



相似三角形

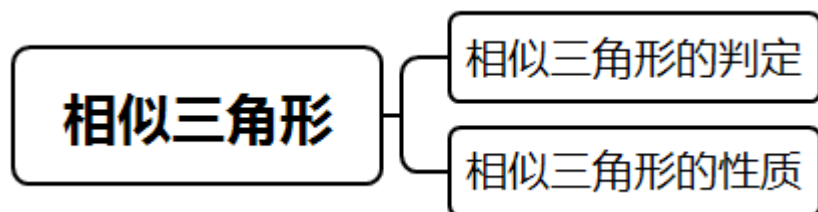


内容分析

相似三角形是九年级数学上学期第一章第三节的内容,本讲主要讲解相似三角形的判定和相似三角形的性质;重点是根据已知条件灵活运用不同的判定定理对三角形相似进行判定,并结合相似三角形的性质进行相关的证明,难点是相似三角形的性质与判定的互相结合,以及相似三角形与分类讨论及函数思想的互相结合.



知识结构



模块一：相似三角形的判定



知识精讲

1、相似三角形的定义

如果一个三角形的三个角与另一个三角形的三个角对应相等,且它们各自的三边对应成比例,那么这两个三角形叫做相似三角形.

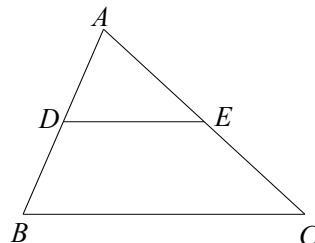
如图, DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线,那么在 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 中,
 $\angle A = \angle A$, $\angle ADE = \angle B$, $\angle AED = \angle C$; $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{2}$.

由相似三角形的定义,可知这两个三角形相似.

用符号来表示,记作 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, 其中点 A 与点 A 、

点 D 与点 B 、点 E 与点 C 分别是对应顶点;符号“ \sim ”读作“相似于”.

用符号表示两个相似三角形时,通常把对应顶点的字母分别写在三角形记号“ \triangle ”后相应的位置上.



根据相似三角形的定义，可以得出：

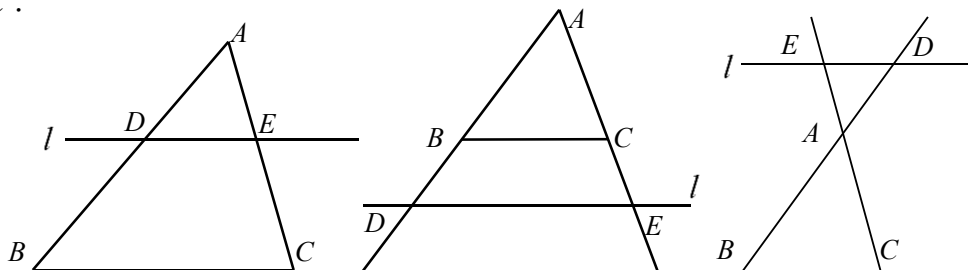
(1) 相似三角形的对应角相等，对应边成比例；两个相似三角形的对应边的比，叫做这两个三角形的**相似比**（或**相似系数**）。

(2) 如果两个三角形分别与同一个三角形相似，那么这两个三角形也相似。

2、相似三角形的预备定理

平行于三角形一边的直线截其他两边所在的直线，截得的三角形与原三角形相似。

如图，已知直线 l 与 $\triangle ABC$ 的两边 AB 、 AC 所在直线分别交于点 D 和点 E ，则 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ 。

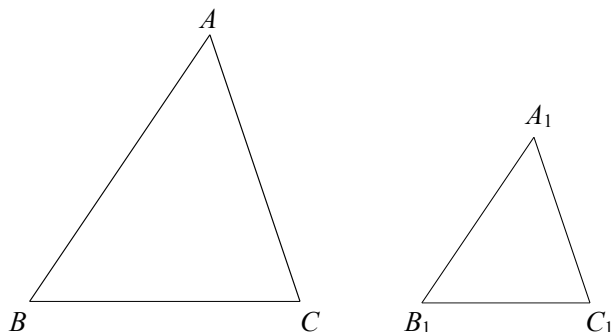


3、相似三角形判定定理 1

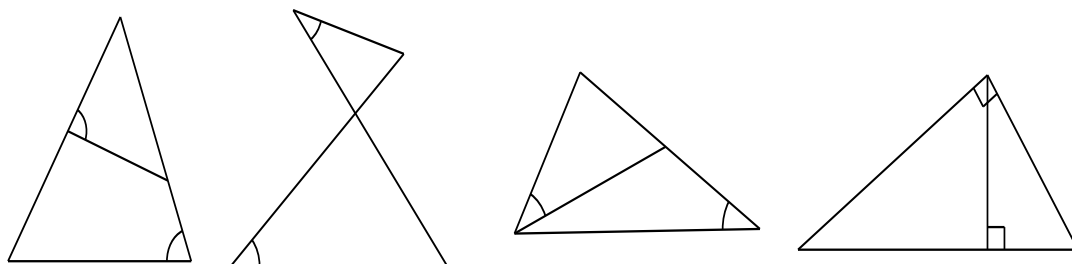
如果一个三角形的两角与另一个三角形的两角对应相等，那么这两个三角形相似。

可简述为：两角对应相等，两个三角形相似。

如图，在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 中，如果 $\angle A = \angle A_1$ 、 $\angle B = \angle B_1$ ，那么 $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ 。



常见模型如下：

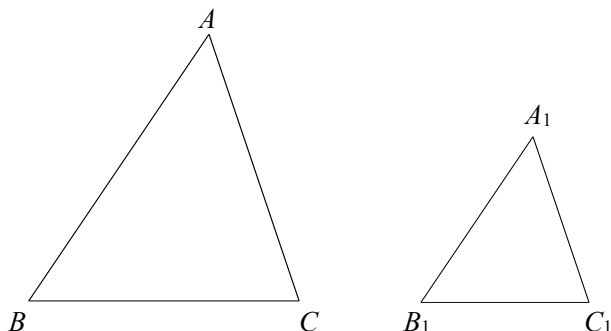


4、相似三角形判定定理 2

如果一个三角形的两边与另一个三角形的两边对应成比例，并且夹角相等，那么这两个三角形相似。

可简述为：两边对应成比例且夹角相等，两个三角形相似。

如图，在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 中， $\angle A = \angle A_1$ ， $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ ，那么 $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ 。

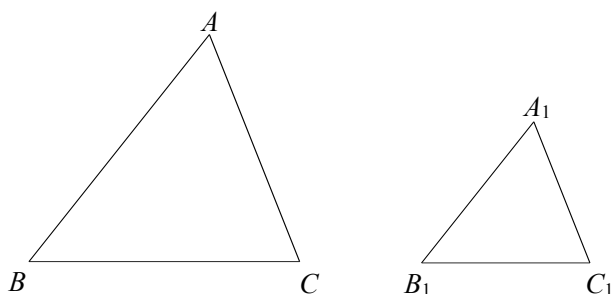


5、相似三角形判定定理 3

如果一个三角形的三条边与另一个三角形的三条边对应成比例，那么这两个三角形相似。

可简述为：三边对应成比例，两个三角形相似。

如图，在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 中，如果 $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$ ，那么 $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ 。

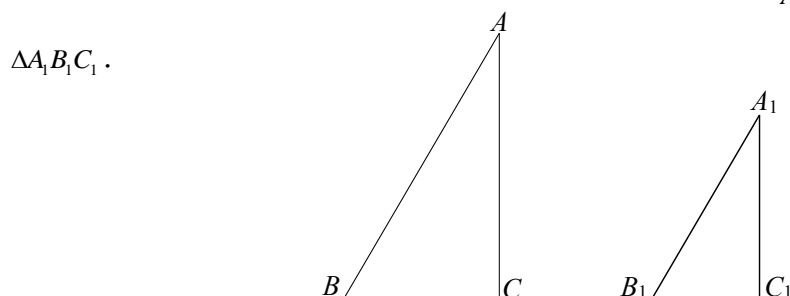


6、直角三角形相似的判定定理

如果一个直角三角形的斜边及一条直角边与另一个直角三角形的斜边及一条直角边对应成比例，那么这两个直角三角形相似。

可简述为：斜边和直角边对应成比例，两个直角三角形相似。

如图，在 $Rt\triangle ABC$ 和 $Rt\triangle A_1B_1C_1$ 中，如果 $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$ ， $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$ ，那么 $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ 。





例题解析

【例 1】下列命题正确的是 ()

- A. 有一个角是 40° 的两个等腰三角形相似
- B. 有一个角是 106° 的两个等腰三角形相似
- C. 面积相等的两个直角三角形相似
- D. 两边之比为 $3:5$ 的两个直角三角形相似

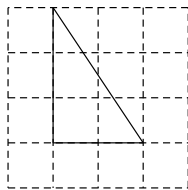
【难度】★

【答案】B

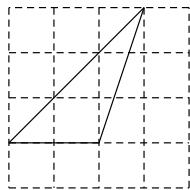
【解析】有一个角是 40° 的等腰三角形，不能确定这个角是顶角还是底角，即不能确定三角形形状，A 错误；有一个角是 106° 的等腰三角形，可以确定这个角一定是等腰三角形的顶角，则底角大小也必相同，根据相似三角形判定定理 1，B 正确；面积相等的直角三角形，底边长和高长都不能确定，形状不确定，C 错误；两边之比为 $3:5$ ，不能确定这两条边是否同为两直角边或者一斜边一直角边，即不能确定直角三角形形状相同，D 错误。

【总结】考查相似三角形判定定理的应用，注意一定要对题目提供的条件进行分析的基础上再确定是否能用判定定理证明相似。

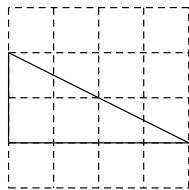
【例 2】下列 4×4 的正方形网格中，小正方形的边长均为 1，三角形的顶点都在格点上，则与 $\triangle ABC$ 相似的三角形所在的网格图形是 ()



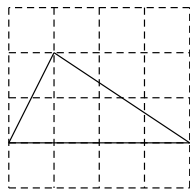
A.



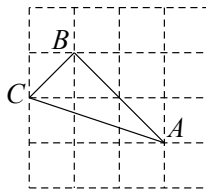
B.



C.



D.



【难度】★

【答案】C

【解析】根据已知 $\triangle ABC$ ，得对应两直角边之比 $\frac{AB}{BC} = 2$ ，三角形与 $\triangle ABC$ 相似，则两条直角边之比也为 2，只有 C 选项满足。

【总结】相似三角形判定定理 2 可转化为一个三角形中的夹等角的两条边对应成比例。

【例 3】如图， $\triangle ABC$ 中， AE 交 BC 于点 D ， $\angle C = \angle E$ ， $AD:DE = 3:5$ ， $AE = 8$ ， $BD = 4$ ，则 DC 的长等于（ ）

- A. $\frac{4}{15}$ B. $\frac{12}{5}$ C. $\frac{17}{4}$ D. $\frac{15}{4}$

【难度】★★

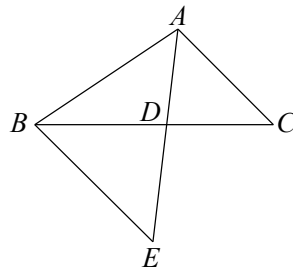
【答案】D

【解析】由 $AD:DE = 3:5$ ， $AE = 8$ ，可得 $AD = 3$ ， $DE = 5$ ，

由 $\angle C = \angle E$ ，结合一对对顶角 $\angle BDE = \angle ADC$ ，可得

$\triangle BDE \sim \triangle ADC$ ，由此则有 $\frac{BD}{AD} = \frac{DE}{CD}$ ，代入即为 $\frac{4}{3} = \frac{5}{CD}$ ，

即得： $CD = \frac{15}{4}$ ，故选 D.



【总结】考查相似三角形的判定和性质的综合应用，注意题目中相似图形的对应关系，对应成比例的线段和点一定要准确.

【例 4】在研究相似问题时，甲、乙同学的观点如下：

甲：将边长为 3、4、5 的三角形按图 1 的方式向外扩张，得到新三角形，它们的对应边间距为 1，则新三角形与原三角形相似；

乙：将邻边为 3 和 5 的矩形按图 2 的方式向外扩张，得到新的矩形，它们的对应边间距均为 1，则新矩形与原矩形相似.

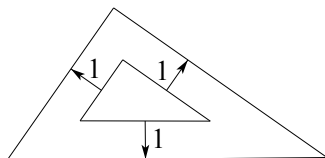


图 1

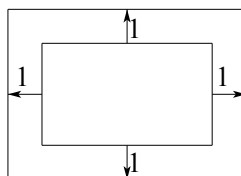


图 2

对于两人的观点，下列说法正确的是（ ）

- A. 两人都对 B. 两人都不对 C. 甲对乙不对 D. 甲不对，乙对

【难度】★★

【答案】C

【解析】直角三角形扩张以后得到的三角形三边分别与原三角形平行，得到两三角形三个内角都相等，根据相似三角形判定定理 1，可知相似，甲对；乙向外扩张后，矩形两邻边

分别变为 5 和 7， $\frac{3}{5} \neq \frac{5}{7}$ ，两矩形的边不对应成比例，可知两矩形不相似，乙不对，故

选 C.

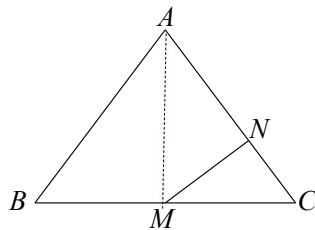
【总结】对于三角形来讲，三角形个内角相等则各对应边比例相等，可以得到两三角形相似，对于其它的多边形来说，角相等不能保证相似，必须再确定两图形的对应边对应成比例才能判定相似，注意相似成立的条件.

【例 5】如图， $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 5$ ， $BC = 6$ ，点 M 为 BC 中点， $MN \perp AC$ 于点 N ，则 $MN = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【难度】★★

【答案】 $\frac{12}{5}$ 。

【解析】连结 AM 。由 $AB = AC = 5$ ， M 为 BC 中点，



可知 $AM \perp BC$ ， $BM = CM = 3$ ，由勾股定理可得： $AM = \sqrt{AC^2 - CM^2} = 4$ 。

由面积法，可得： $AM \cdot MC = MN \cdot AC$ ，即得 $MN = \frac{AM \cdot MC}{AC} = \frac{4 \times 3}{5} = \frac{12}{5}$ 。

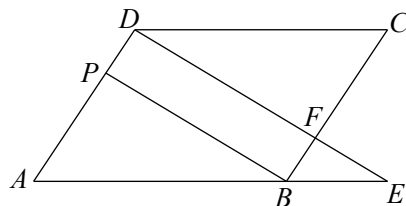
【总结】考查图形性质的综合应用，本题中也可用“子母三角形”通过相似解题。

【例 6】如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， F 是 BC 上的一点，直线 DF 与 AB 的延长线相交于点 E ， $BP \parallel DF$ ，且与 AD 相交于点 P ，则图中有 对相似的三角形。

【难度】★★

【答案】6。

【解析】 $AB \parallel CD$ ， $AD \parallel BC$ ，结合 $BP \parallel DF$ ，由相



似三角形预备定理，知 $\triangle CDF$ 、 $\triangle BEF$ 、 $\triangle ABP$ 、 $\triangle AED$ 四三角形两两相似，即共有 6 对相似三角形。

【总结】考查相似三角形的预备定理，由平行可证相似，同时考查相似三角形的传递性。

【例 7】如图，在直角梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = 8$ ， $AD = 3$ ， $BC = 4$ ，点 P 为 AB 边上一动点，若 $\triangle PAD$ 与 $\triangle PBC$ 是相似三角形，则满足条件的点 P 的个数是（ ）。

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【难度】★★

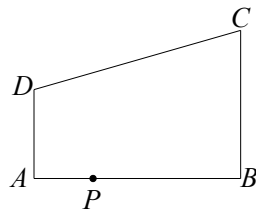
【答案】C

【解析】根据相似三角形判定定理 2，首先易得 $\angle A = \angle B = 90^\circ$ ，则只需要两三角形夹直角的两边对应成比例 即可，分成两种情况讨论，即

$\frac{AD}{BP} = \frac{AP}{BC}$ 或 $\frac{AD}{BC} = \frac{AP}{BP}$ ，可分别得到 $AP = 2$ 或 $AP = 6$ 或 $AP = \frac{24}{7}$ ，即满足条件的 P 点有 3

个，故选 C。

【总结】考查相似三角形判定定理 2 的应用，注意进行分类讨论，要经过准确计算，不能直接分两种情况得出两种结果。



【例 8】如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $BC = 3$ ， $AC = 4$ ， AB 的垂直平分线 DE 交 BC 的延长线于点 E ，则 CE 的长为（ ）

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{7}{6}$ C. $\frac{25}{6}$ D. 2

【难度】★★

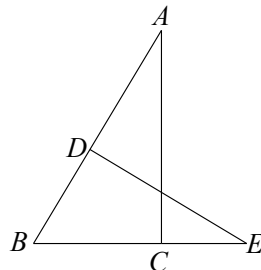
【答案】B

【解析】根据勾股定理，可得 $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = 5$ ，则有

$$BD = \frac{1}{2}AB = \frac{5}{2}, \text{ 由 } \angle BDE = \angle ACB = 90^\circ, \angle A \text{ 为公共角,}$$

根据相似三角形判定定理 1，可证 $\triangle ABC \sim \triangle EBD$ ，则有

$$\frac{AB}{BE} = \frac{BD}{BC}, \text{ 代入线段可求得 } BE = \frac{25}{6}, \text{ 则 } CE = BE - BC = \frac{7}{6}.$$

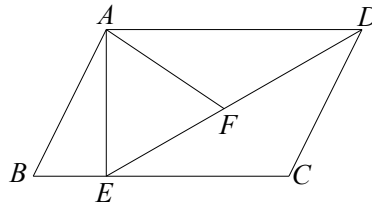


【总结】考查相似三角形判定定理和性质的综合应用，先判定再应用性质。

【例 9】如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，过点 A 作 $AE \perp BC$ ，垂足为 E ，连接 DE ， F 为线段 DE 上一点，且 $\angle AFE = \angle B$ 。

(1) 求证： $\triangle ADF \sim \triangle DEC$ ；

(2) 若 $AB = 8$ ， $AD = 6\sqrt{3}$ ， $AF = 4\sqrt{3}$ ，求 AE 的长。



【难度】★★

【答案】(1) 略；(2) 6

【解析】(1) 证明： \because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AB \parallel CD, AD \parallel BC. \therefore \angle ADF = \angle DEC, \angle B + \angle C = 180^\circ.$$

$$\because \angle AFE + \angle AFD = 180^\circ, \angle AFE = \angle B, \therefore \angle AFD = \angle C, \therefore \triangle ADF \sim \triangle DEC.$$

(2) 解：由 (1) $\triangle ADF \sim \triangle DEC$ ， $\therefore \frac{AF}{CD} = \frac{AD}{DE}$ ，

$$\text{即 } \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{6\sqrt{3}}{DE}, \text{ 解得： } DE = 12. \because AE \perp BC, \therefore \angle EAD = 90^\circ,$$

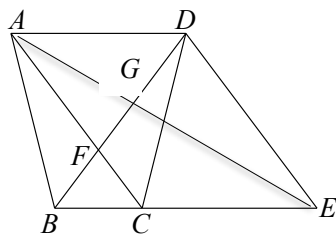
$$\text{根据勾股定理，即得： } AE = \sqrt{DE^2 - AD^2} = 6.$$

【总结】考查相似三角形判定定理 1，和相似三角形的相关性质的结合应用，先判定再应用性质，过程中注意对相关图形及性质的应用。

【例 10】如图，梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AB = DC$ ，对角线 AC 、 BD 相交于点 F ，点 E 是边 BC 延长线上一点，且 $\angle CDE = \angle ABD$ 。

(1) 求证：四边形 $ACED$ 是平行四边形；

(2) 联结 AE ，交 BD 于点 G ，求证： $\frac{DG}{GB} = \frac{DF}{DB}$ 。



【难度】★★

【答案】略。

【解析】证明：(1) $\because AD \parallel BC$ ， $AB = DC$ ， $\therefore \angle BAD = \angle CDA$ 。 $\because AB = DC$ ， $AD = AD$ ， $\therefore \triangle ABD \cong \triangle DCA$ 。 $\therefore \angle ACD = \angle ABD$ 。 $\because \angle CDE = \angle ABD$ ， $\therefore \angle ACD = \angle CDE$ 。 $\therefore AC \parallel DE$ 。 $\because AD \parallel BC$ ， \therefore 四边形 $ACED$ 是平行四边形。

(2) $\because AD \parallel BC$ ， $\therefore \frac{AD}{BC} = \frac{DF}{FB}$ 。 $\therefore \frac{AD}{BC + AD} = \frac{DF}{DF + FB}$ 。

\because 四边形 $ACED$ 是平行四边形， $\therefore AD = CE$ ， $\therefore \frac{AD}{BC + CE} = \frac{DF}{DF + FB}$ ，即 $\frac{AD}{BE} = \frac{DF}{DB}$ 。

$\because AD \parallel BE$ ， $\therefore \frac{DG}{GB} = \frac{AD}{BE}$ ， $\therefore \frac{DG}{GB} = \frac{DF}{DB}$ 。

【总结】考查相似中有平行线的情况，即可直接利用图形中的“A”字型 and “8”字型等基本图形进行等比例转化。

【例 11】如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，点 D 、 E 分别是边 AC 、 AB 的中点， $DF \perp AC$ ， DF 与 CE 相交于点 F ， AF 的延长线与 BD 相交于点 G 。

(1) 求证： $AD^2 = DG \cdot BD$ ；

(2) 联结 CG ，求证： $\angle ECB = \angle DCG$ 。

【难度】★★

【答案】略

【解析】证明：(1) $\because AB = AC$ ， $AE = \frac{1}{2}AB$ ， $AD = \frac{1}{2}AC$ ，

$\therefore AD = AE$ 。 $\because \angle BAD = \angle CAE$ ， $\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE$ ，

$\therefore \angle ABD = \angle ACE$ 。

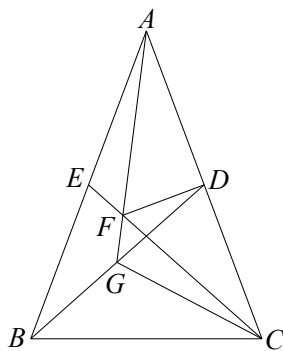
$\because AD = CD$ ， $DF \perp AC$ ， $\therefore AF = CF$ 。 $\therefore \angle GAC = \angle ACE$ 。 $\therefore \angle ABD = \angle GAD$ 。

$\because \angle ADB = \angle GDA$ ， $\therefore \triangle ADG \sim \triangle BDA$ 。 $\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{DG}{AD}$ ，即证 $AD^2 = DG \cdot BD$ 。

(2) $\because AD = CD$ ， $AD^2 = DG \cdot BD$ ， $\therefore CD^2 = DG \cdot GB$ 。即 $\frac{CD}{DG} = \frac{GB}{CD}$ 。

$\because \angle GDC = \angle BDC$ ， $\therefore \triangle GDC \sim \triangle CDB$ 。 $\therefore \angle DBC = \angle DCG$ 。

$\because AB = AC$ ，同 (1) 易证 $\angle ECB = \angle DBC$ ， $\therefore \angle ECB = \angle DCG$ 。



【总结】本题综合性较强，一方面考查了等腰三角形的性质以及线段垂直平分线的性质，另一方面考查了相似三角形的判定及性质，解题时注意对条件认真分析以及灵活运用。

【例 12】在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 40$ ， $AC = 24$ ， $BC = 32$ ，点 D 是射线 BC 上的一点（不与端点重合），联结 AD ，如果 $\triangle ACD$ 与 $\triangle ABC$ 相似，求 BD 的值.

【难度】★★★

【答案】14 或 50 或 64.

【解析】由 $AB = 40$ ， $AC = 24$ ， $BC = 32$ ，三角形三边满足 $AC^2 + BC^2 = AB^2$ ，即 $\triangle ABC$ 为直角三角形，其中 $\angle ACB = 90^\circ$ ， D 在射线 BC 上，相似三角形对应关系不确定，可知存在以下几种情形：

(1) D 在线段 BC 上，此时 $\triangle ADC \sim \triangle BAC$ ，则有 $\frac{AC}{BC} = \frac{DC}{AC}$ ，可得 $DC = 18$ ，则

$$BD = BC - DC = 32 - 18 = 14;$$

(2) D 在线段 BC 延长线上， $\triangle ADC \sim \triangle BAC$ 时，同 (1) 可得 $BD = BC + DC = 50$ ；

(3) D 在线段 BC 延长线上， $\triangle DAC \sim \triangle BAC$ 时，则有 $\triangle DAC \cong \triangle BAC$ ，

$$BD = 2BC = 64.$$

【总结】相似三角形的存在性问题，题目未给明对应关系，一定要注意进行分类讨论，本题中的点在射线上则更需要注意在线段延长线上时的情况.

【例 13】正方形 $ABCD$ 的边长为 1， M 、 N 分别是 BC 、 CD 上的两个动点，且始终保持 $AM \perp MN$ ，求当 BM 为多少时，四边形 $ABCN$ 的面积最大，最大面积为多少？

【难度】★★★

【答案】 $BM = \frac{1}{2}$ 时四边形 $ABCN$ 有最大面积 $\frac{5}{8}$.

【解析】由 $\angle B = 90^\circ$ ，则有 $\angle BAM + \angle AMB = 90^\circ$ ，

$AM \perp MN$ ，则 $\angle NMC + \angle AMB = 90^\circ$ ， $\angle NMC = \angle BAM$ ，

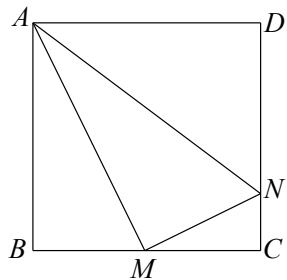
由 $\angle B = \angle C = 90^\circ$ ，可证 $\triangle ABM \sim \triangle MCN$ 。

则 $\frac{AB}{MC} = \frac{BM}{CN}$ ，设 $BM = x$ ，则 $MC = 1 - x$ ， $CN = x - x^2$ ，

$$\text{则有 } S_{ABCN} = \frac{1}{2}(CN + AB) \cdot BC = \frac{1}{2}(-x^2 + x + 1) = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{8}.$$

由此可知当 $x = \frac{1}{2}$ ，即 $BM = \frac{1}{2}$ 时，四边形 $ABCN$ 有面积最大值 $\frac{5}{8}$ 。

【总结】考查“一线三直角”得到相似的基本模型，综合二次函数的最值问题.



【例 14】如图，将边长为 6 cm 的正方形 $ABCD$ 折叠，使点 D 落在 AB 边的中点 E 处，折痕为 FH ，点 C 落在 Q 处， EQ 与 BC 交于点 G ，则 $\triangle EBG$ 的周长为 $\underline{\hspace{2cm}}\text{ cm}$ 。

【难度】★★★

【答案】12.

【解析】设 $DF = x$ ，根据翻折的性质，则有 $EF = x$ ，

$AF = 6 - x$ ，在 $Rt\triangle AEF$ 中，用勾股定理，则有

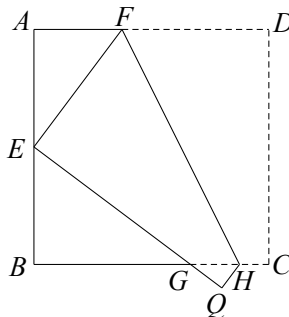
$$AE^2 + AF^2 = EF^2, \text{ 即 } 3^2 + (6 - x)^2 = x^2, \text{ 解得 } x = \frac{15}{4},$$

则 $AF = \frac{9}{4}$ ，由 $\angle A = 90^\circ$ ，则有 $\angle AFE + \angle AEF = 90^\circ$ ，

同时 $\angle FEG = \angle D = 90^\circ$ ，则 $\angle AEF + \angle EBG = 90^\circ$ ，

得： $\angle AFE = \angle BEG$ ，由 $\angle A = \angle B = 90^\circ$ ，可证 $\triangle AEF \sim \triangle BGE$ 。

$$\text{则 } \frac{AE}{BG} = \frac{AF}{BE} = \frac{EF}{GE}, \text{ 即 } \frac{3}{BG} = \frac{\frac{9}{4}}{4} = \frac{\frac{15}{4}}{GE}, \text{ 解得 } BG = 4, EG = 5, \text{ 故 } C_{\triangle EBG} = 12\text{ cm}.$$



【总结】考查“一线三直角”得到相似的基本模型。

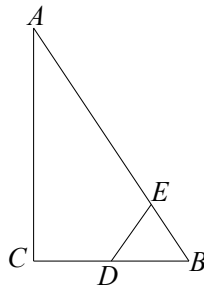
【例 15】如图， $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 4\text{ cm}$ ， $BC = 2\text{ cm}$ ， D 为 BC 的中点，若动点 E 以 1 cm/s 的速度从 A 点出发，沿着 $A \rightarrow B \rightarrow A$ 的方向运动，设点 E 的运动时间为 t 秒，联结 DE ，当 t 为何值时， $\triangle BDE$ 是直角三角形？

【难度】★★★

【答案】 $t = \frac{9\sqrt{5}}{5}$ 或 $t = \sqrt{5}$ 或 $t = 3\sqrt{5}$ 或 $t = \frac{11\sqrt{5}}{5}$ 。

【解析】根据勾股定理，可得 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 2\sqrt{5}$ ，点 E 沿

$A \rightarrow B \rightarrow A$ 运动时， $\angle B$ 大小固定不变，可能存在 $\angle DEB = 90^\circ$ 和 $\angle EDB = 90^\circ$ 两种情形：



(1) 当 $\angle DEB = 90^\circ$ 时，由 $\angle B = \angle B$ ， $\angle DEB = \angle C = 90^\circ$ ，得 $\triangle DEB \sim \triangle ACB$ ，则有

$$\frac{DB}{AB} = \frac{EB}{BC}, \text{ 即 } \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{EB}{2}, \text{ 得 } EB = \frac{\sqrt{5}}{2}, \text{ 此时存在两种情形，即 } t = \frac{9\sqrt{5}}{5} \text{ 或 } t = \frac{11\sqrt{5}}{5};$$

(2) 当 $\angle EDB = 90^\circ$ 时，由 $\angle B = \angle B$ ， $\angle EDB = \angle C = 90^\circ$ ，得 $\triangle EDB \sim \triangle ACB$ ，则有

$$\frac{EB}{AB} = \frac{DB}{BC}, \text{ 即 } \frac{EB}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{2}, \text{ 得 } EB = \sqrt{5}, \text{ 此时存在两种情形，即 } t = \sqrt{5} \text{ 或 } t = 3\sqrt{5}.$$

【总结】本题主要考查动点的分类讨论问题，注意运动过程中的不变量。

【例 16】如图， $\triangle ABC$ 中， $4AB = 5AC$ ， AD 为 $\triangle ABC$ 的角平分线，点 E 在 BC 的延长线上， $EF \perp AD$ 于点 F ，点 G 在 AF 上， $FG = FD$ ，联结 EG 交 AC 于点 H ，若点 H 是 AC 的中点，求 $\frac{AG}{FD}$ 的值.

【难度】★★★

【答案】 $\frac{4}{3}$.

【解析】延长 AC 到 M ，使 $AM = AB$ ，连结 DM ，过点 M 作 $MN \parallel AD$ 交 GE 于点 N ，交 BE 于 K .

$\because AD$ 为 $\triangle ABC$ 的角平分线， \therefore 点 D 到 AB 、 AC 的距离相等.

则 $\frac{BD}{CD} = \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{4}$. $\because AB = AM$ ， $\angle BAD = \angle MAD$ ， $AD = AD$ ， $\therefore \triangle BAD \cong \triangle MAD$ ，

$\therefore DM = BD = \frac{5}{4}DC$. $\because MN \parallel AD$ ， $\therefore \frac{DC}{CK} = \frac{AC}{CM} = 4$.

$\therefore DK = \frac{5}{4}DC = DM$ ，即 $\triangle MDK$ 是等腰三角形.

$\because EF \perp AD$ ， $FG = FD$ ， $\therefore \triangle DEG$ 是等腰三角形.

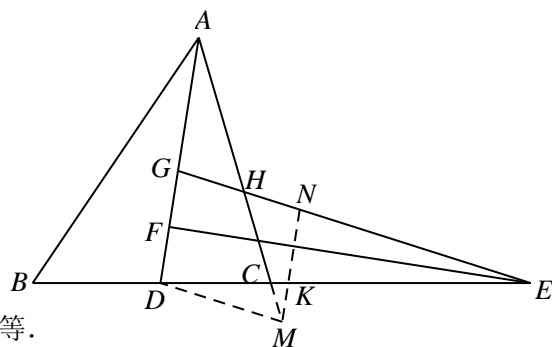
$\because MN \parallel AD$ ， $\therefore \angle GDE = \angle DKM$.

$\because DK = DM$ ， $DE = GE$ ， $\therefore \angle KDM = \angle DEG$. $\therefore GE \parallel DM$.

\therefore 四边形 $DMNG$ 是平行四边形. $\therefore MN = GD = 2FD$ ，又 H 是 AC 中点，

$\therefore \frac{AG}{FD} = \frac{2AG}{MN} = \frac{2AH}{HM}$.

$\therefore \frac{AH}{HM} = \frac{\frac{1}{2}AC}{\frac{1}{4}AC + \frac{1}{2}AC} = \frac{2}{3}$, $\therefore \frac{AG}{FD} = \frac{4}{3}$.



【总结】考查角平分线，等腰三角形，全等，相似，平行四边形知识的综合应用，难度大，主要在于添加正确的辅助线.

模块二：相似三角形的性质



知识精讲

1、相似三角形性质定理 1

相似三角形对应高的比、对应中线的比和对应角平分线的比都等于相似比。

2、相似三角形性质定理 2

相似三角形周长的比等于相似比。

3、相似三角形性质定理 3

相似三角形的面积的比等于相似比的平方。



例题解析

【例 17】在 $\triangle ABC$ 中， $DE \parallel BC$ ，且 D 在 AB 边上， E 在 AC 边上，若 $S_{\triangle ADE} : S_{\triangle BCE} = 1:4$ ，

则 $C_{\triangle ADE} : C_{\triangle ABC} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $AD : DB = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【难度】★

【答案】 $\sqrt{5}:5$ ， $(\sqrt{5}+1):4$

【解析】 $S_{\triangle ADE} : S_{\triangle BCE} = 1:4$ ，得 $S_{\triangle ADE} : S_{\triangle ABC} = 1:5$ ，可得相应相似比 $k = 1:\sqrt{5} = \sqrt{5}:5$ ，则

$$C_{\triangle ADE} : C_{\triangle ABC} = k = \sqrt{5}:5, \quad AD : AB = k = \sqrt{5}:5, \quad AD : DB = \sqrt{5}:(5-\sqrt{5}) = (\sqrt{5}+1):4.$$

【总结】考查相似三角形的面积比和对应边长比和周长比与相似比的关系。

【例 18】如图，梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle B = \angle ACD = 90^\circ$ ， $AB = 2$ ， $DC = 3$ ，则 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DCA$ 的面积比为（ ）

A. $2:3$

B. $2:5$

C. $4:9$

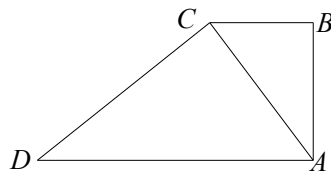
D. $\sqrt{2}:\sqrt{3}$

【难度】★

【答案】C

【解析】由 $AD \parallel BC$ ，可得 $\angle BCA = \angle CAD$ ，结合

$\angle B = \angle ACD = 90^\circ$ ，可证 $\triangle ABC \sim \triangle DCA$ ，则有



$$k = \frac{AB}{DC} = \frac{2}{3}, \text{ 则 } \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DCA}} = k^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}, \text{ 故选 C.}$$

【总结】考查相似三角形的面积比与相似比的关系.

【例 19】如果一个直角三角形的两条边长分别是 6 和 8, 另一个与它相似的直角三角形边长分别是 3、4 及 x , 那么 x 的值为 ()

- A. 只有 1 个 B. 可以有 2 个 C. 可以有 3 个 D. 有无数个

【难度】★

【答案】B

【解析】由 $\frac{6}{3} = \frac{8}{4}$, 可知这两条边分别为对应边, 相似比 $k = 2$, 第一个直角三角形中第三

边长有两种情况, 即 $\sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ 或 $\sqrt{8^2 - 6^2} = 2\sqrt{7}$, 由此得 $\frac{10}{x} = 2$ 或 $\frac{2\sqrt{7}}{x} = 2$, 解得

$x = 5$ 或 $x = \sqrt{7}$, 故选 B.

【总结】考虑相似三角形的相似比, 一定要确立好对应关系.

【例 20】如图, D 、 E 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 AC 上, $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{2}{3}$, 且 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$

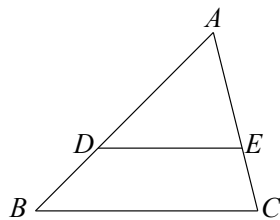
的周长之差为 15 cm , 求 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 的周长.

【难度】★★

【答案】 $C_{\triangle ABC} = 45\text{ cm}$, $C_{\triangle ADE} = 30\text{ cm}$.

【解析】 $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{2}{3}$, 可知 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, 其相似比

$k = \frac{2}{3}$, 则 $\frac{C_{\triangle ADE}}{C_{\triangle ABC}} = k = \frac{2}{3}$, 又 $C_{\triangle ABC} - C_{\triangle ADE} = 15$, 可得: $C_{\triangle ABC} = 45\text{ cm}$, $C_{\triangle ADE} = 30\text{ cm}$.



【总结】考查相似三角形的判定和性质的结合应用.

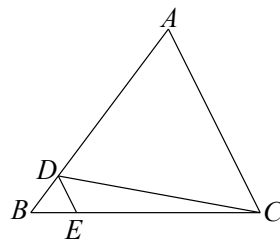
【例 21】如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分别是 AB 、 BC 上的点，且 $DE \parallel AC$ ，若 $S_{\triangle BDE} : S_{\triangle CDE} = 1:4$ ，

则 $S_{\triangle BDE} : S_{\triangle ACD} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【难度】★★

【答案】1:20。

【解析】由 $S_{\triangle BDE} : S_{\triangle CDE} = 1:4$ ，即得 $BE : CE = 1:4$ ，由 $DE \parallel AC$ ，



即得： $\frac{BD}{AD} = \frac{BE}{CE} = \frac{1}{4}$ ，可得： $\frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{BD}{AD} = \frac{1}{4}$ ，则有 $\frac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{1}{20}$ 。

【总结】等高三角形面积比等于底边长之比，结合三角形的相似性质即可。

【例 22】如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 沿直线 MN 翻折后，顶点 C 恰好落在 AB 边上的点 D 处，已知 $MN \parallel AB$ ， $MC = 6$ ， $NC = 2\sqrt{3}$ ，那么四边形 $MABN$ 的面积是_____。

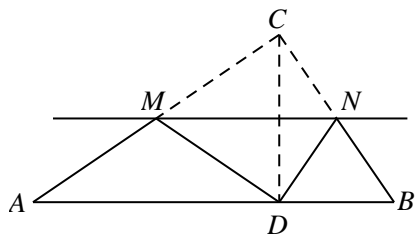
【难度】★★

【答案】 $18\sqrt{3}$ 。

【解析】连结 CD ，即得 MN 垂直平分 CD ，由 $MN \parallel AB$ ，

即得 M 是 AC 的中点， $\triangle CMN \sim \triangle CAB$ ，

$$\text{则 } \frac{S_{\triangle CMN}}{S_{\triangle CAB}} = \left(\frac{CM}{AC}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$



由此可得： $S_{MABN} = 3S_{\triangle CMN} = 3 \times \frac{1}{2} MC \cdot NC = \frac{3}{2} \times 6 \times 2\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$ 。

【总结】考查翻折与相似性质的结合应用。

【例 23】如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $AB = 6$ ， $AD = 9$ ， $\angle BAD$ 的平分线交 BC 于 E ，交 DC 的延长线与 F ， $BG \perp AE$ 于 G ， $BG = 4\sqrt{2}$ ，则 $\triangle EFC$ 的周长为_____。

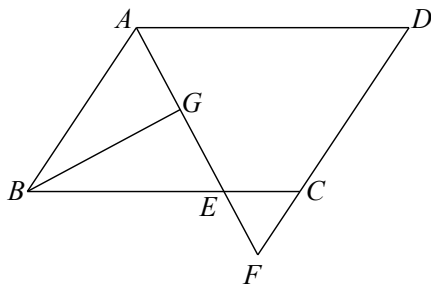
【难度】★★

【答案】8。

【解析】由 $AD \parallel BC$ ，得 $\angle DAE = \angle AEB$ ，由 AE

平分 $\angle BAD$ ，得 $\angle BAE = \angle DAE = \angle AEB$ ，

可得 $AB = BE = 6$ ，由 $BG \perp AE$ ， $BG = 4\sqrt{2}$ ，



根据勾股定理可得 $GE = \sqrt{BE^2 - BG^2} = 2$,

则有 $AE = 2GE = 4$, $EC = BC - BE = 3$, 由 $AB \parallel CF$, 得 $\triangle EAB \sim \triangle EFC$,

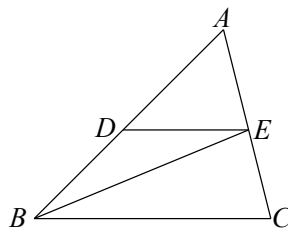
由此即得 $\frac{C_{\triangle ABE}}{C_{\triangle EFC}} = \frac{BE}{EC} = \frac{6}{3} = 2$, 由 $C_{\triangle ABE} = AB + BE + EC = 16$, 得 $C_{\triangle EFC} = 8$.

【总结】考查相似三角形结合平行四边形特殊图形性质, 构造“A”“8”字型等相关基本图形的应用, 本题中注意运用“角平分线与平行线相结合得到等腰”的基本模型.

【例 24】如图, 在 $\triangle ABC$ 中, BE 平分 $\angle ABC$ 交 AC 于点 E , 过点 E 作 $ED \parallel BC$ 交 AB 于点 D .

(1) 求证: $AE \cdot BC = BD \cdot AC$;

(2) 如果 $S_{\triangle ADE} = 3$, $S_{\triangle BDE} = 2$, $DE = 6$, 求 BC 的长.



【难度】★★

【答案】(1) 略; (2) 10.

【解析】(1) 证明: $\because ED \parallel BC$

$$\therefore \angle DEB = \angle EBC, \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$$

$$\because \angle DBE = \angle EBC \quad \therefore \angle DEB = \angle DBE \quad \therefore DE = BD$$

$$\therefore \frac{BD}{BC} = \frac{AE}{AC} \quad \text{即证 } AE \cdot BC = BD \cdot AC$$

(2) 解: 由 $S_{\triangle ADE} = 3$, $S_{\triangle BDE} = 2$, 即得 $\frac{AD}{BD} = \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle BDE}} = \frac{3}{2}$, 则有 $\frac{AD}{AB} = \frac{3}{5}$, 由 $ED \parallel BC$,

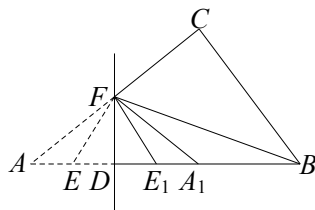
可得: $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{3}{5}$, 代入求得 $BC = 10$.

【总结】考查相似三角形面积比与等高三角形面积比的结合应用以及“角平分线与平行线相结合得到等腰”的基本模型的应用.

【例 25】如图, 直角三角形 ABC 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = 10$, $BC = 6$, 在线段 AB 上取一点 D , 作 $DF \perp AB$ 交 AC 于点 F , 现将 $\triangle ADF$ 沿 DF 折叠, 使点 A 落在线段 DB 上, 对应点记为 A_1 , AD 的中点 E 的对应点记为 E_1 , 若 $\triangle E_1FA_1 \sim \triangle E_1BF$, 则 $AD =$ _____.

【难度】★★★★

【答案】 $\frac{16}{5}$.



【解析】由 $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = 10$, $BC = 6$, 根据勾股定理得

$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 8$, 由 $\angle C = \angle EDA = 90^\circ$, $\angle A = \angle A$, 可证 $\triangle ADE \sim \triangle ACB$, 则有

$\frac{AF}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{DF}{BC}$, 可设 $DE = 3a$, 则 $AD = 4a$, $AE = 5a$, $DE = \frac{1}{2}AD = 2a$, 则

$EF = \sqrt{13}a$, 根据翻折性质, 得 $A_1E_1 = AE = 2a$, $E_1F = EF = \sqrt{13}a$, $BE_1 = 10 - 6a$, $\triangle E_1FA_1$

$\sim \triangle E_1BF$, 则有 $\frac{E_1F}{E_1B} = \frac{E_1A_1}{E_1F}$, 即 $\frac{\sqrt{13}a}{10 - 6a} = \frac{2a}{\sqrt{13}a}$, 解得 $a = \frac{4}{5}$, 由此即得 $AD = 4a = \frac{16}{5}$.

【总结】考查翻折的性质与相似结合, 可以把对应边之比转化为同一个三角形的边长之比.

【例 26】如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 5$, $BC = 3$, 点 D 、 E 分别在 BC 、 AC 上,

且 $BD = CE$, 设点 C 关于 DE 的对称点为 F , 若 $DF \parallel AB$, 则 BD 的长为_____.

【难度】★★★

【答案】1.

【解析】延长 DF 交 AC 于 M ,

由勾股定理, 可得 $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 4$,

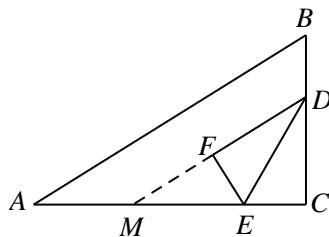
$\therefore \angle DFE = \angle C = 90^\circ$, $\angle DMC = \angle A$,

$\therefore \triangle EFM \sim \triangle DCM \sim \triangle BCA$.

$\therefore \frac{EF}{EM} = \frac{DC}{MC} = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{4}$, $\frac{EF}{EM} = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5}$.

设 $BD = x$, 则有 $CE = EF = x$, $EM = \frac{5}{3}x$, $DC = 3 - x$, $MC = \frac{8}{3}x$,

即有 $\frac{3-x}{\frac{8}{3}x} = \frac{3}{4}$, 解得: $x = 1$, 即 $BD = 1$.



【总结】相似三角形的性质可将两个相似三角形对应边之比转化为一个三角形中对应边长之比, 便于计算.

【例 27】如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 8$, $BC = 6$, $CD \perp AB$ 于点 D . 点 P 从点 D 出发, 沿线段 CD 向点 C 运动, 点 Q 从点 C 出发, 沿线段 CA 向点 A 运动, 两点同时出发, 速度都为每秒 1 个单位长度, 当点 P 运动到点 C 时, 两点都停止. 设运动时间为 t 秒.

(1) 求线段 CD 的长;

(2) 设 $\triangle CPQ$ 的面积为 S , 求 S 与 t 之间的关系式, 并确定运动过程中是否存在某一时刻 t , 使得 $S_{\triangle CPQ} : S_{\triangle ABC} = 9 : 100$? 若存在, 求出 t 的值; 若不存在, 请说明理由;

(3) 当 t 为何值时, $\triangle CPQ$ 为等腰三角形?

【难度】★★★

【答案】(1) $\frac{24}{5}$; (2) $S = -\frac{2}{5}t^2 + \frac{48}{25}t$, $t = 1.8$ 或 $t = 3$ 时,

$$S_{\triangle CPQ} : S_{\triangle ABC} = 9 : 100; (3) t = \frac{12}{5} \text{ 或 } t = \frac{144}{55} \text{ 或 } t = \frac{24}{11}.$$

【解析】(1) 根据勾股定理, 可得 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 10$,

由直角三角形面积法, 则有 $CD \cdot AB = AC \cdot BC$, 解得: $CD = \frac{24}{5}$;

(2) 过点 P 作 $PH \perp AC$ 交 AC 于 H ,

$$\because \angle PHC = \angle ACB = 90^\circ, \angle CPH = \angle A, \therefore \triangle PHC \sim \triangle ACB, \therefore \frac{PH}{AC} = \frac{PC}{AB}.$$

依题意可得 $CQ = PD = t$, 则 $CP = \frac{24}{5} - t$, 代入即为: $\frac{PH}{8} = \frac{\frac{24}{5} - t}{10}$,

$$\text{解得: } PH = \frac{4}{5} \left(\frac{24}{5} - t \right) = -\frac{4}{5}t + \frac{96}{25}.$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} QC \cdot PH = \frac{1}{2} t \left(-\frac{4}{5}t + \frac{96}{25} \right) = -\frac{2}{5}t^2 + \frac{48}{25}t, \text{ 其中 } 0 \leq t \leq \frac{24}{5};$$

若存在某一时刻, 使得 $S_{\triangle CPQ} : S_{\triangle ABC} = 9 : 100$,

$$\text{则有 } S = -\frac{2}{5}t^2 + \frac{48}{25}t = \frac{9}{100} \times \frac{1}{2} \times 6 \times 8, \text{ 整理得: } 5t^2 - 24t + 27 = 0,$$

$$\text{解得: } t_1 = \frac{9}{5}, t_2 = 3, \text{ 均符合题意;}$$

(3) 分类讨论:

$$\text{① } CQ = CP, \text{ 即 } t = \frac{24}{5} - t, \text{ 解得: } t = \frac{12}{5};$$

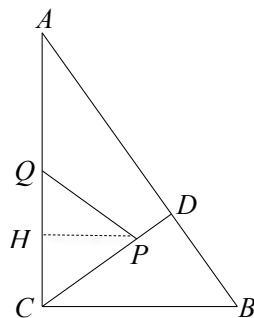
$$\text{② } PQ = CP, \text{ 根据等腰三角形的性质可得 } QC = 2CH = \frac{6}{5}CP,$$

$$\text{即得 } \frac{t}{\frac{24}{5} - t} = \frac{6}{5}, \text{ 解得: } t = \frac{144}{55};$$

$$\text{③ } CQ = PQ, \text{ 同理②, 可得 } \frac{t}{\frac{24}{5} - t} = \frac{5}{6}, \text{ 解得: } t = \frac{24}{11}.$$

综上: 当 $\triangle CPQ$ 为等腰三角形时, t 的值为 $\frac{12}{5}$ 或 $\frac{144}{55}$ 或 $\frac{24}{11}$.

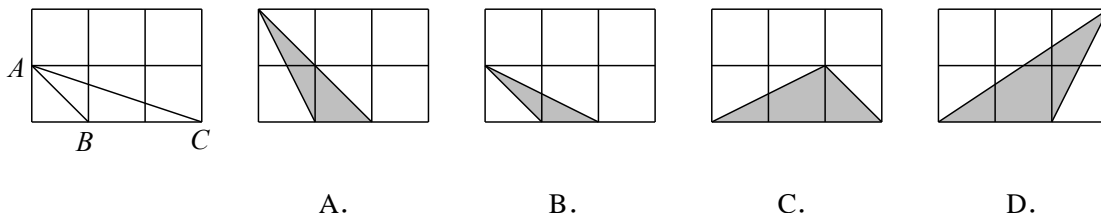
【总结】本题综合性较强, 考查的知识点比较多, 特别是由动点引起的等腰三角形的问题要注意分类讨论, 解题方法比较多样, 主要是抓住题目中的条件认真分析.





随堂检测

【习题 1】如图，每个小正方形边长均为 1，则下列图中的三角形（阴影部分）与左图中 $\triangle ABC$ 相似的是（ ）



【难度】★

【答案】B

【解析】由已知 $\triangle ABC$ ，可得一钝角 $\angle ABC = 135^\circ$ ，夹这个钝角两边之比 $\frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，三角形与 $\triangle ABC$ 相似，则必有一角 135° ，且夹这个角两边长之比为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，只有 B 选项满足。

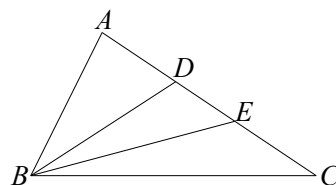
【总结】相似三角形判定定理 2 可转化为一个三角形中的夹等角的两条边对应成比例。

【习题 2】如图，D 是 $\triangle ABC$ 的边 AC 上一点， $\angle CBD$ 的平分线交 AC 于点 E， $AE = AB$ ，则长度为线段 AD、AC 长度比例中项的线段是_____。

【难度】★

【答案】AE 和 AB。

【解析】 $AE = AB$ ，得 $\angle ABE = \angle AEB$ ， $\angle AEB = \angle C + \angle EBC$ ，
即得 $\angle ABD + \angle DBE = \angle C + \angle EBC$ ，BE 平分 $\angle CBD$ ，
即为 $\angle DBE = \angle EBC$ ，由此可得 $\angle ABD = \angle C$ ，又 $\angle A = \angle A$ ，
即证 $\triangle ABD \sim \triangle ACB$ ，则有 $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$ ，又 $AE = AB$ ，即得。



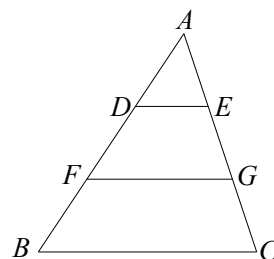
【总结】考查相似三角形的判定和性质的综合应用，先判定相似再应用性质，注意题目中一个条件的多种用途。

【习题 3】如图，在 $\triangle ABC$ 中，D、F 是 AB 的三等分点， $DE \parallel FG \parallel BC$ ，分别交 AC 于 E、G。记 $\triangle ADE$ 、四边形 DFGE、四边形 FBCG 的面积分别为 S_1 、 S_2 、 S_3 ，

则 $S_1 : S_2 : S_3 =$ _____。

【难度】★★

【答案】1:3:5。



【解析】 D 、 F 是 AB 的三等分点，即 $AD:AF:AB=1:2:3$ ，

由 $DE \parallel FG \parallel BC$ ，即可得 $S_{\triangle ADE}:S_{\triangle AFG}:S_{\triangle ABC}=1^2:2^2:3^2$ ，

即 $S_1:(S_1+S_2):(S_1+S_2+S_3)=1:4:9$ ，得 $S_1:S_2:S_3=1:3:5$ 。

【总结】考查相似三角形的面积比等于相似比的平方，再进行比例转化即可。

【习题 4】如图， D 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上一点，已知 $AB=4$ ， $AD=2$ ， $\angle DAC=\angle B$ ，若 $\triangle ABD$ 的面积为 a ，则 $\triangle ACD$ 的面积为_____。

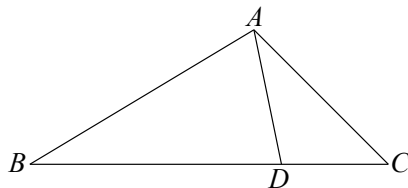
【难度】★★

【答案】 $\frac{1}{3}a$ 。

【解析】由 $\angle DAC=\angle B$ ， $\angle C=\angle C$ ，可得：

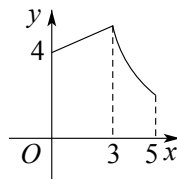
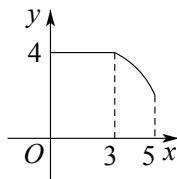
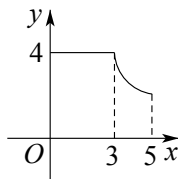
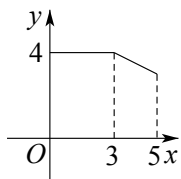
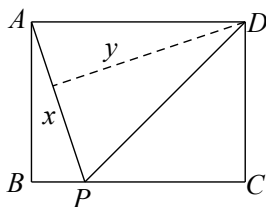
$\triangle BAC \sim \triangle ADC$ ，其相似比 $k=\frac{AB}{AD}=\frac{4}{2}=2$ ，

由此可得： $\frac{S_{\triangle BAC}}{S_{\triangle ADC}}=k^2=4$ ，则有 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=3$ ，即得： $S_{\triangle ACD}=\frac{a}{3}$ 。



【总结】考查相似三角形的面积比等于相似比的平方，再进行比例转化即可。

【习题 5】如图，矩形 $ABCD$ 中， $AB=3$ ， $BC=4$ ，动点 P 从 A 点出发，按 $A \rightarrow B \rightarrow C$ 的方向在 AB 和 BC 上移动，记 $PA=x$ ，点 D 到直线 PA 的距离为 y ，则 y 关于 x 的函数图像大致是（ ）



A.

B.

C.

D.

【难度】★★

【答案】B

【解析】由运动轨迹可知，动点从 $A \rightarrow B$ 的过程中， D 到直线 PA 的距离即为 AD ，是一条与 x 轴平行的直线，D 错误；动点从 $B \rightarrow C$ 的过程中， $S_{\triangle APD}=\frac{1}{2}S_{\text{矩形}ABCD}=6$ ，即得

$\frac{1}{2}xy=6$ ，由此可得 $y=\frac{12}{x}$ ， D 直线的距离 PA 函数是一段双曲线，可知正确答案是 B。

【总结】动点问题，进行准确分段分解，化作一段线段上的运动情况即可。

【习题 6】如图，已知点 D 是等腰直角三角形 ABC 斜边 BC 上的一点， $BC = 3BD$ ， $CE \perp AD$ ，

则 $\frac{AE}{CE} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【难度】★★

【答案】 $\frac{1}{2}$ 。

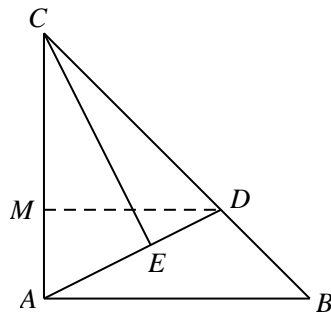
【解析】过点 D 作 $DM \perp AC$ 交 AC 于点 M ，

则有 $DM \parallel AB$ ，则 $\triangle CMD$ 为等腰直角三角形，

由 $CE \perp AC$ ，可得： $\triangle ADM \sim \triangle ACE$ 。

$$\therefore \frac{AE}{CE} = \frac{AM}{DM} = \frac{AM}{CM} = \frac{BD}{CD} = \frac{1}{2}.$$

【总结】考查相似三角形性质的应用，构造平行线即可得到相似。



【习题 7】在同一时刻，两根木竿在太阳光下的影子如图所示，其中木竿 $AB = 2\text{ m}$ ，它的影

子 $BC = 1.6\text{ m}$ ，木竿 PQ 的影子有一部分落在了墙上， $PM = 1.2\text{ m}$ ， $MN = 0.8\text{ m}$ ，则木

竿 PQ 的长度为 $\underline{\hspace{2cm}}\text{ m}$ 。

【难度】★★

【答案】2.3。

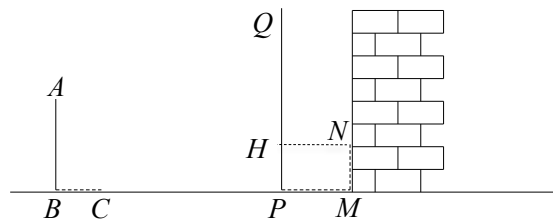
【解析】如图有 $HN = PM = 1.2$ ，

$PH = MN = 0.8$ ，同一时刻影子与木竿

长度所成比例相同，则有 $\frac{AB}{BC} = \frac{QH}{HN}$ ，

得： $QH = 1.5$ ，则 $PQ = QH + HP = 2.3\text{ m}$ 。

【总结】影长问题转化为相似，同一时刻下相似比相同。



【习题 8】如图，点 E 是矩形 $ABCD$ 的边 BC 上一点， $EF \perp AE$ ， EF 分别交 AC 、 CD 于点 M 、

F ， $BG \perp AC$ ，垂足为点 G ， BG 交 AE 于点 H 。

(1) 求证： $\triangle ABE \sim \triangle ECF$ ；

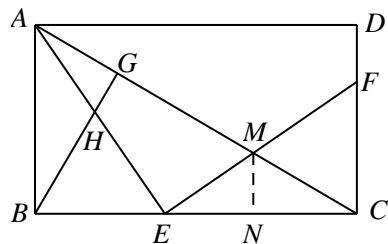
(2) 找出与 $\triangle ABH$ 相似的三角形，并证明；

(3) 若 E 是 BC 的中点， $BC = 2AB$ ， $AB = 2$ ，求 EM 的长。

【难度】★★

【答案】(1) 略；(2) $\triangle ECM$ ；(3) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 。

【解析】(1) 证明： $\because EF \perp AE$ ， $\therefore \angle AEB + \angle FEC = 90^\circ$ 。



$$\because \angle ABC = 90^\circ \quad \therefore \angle AEB + \angle BAE = 90^\circ \quad \therefore \angle BAE = \angle FEC$$

$$\because \angle ABE = \angle ECF = 90^\circ \quad \therefore \triangle ABE \sim \triangle ECF$$

(2) 由 (1) $\angle BAE = \angle FEC$ ，又 $\angle ABG + \angle GBC = \angle GBC + \angle BCG = 90^\circ$

$$\therefore \angle ABG = \angle ECM \quad \therefore \triangle ABH \sim \triangle ECM$$

(3) 作 $MN \perp BC$ 交 BC 于点 N ，

则有 $MN \parallel AB$ ，由 $BC = 2AB$ ，得 $CN = 2MN$ ，

$$\because BC = 2AB, BE = CE$$

$$\therefore AB = BE, \angle AEB = \angle FEC = 45^\circ$$

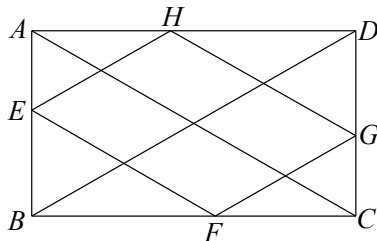
$$\therefore EN = MN = \frac{1}{2}CN, \text{ 得 } EN = \frac{1}{3}EC = \frac{2}{3}, \text{ 则 } EM = \sqrt{2}EN = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

【总结】考查“子母三角形”中相似的应用.

【习题 9】如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 2$ ， $BC = 3$ ，点 E 、 F 、 G 、 H 分别在矩形 $ABCD$ 的各边上， $EF \parallel AC \parallel HG$ ， $EH \parallel BD \parallel FG$ ，求四边形 $EFGH$ 的周长.

【难度】★★★

【答案】 $2\sqrt{13}$.



【解析】由 $EF \parallel AC \parallel HG$ ， $EH \parallel BD \parallel FG$ ，可知四边形 $EFGH$ 是平行四边形，且

$$\frac{EH}{BD} = \frac{AH}{AD}, \quad \frac{HG}{AC} = \frac{DH}{AD}, \quad \text{即得: } \frac{EH}{BD} + \frac{HG}{AC} = 1,$$

由四边形是矩形，根据勾股定理可得 $AC = BD = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{13}$ ，即有 $\frac{EH + HG}{\sqrt{13}} = 1$ ，

由此可得： $EH + HG = \sqrt{13}$ ，故 $C_{EFGH} = 2(EH + HG) = 2\sqrt{13}$.

【总结】考查图形中的“A”字型等基本图形的叠合应用，可进行比例转化得到一些特定的等量关系即可进行计算.

【习题 10】如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $AD \perp BC$ 于点 D ， $BC = 10 \text{ cm}$ ， $AD = 8 \text{ cm}$. 点 P 从点 B 出发，在线段 BC 上以每秒 3 cm 的速度向点 C 匀速运动，与此同时，垂直于 AD 的直线 m 从底边 BC 出发，以每秒 2 cm 的速度沿 DA 方向匀速平移，分别交 AB 、 AC 、 AD 于 E 、 F 、 H ，当点 P 到达点 C 时，点 P 与直线 m 同时停止运动，设运动时间为 t 秒 ($t > 0$).

(1) 当 $t = 2$ 时，连接 DE 、 DF ，求证：四边形 $AEDF$ 为菱形；

(2) 在整个运动过程中, 所形成的 $\triangle PEF$ 的面积存在最大值, 当 $\triangle PEF$ 的面积最大时, 求线段 BP 的长;

(3) 是否存在某一时刻 t , 使 $\triangle PEF$ 为直角三角形? 若存在, 请求出此时刻 t 的值; 若不存在, 请说明理由.

【难度】★★★

【答案】(1) 略; (2) 6; (3) $t = \frac{280}{183}$ 或 $t = \frac{40}{17}$.

【解析】(1) 证明: 当 $t = 2$ 时, $DH = 2t = 4 = AH$.

$\because AB = AC, AD \perp BC, \therefore BD = CD$.

$\because EF \parallel BC, \therefore EH = FH, \therefore$ 四边形 $AEDF$ 是平行四边形,

$\because AD \perp EF, \therefore$ 四边形 $AEDF$ 是菱形.

(2) $\because EF \parallel BC, \therefore \frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB} = \frac{AH}{AD}$. 由题意, 可得: $DH = 2t$, 则有 $AH = 8 - 2t$,

即得: $\frac{EF}{10} = \frac{8 - 2t}{8}, \therefore EF = -\frac{5}{2}t + 10 \left(0 < t \leq \frac{10}{3} \right)$.

$\therefore S_{\triangle PEF} = \frac{1}{2} EF \cdot DH = \frac{1}{2} \left(-\frac{5}{2}t + 10 \right) \cdot 2t = -\frac{5}{2}t^2 + 10t = -\frac{5}{2}(t - 2)^2 + 10$.

由此可知 $t = 2$ 时, $\triangle PEF$ 的面积有最大值, 此时 $BP = 3t = 6$;

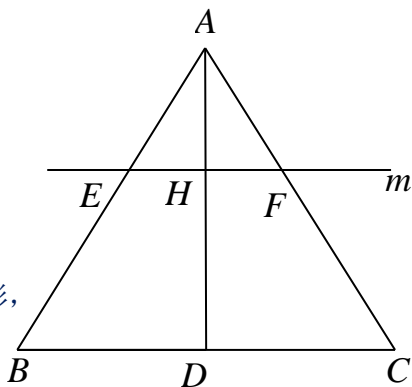
(3) ① $\angle EPF = 90^\circ$, 分别通过 E 、 F 向 BC 作高,

易得两个三角形相似, 即有 $\frac{2t}{10 - 3t - \frac{5}{4}t} = \frac{3t - \frac{5}{4}t}{2t}$, 解得: $t = \frac{280}{183}$;

② $\angle EFP = 90^\circ$, 过点 F 向 BC 作高, 则有 $\frac{2t}{10 - 3t} = \frac{8}{5}$, 解得: $t = \frac{40}{17}$;

③ $\angle PEF = 90^\circ$, 过点 E 向 BC 作高, 则有 $\frac{2t}{3t} = \frac{8}{5}$, 此时不存在;

综上所述, $t = \frac{280}{183}$ 或 $t = \frac{40}{17}$ 时, $\triangle PEF$ 是直角三角形.



【总结】本题是一道考查动点问题的综合题, 难度较大, 第(2)问中求面积最大值时, 要运用配方的思想, 第(3)问的直角三角形问题要注意分类讨论, 求解时通过作高即可转化为“一线三直角”的基本模型进行求解.



课后作业

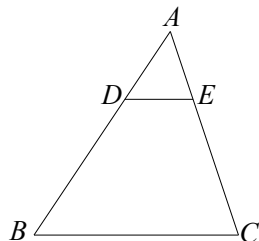
【作业 1】如图，在 $\triangle ABC$ 中， $DE \parallel BC$ ， $\frac{AD}{DB} = \frac{1}{2}$ ，则下列结论正确的是（ ）

A. $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{2}$

B. $\frac{DE}{BC} = \frac{1}{2}$

C. $\frac{\triangle ADE \text{ 的周长}}{\triangle ABC \text{ 的周长}} = \frac{1}{3}$

D. $\frac{\triangle ADE \text{ 的面积}}{\triangle ABC \text{ 的面积}} = \frac{1}{3}$



【难度】★

【答案】C

【解析】 $\frac{AD}{DB} = \frac{1}{2}$ ， $DE \parallel BC$ ，可得两三角形相似，相似比

$k = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{3}$ ，则其对应边、对应周长之比应为 $\frac{1}{3}$ ，对应面积比为 $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ ，故选 C.

【总结】考查相似图形的性质，各个量之比与相似比的关系.

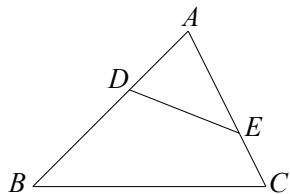
【作业 2】如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 和点 E 分别在边 AB、AC 上，下列条件不能判定 $\triangle ABC \sim \triangle AED$ 的是（ ）

A. $\angle AED = \angle B$

B. $\angle ADE = \angle C$

C. $\frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AB}$

D. $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$



【难度】★

【答案】D

【解析】根据相似三角形判定定理 1 和判定定理 2，可知 ABC 都正确，故选 D.

【总结】考查相似三角形判定定理的应用，可将相似比转化为一个图形中对应边之比.

【作业 3】一副三角尺按如图所示的方式叠放，则 $\triangle AOB$ 与 $\triangle DOC$ 的面积之比为_____.

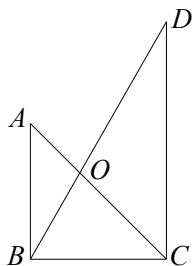
【难度】★

【答案】 $\frac{1}{3}$.

【解析】由 $\angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$ ，可得 $AB \parallel DC$ ，则有 $\triangle AOB \sim \triangle COD$ ，

由 $\angle D = 30^\circ$ ，可得 $DC = \sqrt{3}BC$ ，由 $AB = BC$ ，

可得： $k = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，则有 $\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle COD}} = k^2 = \frac{1}{3}$.



【总结】考查特殊的直角三角形中的边角关系的转化.

【作业4】如图，点 D 、 E 分别在 $\triangle ABC$ 两边 AB 、 AC 上，且 $AD = 31$ ， $DB = 29$ ， $AE = 30$ ， $EC = 32$ 。若 $\angle A = 50^\circ$ ，则关系式“1 $\angle ADE > \angle B$ ；2 $\angle AED = \angle C$ ；3 $\angle ADE > \angle C$ ；4 $\angle AED = \angle B$ ”中正确的有（ ）

- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

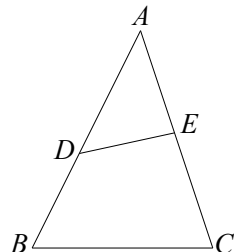
【难度】★★

【答案】A

【解析】由 $AD = 31$ ， $DB = 29$ ，可得 $AB = AD + DB = 60$ ，由 $AE = 30$ ， $EC = 32$ ，可得 $AC = AE + EC = 62$ ，则有 $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC}$ ，又 $\angle A = \angle A$ ，

即得 $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ ，则有 $\angle ADE = \angle C$ ， $\angle AED = \angle B$ ，可知②

③错误，④正确，同时根据“大边对大角”，可知 $\angle ADE < \angle AED$ ，可知①错误，即正确的只有④，故选 A。



【总结】考查相似三角形的判定定理2和相关相似性质的结合应用，先判定再应用性质，结合“大边对大角”性质即可解决问题。

【作业5】在 $\triangle ABC$ 中， P 是 AB 上的动点（ P 异于 A 、 B ），过点 P 的一条直线截 $\triangle ABC$ ，使截得的三角形与 $\triangle ABC$ 相似，我们不妨称这种直线为过点 P 的相似线。

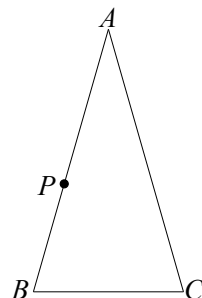
如图， $\angle A = 36^\circ$ ， $AB = AC$ ，当点 P 在 AC 的垂直平分线上时，过点 P 的 $\triangle ABC$ 的相似线最多有_____条。

【难度】★★

【答案】3.

【解析】过点 C 可分别作出 BC 、 AC 的一条平行线，即有两条相似线，同时原图是一个黄金三角形，连结也可得到一个黄金三角形，也相似，即一共可以得到3条相似线。

【总结】考查黄金三角形的性质。



【作业6】如图，四边形 $ABCD$ 、 $CEFG$ 都是正方形，点 G 在线段 CD 上，连接 BG 、 DE ， DE 和 FG 相交于点 O ，设 $AB = a$ ， $CG = b$ （ $a > b$ ），下列结论：① $\triangle BCG \cong \triangle DCE$ ；② $BG \perp DE$ ；③ $\frac{DG}{GC} = \frac{GO}{CE}$ ；④ $(a-b)^2 \cdot S_{\triangle EFO} = b^2 \cdot S_{\triangle DGO}$ ，其中正确的个数是（ ）

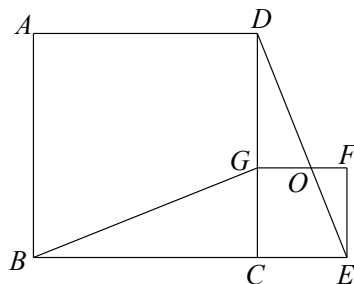
- A. 4个 B. 3个 C. 2个 D. 1个

【难度】★★

【答案】B

【解析】根据正方形的性质，则有

$BC = DC$ ， $\angle BCG = \angle DCE = 90^\circ$ ， $GC = EC$ ，可证 $\triangle BCG \cong \triangle DCE$ ，①正确；此时则有 $\angle GBC = \angle CDE$ ，



延长与 DE 相交即可证垂直，②正确；由 $GF \parallel CE$ ，

可得： $\frac{GO}{CE} = \frac{DG}{DC}$ ，③不正确；由 $DG \parallel EF$ ，可得：

$\triangle DGO \sim \triangle EFO$ ，根据相似三角形的性质，则有 $\frac{S_{\triangle DGO}}{S_{\triangle EFO}} = \left(\frac{DG}{EF}\right)^2$ ，由 $AB = a$ ， $CG = b$ ，

得 $DG = a - b$ ， $EF = b$ ，则 $\frac{S_{\triangle DGO}}{S_{\triangle EFO}} = \left(\frac{a-b}{b}\right)^2$ ，即得 $(a-b)^2 \cdot S_{\triangle EFO} = b^2 \cdot S_{\triangle DGO}$ ，④正确；

综上所述，故选 B.

【总结】考查相似三角形与正方形特殊性质的结合应用.

【作业 7】已知，在菱形 $ABCD$ 中， $CF \perp AB$ ，垂足为 E ； CE 与 BD 相交于点 F .

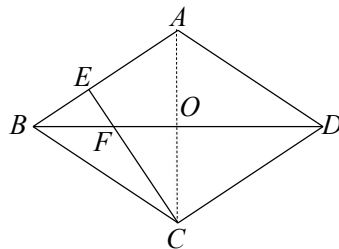
(1) 求证： $\frac{AB}{BE} = \frac{CF}{EF}$ ；(2) 求证： $DF \cdot DB = 2BC^2$.

【难度】★★

【答案】略.

【解析】证明：(1) \because 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AB \parallel CD$ ， $AB = CD$ ， $\therefore \frac{BE}{CD} = \frac{EF}{CF}$ ，即 $\frac{AB}{BE} = \frac{CF}{EF}$.



(2) 连结 AC 交 BD 于 O ，

根据菱形的性质，则有 $AC \perp BD$ ， $BD = 2DO$ ， $BC = CD$ ，

由 $AB \parallel CD$ ， $CF \perp AB$ ，则有 $\angle FCD = \angle BEF = 90^\circ$ ，

即 $\angle FCO + \angle OCD = 90^\circ$ 。

$\because \angle OFC + \angle FCO = 90^\circ$ ， $\therefore \angle ODC = \angle FCO$ 。 $\therefore \triangle ODC \sim \triangle CDF$ 。

$\therefore \frac{OD}{CD} = \frac{CD}{DF}$ 。 $\therefore \frac{1}{2}BD \cdot DF = CD^2$ 。即得： $DF \cdot DB = 2BC^2$ 。

【总结】考查菱形的性质结合“母子三角形”进行边角转化的问题。

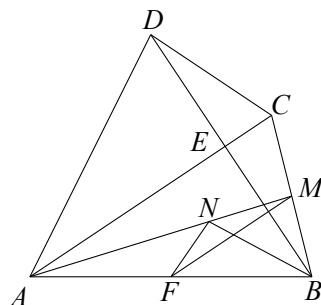
【作业 8】如图，四边形 $ABCD$ 中， $AC \perp BD$ 交 BD 于点 E ，点 F 、 M 分别是 AB ， BC 的中点， BN 平分 $\angle ABE$ 交 AM 于点 N ， $AB = AC = BD$ ，连接 MF ， NF 。

(1) 判断 $\triangle BMN$ 的形状，并证明你的结论；

(2) 判断 $\triangle MFN$ 与 $\triangle BDC$ 之间的关系，并说明理由。

【难度】★★

【答案】(1) 等腰直角三角形；(2) $\triangle MFN \sim \triangle BDC$ 。



【解析】(1) $\because AB=AC$ ， M 是 BC 中点，

$\therefore AM \perp BC$ ， AM 平分 $\angle BAC$ 。

$\because AC \perp BD$ ， $\therefore \angle EAB + \angle ABE = 90^\circ$ 。

又 BN 平分 $\angle ABE$ ， $\therefore \angle MNB = \angle NAB + \angle ABN = \frac{1}{2}(\angle EAB + \angle ABE) = 45^\circ$ 。

即可证 $\triangle BMN$ 是等腰直角三角形

(2) $\because \angle CAM + \angle ACM = 90^\circ$ ， $\angle CBE + \angle ACM = 90^\circ$ ， $\therefore \angle CAM = \angle CBE = \angle MAB$ 。

$\because \angle AMN = 90^\circ$ ， F 是 AB 的中点， $\therefore FM = \frac{1}{2}AB = AF = \frac{1}{2}BD$ 。 $\therefore \angle NMF = \angle MAB = \angle CBE$ 。

$\because \triangle BMN$ 是等腰直角三角形， $\therefore MB = MN = \frac{1}{2}BC$ 。 $\therefore \frac{MB}{BC} = \frac{FM}{BD} = \frac{1}{2}$ 。 $\therefore \triangle MFN \sim \triangle BDC$ 。

【总结】考查直角三角形斜边中线，等腰三角形的性质，相似三角形的判定综合题，这类题目难度较高，在猜想的基础上进行解题。

【作业 9】如图， $\triangle AOB$ 为等腰三角形，顶点 A 的坐标为 $(2, \sqrt{5})$ 底边 OB 在 x 轴上，将

$\triangle AOB$ 绕点 B 按顺时针方向旋转一定角度后得 $\triangle A'O'B$ ，点 A 的对应点 A' 在 x 轴上，

求点 O' 的坐标。

【难度】★★★

【答案】 $O'(\frac{20}{3}, \frac{4}{3}\sqrt{5})$ 。

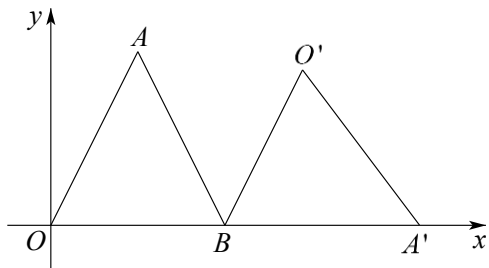
【解析】由 $A(2, \sqrt{5})$ ，可得 $y_A = \sqrt{5}$ ，

$OB = 2x_A = 4$ ，根据勾股定理可得：

$OA = AB = 3$ ，根据翻折性质，则有 $A'B = AB = 3$ ，由面积法则有 $y_A \cdot OB = y_{O'} \cdot AB$ ，

即得： $y_{O'} = \frac{4}{3}\sqrt{5}$ ，由勾股定理可得 $x_{O'} - OB = \sqrt{4^2 - (\frac{4}{3}\sqrt{5})^2} = \frac{8}{3}$ ，由此可得 $x_{O'} = \frac{20}{3}$ ，

即得 $O'(\frac{20}{3}, \frac{4}{3}\sqrt{5})$ 。



【总结】考查三角形中的面积转化，用面积法和勾股定理结合可求长度，数形结合即可将长度转化为点坐标。

【作业 10】已知：正方形 $ABCD$ 的边长为 4，点 E 为 BC 边的中点，点 P 为 AB 边上一动点，沿 PE 翻折得到 $\triangle FPE$ ，直线 PF 交 CD 边于点 Q ，交直线 AD 于点 G 。

(1) 如图，当 $BP = 1.5$ 时，求 CQ 的长；

(2) 如图，当点 G 在射线 AD 上时，设 $BP = x$ ， $DG = y$ ，求 y 关于 x 的函数关系式，并写出 x 的取值范围；

(3) 延长 EF 交直线 AD 于点 H ，若 $\triangle CQE \sim \triangle FHG$ ，求 BP 的长。

【难度】★★★

【答案】(1) $\frac{8}{3}$ ；(2) $y = \frac{16x-16}{4-x^2} (1 < x < 2)$ ；

(3) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 或 $2\sqrt{3}$

【解析】(1) 连结 QE ，

$$\because BE = EF = CE = 2, QE = QE, \angle QFE = \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle QFE \cong \triangle QCE. \quad \therefore \angle FEQ = \angle CEQ = \frac{1}{2} \angle FEC.$$

$$\therefore \angle PEQ = \frac{1}{2} (\angle BEF + \angle FEC) = 90^\circ. \quad \therefore \angle BPE = \angle QEC. \quad \therefore \triangle BPE \sim \triangle CEQ$$

$$\therefore \frac{BP}{CE} = \frac{BE}{CQ}, \text{ 即 } \frac{1.5}{2} = \frac{2}{CQ}, \text{ 解得: } CQ = \frac{8}{3}.$$

(2) 由 (1) 可得： $\triangle BPE \sim \triangle CEQ$ 。

$$\text{由 } BP = x, \text{ 可得: } CQ = \frac{4}{x}, \text{ 则 } DQ = 4 - \frac{4}{x}, AP = 4 - x,$$

$$\text{由 } AB \parallel CD, \text{ 则有 } \frac{DQ}{AP} = \frac{GD}{GA},$$

$$\text{即 } \frac{4 - \frac{4}{x}}{4 - x} = \frac{y}{y + 4}, \text{ 整理, 得: } y = \frac{16x - 16}{4 - x^2} (1 < x < 2).$$

(3) 由题意知， $\angle C = 90^\circ = \angle GFH$

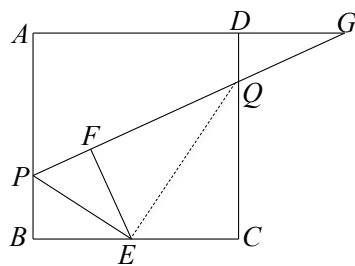
① G 在线段 AD 的延长线上时，由 $\triangle CQE \sim \triangle FHG$ ，可知 $\angle G = \angle CQE$ ，

$$\therefore \angle CQE = \angle FQE, \therefore \angle DQG = \angle FQC = 2\angle G.$$

$$\therefore \angle DQG + \angle G = 90^\circ, \therefore \angle G = 30^\circ = \angle BEP, \therefore BP = \frac{BE}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

② G 在线段 AD 的反向延长线上时，同理可得： $\angle G = 30^\circ = \angle BPE$ ，

$$\therefore BP = \sqrt{3}BE = 2\sqrt{3}.$$



【总结】考查翻折与全等结合的问题，本题中出现了“子母三角形”，利用直角三角形的相似综合解决问题。