_2$ ， $Rt\triangle DCE$  的面积为  $S_3$ ，则

$$S_1 \quad S_2 + S_3 \quad (\text{用 “} > \text{”、 “} = \text{”、 “} < \text{” 填空}) ;$$

(2) 写出图中的 3 对相似三角形，并选择其中一对进行证明。

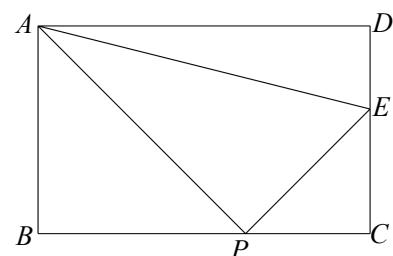
**【难度】★★**



**【例 16】**在矩形  $ABCD$  中， $AB = 2$ ， $AD = 3$ ， $P$  是  $BC$  上的任意一点（ $P$  与  $B$ 、 $C$  不重合），过点  $P$  作  $AP \perp PE$ ，垂足为  $P$ ， $PE$  交  $CD$  于点  $E$ 。

- (1) 连接  $AE$ ，当  $\triangle APE$  与  $\triangle ADE$  全等时，求  $BP$  的长；
- (2) 若设  $BP$  为  $x$ ， $CE$  为  $y$ ，试确定  $y$  与  $x$  的函数关系式；当  $x$  取何值时， $y$  的值最大？最大值是多少？
- (3) 若  $PE \parallel BD$ ，试求出此时  $BP$  的长。

**【难度】★★★**





## 模块六：旋转与相似三角形



### 例题解析

【例 17】如图 1，在 $\triangle ABC$  中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $BC = 2$ ， $\angle A = 30^\circ$ ，点 E、F 分别是线段 BC、AC 的中点，联结 EF.

- (1) 线段 BE 与 AF 的位置关系是 \_\_\_\_\_， $\frac{AF}{BE} = \frac{\text{_____}}{\text{_____}}$ ；
- (2) 如图 2，当 $\triangle CEF$  绕点 C 顺时针旋转 $\alpha$  时 ( $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ )，联结 AF、BE，则 (1) 中的结论是否仍然成立？如果成立，请证明；如果不成立，请说明理由；
- (3) 如图 3，当 $\triangle CEF$  绕点 C 顺时针旋转 $\alpha$  时 ( $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ )，延长 FC 交 AB 于点 D，如果  $AD = 6 - 2\sqrt{3}$ ，求旋转角 $\alpha$  的度数.

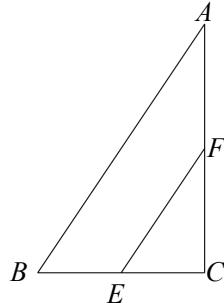


图 1

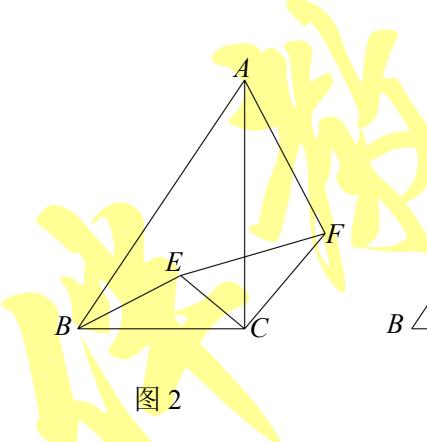


图 2

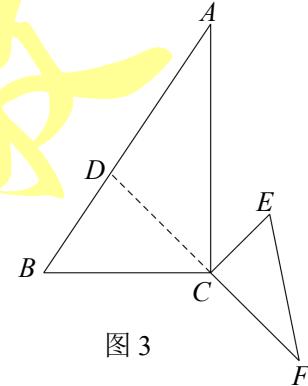


图 3

【难度】★★★



喵伴君

## 模块七：函数与相似三角形

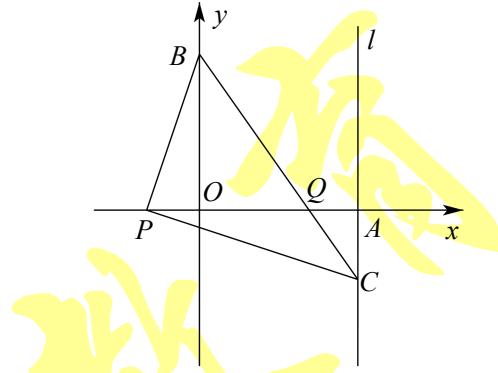


### 例题解析

**【18】**如图，已知平面直角坐标系中三点  $A(2, 0)$ ,  $B(0, 2)$ ,  $P(a, 0)$  ( $a < 0$ )，联结  $BP$ ，过点  $P$  作  $PC \perp PB$  交过点  $A$  的直线  $l$  于点  $C(2, b)$ .

- (1) 求  $b$  与  $a$  之间的函数关系式；
- (2) 当  $a$  取得最大的整数时，求  $BC$  与  $x$  轴的交点  $Q$  的坐标.

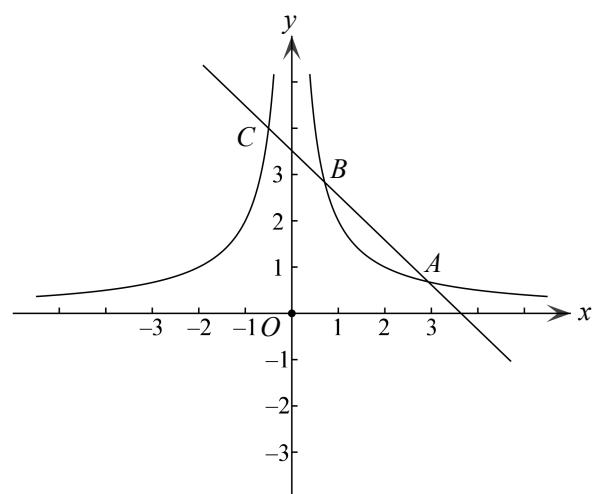
**【难度】★★**



**【例 19】**函数  $y = \frac{k}{x}$  和  $y = -\frac{k}{x}$  ( $k \neq 0$ ) 的图像关于  $y$  轴对称，我们把函数  $y = \frac{k}{x}$  和  $y = -\frac{k}{x}$  ( $k \neq 0$ ) 叫做互为“镜子”函数，类似地，如果函数  $y = f(x)$  和  $y = h(x)$  的图像关于  $y$  轴对称，那么我们就把函数  $y = f(x)$  和  $y = h(x)$  叫做互为“镜子”函数.

- (1) 函数  $y = 3x - 4$  的“镜子”函数是\_\_\_\_\_；
- (2) 函数  $y = x^2 - 2x + 3$  的“镜子”函数是\_\_\_\_\_；
- (3) 如图所示，一条直线与一对“镜子”  $y = \frac{2}{x}$  ( $x > 0$ ) 和  $y = -\frac{2}{x}$  ( $x < 0$ ) 的图像分别交于点  $A$ 、 $B$ 、 $C$ ，如果  $CB : AB = 1 : 2$ ，点  $C$  在函数  $y = -\frac{2}{x}$  ( $x < 0$ ) 的“镜子”函数上的对应点的横坐标是  $\frac{1}{2}$ ，求点  $B$  的坐标.

**【难度】★★**



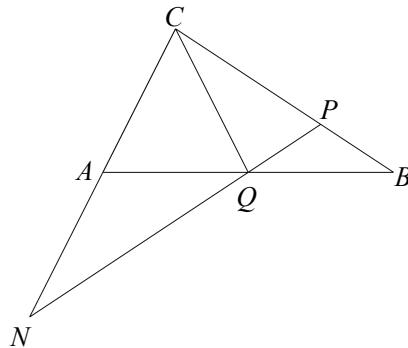


喵伴教育

认真负责，引导思路！

【例 20】在  $\triangle ABC$  中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $CQ$  是斜边  $AB$  上的中线， $AC = 6$ ， $AB = 10$ ，点  $P$  是  $BC$  边上的一个动点（与  $B$ 、 $C$  不重合），经过点  $P$ 、 $Q$  的直线与直线  $AC$  交于点  $N$ ，若  $\triangle PNC \sim \triangle ABC$  相似，求  $BP$  的值.

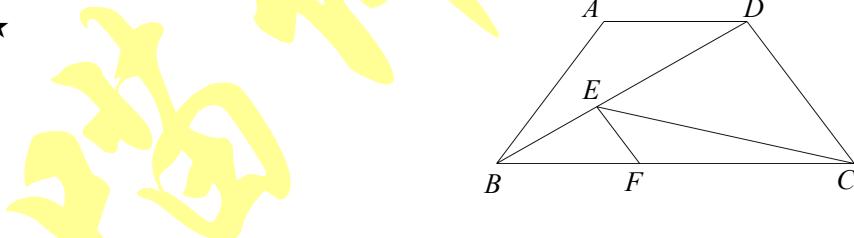
【难度】★★★



【例 21】如图，已知梯形  $ABCD$ ， $AD \parallel BC$ ， $AB = AD = 5$ ， $\tan \angle DBC = \frac{3}{4}$ .  $E$  为射线  $BD$  上一点，过点  $E$  作  $EF \parallel DC$  交射线  $BC$  于点  $F$ ，连接  $EC$ ，设  $BE = x$ ， $\frac{S_{\triangle ECF}}{S_{\triangle BDC}} = y$ .

- (1) 求  $BD$  的长；  
(2) 当点  $E$  在线段  $BD$  上时，求  $y$  关于  $x$  的函数解析式，并写出自变量  $x$  的取值范围.

【难度】★★★





喵伴教育

认真负责，引导思路！

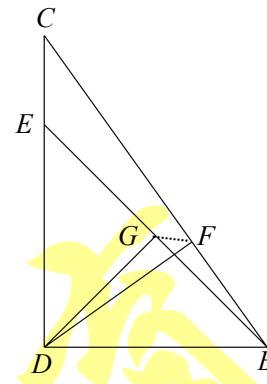


随堂检测

【习题 1】如图，在  $Rt\triangle BDC$  中，点  $E$  在  $CD$  上， $DF \perp BC$  于  $F$ ， $DG \perp BE$  于  $G$ .

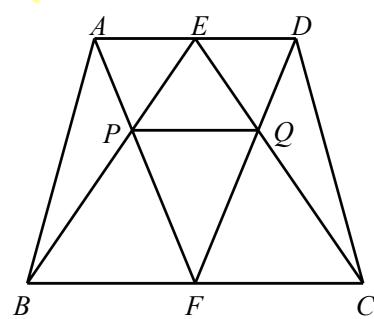
求证： $FG \cdot BC = CE \cdot BG$ .

【难度】★★★



【习题 2】如图，在梯形  $ABCD$  中， $AD \parallel BC$ ， $AD=a$ ， $BC=b$ ， $E$ 、 $F$  分别是  $AD$ 、 $BC$  的中点，且  $AF$  交  $BE$  于  $P$ ， $CE$  交  $DF$  于  $Q$ ，求  $PQ$  的长.

【难度】★★★





喵伴教育

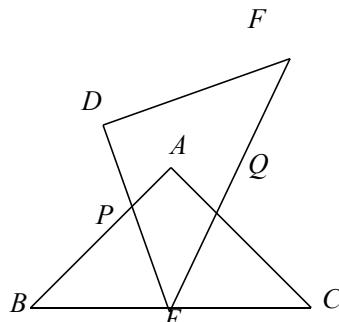
认真负责，引导思路！

**【习题 3】**如图，已知  $\triangle ABC$  和  $\triangle DEF$  是两个全等的等腰直角三角形，且  $\angle BAC = \angle EDF = 90^\circ$ ， $\triangle DEF$  的顶点  $E$  与  $\triangle ABC$  的斜边  $BC$  的中点重合。将  $\triangle DEF$  绕点  $E$  旋转，旋转过程中，线段  $DE$  与线段  $AB$  相交于点  $P$ ，线段  $EF$  与射线  $CA$  相交于点  $Q$ 。

(1) 如图 1，当点  $Q$  在线段  $AC$  上，且  $AP = AQ$  时，求证： $\triangle BPE \cong \triangle CQE$ ；

(2) 如图 2，当点  $Q$  在线段  $CA$  的延长线上时，求证： $\triangle BPE \sim \triangle CEQ$ ；并求当  $BP = a$ ,  $CQ = \frac{9}{2}a$

时， $P$ 、 $Q$  两点间的距离（用含  $a$  的代数式表示）。



【难度】★★★

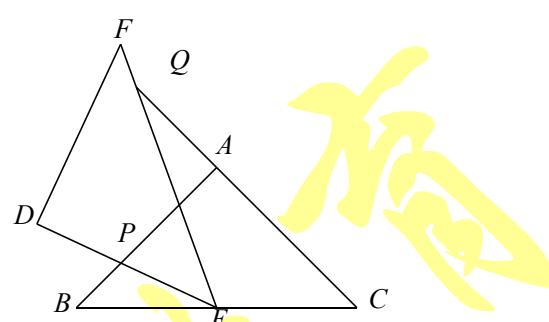


图 1

图 2

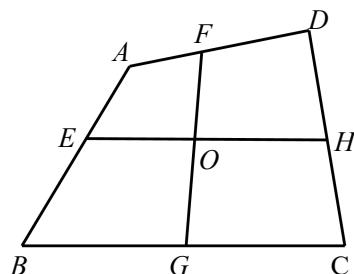


课后作业

**【作业 1】**如图， $E$ 、 $F$ 、 $G$ 、 $H$  分别是四边形  $ABCD$  各边的点，且  $AE = FD = EB = AF$ ， $BG = GC$ ， $HC = DH$ ，连接  $EH$ 、 $GF$  相交于点  $O$ 。

求证： $OE \cdot GO = FO \cdot OH$ 。

【难度】★★★



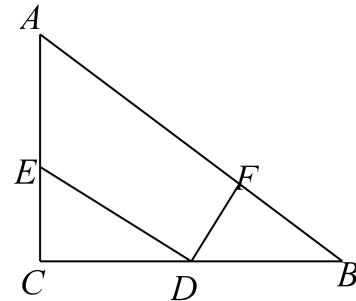


喵伴教育

认真负责，引导思路！

【作业 2】如图，在  $Rt\triangle ABC$  中， $\angle C = 90^\circ$ ,  $AB = 5$ ,  $\tan B = \frac{3}{4}$ ，点  $D$  是  $BC$  的中点，点  $E$  是  $AB$  边上的动点， $DF \perp DE$  交射线  $AC$  于点  $F$ .

- (1) 求  $AC$  和  $BC$  的长
- (2) 当  $EF \parallel BC$  时，求  $BE$  的长；
- (3) 联结  $EF$ ，当  $\triangle DEF$  和  $\triangle ABC$  相似时，求  $BE$  的长.



【作业 3】如图 1，在同一平面内，将两个全等的等腰直角三角形  $ABC$  和  $AFG$  摆放在一起， $A$  为公共顶点， $\angle BAC = \angle AGF = 90^\circ$ ，它们的斜边长为 2，若  $\triangle AFG$  绕点旋转， $AF$ 、 $AG$  与边  $BC$  的交点分别为点  $D$ 、 $E$ （点  $D$  不与点  $B$  重合，点  $E$  不与点  $C$  重合）.

- (1) 请在图 1 中找出两对相似而不全等的三角形，并选择其中一对进行证明；
- (2)  $\triangle ABC$  的斜边  $BC$  所在的直线为  $x$  轴， $BC$  边上的高所在的直线为  $y$  轴，建立平面直角坐标系（如图 2）. 在边  $BC$  上找一点  $D$  使  $BD = CE$ ，求出点  $D$  的坐标，并通过计算验证  $BD^2 + CE^2 = DE^2$ ；
- (3) 在旋转过程中，(2) 中的等量关系  $BD^2 + CE^2 = DE^2$  是否始终成立？若成立，请证明你的结论；若不成立，请说明理由.

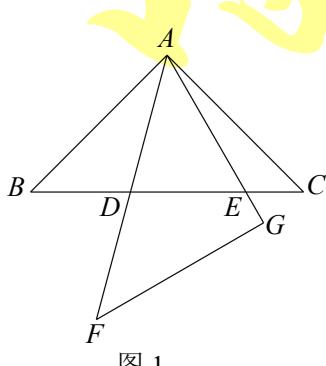


图 1

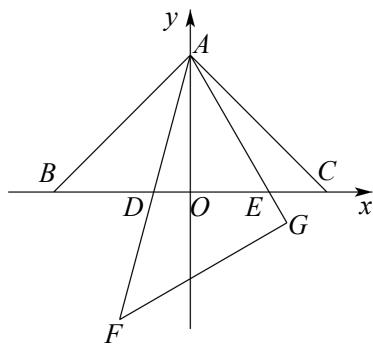


图 2

【难度】★★★