



## 相似三角形综合

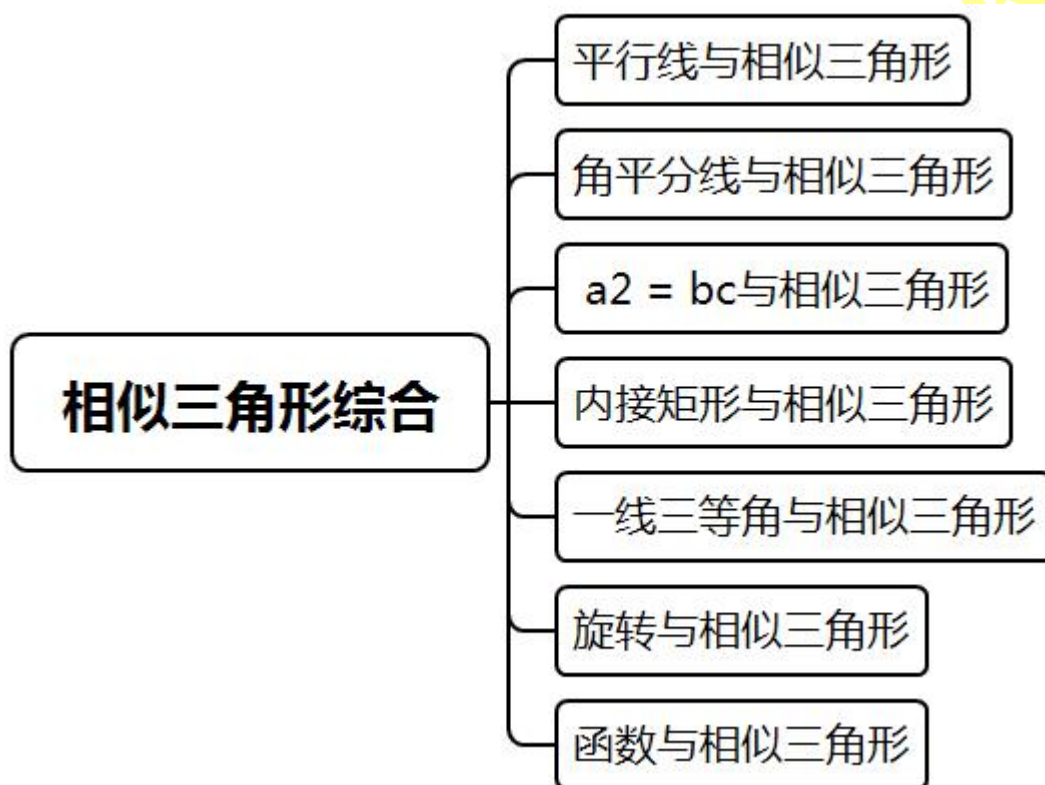


### 内容分析

相似三角形是初中数学中的重点，也是难点。相当多的知识点可以与相似三角形综合起来考察。本讲将从以下几个方面学习相似三角形的应用，旨在灵活运用相似三角形的判定和性质解决问题。



### 知识结构





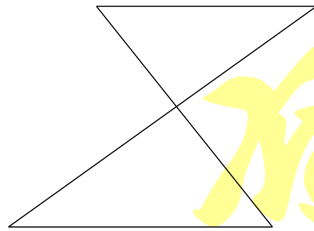
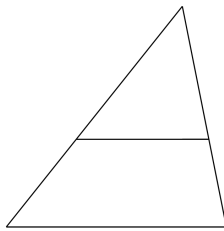
## 模块一：平行线与相似三角形



## 知识精讲

## 1、平行线与相似三角形

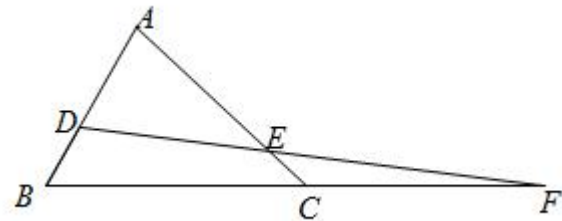
利用平行线构造的相似主要有两个基本的模型，即：“A”字型和“X”字型。



## 例题解析

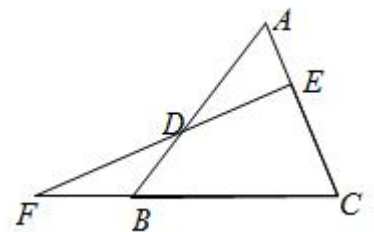
【例 1】如图，在  $\triangle ABC$  中，设  $D$ 、 $E$  是  $AB$ 、 $AC$  上的两点，且  $BD = CE$ ，延长  $DE$  交  $BC$  的延长线于点  $F$ ， $AB:AC = 3:5$ ， $EF = 12\text{cm}$ ，求  $DF$  的长。

【难度】★★



【例 2】如图，已知  $\triangle ABC$  中，点  $D$ 、 $E$  分别在边  $AB$ 、 $AC$  上，且  $AD:DB = 3:2$ ， $AE:EC = 1:2$ ，直线  $ED$  和  $CB$  的延长线交于点  $F$ ，求  $FB:FC$ 。

【难度】★★





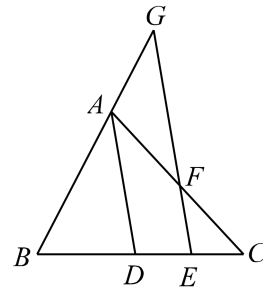
喵伴教育

认真负责，引导思路！

【例3】已知：在 $\triangle ABC$ 中， $D$ 、 $E$ 是 $BC$ 上的两点，且 $AD \parallel EG$ ， $EG$ 交 $AC$ 于 $F$ ，交 $BA$ 的延长线于 $G$ ，若 $EF + EG = 2AD$ 。

求证： $AD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线。

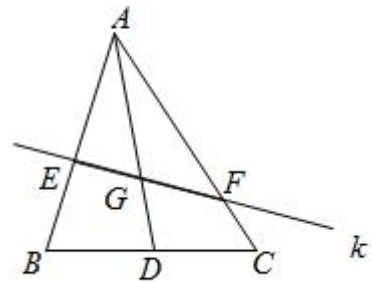
【难度】★★★



【例4】如图，点 $G$ 是 $\triangle ABC$ 的重心，过点 $G$ 作直线 $k$ ，交 $AB$ 于点 $E$ ，交 $AC$ 于点 $F$ 。

求证： $\frac{BE}{AE} + \frac{CF}{AF} = 1$ 。

【难度】★★★





喵伴教育

认真负责，引导思路！

【例5】 $AD$  是  $\triangle ABC$  的中线，将  $BC$  边所在直线绕点  $D$  顺时针旋转  $\alpha$  角，交边  $AB$  于点  $M$ ，交射线  $AC$  于点  $N$ ，设  $AM = x \cdot AB$ ， $AN = y \cdot AC$ ，（ $x \neq 0$ ， $y \neq 0$ ）。

(1) 如图 1，当  $\triangle ABC$  为等边三角形且  $\alpha = 30^\circ$  时，求证： $\triangle AMN \sim \triangle DMA$ ；

(2) 如图 2，证明  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$ 。

【难度】★★★

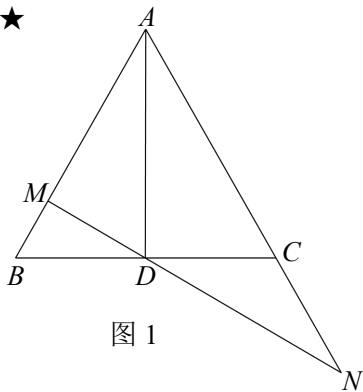


图 1

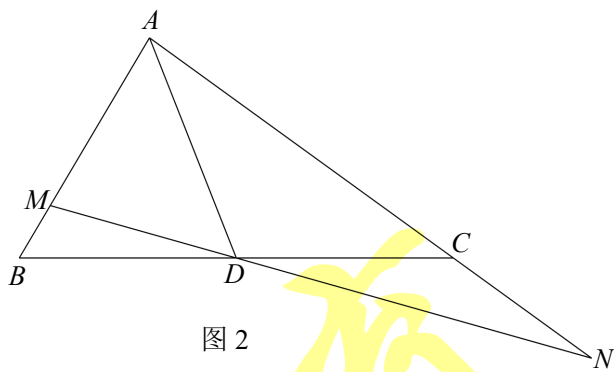


图 2

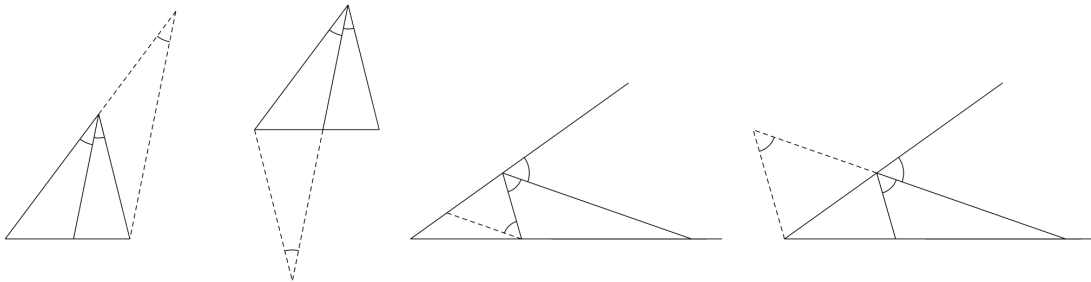
## 模块二：角平分线与相似三角形



### 知识精讲

#### 1、角平分线与相似三角形

角平分线类的相似模型如下：



分为“内角平分线”和“外角平分线”两种类型，虚线部分为辅助线的作法。

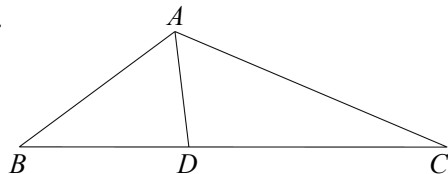


### 例题解析

【例 6】在  $\triangle ABC$  中， $\angle BAC = 120^\circ$ ， $AD$  平分  $\angle BAC$  交  $BC$  于点  $D$ 。

求证：  $\frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$  。

【难度】★★

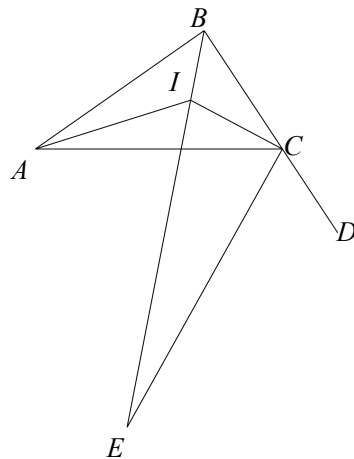


【例 7】如图， $\triangle ABC$  中， $AI$ 、 $BI$  分别平分  $\angle BAC$ 、 $\angle ABC$ ， $CE$  是  $\triangle ABC$  的外角  $\angle ACD$  的平分线，交  $BI$  延长线于  $E$ ，连接  $CI$ 。

(1)  $\triangle ABC$  变化时，设  $\angle BAC = 2\alpha$ 。若用  $\alpha$  表示  $\angle BIC$  和  $\angle E$ ，那么  $\angle BIC = \underline{\hspace{2cm}}$ ，  
 $\angle E = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

(2) 若  $AB = 1$ ，且  $\triangle ABC$  与  $\triangle ICE$  相似，求  $AC$  长。

【难度】★★





## 模块三： $a^2 = b \cdot c$ 与相似三角形



### 知识精讲

#### 1、 $a^2 = b \cdot c$ 与相似三角形

常见及扩展模型如下：

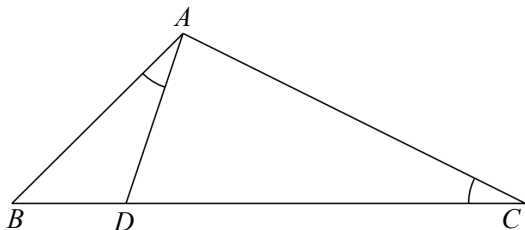


图 1

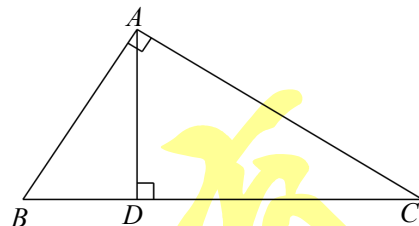


图 2

由图 1 可证： $AB^2 = BD \cdot BC$ ；

由图 2 可证： $AB^2 = BD \cdot BC$ ， $AD^2 = BD \cdot DC$ ， $AC^2 = CD \cdot CB$ 。

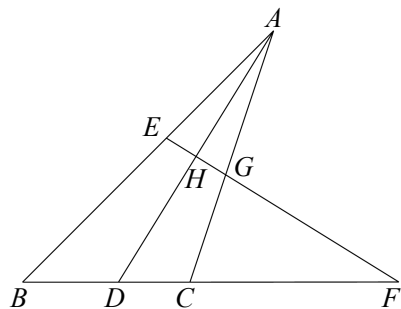


### 例题解析

【例 8】如图，在  $\triangle ABC$  中， $AD$  平分  $\angle BAC$ ， $AD$  的垂直平分线交  $AB$  于点  $E$ ，交  $AD$  于点  $H$ ，交  $AC$  于点  $G$ ，交  $BC$  的延长线于点  $F$ 。

求证： $DF^2 = CF \cdot BF$ 。

【难度】★★



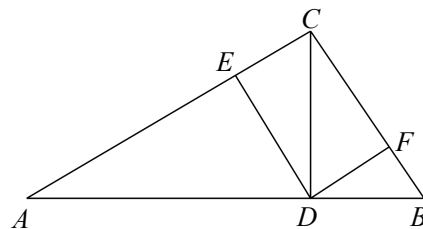


喵伴教育

认真负责，引导思路！

【例 9】如图，在  $Rt\triangle ABC$  中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $CD \perp AB$  于  $D$ ， $DE \perp AC$  于  $E$ ， $DF \perp BC$  于  $F$ 。求证： $\frac{AE}{BF} = \frac{AC^3}{BC^3}$ 。

【难度】★★★



【例 10】如图 1，在  $\triangle ABC$  中， $P$  是边  $AB$  上的一点，联结  $CP$ ，要使  $\triangle ACP \sim \triangle ABC$ ，还需要补充一个条件。

(1) 补充的条件是\_\_\_\_\_，或者\_\_\_\_\_。

(2) 请你参考上面的图形和结论，解答下面的问题：

如图 2，在  $\triangle ABC$  中， $\angle A = 60^\circ$ ， $AC^2 = AB^2 + AB \cdot BC$ ，求  $\angle B$  的度数。

【难度】★★★

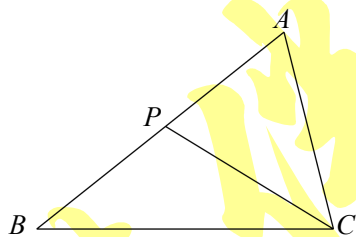


图 1

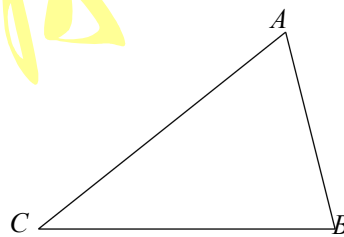


图 2



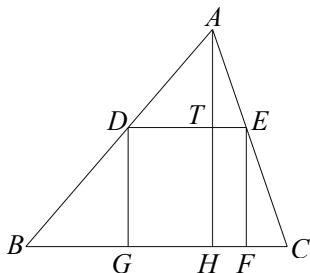
## 模块四：内接矩形与相似三角形



## 知识精讲

## 1、内接矩形与相似三角形

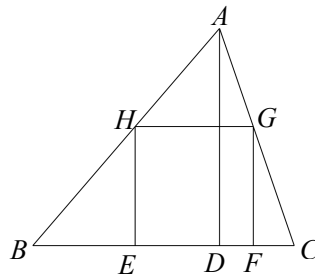
相关模型：

常用结论： $\frac{AT}{AH} = \frac{DE}{BC}$ .

## 例题解析

【例 11】 $\triangle ABC$  中，正方形  $EFGH$  的两个顶点  $E$ 、 $F$  在  $BC$  上，另两个顶点  $G$ 、 $H$  分别在 $AC$ 、 $AB$  上， $BC = 15$ ， $BC$  边上的高  $AD = 10$ ，求正方形  $EFGH$  的面积。

【难度】★★



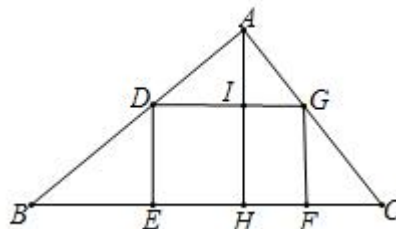


喵伴教育

认真负责，引导思路！

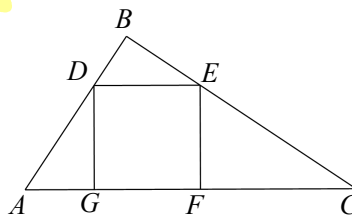
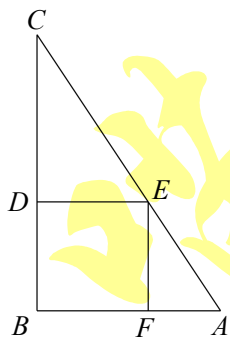
【例 12】在锐角  $\triangle ABC$  中，矩形  $DEFG$  的顶点  $D$  在  $AB$  边上，顶点  $E$ 、 $F$  在  $BC$  边上，顶点  $G$  在  $AC$  边上，如果矩形  $DEFG$  的长为 6，宽为 4，设底边  $BC$  上的高为  $x$ ， $\triangle ABC$  的面积为  $y$ ，求  $y$  与  $x$  的函数关系式。

【难度】★★★



【例 13】一块直角三角形木板的一条直角边  $AB$  长为  $1.5m$ ，面积为  $1.5m^2$ ，现需把它加工成一个面积最大的正方形桌面，请甲、乙两位同学设计加工方案，甲设计方案如图（1），乙设计方案如图（2）。你认为哪位同学设计的方案较好？请说明理由（加工损耗忽略不计，计算结果中可保留分数）。

【难度】★★★





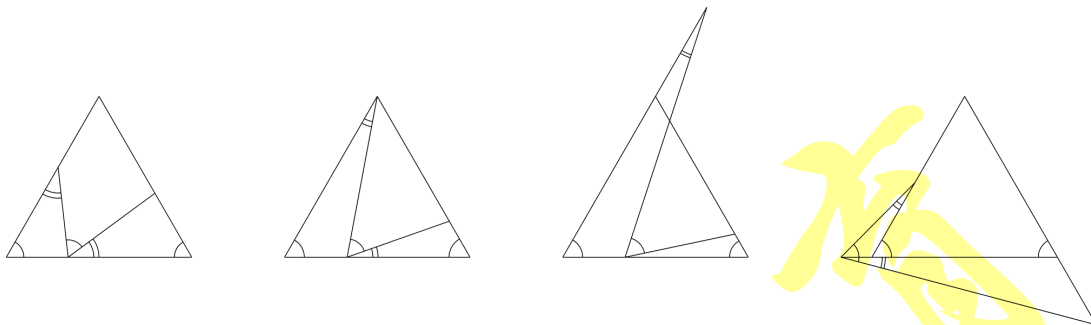
## 模块五：一线三等角与相似三角形



### 知识精讲

#### 1、一线三等角与相似三角形

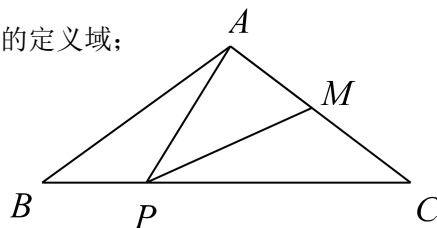
相关模型如下图所示：



### 例题解析

【例 14】如图，在  $\triangle ABC$  中， $AB = AC = 5\text{cm}$ ， $BC = 8\text{cm}$ ，点  $P$  为  $BC$  边上一动点（不与点  $B, C$  重合），过点  $P$  作射线  $PM$  交  $AC$  于点  $M$ ，使  $\angle APM = \angle B$ 。

- (1) 求证： $\triangle ABP \sim \triangle PCM$
- (2) 设  $BP = x$ ， $CM = y$ 。求  $y$  与  $x$  的函数解析式，并写出函数的定义域；
- (3) 当  $\triangle APM$  为等腰三角形时，求  $PB$  的长





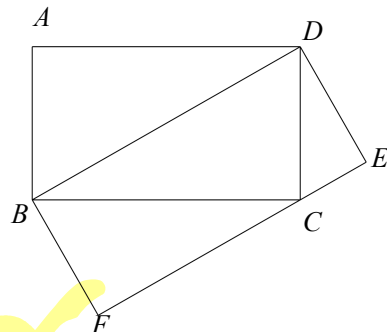
【例 15】矩形  $ABCD$  中，以对角线  $BD$  为一边构造一个矩形  $BDEF$ ，使得另一边  $EF$  过原矩形的顶点  $C$ 。

(1) 设  $Rt\triangle CBD$  的面积为  $S_1$ ， $Rt\triangle BFC$  的面积为  $S_2$ ， $Rt\triangle DCE$  的面积为  $S_3$ ，则

$S_1$  \_\_\_\_\_  $S_2 + S_3$  (用 “ $>$ ”、“ $=$ ”、“ $<$ ” 填空)；

(2) 写出图中的 3 对相似三角形，并选择其中一对进行证明。

【难度】★★



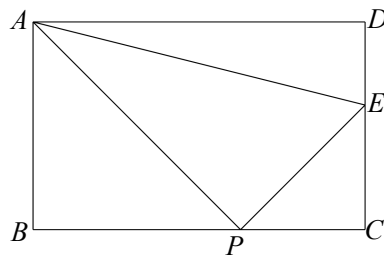
【例 16】在矩形  $ABCD$  中， $AB = 2$ ， $AD = 3$ ， $P$  是  $BC$  上的任意一点 ( $P$  与  $B$ 、 $C$  不重合)，过点  $P$  作  $AP \perp PE$ ，垂足为  $P$ ， $PE$  交  $CD$  于点  $E$ 。

(1) 连接  $AE$ ，当  $\triangle APE$  与  $\triangle ADE$  全等时，求  $BP$  的长；

(2) 若设  $BP$  为  $x$ ， $CE$  为  $y$ ，试确定  $y$  与  $x$  的函数关系式；当  $x$  取何值时， $y$  的值最大？最大值是多少？

(3) 若  $PE \parallel BD$ ，试求出此时  $BP$  的长。

【难度】★★★





## 模块六：旋转与相似三角形



### 例题解析

【例 17】如图 1，在  $\triangle ABC$  中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $BC = 2$ ， $\angle A = 30^\circ$ ，点  $E$ 、 $F$  分别是线段  $BC$ 、 $AC$  的中点，联结  $EF$ 。

- (1) 线段  $BE$  与  $AF$  的位置关系是\_\_\_\_\_， $\frac{AF}{BE} = \underline{\hspace{2cm}}$ ；
- (2) 如图 2，当  $\triangle CEF$  绕点  $C$  顺时针旋转  $\alpha$  时 ( $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ )，联结  $AF$ 、 $BE$ ，则 (1) 中的结论是否仍然成立？如果成立，请证明；如果不成立，请说明理由；
- (3) 如图 3，当  $\triangle CEF$  绕点  $C$  顺时针旋转  $\alpha$  时 ( $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ )，延长  $FC$  交  $AB$  于点  $D$ ，如果  $AD = 6 - 2\sqrt{3}$ ，求旋转角  $\alpha$  的度数。

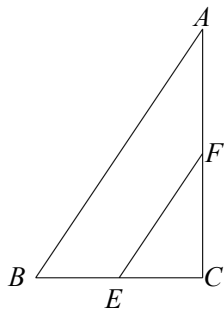


图 1

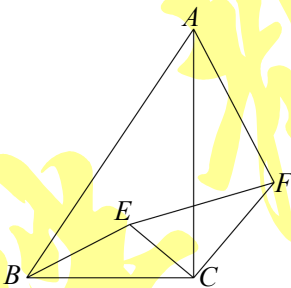


图 2

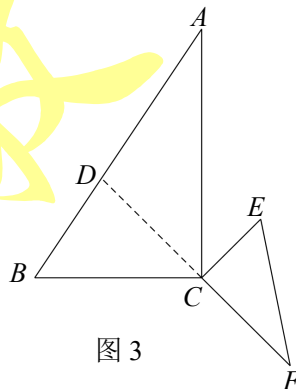


图 3

【难度】★★★



## 模块七：函数与相似三角形



### 例题解析

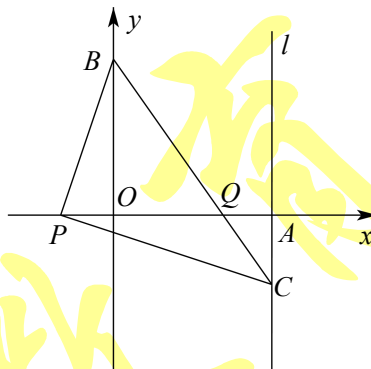
【18】如图，已知平面直角坐标系中三点  $A(2, 0)$ ， $B(0, 2)$ ， $P(a, 0)$  ( $a < 0$ )，

联结  $BP$ ，过点  $P$  作  $PC \perp PB$  交过点  $A$  的直线  $l$  于点  $C(2, b)$ 。

(1) 求  $b$  与  $a$  之间的函数关系式；

(2) 当  $a$  取得最大的整数时，求  $BC$  与  $x$  轴的交点  $Q$  的坐标。

【难度】★★



【例 19】函数  $y = \frac{k}{x}$  和  $y = -\frac{k}{x}$  ( $k \neq 0$ ) 的图像关于  $y$  轴对称，我们把函数  $y = \frac{k}{x}$  和  $y = -\frac{k}{x}$

( $k \neq 0$ ) 叫做互为“镜子”函数，类似地，如果函数  $y = f(x)$  和  $y = h(x)$  的图像关于  $y$  轴对称，那么我们就把函数  $y = f(x)$  和  $y = h(x)$  叫做互为“镜子”函数。

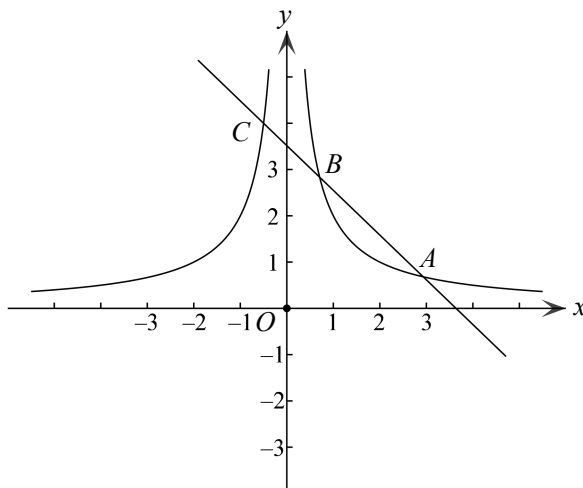
(1) 函数  $y = 3x - 4$  的“镜子”函数是\_\_\_\_\_；

(2) 函数  $y = x^2 - 2x + 3$  的“镜子”函数是\_\_\_\_\_；

(3) 如图所示，一条直线与一对“镜子”  $y = \frac{2}{x}$  ( $x > 0$ ) 和  $y = -\frac{2}{x}$  ( $x < 0$ ) 的图像分别交

于点  $A$ 、 $B$ 、 $C$ ，如果  $CB : AB = 1 : 2$ ，点  $C$  在函数  $y = -\frac{2}{x}$  ( $x < 0$ ) 的“镜子”函数上的对应点的横坐标是  $\frac{1}{2}$ ，求点  $B$  的坐标。

【难度】★★



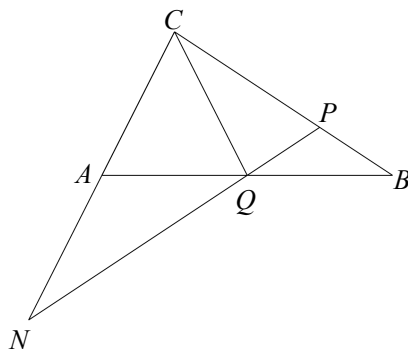


喵伴教育

认真负责，引导思路！

【例 20】在  $\triangle ABC$  中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $CQ$  是斜边  $AB$  上的中线， $AC = 6$ ， $AB = 10$ ，点  $P$  是  $BC$  边上的一个动点（与  $B$ 、 $C$  不重合），经过点  $P$ 、 $Q$  的直线与直线  $AC$  交于点  $N$ ，若  $\triangle PNC$  与  $\triangle ABC$  相似，求  $BP$  的值。

【难度】★★★

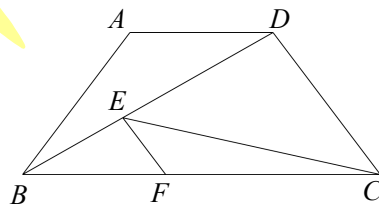


【例 21】如图，已知梯形  $ABCD$ ， $AD \parallel BC$ ， $AB = AD = 5$ ， $\tan \angle DBC = \frac{3}{4}$ 。E 为射线  $BD$  上一点，过点  $E$  作  $EF \parallel DC$  交射线  $BC$  于点  $F$ ，连接  $EC$ ，设  $BE = x$ ， $\frac{S_{\triangle ECF}}{S_{\triangle BDC}} = y$ 。

(1) 求  $BD$  的长；

(2) 当点  $E$  在线段  $BD$  上时，求  $y$  关于  $x$  的函数解析式，并写出自变量  $x$  的取值范围。

【难度】★★★



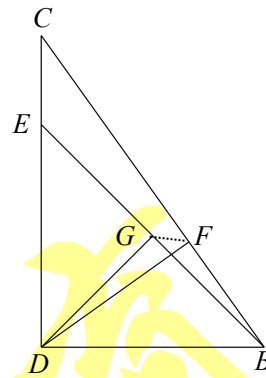


随堂检测

【习题 1】如图，在  $Rt\triangle BDC$  中，点  $E$  在  $CD$  上， $DF \perp BC$  于  $F$ ， $DG \perp BE$  于  $G$ 。

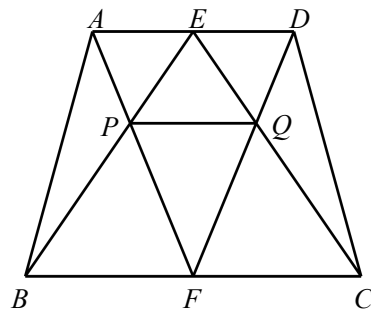
求证： $FG \parallel BC = CE \parallel BG$ 。

【难度】★★★



【习题 2】如图，在梯形  $ABCD$  中， $AD \parallel BC$ ， $AD = a$ ， $BC = b$ ， $E$ 、 $F$  分别是  $AD$ 、 $BC$  的中点，且  $AF$  交  $BE$  于  $P$ ， $CE$  交  $DF$  于  $Q$ ，求  $PQ$  的长。

【难度】★★★





【习题 3】如图，已知  $\triangle ABC$  和  $\triangle DEF$  是两个全等的等腰直角三角形，且  $\angle BAC = \angle EDF = 90^\circ$ ， $\triangle DEF$  的顶点  $E$  与  $\triangle ABC$  的斜边  $BC$  的中点重合。将  $\triangle DEF$  绕点  $E$  旋转，旋转过程中，线段  $DE$  与线段  $AB$  相交于点  $P$ ，线段  $EF$  与射线  $CA$  相交于点  $Q$ 。

(1) 如图 1，当点  $Q$  在线段  $AC$  上，且  $AP = AQ$  时，求证： $\triangle BPE \cong \triangle CQE$ ；

(2) 如图 2，当点  $Q$  在线段  $CA$  的延长线上时，求证： $\triangle BPE \sim \triangle CEQ$ ；并求当  $BP = a$ ， $CQ = \frac{9}{2}a$

时， $P$ 、 $Q$  两点间的距离（用含  $a$  的代数式表示）。

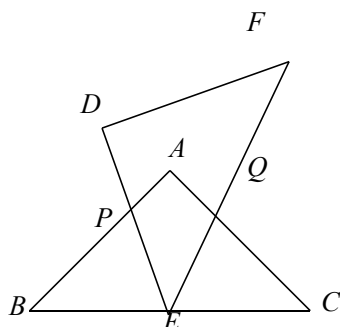


图 1

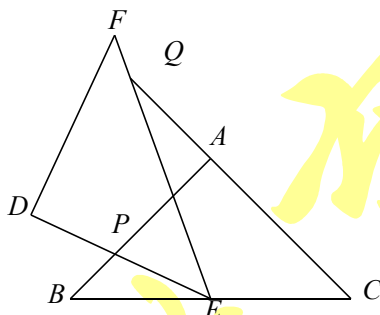


图 2

【难度】★★★

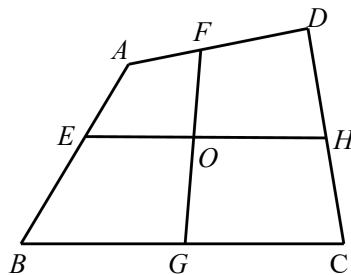


### 课后作业

【作业 1】如图， $E$ 、 $F$ 、 $G$ 、 $H$  分别是四边形  $ABCD$  各边的点，且  $AE \cdot FD = EB \cdot AF$ ， $BG \cdot HC = GC \cdot DH$ ，连接  $EH$ 、 $GF$  相交于点  $O$ 。

求证： $OE \cdot GO = FO \cdot OH$ 。

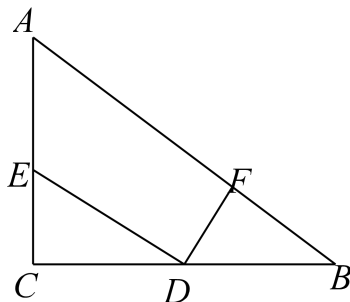
【难度】★★★





【作业2】如图，在  $Rt\triangle ABC$  中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 5$ ， $\tan B = \frac{3}{4}$ ，点  $D$  是  $BC$  的中点，点  $E$  是  $AB$  边上的动点， $DF \perp DE$  交射线  $AC$  于点  $F$ 。

- (1) 求  $AC$  和  $BC$  的长
- (2) 当  $EF \parallel BC$  时，求  $BE$  的长；
- (3) 联结  $EF$ ，当  $\triangle DEF$  和  $\triangle ABC$  相似时，求  $BE$  的长。



【作业3】如图1，在同一平面内，将两个全等的等腰直角三角形  $ABC$  和  $AFG$  摆放在一起， $A$  为公共顶点， $\angle BAC = \angle AGF = 90^\circ$ ，它们的斜边长为2，若  $\triangle AFG$  绕点  $A$  旋转， $AF$ 、 $AG$  与边  $BC$  的交点分别为点  $D$ 、 $E$ （点  $D$  不与点  $B$  重合，点  $E$  不与点  $C$  重合）。

- (1) 请在图1中找出两对相似而不全等的三角形，并选择其中一对进行证明；
- (2)  $\triangle ABC$  的斜边  $BC$  所在的直线为  $x$  轴， $BC$  边上的高所在的直线为  $y$  轴，建立平面直角坐标系（如图2）。在边  $BC$  上找一点  $D$  使  $BD = CE$ ，求出点  $D$  的坐标，并通过计算验证  $BD^2 + CE^2 = DE^2$ ；
- (3) 在旋转过程中，(2) 中的等量关系  $BD^2 + CE^2 = DE^2$  是否始终成立？若成立，请证明你的结论；若不成立，请说明理由。

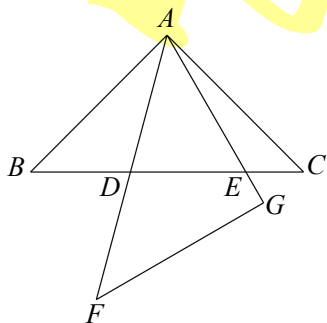


图1

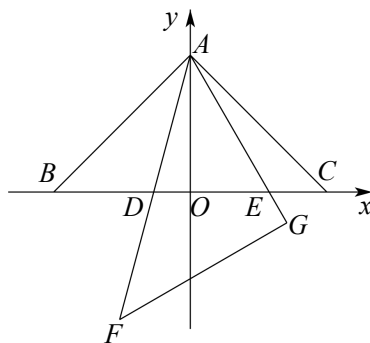


图2

【难度】★★★