

相似形与比例线段



内容分析

放缩与相似形是九年级上学期第一章第一节的内容, 主要对相似多边形的概念和性质进行讲解, 重点是理解相似形的相关概念和相似多边形性质的运用. 通过对相似多边形的学习, 为后面学习相似三角形的知识奠定基础.

比例线段是九年级上学期第一章第二节的内容, 主要讲解比例线段的有关概念和性质, 以及三角形一边的平行线的相关性质和判定.

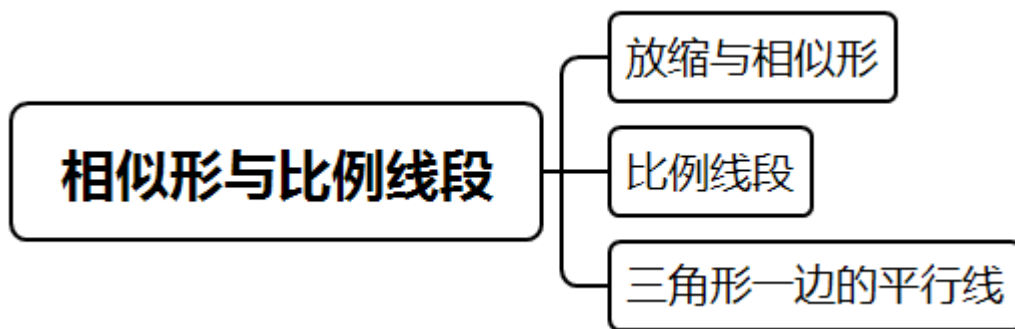
比例线段的知识点, 重点在于理解不同概念和性质之间的联系和区别, 熟练比例线段之间的转换, 并能结合具体图形, 运用比例线段的性质进行解题.

对比例线段的学习之后, 我们进一步学习三角形一边的平行线分线段成比例的相关性质和判定.

三角形一边的平行线是九年级数学上学期第一章第二节的内容, 本讲主要讲解三角形一边平行线性质定理及推论和三角形一边平行线判定定理及推论, 以及平行线分线段成比例定理. 重点是掌握这两个定理及其推论, 分清两个定理及其推论之间的区别和联系, 难点是理解该定理和推论的推导过程中所蕴含的分类讨论思想和转化思想, 并认识“ A ”字型和“ X ”字形这两个基本图形, 最后灵活运用本节的三个定理及两个推论, 理解和掌握“作平行线”这一主要的作辅助线的方法, 为学习相似三角形的性质和判定做好准备.



知识结构



模块一：放缩与相似形



知识精讲

1、相似形的概念

相似形：我们把形状相同的两个图形称为相似的图形，简称相似形。

2、相似多边形的性质

如果两个多边形是相似形，那么这两个多边形的**对应角**相等，**对应边**的长度成比例。当两个相似的多边形是全等形时，它们对应边的长度的比值为 1。



例题解析

【例 1】下列说法中错误的是（ ）

- A. 同一底片先后两次冲印出的照片是相似形
- B. 同一颗树在太阳光下先后两次形成的影子是相似形
- C. 放在投影仪上的图片及其在屏幕上显示的图片是相似形
- D. 放在复印件上的图片及其复印后得到的图片是相似形

【难度】★

【答案】B

【解析】不同的时刻下，阳光与树射入的夹角不同，形成的影子大小不同，即不是相似形。

【总结】考查相似形的定义，抓住相似形的基本定义即形状完全相同才是相似形。

【例 2】有以下命题：1 邻边之比为 2:3 的两个平行四边形相似；2 有一个角是 40° 的两个菱形相似；3 两个矩形相似；4 两个正方形相似，其中正确的是（ ）

- A. 1 和 2
- B. 2 和 4
- C. 3 和 4
- D. 1 和 3

【难度】★★

【答案】B

【解析】邻边之比固定，但邻边的夹角不确定，形状不一定相同，①错误；矩形每个角都是 90° ，但长宽之比不确定，即对应边不一定成比例，③错误；故选 B。

【总结】考查相似形的定义，根据相似形的性质可知对应角相等，对应边成比例才是相似形。

【例 3】如果两个矩形相似，已知一个矩形的两边长分别为 5 cm 和 4 cm，另一边矩形的边长为 6 cm，则另一边长为_____.

【难度】★★

【答案】4.8cm 或 7.5cm .

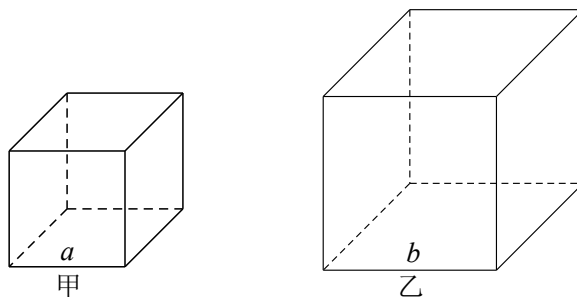
【解析】设矩形另一边长为 x cm，根据相似形的定义，对应边成比例，可知 $\frac{5}{6} = \frac{4}{x}$ 或 $\frac{5}{x} = \frac{4}{6}$ ，

解得： $x = 4.8$ 或 $x = 7.5$.

【总结】考查相似图形的性质，对应边成比例，但要注意好对应关系，题目未指明的要进行分类讨论.

【例 4】在平面内，两个形状相同、大小不一定相同的图形称作相似形. 我们可以把这一概念推广到空间：如果两个几何体的形状完全相同，大小不一定相同，我们称它们为相似体.

如图，甲乙两个不同的正方体，它们是相似体. 若两个正方体的棱长分别为 a 和 b ，则称这两个相似体的相似比为 $a:b$. 我们不难发现它们的一些基本性质：



设 $S_{\text{甲}}$ 、 $S_{\text{乙}}$ 分别表示这两个正方体的表面积，则 $\frac{S_{\text{甲}}}{S_{\text{乙}}} = \frac{6a^2}{6b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ ；

设 $V_{\text{甲}}$ 、 $V_{\text{乙}}$ 分别表示这两个正方体的体积，则 $\frac{V_{\text{甲}}}{V_{\text{乙}}} = \frac{a^3}{b^3} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$.

(1) 下列几何体中，一定属于相似体的是 ()

- A. 两个圆柱体
- B. 两个圆锥体
- C. 两个球体
- D. 两个长方体

(2) 请归纳出相似体的三条主要性质：①两个相似体的对应线段或对应弧长的比等于_____；

②两个相似体表面积之比等于_____；③两个相似体体积之比等于_____.

(3) 某海岛周围海域出产一种鱼，在体长 10 厘米之后的生长过程中，体型可以近似地看作相似体. 若体长 20 厘米的鱼质量为 0.2 千克，则体长为 60 厘米的鱼质量为多少？当地市场上出售这种鱼价格与体长成正比，购买哪种鱼更划算？

【难度】★★★

【答案】（1）C；（2）相似比，相似比的平方，相似比的立方；（3）5.4kg，60cm 划算

【解析】（1）和圆一样，球只有一个基本量，即半径，所有球体都是相似体，类似所有圆都是相似形，其它的几何体都是至少两个基本量，不能确定相似；

（2）表面积是进行平方运算，体积是进行立方运算，由正方体相似进行归纳总结，由此可得相似体对应线段比是相似比，表面积比是相似比的平方，体积比是相似比的立方；

（3）鱼的体型可看作相似体，可知其体积比即为相应相似比的立方，即鱼体长比的立方，

设 60cm 长鱼体重 mkg ，则有 $\frac{0.2}{m} = \left(\frac{20}{60}\right)^3$ ，解得 $m = 5.4$ ，这种鱼的价格与体长成正比，

可知体型越大，这种鱼的单价越低，由此可知 60cm 体长的鱼划算。

【总结】阅读题，主要考查归纳总结的能力，要用题目中的条件分析清楚，进行类比，即可解决问题。

模块二：比例线段



知识精讲

1、比和比例

一般来说，两个数或两个同类的量 a 与 b 相除，叫做 a 与 b 的比，记作 $a:b$ （或表示为 $\frac{a}{b}$ ）；

如果 $a:b=c:d$ （或 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ），那么就说 a 、 b 、 c 、 d 成比例。

2、比例的性质

（1）基本性质：

如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ，那么 $ad=bc$ ；

如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ，那么 $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ ， $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ ， $\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$ 。

（2）合比性质：

如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ，那么 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ ；

如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ，那么 $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ 。

（3）等比性质：

如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ ，那么 $\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ （如果是实数运算，要注意强调 $b+d \neq 0$ ）。

3、比例线段的概念

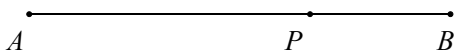
对于四条线段 a 、 b 、 c 、 d ，如果 $a:b=c:d$ （或表示为 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ），那么 a 、 b 、 c 、 d

叫做成比例线段，简称比例线段。

4、黄金分割

如果点 P 把线段 AB 分割成 AP 和 PB （ $AP > PB$ ）两段（如下图），其中 AP 是 AB 和 PB 的比例中项，那么称这种分割为黄金分割，点 P 称为线段 AB 的黄金分割点。其中，

$\frac{AP}{AB}=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$ ，称为黄金分割数，简称黄金数。





例题解析

【例 5】把 $ab = \frac{1}{2}cd$ 写成比例式，不正确的写法是（ ）

- A. $\frac{a}{c} = \frac{d}{2b}$ B. $\frac{a}{2c} = \frac{d}{b}$ C. $\frac{2a}{c} = \frac{d}{b}$ D. $\frac{c}{b} = \frac{2a}{d}$

【难度】★

【答案】B

【解析】应用比例的基本性质，可知 B 选项即为 $ab = 2cd$ ，与原条件不符，故选 B.

【总结】考查比例式的变形，应用比例的基本性质转化为等积式，看能不能得到原本题目条件乘积式即可.

【例 6】已知线段 x 、 y 满足 $(x+y):(x-y)=3:1$ ，那么 $x:y$ 等于（ ）

- A. 3:1 B. 2:3 C. 2:1 D. 3:2

【难度】★

【答案】C

【解析】令 $\begin{cases} x+y=3k \\ x-y=k \end{cases}$ ，可解得 $\begin{cases} x=2k \\ y=k \end{cases}$ ，即得 $x:y=2k:k=2:1$.

【总结】比例运算中，可应用设“ k ”法计算相应字母比例关系.

【例 7】已知 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，则下列式子中正确的是（ ）

- A. $a:b=c^2:d^2$ B. $a:d=c:b$
C. $a:b=(a+c):(b+d)$ D. $a:b=(a-d):(b-d)$

【难度】★★

【答案】C

【解析】根据比例的合比性，可知 C 正确.

【总结】考查比例的性质的变形应用，本题根据合比性即可很快得出答案.

【例 8】若 $a = 8\text{ cm}$, $b = 6\text{ cm}$, $c = 4\text{ cm}$, 则 a 、 b 、 c 的第四比例项 $d = \underline{\hspace{2cm}}\text{ cm}$; a 、 c 的比例中项 $x = \underline{\hspace{2cm}}\text{ cm}$.

【难度】★★

【答案】3, $4\sqrt{2}$.

【解析】根据第四比例项和比例中项的基本定义, 可得 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $\frac{a}{x} = \frac{x}{c}$, 代入即可分别求得

$$d = 3\text{ cm}, \quad x = 4\sqrt{2}\text{ cm}.$$

【总结】考查比例定义中的相关基本概念.

【例 9】已知点 C 是线段 AB 的黄金分割点, $AC = 5\sqrt{5} - 5$, 且 $AC > BC$, 则线段 $AB = \underline{\hspace{2cm}}$,

$$BC = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【难度】★★

【答案】10, $15 - 5\sqrt{5}$.

【解析】根据黄金分割点的概念, 且 $AC > BC$, 可知 $\frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $AC = 5\sqrt{5} - 5$ 代入可得

$$AB = 10, \quad \text{则 } BC = AB - AC = 15 - 5\sqrt{5}.$$

【总结】考查黄金分割点的概念, 以及相关的黄金比.

【例 10】已知三个数 2、 $\sqrt{3}$ 、5, 填一个数, 使这四个数能组成比例, 这个数可能是

 .

【难度】★★★

【答案】 $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ 或 $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ 或 $\frac{2\sqrt{3}}{5}$.

【解析】设这个数是 x , 根据比例的基本性质, 转化后, 可以得到三种情况, 即 $2x = 5\sqrt{3}$,

$$\sqrt{3}x = 5 \times 2, \quad 5x = 2\sqrt{3}, \quad \text{分别解得 } x = \frac{5\sqrt{3}}{2}, \quad x = \frac{10\sqrt{3}}{3}, \quad x = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

【总结】考查对比比例基本性质的应用, 一定要注意题目条件的说明是否需要进行分类讨论的情况, 通过转换为乘积的形式, 可以做到不重不漏.

【例 11】已知实数 a 、 b 、 c 满足 $\frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = \frac{a+b}{c}$ ，求 $\frac{b+c}{a}$ 的值.

【难度】★★★

【答案】2 或 -1

【解析】当 $a+b+c \neq 0$ 时，根据比例的等比性质，可得 $\frac{b+c}{a} = \frac{b+c+c+a+a+b}{a+b+c} = 2$ ；当

$a+b+c=0$ 时，则有 $b+c=-a$ ，由此 $\frac{b+c}{a} = \frac{-a}{a} = -1$.

故 $\frac{b+c}{a}$ 的值为 2 或 -1.

【总结】考查比例的等比性质，注意等比性质在实数运算中运用的条件，要根据分母是否为 0 进行分类讨论.

模块三：三角形一边的平行线

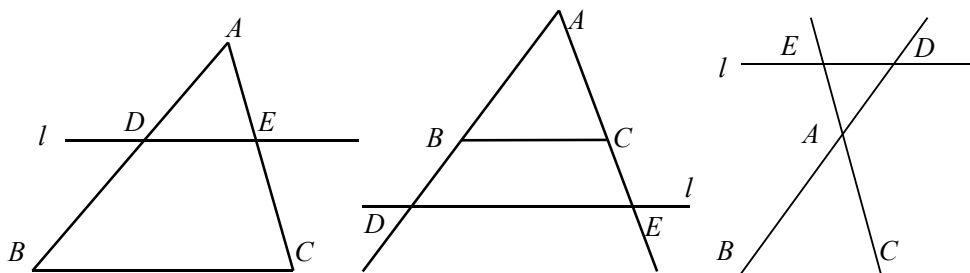


知识精讲

1、三角形一边的平行线性质定理

平行于三角形一边的直线截其他两边所在的直线，截得的对应线段成比例.

如图，已知 $\triangle ABC$ ，直线 $l \parallel BC$ ，且与 AB 、 AC 所在直线交于点 D 和点 E ，那么 $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.

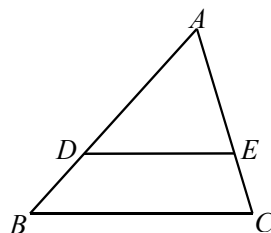


2、三角形一边的平行线性质定理推论

平行于三角形一边的直线截其他两边所在的直线，截得的三角形的三边与原三角形的三边对应成比例.

如图，点 D 、 E 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 AC 上，

$DE \parallel BC$ ，那么 $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$.



3、三角形的重心

定义：三角形三条中线交于一点，三条中线交点叫三角形的**重心**。

性质：三角形重心到一个顶点的距离，等于它到这个顶点对边中点的距离的两倍。

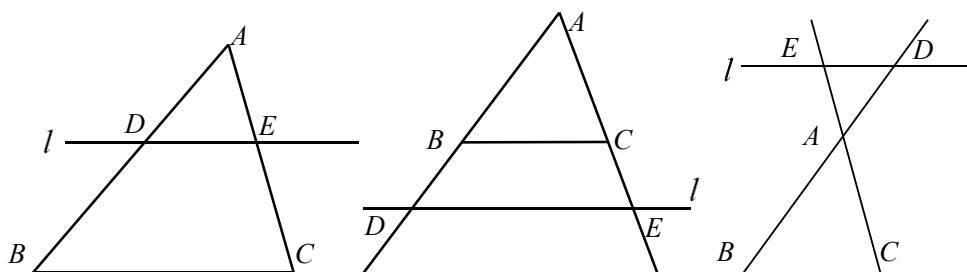
4、三角形一边的平行线判定定理

如果一条直线截三角形的两边所得的对应线段成比例，那么这条直线平行于三角形的第三边。

5、三角形一边的平行线判定定理推论

如果一条直线截三角形的两边的延长线（这两边的延长线在第三边的同侧）所得的对应线段成比例，那么这条直线平行于三角形的第三边。

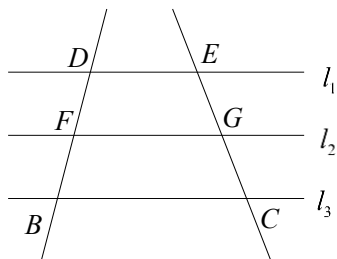
如图，在 $\triangle ABC$ 中，直线 l 与 AB 、 AC 所在直线交于点 D 和点 E ，如果 $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ，那么 $l \parallel BC$ 。



6、平行线分线段成比例定理

两条直线被三条平行的直线所截，截得的对应线段成比例。

如图，直线 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$ ，直线 m 与直线 n 被直线 l_1 、 l_2 、 l_3 所截，那么 $\frac{DF}{FB} = \frac{EG}{GC}$ 。



7、平行线等分线段定理

两条直线被三条平行的直线所截，如果一条直线上截得的线段相等，那么另一条直线上截得的线段也相等。



例题解析

【例 12】如图， $\triangle ABC$ 中， $DE \parallel BC$ ， $AD = EC$ ， $BD = 4 \text{ cm}$ ， $AE = 3 \text{ cm}$ ，则 $AB = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

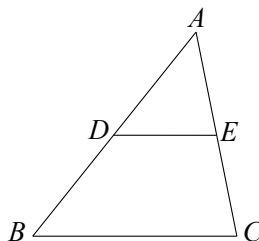
【难度】★★

【答案】 $(4 + 2\sqrt{3}) \text{ cm}$ 。

【解析】设 $AD = x \text{ cm}$ ，由 $DE \parallel BC$ ，可得 $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ ，又 $AD = EC$ ，

则该式即为 $\frac{x}{x+4} = \frac{3}{3+x}$ ，整理得 $x^2 = 12$ ，由此得 $x = 2\sqrt{3}$ ，

$$AB = AD + BD = (4 + 2\sqrt{3}) \text{ cm}。$$



【总结】考查三角形一边平行线性定理的应用，注意好题目中对相关条件的应用，改写成比例式解决问题。

【例 13】 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ，点 D 在 AB 上，点 E 在 BC 上，若 $\frac{DE}{AC} = \frac{BD}{BA}$ ，那么 DE _____

平行于 AC 。（填“一定”、“不一定”或者“一定不”）

【难度】★★

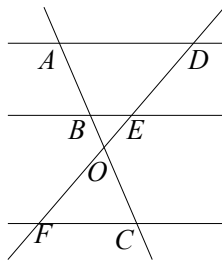
【答案】不一定。

【解析】根据三角形一边平行线的判定定理，可知一条直线截三角形两边所得的线段对应成比例，可判定平行，本题中对应成比例的并不是截三角形两边所得线段对应成比例，即不可判定平行，在 AB 上固定一点 D ，作 $ED \perp AB$ 交 BC 于点 E ，以点 D 为圆心， ED 长为半径画圆，与边 AB 还会有另外一个交点，即不一定能判定平行。

【总结】考查三角形一边平行线判定定理的条件，只能根据所截得的两边线段对应成比例判定平行，而不能根据这条直线对应成比例关系判定平行。

【例 14】如图，两条相交于点 O 的直线被另外三条直线所截，交点分别为 A 、 B 、 C 和 D 、 E 、 F ，则下列说法中正确的有（ ）

- (1) 若 $AD \parallel BE \parallel FC$ ，则 $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ ；
 (2) 若 $AD \parallel BE \parallel FC$ ，则 $\frac{OF}{OC} = \frac{AC}{DF}$ ；
 (3) 若 $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ ，则 $AD \parallel FC$ ；
 (4) 若 $\frac{BC}{EF} = \frac{BO}{EO}$ ，则 $BE \parallel FC$ ；
 (5) 若 $\frac{BE}{FC} = \frac{BO}{OC}$ ，则 $BE \parallel FC$ 。



- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【难度】★★

【答案】B

【解析】根据平行线分线段成比例定理，知 (1) 正确；同时 $\frac{OF}{OC} = \frac{OD}{OA} = \frac{OF+OD}{OC+OA} = \frac{DF}{AC}$ ，

知 (2) 错误；根据平行线分线段成比例定理，不能证明平行，(3) 错误；根据三角形一边平行线的判定定理， $\frac{BC}{EF} = \frac{BO}{EO}$ ，根据比例的基本性质变形可得 $\frac{BO}{OC} = \frac{OE}{OF}$ ，即可证平行，可知 (4) 正确，(5) 错误。

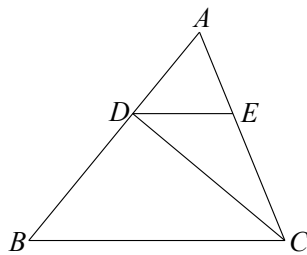
【总结】考查平行线分线段成比例相关的性质定理和判定，注意前提条件再进行判断。

【例 15】如图， $\triangle ABC$ ， $DE \parallel BC$ ，若 $\frac{AD}{DB} = \frac{2}{3}$ ，则 $S_{\triangle CDE} : S_{\triangle BDC} =$ （ ）

- A. 2:3 B. 2:5 C. 4:15 D. 6:15

【难度】★★

【答案】B



【解析】根据 $DE \parallel BC$ ，可得 $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB} = \frac{2}{3}$ ，三角形为同高三角形，则有 $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle CDE}} = \frac{AE}{EC} = \frac{2}{3}$ ，

可设 $S_{\triangle ADE} = 2a$ ，则有 $S_{\triangle CDE} = 3a$ ， $S_{\triangle ACD} = 5a$ ，同理 $\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{AD}{DB} = \frac{2}{3}$ ，可得

$S_{\triangle BCD} = \frac{15}{2}a$ ，则有 $S_{\triangle CDE} : S_{\triangle BDC} = 3a : \frac{15}{2}a = 2:5$ 。

【总结】结合三角形一边平行线性质的定理，考查三角形中的同高三角形，面积比即为其底边长度之比。

【例 16】如图, $DF \parallel AC$, $DE \parallel BC$, 下列各式正确的是 ()

- A. $\frac{AD}{BC} = \frac{BF}{CF}$ B. $\frac{AE}{DE} = \frac{CE}{BC}$ C. $\frac{AE}{CE} = \frac{BD}{AD}$ D. $\frac{AD}{DE} = \frac{AB}{BC}$

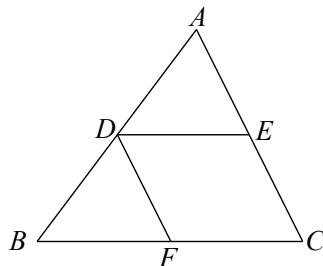
【难度】★★

【答案】D

【解析】由 $DE \parallel BC$, 根据三角形一边平行线的性质定理的

推论, 可得 $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$, 变形即为 $\frac{AD}{DE} = \frac{AB}{BC}$, D 正确.

【总结】考查三角形一边平行线性质的应用, 利用比例变形可以将对应边成比例转化为一个三角形中对应边的比例关系, 利用相关性质等积转化即可进行判断.



【例 17】如图, $AD \parallel EG \parallel BC$, $AF = 12$, $FC = 3$, $BC = 10$, $AD = 5$, 那么 EG 的长是_____.

【难度】★★

【答案】9

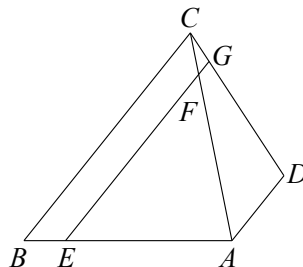
【解析】由 $AD \parallel EG \parallel BC$, 根据三角形一边平行线的性质

定理的推论, 可得 $\frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$, $\frac{CF}{AC} = \frac{FG}{AD}$, 代入即为

$$\frac{EF}{10} = \frac{12}{15}, \quad \frac{FG}{5} = \frac{3}{15}, \quad \text{求得 } EF = 8, \quad FG = 1,$$

即得: $EG = EF + FG = 9$.

【总结】考查三角形一边平行线性质的综合应用, 通过比例转化解决问题.



【例 18】如图, 已知 $ABCD$ 是梯形, 其中 $AB \parallel CD$, 对角线 AC 与 BD 交于 O , 过 O 作 AB 的平行线交 AD 于点 E , 交 BC 于点 F , 若 $AO : OC = 2 : 1$, 且 $CD = 1.8$, $CF = 0.8$, 那么 $AB =$ _____, $BC =$ _____.

【难度】★★

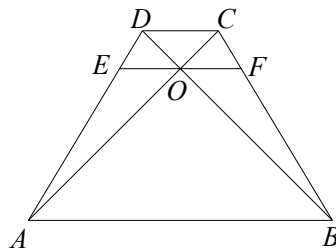
【答案】3.6, 2.4.

【解析】由 $AB \parallel CD \parallel EF$, 根据三角形一边平行线的性质

定理及推论, 可得 $\frac{AB}{CD} = \frac{AO}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{BF}{CF} = 2$, 由此可

求得: $AB = 3.6$, $BF = 1.6$, 故 $BC = BF + CF = 2.4$.

【总结】考查三角形一边平行线性质的综合应用, 通过比例转化解决问题.



【例 19】如图，已知梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $MN \parallel BC$ ，且交对角线 BD 于 O ， $AD = DO =$

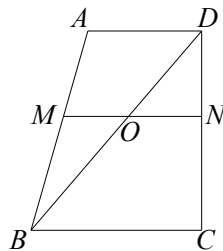
p ， $BC = BO = q$ ，则 MN 为 ()

A. $\frac{pq}{p+q}$

B. $\frac{2pq}{p+q}$

C. $\frac{p+q}{pq}$

D. $\frac{p+q}{2pq}$



【难度】★★

【答案】B

【解析】由 $AD \parallel MN \parallel BC$ ，根据三角形一边平行线的性质定理的推论，可得 $\frac{MO}{AD} = \frac{BO}{BD}$ ，

$$\frac{ON}{BC} = \frac{DO}{BD}，由 AD = DO = p, BC = BO = q, 代入即为 \frac{MO}{p} = \frac{q}{p+q}, \frac{ON}{q} = \frac{p}{p+q},$$

$$求得: MO = \frac{pq}{p+q}, ON = \frac{pq}{p+q}, 即得: MN = MO + ON = \frac{2pq}{p+q}.$$

【总结】考查三角形一边平行线性质的综合应用，通过比例转化解决问题。

【例 20】如图，直角 $\triangle ABC$ 中两条直角边 $CA = 4$ ， $CB = 3$ ，点 E 为斜边 AB 上的一个动点，

$ED \perp BC$ 于 D ，设 $AE = x$ ， $BD = y$ ，则 y 关于 x 的函数解析式为_____。

【难度】★★

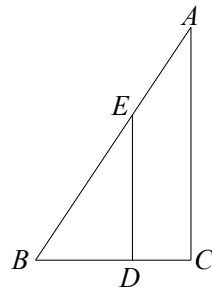
【答案】 $y = 3 - \frac{3}{5}x$ 。

【解析】由勾股定理，可得 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5$ ， $AE = x$ ，

则 $BE = 5 - x$ ，由 $ED \perp BC$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，可得 $DE \parallel AC$ ，

根据三角形一边平行线性质的推论，则有 $\frac{BD}{BC} = \frac{BE}{AB}$ ，

$$即 \frac{y}{3} = \frac{5-x}{5}, 即可得 y = 3 - \frac{3}{5}x.$$



【总结】考查三角形一边平行线性质的综合应用，通过比例转化解决问题。

【例 21】如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， E 是 AB 延长线上的一点，求证：

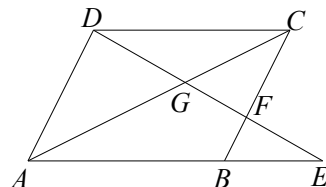
(1) $\frac{AE}{AD} = \frac{AB}{CF}$ ；(2) $GD^2 = GF \cdot GE$ 。

【难度】★★

【答案】略

【解析】证明：(1) \because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AB \parallel CD, AD \parallel BC, AB = CD$$



$$\therefore \frac{DC}{AE} = \frac{GC}{AG} = \frac{CF}{AD} \therefore \frac{AB}{AE} = \frac{CF}{AD} \text{ 即得 } \frac{AE}{AD} = \frac{AB}{CF}$$

(2) 同样地, 由 $AD \parallel CF$, $DC \parallel AE$,

$$\text{可得: } \frac{GD}{GF} = \frac{AG}{GC} = \frac{GE}{GD} \therefore GD^2 = GF \cdot GE.$$

【总结】考查三角形一边平行线性质的基本应用, 考查在有平行线的图形中的基本图形, “A” 字型 and “8” 字型, “A” 字型和 “8” 字型有叠合的时候可进行等比例转化.

【例 22】如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB > AC$, $AD \perp BC$ 于 D , 点 F 是 BC 中点, 过点 F 作 BC 垂线交 AB 于点 E , $BD : DC = 3 : 2$, 则 $BE : EA = \underline{\hspace{2cm}}$.

【难度】★★★

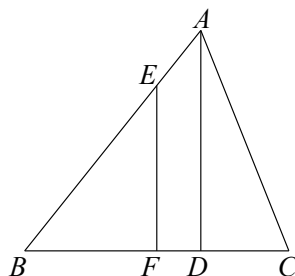
【答案】5:1.

【解析】由 $BD : DC = 3 : 2$, F 为 BC 中点, 即可得

$$\frac{BF + FD}{BF - FD} = \frac{3}{2}, \text{ 则 } BF = 5FD, \text{ 由 } EF \perp BC, AD \perp BC,$$

可得: $EF \parallel AD$, 根据三角形一边平行线性质的定理,

即可得: $BE : EA = BF : FD = 5 : 1$.



【总结】考查三角形一边平行线性质的综合应用, 过程中注意比例转化.

【例 23】如图, 在 $\triangle ABC$ 中, E 、 F 分别是 BC 、 AC 的中点, AE 、 BF 交于点 G , 过 G 作 $GD \parallel AC$ 交 BC 于点 D , 若 $ED = 5$, 则 BC 的长为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【难度】★★★

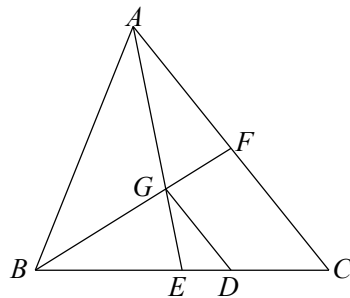
【答案】30.

【解析】 $\because E$ 、 F 分别是 BC 、 AC 的中点,

$$\therefore G \text{ 是 } \triangle ABC \text{ 的重心.} \quad \therefore \frac{GE}{AE} = \frac{1}{3}.$$

$$\because GD \parallel AC, \quad \therefore \text{可得 } \frac{ED}{EC} = \frac{GE}{AE} = \frac{1}{3},$$

由此 $EC = 3ED = 15$, $BC = 2EC = 30$.



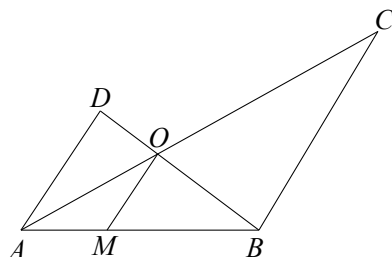
【总结】考查重心性质的证明, 构造平行线, 结合三角形一边平行线性质的定理即可解决问题.

【例 24】如图, $AD \parallel OM \parallel BC$, AC 、 BD 相交于点 O .

$$\text{求证: } \frac{1}{AD} + \frac{1}{BC} = \frac{1}{OM}.$$

【难度】★★★

【答案】略



【解析】证明：∵ $AD \parallel OM \parallel BC$ ， ∴ $\frac{OM}{AD} = \frac{BM}{AB}$ ， $\frac{OM}{BC} = \frac{AM}{AB}$ 。

$$\therefore \frac{OM}{AD} + \frac{OM}{BC} = \frac{BM}{AB} + \frac{AM}{AB} = 1. \quad \text{即得：} \frac{1}{AD} + \frac{1}{BC} = \frac{1}{OM}.$$

【总结】考查三角形一边平行线性质的应用，尤其图形中“A”字型等基本图形有部分叠加图形的情况下可进行等比例转化。

【例 25】如图，已知：在 $\triangle ABC$ 中， $\frac{BD}{CD} = \frac{1}{3}$ ， $\frac{AF}{DF} = 2$ ，求 $\frac{AE}{AC}$ 的值。

【难度】★★★

【答案】 $\frac{1}{3}$ 。

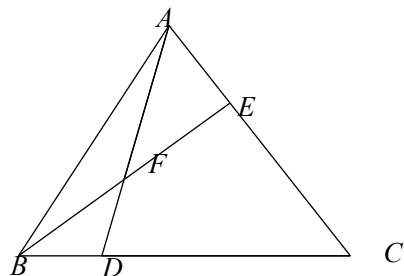
【解析】过点 D 作 $DG \parallel BE$ 交 AC 于点 G ，

根据三角形一边平行线的性质定理，

$$\text{可得 } \frac{EG}{GC} = \frac{BD}{CD} = \frac{1}{3}, \quad \frac{AE}{EG} = \frac{AF}{DF} = 2,$$

$$\text{则有 } \frac{AE}{GC} = \frac{2}{3}, \quad \text{则有 } \frac{AE}{EC} = \frac{2}{1+3} = \frac{1}{2},$$

$$\text{根据比例的合比性，则有 } \frac{AE}{AC} = \frac{1}{3}.$$



【总结】考查三角形一边平行线性质的应用，构造平行线，构造出“A”字型等相关基本图形进行等比例转化解决问题。

【例 26】如图，已知 AM 是 $\triangle ABC$ 的中线， P 是 BC 边上的一个动点，过点 P 作 AM 的平行线分别交 AB 、 AC 所在直线与点 Q 、 R ，求证： $PQ + PR$ 为定值。

【难度】★★★

【答案】略。

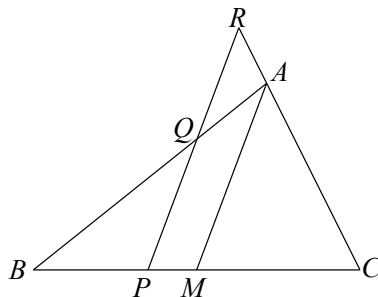
【解析】证明：∵ $PR \parallel AM$ ，

$$\therefore \frac{PQ}{AM} = \frac{BP}{BM}, \quad \frac{PR}{AM} = \frac{PC}{MC}.$$

$$\because BM = CM,$$

$$\therefore \frac{PQ + PR}{AM} = \frac{BP + PC}{BM} = \frac{BC}{BM} = 2.$$

即得： $PQ + PR = 2AM$ ，即证 $PQ + PR$ 为定值。



【总结】考查三角形一边平行线性质的推论的应用，注意观察图形中的基本图形，本题中即用到两个“A”字型。

【例 27】如图，在四边形 $ABCD$ 中， AC 与 BD 相交于点 O ，直线 l 平行于 BD ，且与 AB 、 DC 、 BC 、 AD 及 AC 的延长线分别相交于点 M 、 N 、 R 、 S 和 P 。

求证： $PM \cdot PN = PR \cdot PS$ 。

【难度】★★★

【答案】略

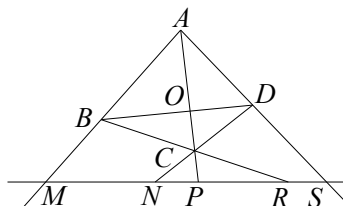
【解析】证明： $\because BD \parallel MS$

$$\therefore \frac{BO}{MP} = \frac{AO}{AP}, \quad \frac{DO}{PS} = \frac{AO}{AP} \quad \therefore \frac{BO}{PM} = \frac{DO}{PS} \quad \therefore \frac{PS}{PM} = \frac{DO}{BO}$$

$$\text{同时由 } OB \parallel PR, \quad OD \parallel PN, \quad \therefore \frac{OB}{PR} = \frac{OC}{CP}, \quad \frac{OD}{PN} = \frac{OC}{CP}$$

$$\therefore \frac{OB}{PR} = \frac{OD}{PN} \quad \therefore \frac{PN}{PR} = \frac{DO}{BO} = \frac{PS}{PM}$$

即证 $PM \cdot PN = PR \cdot PS$



【总结】考查三角形一边平行线性质的应用，找准图形中的“ A ”字型和“ 8 ”字型等基本图形进行等比例转化即可。

【例 28】(1) 如图 1，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在 AB 、 AC 上满足 $DE \parallel BC$ ，点 P 为 BC 上的任意一点， AP 交 DE 于点 Q ，求证： $\frac{DQ}{QE} = \frac{BP}{PC}$ 。

(2) 试参考 (1) 的方法解决下列问题：如图 2， M 、 N 为边 BC 上的两点，且满足 $BM = MN = NC$ ，一条平行于 AC 的直线分别交 AB 、 AM 和 AN 的延长线于点 D 、 E 和 F 。求 $EF : DE$ 的值。

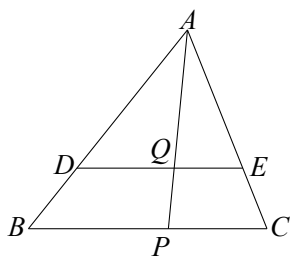


图 1

【难度】★★★

【答案】(1) 略；(2) $3:1$ 。

【解析】(1) 证明： $\because DE \parallel BC$ ， $\therefore \frac{DQ}{BP} = \frac{AQ}{AP}$ ， $\frac{QE}{PC} = \frac{AQ}{AP}$ 。

$$\therefore \frac{DQ}{BP} = \frac{QE}{PC} \quad \therefore \frac{DQ}{QE} = \frac{BP}{PC}.$$

(2) 过点 B 作 $BQ \parallel DF$ 交 AF 延长线于点 Q ，交 AM 延长线于点 P ，
则有 $BQ \parallel DF \parallel AC$ ， $\because BM = MN = NC$ ，

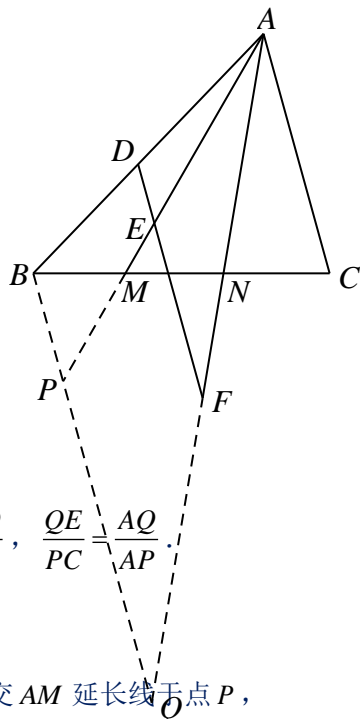


图 2

$$\therefore \frac{BP}{AC} = \frac{BM}{MC} = \frac{1}{2}, \quad \frac{BQ}{AC} = \frac{BN}{NC} = 2. \quad \therefore \frac{BP}{BQ} = \frac{1}{4}, \text{ 即得: } \frac{BP}{PQ} = \frac{1}{3}.$$

由(1)的结论即可得 $EF:DE=PQ:BP=3:1$.

【总结】考查三角形一边平行线的应用，“8”字型的叠合，可以进行相应等量转化确定相关线段之间的比例关系解决问题.



随堂检测

【习题 1】如果图形 A 与图形 B 相似，图形 B 与图形 C 相似，那么图形 A 与图形 C _____ 相似. (填“一定”、“不一定”或“一定不”)

【难度】★

【答案】一定.

【解析】根据相似形定义，可知图形 A 与图形 B 形状相同，图形 B 与图形 C 形状相同，则必有图形 A 与图形 C 形状相同，即两图形相似.

【总结】考查相似形具有传递性.

【习题 2】若 $(x+y):y=8:3$ ，则 $x:y=_____$.

【难度】★

【答案】5:3.

【解析】令 $\begin{cases} x+y=8k \\ y=3k \end{cases}$ ，可解得: $\begin{cases} x=5k \\ y=3k \end{cases}$ ，即得 $x:y=5k:3k=5:3$.

【总结】比例运算中，可应用设“k”法计算相应字母比例关系，也可直接利用比例的合比性质进行求解.

【习题 3】如图， $DE \parallel BC$ ，下列比例式成立的是 ()

A. $\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AE}$

B. $\frac{DE}{BC} = \frac{DA}{AB}$

C. $\frac{EA}{AB} = \frac{DA}{AC}$

D. $\frac{DA}{AB} = \frac{AE}{AC}$

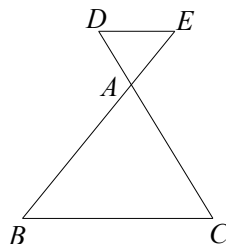
【难度】★

【答案】C

【解析】根据三角形一边平行线性质的推论，由 $DE \parallel BC$ ，

可得: $\frac{DA}{AC} = \frac{EA}{AB}$ ，可知 C 正确.

【总结】考查三角形一边平行线的性质定理.



【习题 4】有以下命题，其中正确的判断有（ ）个

- (1) 如果线段 d 是线段 a 、 b 、 c 的第四比例项，则有 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ；
 (2) 如果点 C 是线段 AB 的中点，那么 AC 是 AB 、 BC 的比例中项；
 (3) 如果点 C 是线段 AB 的黄金分割点，且 $AC > BC$ ，那么 AC 是 AB 与 BC 的比例中项；
 (4) 如果点 C 是线段 AB 的黄金分割点， $AC > BC$ ，且 $AB = 2$ ，则 $AC = \sqrt{5} - 1$ 。

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【难度】★★

【答案】C

【解析】根据比例相关定义，可知 (1) 正确； C 是 AB 中点时，则有 $AC = BC = \frac{1}{2}AB$ ，此

时 $\frac{AB}{AC} \neq \frac{AC}{BC}$ ，(2) 错误；根据黄金分割点的基本定义，可知 (3) 正确，同时黄金比为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，即 $\frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，可得 $AC = \sqrt{5} - 1$ ，(4) 正确；(1) (3) (4) 正确。

综上所述，故选 C。

【总结】考查比例中的相关概念，以及黄金分割等基本知识。

【习题 5】如图，已知菱形 $BEDF$ 内接于 $\triangle ABC$ ，点 E 、 D 、 F 分别在 AB 、 AC 和 BC 上，若 $AB = 15 \text{ cm}$ ， $BC = 12 \text{ cm}$ ，则菱形边长为_____。

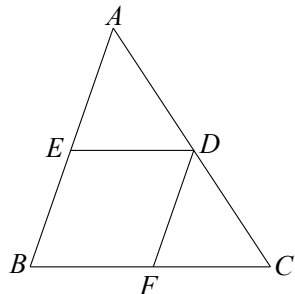
【难度】★★

【答案】 $\frac{20}{3} \text{ cm}$ 。

【解析】根据三角形一边平行线的性质定理，则有 $\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AB}$ ，

则有 $\frac{BE}{AB} + \frac{AE}{AB} = \frac{BE}{AB} + \frac{DE}{BC} = 1$ ，由 $AB = 15 \text{ cm}$ ， $BC = 12 \text{ cm}$ ，

$DE = BE$ ，即为 $\frac{DE}{15} + \frac{DE}{12} = 1$ ，解得： $DE = \frac{20}{3}$ ，即菱形边长。



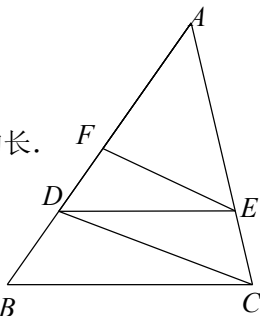
【总结】考查三角形一边平行线性质的应用。

【习题 6】如图，在 $\triangle ABC$ 中， $DE \parallel BC$ ， $EF \parallel CD$ ， $AF = 3$ ， $FD = 2$ ，求 AB 的长。

【难度】★★

【答案】 $\frac{25}{3}$ 。

【解析】 $AF = 3$ ， $FD = 2$ ，可得 $AD = AF + FD = 5$ ，由 $DE \parallel BC$ ， $EF \parallel CD$ ，可得 $\frac{AF}{AD} = \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$ ，即得 $\frac{3}{5} = \frac{5}{AB}$ ，求得 $AB = \frac{25}{3}$ 。



【总结】考查三角形一边平行线性质的应用，注意利用基本“A”字型，尤其有叠合的图形进行等比例转化。

【习题 7】如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $AB = 24$ ， X 、 Y 是对角线 AC 上的三等分点，联结 DX 并延长，交 AB 于 P ，再联结 PY 并延长，交 DC 于 Q ，则 CQ 的长为_____

【难度】★★

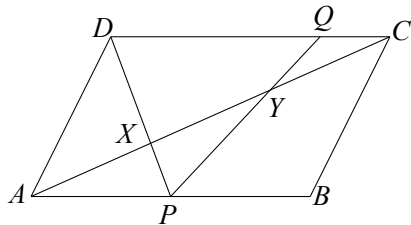
【答案】6.

【解析】由四边形 $ABCD$ 是平行四边形，可知

$AB \parallel CD$ ，根据三角形一边平行线的性质定理，

可得 $\frac{DC}{AP} = \frac{XC}{AX} = 2$ ， $\frac{CQ}{AP} = \frac{CY}{AY} = \frac{1}{2}$ ，由此可得

$$\frac{CQ}{CD} = \frac{1}{4}，即得 CQ = \frac{1}{4}CD = \frac{1}{4}AB = 6.$$



【总结】考查三角形一边平行线性质的应用，注意找到图形中的“X”字型。

【习题 8】如图，在矩形 $ABCD$ 中，截去一个矩形 $ABFE$ (图中阴影部分)，余下的矩形 $DEFC$ 与原矩形 $ABCD$ 相似。

(1) 设 $AB = 6 \text{ cm}$ ， $BC = 8 \text{ cm}$ ，求矩形 $DEFC$ 的面积；

(2) 若截去的矩形 $ABFE$ 是正方形，求 $\frac{AB}{BC}$ 的值。

【难度】★★

【答案】(1) 27cm^2 ；(2) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 。

【解析】(1) 余下矩形与原矩形相似，根据相似形的性质，

则有 $\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC}$ ，代入即为 $\frac{DE}{6} = \frac{6}{8}$ ，求得 $DE = 4.5\text{cm}$ ，

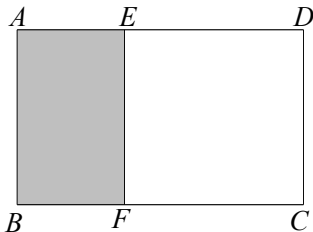
则有 $S_{\text{矩形}DEFC} = DE \cdot EF = 27\text{cm}^2$ ；

(2) 同(1)有 $\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC}$ ，设原矩形宽为 a ，则有 $AE = EF = BF = a$ ，代入即为 $\frac{BC-a}{a} = \frac{a}{BC}$ ，

整理得： $a^2 + aBC - BC^2 = 0$ ，两边同除以 BC^2 ，即得 $\left(\frac{a}{BC}\right)^2 + \frac{a}{BC} - 1 = 0$ ，解方程得

$\frac{a}{BC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，即 $\frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，此时为黄金比。

【总结】考查相似形的基本性质的应用。



【习题 9】如图，平行四边形 $ABCD$ 中，对角线交点为 O ， E 为 AD 延长线上一点， OE 交 CD 于 F ，交 AB 于 G ，交 CB 的延长线于 H ，试求 $\frac{AB}{DF} - \frac{AD}{DE}$ 的值。

【难度】★★★

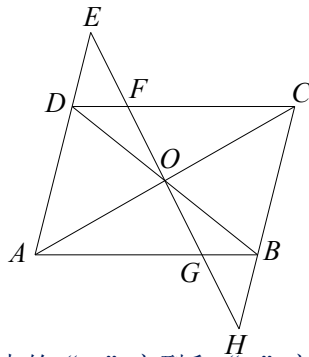
【答案】2.

【解析】由平行四边形的性质，则有 $DO = OB$ ，由此可得

$DF = GB$ ，又 $DC \parallel AB$ ，则有 $\frac{AG}{DF} = \frac{AE}{DE}$ ，则有

$$\frac{AB}{DF} - \frac{AD}{DE} = \frac{AG + GB}{DF} - \frac{AE - DE}{DE} = \left(\frac{AG}{DF} + 1 \right) - \left(\frac{AE}{DE} - 1 \right) = 2.$$

【总结】考查三角形一边平行线性质的应用，注意找准图形中的“A”字型和“8”字型等基本图形进行比例转化，同时应用好平行四边形的相关性质。



【习题 10】如图，已知在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，以 BC 为边向外作正方形 $BCDE$ ，联结 AE 交 BC 于 F ，作 $FG \parallel AC$ ，交 AB 于 G 。

(1) 试判断 $\triangle FCG$ 的形状，并加以证明；

(2) 若正方形 $BCDE$ 边长为 1， $\angle AEB = 30^\circ$ ，求 AB 的长。

【难度】★★★

【答案】(1) 等腰直角三角形；(2) $\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$ 。

【解析】(1) $\triangle FCG$ 是等腰直角三角形。

证明： \because 四边形 $BCDE$ 是正方形，

$\therefore BC \parallel DE$ ， $BE \parallel CD \parallel FG$ 。

$$\therefore \frac{CF}{DE} = \frac{AF}{AE}, \quad \frac{FG}{BE} = \frac{AF}{AE}.$$

$$\therefore \frac{CF}{DE} = \frac{FG}{BE}. \quad \therefore CF = FG.$$

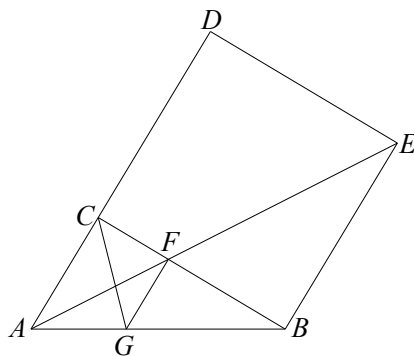
$\because FG \parallel AC$ ， $\therefore \angle CFG = \angle ACB = 90^\circ$ 。即证 $\triangle FCG$ 是等腰直角三角形。

$$(2) \because BE = BC = 1, \angle AEB = 30^\circ, \therefore BF = \frac{BE}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \therefore FG = CF = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

由 $FG \parallel AC$ ，可得 $\frac{FG}{AC} = \frac{BF}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，则 $AC = \sqrt{3}FG = \sqrt{3} - 1$ ，

根据勾股定理，即可得 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2 + 1^2} = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$ 。

【总结】考查三角形一边平行线性质的应用，结合归纳猜想进行解题。





课后作业

【作业 1】下列说法正确的是 ()

- A. 边数相同的多边形相似
- B. 对应边成比例的多边形相似
- C. 对应角相等的多边形相似
- D. 全等的多边形相似

【难度】★

【答案】D

【解析】根据相似形的概念和性质，形状大小完全相同，即对应角相等，对应边对应成比例同时满足，可知 ABC 错误，全等的图形是特殊的相似形，可知 D 正确。

【总结】考查相似形的基本概念和性质。

【作业 2】已知 $\frac{x-y}{13} = \frac{y}{7}$ ，则 $\frac{x+y}{y}$ 的值为_____。

【难度】★

【答案】 $\frac{27}{7}$ 。

【解析】由 $\frac{x-y}{13} = \frac{y}{7}$ ，则有 $\frac{x-y}{y} = \frac{13}{7}$ ，根据比例的合比性， $\frac{x+y}{x} = \frac{13+7+7}{7} = \frac{27}{7}$ 。

【总结】考查相关比例的转化，可利用比例的性质进行求解。

【作业 3】如图，已知 $AD \parallel BE \parallel CF$ ，下列比例式成立的有 ()

(1) $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ ； (2) $\frac{AB}{EF} = \frac{DE}{BC}$ ； (3) $\frac{AC}{EF} = \frac{DF}{BC}$ ； (4) $\frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF}$ 。

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【难度】★

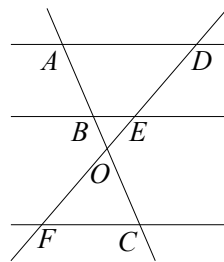
【答案】B

【解析】根据平行线分线段成比例定理，可得 $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ ，

结合比例的合比性，即得 $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$ ， $\frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF}$ ，

(1) 正确，(2) 错误，(3) 错误，(4) 正确，综上所述，故选 B。

【总结】考查平行线分线段成比例定理，结合比例基本性质进行等比例转化。



【作业 4】已知 P 、 Q 是线段 AB 的两个黄金分割点，且 $AB = 10\text{ cm}$ ，则 PQ 长为（ ）

- A. $5(\sqrt{5}-1)$ B. $5(\sqrt{5}+1)$ C. $10(\sqrt{5}-2)$ D. $5(3-\sqrt{5})$

【难度】★★

【答案】C

【解析】假设 P 在 Q 左侧，根据黄金分割点的性质，可知 $\frac{AQ}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ， $\frac{AP}{AB} = 1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，

由 $AB = 10\text{ cm}$ ，可得 $AQ = 5(\sqrt{5}-1)$ ， $AP = 5(3-\sqrt{5})$ ，则 $PQ = AQ - AP = 10(\sqrt{5}-2)$ 。

【总结】考查线段的黄金分割点和黄金分割比的应用。

【作业 5】已知 $\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{8}$ ，且 $a+b+c=20$ ，求 $2a+b-c$ 的值。

【难度】★★

【答案】9.

【解析】根据比例的等比性，可得 $\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{8} = \frac{a+b+c}{5+7+8} = 1$ ，由此可得 $a=5$ ， $b=7$ ， $c=8$ ，

所以 $2a+b-c = 2 \times 5 + 7 - 8 = 9$ 。

【总结】考查比例的等比性基本知识的应用，应用在部分方程题中可以使题目简便易于计算，当然也可以用设“ k ”法。

【作业 6】如图，小华是个爱动脑筋的小朋友，他发现可以通过如下的方法测得路灯的高度：

晚上他由路灯下的 B 处走到 C 处时，测得影子 CD 的长为 1 米，继续往前走 3 米到达 E 处时，测得影子 EF 的长度为 2 米，已知小华的身高是 1.5 米，那么路灯 A 的高度 AB 等于（ ）

- A. 4.5 米 B. 6 米
C. 7.2 米 D. 8 米

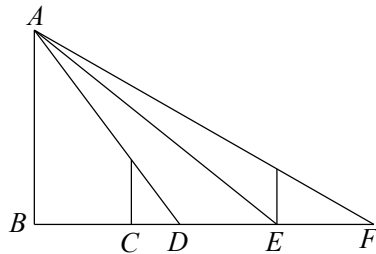
【难度】★★

【答案】B

【解析】设小明身高为 h ， $h=1.5\text{ m}$ ，依题意可得，

$$\frac{h}{AB} = \frac{CD}{BD}, \quad \frac{h}{AB} = \frac{EF}{BF}, \quad \text{即得} \quad \frac{1}{1+BC} = \frac{2}{2+2+1+BC},$$

求得 $BC = 3\text{ m}$ ， $\frac{1.5}{AB} = \frac{1}{4}$ ，即可求得 $AB = 6\text{ m}$ ，故选 B。



【总结】考查三角形一边平行线性质的实际应用，注意把握好“A”字型等比例转化。

【作业 7】如图， $\triangle ABC$ 中，在 BC 上取一点 P ， CA 上取一点 Q ，使得 $BP:PC=2:5$ ，

$CQ:QA=3:4$ ， AP 与 BQ 交于点 R ，则 $AR:RP=$ _____.

【难度】★★

【答案】14:3.

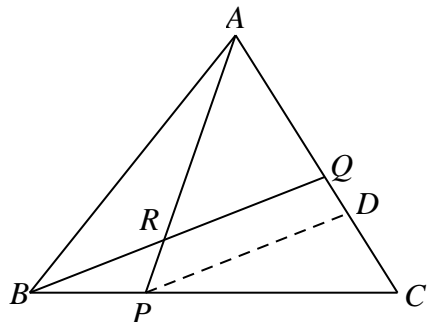
【解析】过点 P 作 $PD \parallel BQ$ 交 AC 于 D ，

根据三角形一边平行线性定理，则有 $\frac{AR}{PR} = \frac{AQ}{QD}$ ，

$\frac{BP}{PC} = \frac{QD}{DC} = \frac{2}{5}$ ，又 $CQ:QA=3:4$ ，令 $AQ=4a$ ，

则 $CQ=3a$ ， $QD = \frac{2}{7}CQ = \frac{6}{7}a$ ，

由此即可得： $AR:RP = AQ:QD = 4a:\frac{6}{7}a = 14:3$ 。



【总结】考查三角形一边平行线性定理的应用，通过构造进行等比例转化，找准题目所求量之间的关系，解决问题。

【作业 8】如图，已知在平面直角坐标系中正三角形 ABC 的顶点 $B(1, 0)$ ， $C(3, 0)$ ，过坐标原点 O 的一条直线分别与边 AB 、 AC 交于点 M 、 N ，若 $OM=MN$ ，则点 M 的坐标为_____.

【难度】★★★

【答案】 $\left(\frac{5}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

【解析】过点 N 作 $ND \parallel OC$ 交 AB 于 D ，

过点 M 作 $NE \perp BC$ 交 BC 于 E ，

由 $OM=MN$ ，易证得 $\triangle DMN \cong \triangle BMO$ ，

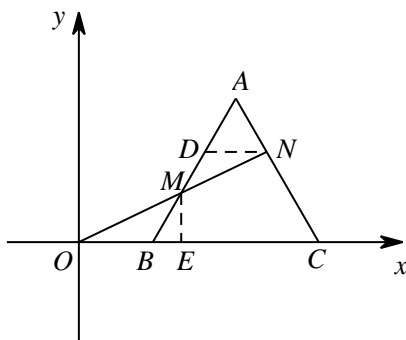
则有 $DN=BO=1$ ， $DM=BM$ ，

由 $B(1, 0)$ ， $C(3, 0)$ ，可得 $BC=2$ ，

$\triangle ABC$ 是正三角形，则有 $AB=BC=2$ ， $\angle ABC=60^\circ$ ，且有 $\frac{AD}{AB} = \frac{DN}{BC} = \frac{1}{2}$ ，

得 $BD=AD=1$ ，由此 $BM = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}$ ，由 $\angle BME=30^\circ$ ，可得： $BE = \frac{1}{2}ME = \frac{1}{4}$ ，

$ME = \frac{\sqrt{3}}{2}BM = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ，即得 $M\left(\frac{5}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ 。



【总结】本题中注意全等三角形的构造，同时注意多利用好特殊图形的性质，进行长度和坐标的转化，“数形结合”思想的运用。

【作业 9】在 $\triangle ABC$ 中， E 、 F 是 BC 上的三等分点， M 在 AC 上满足 $AM:MC = 2:3$ ， BM 分别交 AE 、 AF 于点 G 、 H ，设 $BG = x$ ， $GH = y$ ， $HM = z$ ，求 $x:y:z$ 。

【难度】★★★

【答案】10:5:3.

【解析】过点 E 作 $EP \parallel BM$ 分别交 AF 、 AC 于点 O 、

点 P ，过点 F 作 $FN \parallel BM$ 交 AC 于点 N ，

$\because E$ 、 F 是 BC 上的三等分点，

$$\therefore \frac{FN}{BM} = \frac{CN}{CM} = \frac{CF}{BC} = \frac{1}{3}, \quad \frac{EP}{BM} = \frac{CP}{CM} = \frac{CE}{BC} = \frac{2}{3}.$$

即得 $MP = PN = CN$ 。

$\because AM:MC = 2:3$ ，

$$\therefore \frac{MH}{FN} = \frac{AM}{AN} = \frac{AH}{AF} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{MH}{BM} = \frac{1}{6}, \text{ 即得 } MH = \frac{1}{6} BM.$$

$\because BE = EF$ ，

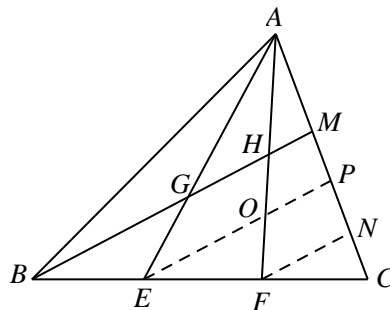
$$\therefore \frac{EO}{BH} = \frac{FO}{FH} = \frac{EF}{BF} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{GH}{EO} = \frac{AH}{AO} = \frac{2}{3}.$$

$$\therefore \frac{GH}{BH} = \frac{1}{3}, \text{ 即得: } GH = \frac{1}{3} BH = \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} BM = \frac{5}{18} BM.$$

$$\therefore BG = BM - GH - HM = \frac{5}{9} BM.$$

$$\text{即得 } x:y:z = \frac{5}{9} BM : \frac{5}{18} BM : \frac{1}{6} BM = 10:5:3.$$



【总结】作平行线构造比例线段，行成“A”字型等基本图形，结合题目条件进行等比例转化即可解决问题。

【作业 10】如图，在边长为 12 的正方形 $ABCD$ 中，点 E 在 CD 上， $DE = 5$ ， AE 的垂直平分线分别交 AD 于 P ，交 BC 于 Q ，垂足为 M ，求 $PM:MQ$ 的值。

【难度】★★★

【答案】 $\frac{5}{19}$ 。

【解析】过点 Q 作 $QN \perp AD$ 交 AD 于 N ，连结 PE ，

\because 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore \angle D = 90^\circ$ ， $AD = AB = NQ = 12$ 。

$\because \angle DEA + \angle DAE = 90^\circ$ ， $\angle NPM + \angle DAE = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle DEA = \angle NPM$ 。

$\therefore \triangle DEA \cong \triangle NPQ$ 。

$\because DE = 5$ ，

$\therefore AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = 13 = PQ$ 。

$\because PQ$ 是 AE 的垂直平分线，

$\therefore AP = PE$ ， $AM = \frac{1}{2}AE = \frac{13}{2}$ 。

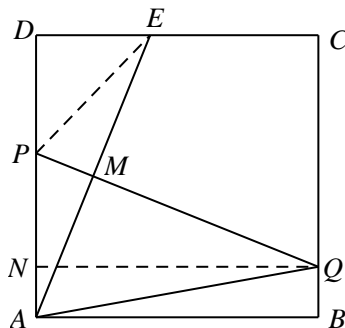
设 $AP = PE = x$ ，则 $DP = 12 - x$ ，

在 $Rt\triangle DEP$ 中， $DP^2 + DE^2 = PE^2$ ，即 $(12 - x)^2 + 5^2 = x^2$ ，解得： $x = \frac{169}{24}$ 。

则 $PM = \sqrt{AP^2 - AM^2} = \sqrt{\left(\frac{169}{24}\right)^2 - \left(\frac{13}{2}\right)^2} = \frac{65}{24}$ ，

$\therefore MQ = PQ - PM = 13 - \frac{65}{24} = \frac{247}{24}$ 。

即得： $PM:MQ = \frac{65}{24}:\frac{247}{24} = \frac{5}{19}$ 。



【总结】考查相似知识的应用，注意本题中不能直接采用锐角三角比等相关知识内容，但可以让学建立初步认识行成相关概念。