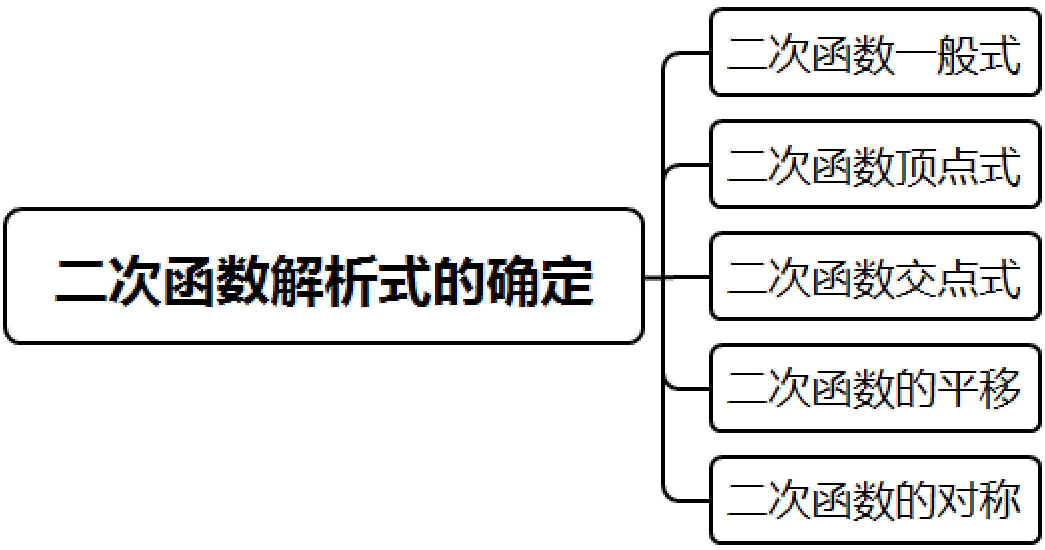
二次函数解析式的确定

内容分析

二次函数的学习必然离不开二次函数解析式的确定，因为求解二次函数的解析式是二次函数知识的实际运用中的必不可少的一环．本讲主要讲解利用二次函数的一般式、顶点式和交点式，以及通过二次函数的平移和对称求解二次函数解析式的方法，重点在于根据不同的条件，灵活选择求解二次函数解析式的方法，从而快速准确的确定二次函数的解析式，为二次函数的综合应用打好基础．

知识结构



模块一：一般式 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$

知识精讲

1、一般式 $y=ax^2+bx+c$ （$a\neq0$）

（1）任何二次函数都可以整理成一般式 $y=ax^2+bx+c$ （$a\neq0$）的形式；

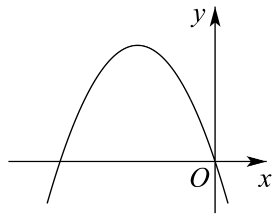
（2）如果已知二次函数的图像上三点的坐标，可用一般式求解二次函数的解析式．

例题解析

【例1】 如图所示的抛物线是二次函数 $y=ax^2-3x+a^2-1$ 的图像，那么 a 的值为______.

【难度】★

【答案】-1.



【解析】由函数图像可知二次函数过原点 $(0,0)$，则有 $a^2-1=0$，

解得：$a=\pm1$，同时由函数开口方向向下，可得：$a<0$，则 $a=-1$.

【总结】考查一个未知数的二次函数解析式的确定，由函数图像上一点即可确定，同时要根据图像确定相应系数及未知数取值范围.

【例2】 已知二次函数的图像经过点（0，2）、（1，1）、（3，5），求这个函数关系式.

【难度】★

【答案】 $y=x^2-2x+2$.

【解析】设函数解析式为 $y=ax^2+bx+c\left(a\neq0\right)$，函数经过点（0，2），（1，1），（3，5），

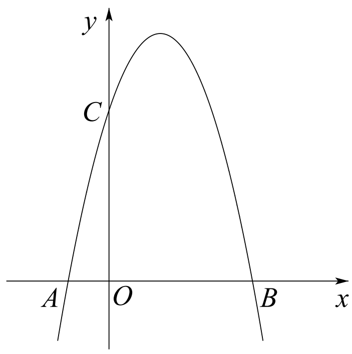
依题意可得：$\begin{cases}9a+3b+c=5\\a+b+c=1\\c=2\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a=1\\b=-2\\c=2\end{cases}$，即得二次函数解析式为 $y=x^2-2x+2$.

【总结】考查通过二次函数上三点，待定系数法转化为三元一次方程组求二次函数解析式.

【例3】 如图，二次函数图像过 A、B、C 三点，点 A 的坐标为（-1，0），点 B 的坐标为（4，0），点 C 在 y 轴的正半轴上，且 $AB=OC$.

（1）求点 C 的坐标；

（2）求二次函数的解析式，并求出函数的最大值.



【难度】★★

【答案】（1）（0，5）；（2） $y=-\dfrac{5}{4}x^2+\dfrac{15}{4}x+5$，$y_{\max}=\dfrac{125}{16}$.

【解析】（1）由（-1，0），（4，0），可得：$AB=5=OC$，

由此可得 C 点坐标为（0，5）；

（2）设二次函数解析式为 $y=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right)$，二次函数过 $A\left(-1,0\right)$，$B\left(4,0\right)$，$C\left(0,5\right)$，

代入即得：$\begin{cases}a-b+c=0\\16a+4b+c=0\\c=5\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a=-\dfrac{5}{4}\\b=-\dfrac{15}{4}\\c=5\end{cases}$，即得二次函数解析式为

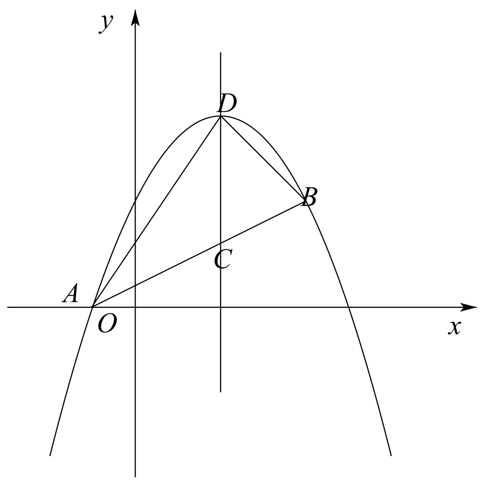
$y=-\dfrac{5}{4}x^2-\dfrac{15}{4}x+5$，整理成顶点式为 $y=-\dfrac{5}{4}\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{125}{16}$，即得：$y_{\max}=\dfrac{125}{16}$.

【总结】考查根据二次函数上的点求二次函数解析式.

【例4】 如图，抛物线 $y=ax^2+bx+\dfrac{5}{2}$ 与直线 AB 交于点 A（-1，0），B（4，$\dfrac{5}{2}$），D 是抛物线 A、B 两点间部分上的一个动点（不与 A、B 重合），直线 CD 与 y 轴平行，交直线 AB 于点 C，连接 AD、BD.

（1）求抛物线的解析式;

（2）设点 D 的横坐标为 m，ΔADB 的面积为 S，求 S 关于 m 的函数关系式，并求出 S 取得最大值时点 C 的坐标.



【难度】★★★

【答案】（1）$y=-\dfrac{1}{2}x^2+2x+\dfrac{5}{2}$；

（2）$S=-\dfrac{5}{4}m^2+\dfrac{15}{4}m+5$，$S$ 取最大值时 $C\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{4}\right)$.

【解析】(1) 函数 $y=ax^2+bx+\dfrac{5}{2}$ 过点 A（-1，0），

B（4，$\dfrac{5}{2}$），代入可得：$\begin{cases}a-b+\dfrac{5}{2}=0\\16a+4b+\dfrac{5}{2}=\dfrac{5}{2}\end{cases}$，

解得：$a=-\dfrac{1}{2}$，$b=2$，

即二次函数解析式为 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+2x+\dfrac{5}{2}$；

（2）设直线 AB 解析式为 $y=kx+c$，则有 $\begin{cases}-k+c=0\\4k+c=\frac{5}{2}\end{cases}$，解得：$\begin{cases}k=\frac{1}{2}\\c=\frac{1}{2}\end{cases}$，即得直线 AB 解析式为：$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$，则有 $C\left(m,\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\right)$，由（1）可得：$D\left(m,-\frac{1}{2}m^2+2m+\frac{5}{2}\right)$，

则有 $DC=\left(-\frac{1}{2}m^2+2m+\frac{5}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}m^2+\frac{3}{2}m+2$，则有 $S_{\Delta ABD}=S_{\Delta ACD}+S_{\Delta BCD}$，

即得：$S=\frac{1}{2}CD\cdot\left|x_B-x_A\right|=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}m^2+\frac{3}{2}m+2\right)\times\left[4-(-1)\right]=-\frac{5}{4}m^2+\frac{15}{4}m+5$，整理成顶点式即为 $y=-\frac{5}{4}\left(m-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{125}{16}$，$m=\frac{3}{2}$ 时函数有最大值，此时 C 点坐标为 $C\left(\frac{3}{2},\frac{5}{4}\right)$.

【总结】向 y 轴作平行线将所求三角形分割成两个同底三角形，且两三角形高之和为定值即可计算其面积.

模块二：顶点式 $y=a(x+m)^2+k$ （$a\neq 0$）

知识精讲

1、顶点式 $y=a(x+m)^2+k$ （$a\neq 0$）

（1）任何二次函数经过配方都可以整理成 $y=a(x+m)^2+k$（$a\neq 0$）的形式，这叫做二次函数的顶点式，而（$-m$，k）为抛物线的顶点坐标；

（2）如果已知二次函数的顶点坐标和图像上任意一点的坐标，都可以用顶点式来求解二次函数的解析式；

（3）对于任意的二次函数 $y=ax^2+bx+c$，都可以配方为：$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$ 的形式.

例题解析

【例5】 顶点为（-2，-5）且过点（1，-14）的抛物线的解析式为____________.

【难度】★

【答案】 $y=-x^2-4x-9$.

【解析】由二次函数顶点可设二次函数解析式为 $y=a(x+2)^2-5$，二次函数过点（1，-14），

代入即得$(1+2)^2a-5=-14$，解得：$a=-1$，即得二次函数解析式为$y=-(x+2)^2-5$，

整理成一般式即为$y=-x^2-4x-9$.

【总结】考查通过二次函数顶点式求二次函数解析式.

【例6】 已知函数$y=ax^2+2x+c$的图像的对称轴为直线$x=2$，函数的最大值是-3，则

$a=$______，$c=$______.

【难度】★

【答案】$-\frac{1}{2}$，-5.

【解析】函数对称轴为直线$x=2$，则有$-\frac{2}{2a}=2$，解得$a=-\frac{1}{2}$，函数最大值为-3，即函数图像过点$(2,-3)$，则有$\left(-\frac{1}{2}\right)\times 2^2+2\times 2+c=-3$，解得：$c=-5$.

【总结】考查根据二次函数顶点确定未知数取值.

【例7】 二次函数的图像顶点在y轴上，图像有最低点（0，2），且经过点（2，3），则函数的解析式为____________.

【难度】★★

【答案】$y=\frac{1}{4}x^2+2$.

【解析】二次函数有最低点（0，2），由此可设函数解析式为$y=ax^2+2$，函数过点（2，3），则有$2^2\cdot a+2=3$，解得：$a=\frac{1}{4}$，即得函数解析式为$y=\frac{1}{4}x^2+2$.

【总结】考查根据函数顶点和函数上一点设顶点式求二次函数解析式.

【例8】 顶点为（-3，-6）的抛物线$y=ax^2+bx+c$经过点（-1，-4），则下列结论错误的是（　　）

A．$b^2>4ac$

B．$ax^2+bx+c\geq -6$

C．若点（-2，m）、（-5，n）在抛物线上，则$m>n$

D．关于x的一元二次方程$ax^2+bx+c=-4$的两根为$x_1=-5$和$x_2=-1$

【难度】★★

【答案】C

【解析】函数顶点为（-3， -6 ），且过点（-1， -4 ），可知二次函数顶点为其最低点，可知 $ax^2+bx+c\geq -6$，B 正确；函数开口方向向上，且二次函数部分图像位于 x 轴下方，可知函数必与 x 轴有两不同交点，即得 $b^2-4ac>0$， A 正确；二次函数对称轴为直线 $x=-3$， 关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=-4$ 的两根关于对称轴对称，其一根为 $x_2=-1$，则另一个对称根为 $x_1=-5$，D 正确；同时由函数的对称可得（-5，n）关于抛物线对称轴对称点为（-1，n），函数开口方向向上，在对称轴右侧，函数值随 x 增大而增大，$-2<-1$，则有 $m<n$，C 错误.

【总结】本题不用求出函数解析式，根据函数相关性质即可进行直接判断，当然也可以求出函数解析式再根据二次函数相关性质进行判断.

【例9】 已知二次函数 $y=x^2+px+q$，顶点坐标为（2， -9 ）.

（1）求 p、q 的值；

（2）这条抛物线与 x 轴的两个交点 A、B，设点 M 在这条抛物线上，且 $S_{\Delta ABM}=24$，求 M 的坐标.

【难度】★★

【答案】（1） $p=-4$， $q=-5$； （2） $(1,-8)$， $(3,-8)$， $\left(2+\sqrt{17},8\right)$， $\left(2-\sqrt{17},8\right)$.

【解析】（1）二次函数 $y=x^2+px+q$ 顶点坐标为（2， -9 ），则有 $-\dfrac{p}{2}=2$，解得： $p=-4$，

函数过（2， -9 ），代入即得： $2^2-4\times 2+q=-9$，解得： $q=-5$；

（2）令 $y=x^2-4x-5=0$，解得： $x_1=-1$， $x_2=5$， 由此可得： $AB=6$，由 $S_{\Delta ABM}=24$，

即得： $\dfrac{1}{2}AB\cdot|y_M|=24$，得 $y_M=\pm 8$，当 $y_M=-8$ 时，即 $x^2-4x-5=-8$，

解得： $x_1=1$， $x_2=3$，即得 M 点坐标 $(1,-8)$ 或 $(3,-8)$；

当 $y_M=8$ 时，即 $x^2-4x-5=8$，解得： $x_1=2+\sqrt{17}$， $x_2=2-\sqrt{17}$，

即得 M 点坐标 $\left(2+\sqrt{17},8\right)$ 或 $\left(2-\sqrt{17},8\right)$.

【总结】考查二次函数应用中的“数形结合”，把坐标系中的距离转化为相应点的点坐标.

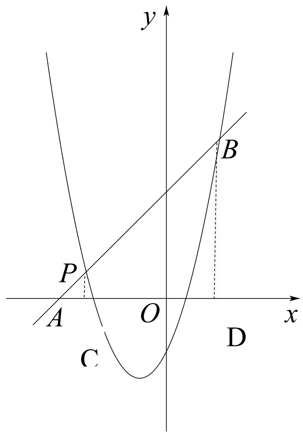
【例10】 二次函数 $y=x^2+mx+n$ 的图像经过点 P（-3，1），对称轴是经过点（-1，0）且平行于 y 轴的直线.

（1）求二次函数解析式；

（2）如图，一次函数 $y=kx+b$ 的图像经过点 P，与 x 轴相交于点 A，与二次函数的图像相交于另一点 B，点 B 在点 P 的右侧，$PA:PB=1:5$，求一次函数的解析式.

【难度】★★

【答案】（1）$y=x^2+2x-2$；（2）$y=x+4$.



【解析】（1）函数对称轴是经过点（-1，0）且平行于 y 轴的直线，即函数对称轴为直线 $x=-1$，则有 $-\dfrac{m}{2}=-1$，解得：$m=2$，

二次函数过点 P（-3，1），则有 $(-3)^2+2\times(-3)+n=1$，

解得：$n=-2$，即二次函数解析式为 $y=x^2+2x-2$；

（2）作 $PC\perp x$ 交 x 轴于点 C，作 $BD\perp x$ 交 x 轴于点 D，

则有 $PC//BD$，由 $PA:PB=1:5$，则有 $PC:BD=PA:AB=1:6$，$PC=y_P=1$，

则有 $BD=6=y_B$，令 $x^2+2x-2=6$，解得：$x_1=-4$，$x_2=2$，点 B 在点 P 右侧，

则有 $x>-3$，取 $x_2=2$，即得：$B(2,6)$，一次函数 $y=kx+b$ 过点 P（-3，1）和点 $B(2,6)$，

依题意则有 $\begin{cases}-3k+b=1\\2k+b=6\end{cases}$，解得：$\begin{cases}k=1\\b=4\end{cases}$，即一次函数解析式为 $y=x+4$.

【总结】考查二次函数和一次函数的综合应用，利用点坐标在坐标系中进行点坐标和长度的转换即可.

模块三：交点式 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$ $(a\neq 0)$

知识精讲

1、交点式 $y=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$（$a\neq 0$）

（1）交点式：$y=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$（$a\neq 0$），其中 x_1，x_2 为二次函数图像与 x 轴的两个交点的横坐标；

（2）已知二次函数与 x 轴的交点坐标，和图像上任意一点时，可用交点式求解二次函数解析式；

（3）已知二次函数与 x 轴的交点坐标（x_1，0）、（x_2，0），可知其对称轴为 $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$；

（4）根据二次函数的对称性可知，对于函数图像上的两点（x_1，a）、（x_2，a），如果它们有相同的纵坐标，则可知二次函数的对称轴为 $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$；

（5）对于任意二次函数 $y=ax^2+bx+c$，当 $x=0$ 时，即 $ax^2+bx+c=0$，根据一元二次方程的求根公式可得：$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$、$x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$；

（6）对称式：$y=a(x-x_1)(x-x_2)+k$（$a\neq 0$），当抛物线经过点（x_1，k）、（x_2，k）时，可以用对称式来求解二次函数的解析式.

例题解析

【例11】已知抛物线与 x 轴的交点的横坐标分别是 -2、2，且与 y 轴的交点的纵坐标是 -3，求该抛物线的解析式.

【难度】★

【答案】$y=\dfrac{3}{4}x^2-3$.

【解析】依题意可设抛物线解析式为 $y=a\left(x+2\right)\left(x-2\right)$，过点 $\left(0,-3\right)$，则有 $-4a=-3$，

解得：$a=\dfrac{3}{4}$，即得抛物线解析式为 $y=\dfrac{3}{4}\left(x+2\right)\left(x-2\right)$，整理即为 $y=\dfrac{3}{4}x^2-3$.

【总结】考查根据二次函数交点式求二次函数解析式.

【例12】已知一抛物线的形状与 $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{2}$ 的形状相同，对称轴为 $x=-2$，它与 x 轴的两交点之间的距离为 2，求此抛物线的解析式．

【难度】★★

【答案】$y=\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{3}{2}$ 或 $y=-\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{3}{2}$．

【解析】二次函数对称轴为直线 $x=-2$，且与 x 轴两交点距离为 2，则有 $\begin{cases}x_1+x_2=2\times(-2)\\x_2-x_1=2\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}x_1=-3\\x_2=-1\end{cases}$，又抛物线形状与 $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{2}$ 相同，则有 $a=\pm\frac{1}{2}$，由二次函数交点式可知二次函数解析式为 $y=\pm\frac{1}{2}(x+3)(x+1)$，即 $y=\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{3}{2}$ 或 $y=-\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{3}{2}$．

【总结】考查二次函数对称轴与两交点的关系的结合应用．

【例13】设二次函数 $y_1=a(x-x_1)(x-x_2)$（$a\neq 0$，$x_1\neq x_2$）的图像与一次函数 $y_2=dx+e$（$d\neq 0$）的图像交于点（x_1，0）．若函数 $y=y_1+y_2$ 的图像与 x 轴仅有一个交点，则（　　）

A．$a(x_1-x_2)=d$　　B．$a(x_2-x_1)=d$

C．$a(x_1-x_2)^2=d$　　D．$a(x_1+x_2)^2=d$

【难度】★★

【答案】B

【解析】一次函数 $y_2=dx+e$ 过点（x_1，0），则有 $dx_1+e=0$，得：$e=-dx_1$，$y_2=d(x-x_1)$，

由此可得 $y=y_1+y_2=a(x-x_1)(x-x_2)+d(x-x_1)=[a(x-x_2)+d](x-x_1)$，函数 $y=y_1+y_2$ 与 x 轴仅有一个交点，可得函数 $y=y_1+y_2$ 为二次函数，且其顶点在 x 轴上，由此可设 $y=a(x-x_1)^2$，则有 $a(x-x_1)=a(x-x_2)+d$，整理即得 $a(x_2-x_1)=d$，故选 B．

【总结】考查抛物线与 x 轴的交点问题，以及图像上点的坐标与方程的关系．

【例14】 二次函数 $y=-x^2+kx+12$ 的图像与 x 轴交点都位于（6，0）左侧，求 k 的取值范围．

【难度】★★★

【答案】 $k<4$．

【解析】设抛物线与 x 轴两交点横坐标分别为 x_1， x_2，则有 $x_1<6$， $x_2<6$，且二次函数对称轴在直线 $x=6$ 左侧，则有 $\begin{cases}(x_1-6)(x_2-6)>0\\ \frac{k}{2}<6\end{cases}$，根据韦达定理可得 $x_1+x_2=k$， $x_1x_2=-12$，不等式即为 $\begin{cases}-12-6k+36>0\\ k<12\end{cases}$， 解得： $k<4$．

【总结】本题考查一元二次方程的解与对应的二次函数和 x 轴两交点坐标的联系，通过韦达定理进行相应的转化即可求解正确答案，简化解题过程．

【例15】 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 在 $x=-1$ 时，y 有最小值 -4，它的图像与 x 轴交点的横坐标分别为 x_1 和 x_2， 且 ${x_1}^2+{x_2}^2=10$． 求该二次函数的解析式．

【难度】★★★

【答案】 $y=x^2+2x-3$．

【解析】二次函数在 $x=-1$ 有最值，即其对称轴为直线 $x=-1$， 由此可得： $\begin{cases}x_1+x_2=-2\\ x_1^2+x_2^2=10\end{cases}$，

解得： $\begin{cases}x_1=1\\ x_2=-3\end{cases}$， 可设二次函数解析式为 $y=a(x-1)(x+3)$， 函数经过点 $(-1,-4)$，

则有 $-4a=-4$， 解得： $a=1$， 即得二次函数解析式为 $y=x^2+2x-3$．

【总结】考查二次函数的解析式求法，可根据方程思想进行求解．

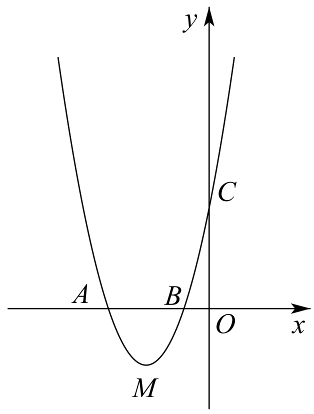
【例16】如图，抛物线经过 A（-2，0）、B（$-\frac{1}{2}$，0）、C（0，2）三点.

（1）求抛物线的解析式；

（2）在直线 AC 下方的抛物线上有一点 D，使得 ΔDCA 的面积最大，求点 D 的坐标；

（2）设 M 是抛物线的顶点，试判断抛物线上是否存在点 H 满足 $\angle AMH=90°$，若存在，请求出点 H 的坐标；若不存在，请说明理由.

【难度】★★★



【答案】（1） $y=2x^2+5x+2$；（2）$(-1，-1)$；

（3）$H\left(-\frac{11}{12},-\frac{65}{72}\right)$.

【解析】（1）由抛物线与 x 轴交点可设抛物线解析式为：

$y=a(x+2)\left(x+\frac{1}{2}\right)$，抛物线过点 C（0，2），则有 $a=2$，

抛物线解析式即为 $y=2x^2+5x+2$；

（2）设 $D(t，2t^2+5t+2)(-2<t<0)$，设直线 AC 的解析式为：$y=kx+b\,(k\neq 0)$，

代入点 A（-2，0）、C（0，2），得解析式为：$y=x+2$.

过点 D 作 $DE\perp x$ 轴，交直线 AC 于点 E，则 $E(t，t+2)$，

则 $DE=t+2-2t^2-5t-2=-2t^2-4t$.

所以 $S_{\Delta DCA}=\frac{1}{2}\times(-2t^2-4t)\times 2=-2t^2-4t=-2(t+1)^2+2$.

故当 $t=-1$ 时，ΔDCA 的面积最大，此时点 D 的坐标为 $(-1,-1)$.

（3）由（1）可得抛物线顶点 $M\left(-\frac{5}{4},-\frac{9}{8}\right)$，设点 H 横坐标为 x，则有 $H\left(x,2x^2+5x+2\right)$，

通过点 A、M 分别向 y 轴、x 轴作平行线，转化为“一线三直角”基本模型，由此

即可得到 $\dfrac{\frac{9}{8}}{x-\left(-\frac{5}{4}\right)}=\dfrac{\left(-\frac{5}{4}\right)-(-2)}{\left(2x^2+5x+2\right)-\left(-\frac{9}{8}\right)}$，整理即得方程 $(4x+5)(12x+11)=0$，

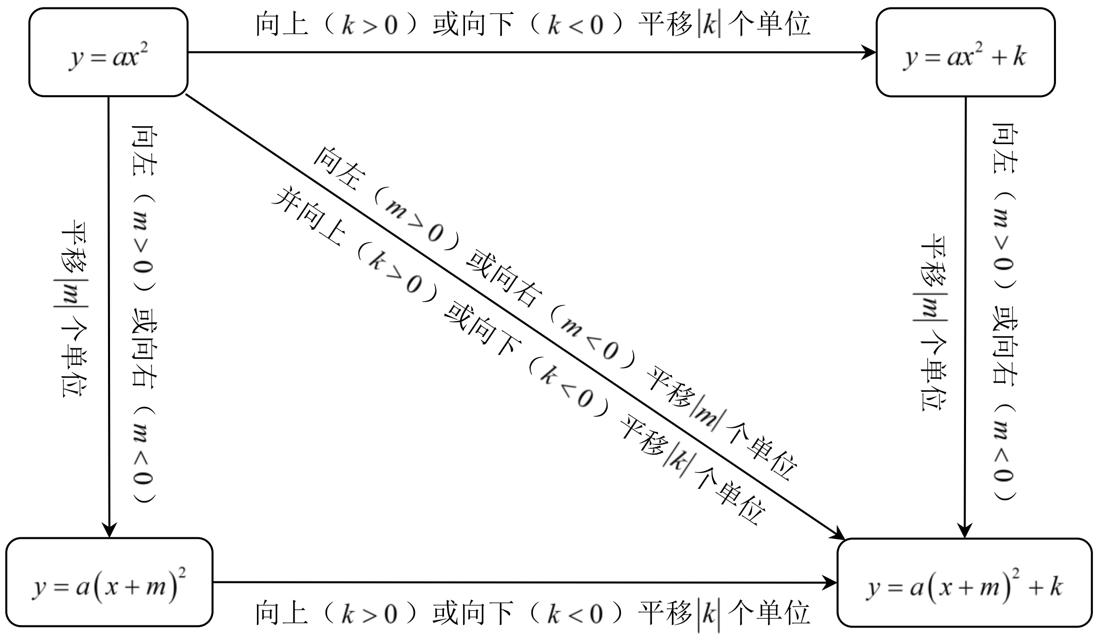
解得：$x_1=-\frac{5}{4}$，$x_2=-\frac{11}{12}$，则有 $2x^2+5x+2=-\frac{65}{72}$，即 H 点坐标为 $H\left(-\frac{11}{12},-\frac{65}{72}\right)$.

【总结】本题难点在于直角三角形的存在性问题，在平面直角坐标系中，用“数形结合”通过作垂线将点坐标转化为线段长度，构造“一线三直角”基本模型，可以较快计算得到答案，可以省去大量勾股定理的计算过程.

模块四：二次函数的平移

知识精讲

1、几种特殊的二次函数解析式之间的平移关系：



2、二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的平移

（1）将二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 左右平移：

向左平移 m 个单位，函数解析式变为 $y=a(x+m)^2+b(x+m)+c$；

向右平移 m 个单位，函数解析式变为 $y=a(x-m)^2+b(x-m)+c$.

（2）将二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 上下平移：

向上平移 n 个单位，函数解析式变为 $y=ax^2+bx+c+n$；

向下平移 n 个单位，函数解析式变为 $y=ax^2+bx+c-n$.

（3）通常，在平移前，将二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 化成 $y=a(x+m)^2+k$ 的形式，再根据平移的情况写出平移后函数的顶点式，再将顶点式整理成一般式.

例题解析

【例17】 抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 向左平移 8 个单位，再向下平移 9 个单位，所得的抛物线的解析式是________________.

【难度】★

【答案】 $y=\frac{1}{2}x^2+8x+23$.

【解析】根据二次函数的平移法则，“上加下减，左加右减”，可知平移后的函数解析式为 $y=\frac{1}{2}(x+8)^2-9$，整理即为 $y=\frac{1}{2}x^2+8x+23$.

【总结】考查二次函数“上加下减，左加右减”的平移法则.

【例18】 已知抛物线 $y=a(x-h)^2$ 向右平移 3 个单位后得到的抛物线是 $y=2(x+1)^2$，求 a、h 的值.

【难度】★

【答案】 $a=2$， $h=-4$.

【解析】根据抛物线平移法则，可得抛物线 $y=a(x-h)^2$ 右移 3 个单位后得到的抛物线是 $y=a(x-h-3)^2$，抛物线为 $y=2(x+1)^2$，则有 $a=2$， $-h-3=1$，解得： $h=-4$.

【总结】考查二次函数“上加下减，左加右减”的平移法则.

【例19】 如果将抛物线 $y=x^2+2x-1$ 向上平移，使它经过点 A（0，3），那么所得的新抛物线的解析式是____________________.

【难度】★★

【答案】 $y=x^2+2x+3$.

【解析】可设抛物线 $y=x^2+2x-1$ 向上平移得到的抛物线解析式为 $y=x^2+2x-1+k$，新抛物线过点 A（0，3），则有 $-1+k=3$，得 $k=4$，即得新抛物线解析式为 $y=x^2+2x+3$.

【总结】考查二次函数“上加下减，左加右减”的平移法则.

【例20】如果一种变换是将抛物线向右平移 2 个单位长度或向上平移 1 个单位长度，我们把这种变换称为抛物线的简单变换．已知一条抛物线经过两次简单变换后得到的抛物线是 $y=x^2+1$，则原抛物线的解析式不可能是（　　）

A．$y=x^2-1$　　B．$y=x^2+6x+5$

C．$y=x^2+4x+4$　　D．$y=x^2+8x+17$

【难度】★★

【答案】B

【解析】A 选项抛物线两次向上平移 1 个单位长度即可得到抛物线 $y=x^2+1$；C 选项抛物线向右平移 2 个单位长度，向上平移 1 个单位长度即可得到抛物线 $y=x^2+1$；D 选项抛物线两次向右平移 2 个单位长度即可得到抛物线 $y=x^2+1$；B 选项不能得到抛物线 $y=x^2+1$．

【总结】考查抛物线的平移法则的应用．

【例21】如图，平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=4$，点 D 的坐标为（0，8），以 C 为顶点的抛物线 y_1 经过 x 轴上的点 A 和点 B．

（1）求抛物线 y_1 的解析式；

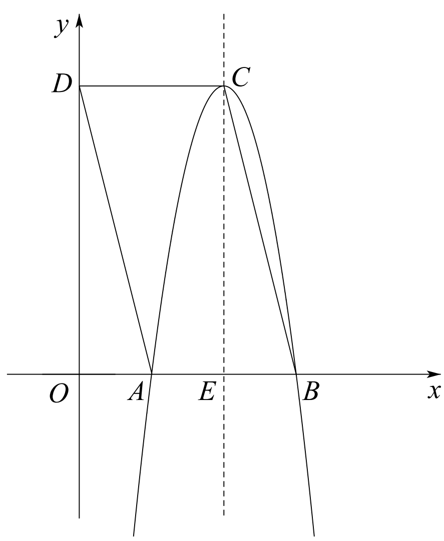
（2）将抛物线 y_1 向上平移，使它经过点 D，求所得抛物线 y_2 的解析式．

【难度】★★★

【答案】（1）$y_1=-2x^2+16x-24$；

（2）$y_2=-2x^2+16x+8$．

【解析】（1）四边形 $ABCD$ 是平行四边形，可得 $CD=AB=4$，即得 $C(4,8)$，同时 A、B 关于对称轴对称，则有 $AE=BE=2$，即得 $A(2,0)$，$B(6,0)$，



可设抛物线解析式 $y_1=a(x-2)(x-6)$，抛物线过 $C(4,8)$，则有 $(4-2)\times(4-6)a=8$，

解得：$a=-2$，即抛物线解析式为 $y_1=-2(x-2)(x-6)$，整理即为 $y_1=-2x^2+16x-24$；

（2）抛物线向上平移，形状和对称轴都不发生变化，可设移动后的抛物线解析式为 $y_2=-2x^2+16x+k$，抛物线过点 $D(0,8)$，则有 $k=8$，即得 $y_2=-2x^2+16x+8$.

【总结】考查抛物线的对称性性质的应用，同时考查抛物线的平移.

模块五：二次函数的对称

知识精讲

1、关于 x 轴对称：

$y=ax^2+bx+c$ 关于 x 轴对称后，得到的解析式是 $y=-ax^2-bx-c$；

$y=a(x+m)^2+k$ 关于 x 轴对称后，得到的解析式是 $y=-a(x+m)^2-k$.

2、关于 y 轴对称：

$y=ax^2+bx+c$ 关于 y 轴对称后，得到的解析式是 $y=ax^2-bx+c$；

$y=a(x+m)^2+k$ 关于 y 轴对称后，得到的解析式是 $y=a(x-m)^2+k$.

3、关于原点对称：

$y=ax^2+bx+c$ 关于原点对称后，得到的解析式是 $y=-ax^2+bx-c$；

$y=a(x+m)^2+k$ 关于原点对称后，得到的解析式是 $y=-a(x-m)^2-k$.

4、关于顶点对称：

$y=ax^2+bx+c$ 关于顶点对称后，得到的解析式是 $y=-ax^2-bx+c-\dfrac{b^2}{2a}$；

$y=a(x+m)^2+k$ 关于顶点对称后，得到的解析式是 $y=-a(x+m)^2+k$.

5、关于点（p，q）对称：

$y=a(x+m)^2+k$ 关于点（p，q）对称后，得到的解析式是 $y=-a(x-m-2p)^2+2q-k$.

例题解析

【例22】抛物线 $y=2x^2-4x+3$ 绕坐标原点旋转 180° 所得的抛物线的解析式是________.

【难度】★

【答案】$y=-2x^2+4x-3$.

【解析】抛物线绕原点旋转 180°，所得新抛物线与原抛物线关于 x 轴对称，各项系数变为其相反数，可得新抛物线解析式为 $y=-2x^2+4x-3$.

【总结】考查二次函数关于 x 轴的对称.

【例23】 以 x 轴为对称轴，将抛物线 $y=2x^2-5$ 翻折后，再向左平移 3 个单位，所得的抛物线对应的函数解析式为________________.

【难度】★

【答案】$y=-2x^2-12x-13$.

【解析】将抛物线 $y=2x^2-5$ 以 x 轴为对称轴翻折所得抛物线解析式为 $y=-2x^2+5$，再向左平移 3 个单位得到抛物线解析式为 $y=-2(x+3)^2+5$，整理即为 $y=-2x^2-12x-13$.

【总结】考查二次函数的对称和旋转平移.

【例24】 抛物线 $y=2x^2+4x-5$ 关于 y 轴对称的抛物线的解析式为________________，关于直线 $x=3$ 对称的抛物线的解析式为________________，关于直线 $y=3$ 对称的抛物线的解析式为____________________.

【难度】★★

【答案】$y=2x^2-4x-5$，$y=2x^2-28x+91$，$y=-2x^2-4x+11$

【解析】抛物线 $y=2x^2+4x-5$ 关于 y 轴对称抛物线解析式为 $y=2x^2-4x-5$；抛物线 $y=2x^2+4x-5$ 整理成顶点式即为 $y=2(x+1)^2-7$，抛物线对称轴为直线 $x=-1$，关于直线 $x=3$ 对称的抛物线对称轴为直线 $x=7$，可得对称抛物线解析式为 $y=2(x-7)^2-7$，

整理即为 $y=2x^2-28x+91$；同时 $y=2(x+1)^2-7$ 关于直线 y = 3 对称的抛物线解析式为 $y=-2(x+1)^2+2\times3-(-7)$，整理即为 $y=-2x^2-4x+11$.

【总结】考查二次函数关于直线对称的抛物线解析式和相应的推导过程以及相关系数之间的关系.

【例25】 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与抛物线 $y=x^2-6x+7$ 关于点 A（1，2）对称，则 $a=$______，$b=$______，$c=$______.

【难度】★★

【答案】-1，-2，5.

【解析】抛物线 $y=x^2-6x+7$ 整理成顶点式即为 $y=(x-3)^2-2$，$y=(x-3)^2-2$ 关于点 A（1，2）的对称函数解析式即为 $y=-(x+3-2\times1)^2+2\times2-(-2)$，整理成一般形式即为 $y=-x^2-2x+5$，由此可得: $a=-1$，$b=-2$，$c=5$.

【总结】考查二次函数关于点对称的对称函数解析式的求法.

【例26】如图，已知抛物线C_1：$y=a(x+2)^2-5$的顶点为P，与x轴相交于A、B两点（点A在点B的左边），点B的横坐标是1．

（1）求点P的坐标及a的值；

（2）如图（1），抛物线C_1与抛物线C_2关于x轴对称，将抛物线C_2向右平移，平移后的抛物线记为C_3，C_3的顶点为M，当点P、M关于点B成中心对称时，求C_3的解析式；

（3）如图(2)，点Q是x轴正半轴上一点，将抛物线C_1绕点Q旋转180°后得到抛物线C_4．抛物线C_4的顶点为N，与x轴相交于E、F两点（点E在F的左边），当以点P、N、F为顶点的三角形是直角三角形时，求点Q的坐标．

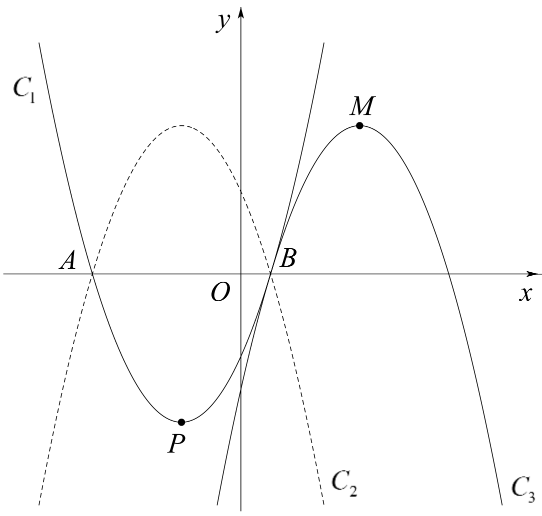


图 1

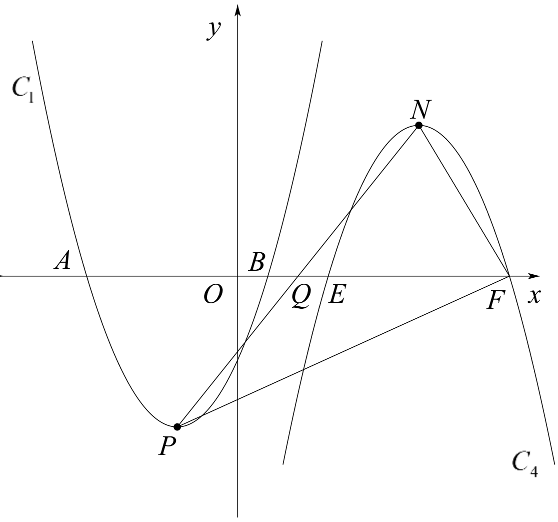


图 2

【难度】★★★

【答案】（1）$P(-2,-5)$，$a=\frac{5}{9}$；（2）$y=-\frac{5}{9}(x-4)^2+5$；（3）$\left(\frac{19}{3},0\right)$或$\left(\frac{2}{3},0\right)$．

【解析】（1）抛物线为$y=a(x+2)^2-5$，即得其顶点$P(-2,-5)$，且抛物线过点$B(1,0)$，则有$(1+2)^2a-5=0$，得:$a=\frac{5}{9}$；

（2）由$C_1:y=\frac{5}{9}(x+2)^2-5$，$C_2$与$C_1$关于$x$轴对称，可得$C_2:y=-\frac{5}{9}(x+2)^2+5$，点$P$、点$M$关于点$B$中心对称，由$P(-2,-5)$，$B(1,0)$，可得$M(4,5)$，点$M$为抛物线$C_3$顶点，由此可得:$C_3:y=-\frac{5}{9}(x-4)^2+5$；

（3）设点$Q(t,0)$，则有$C_4:y=-\frac{5}{9}(x-2t-2)^2+5$，即得:$N(2t+2,5)$，$F(2t+5,0)$，

由 $P(-2,-5)$，根据勾股定理可得 $NF^2=34$， $PN^2=(2t+4)^2+10^2=4t^2+16t+116$，

$PF^2=(2t+7)^2+5^2=4t^2+28t+74$， ΔPNF 为直角三角形，可进行如下分类讨论：

① $\angle PNF=90°$，则有 $PN^2+NF^2=PF^2$，即 $4t^2+16t+116+34=4t^2+28t+74$，

解得：$t=\dfrac{19}{3}$， 即得：$Q\left(\dfrac{19}{3},0\right)$；

② $\angle PFN=90°$，则有 $PF^2+NF^2=PN^2$，即 $4t^2+28t+74+34=4t^2+16t+116$，

解得：$t=\dfrac{2}{3}$，即得：$Q\left(\dfrac{2}{3},0\right)$；

③ $\angle NPF=90°$，则有 $PN^2+PF^2=NF^2$，即 $4t^2+16t+116+4t^2+28t+74=34$，方程无解.

综上所述，即得：$Q\left(\dfrac{19}{3},0\right)$ 或 $Q\left(\dfrac{2}{3},0\right)$.

【总结】直角三角形的存在性问题，转化为三边长度满足勾股定理即可，或是在平面直角坐标系中利用点坐标构造“一线三直角”基本模型可快速求解.

随堂检测

【习题1】 已知抛物线的顶点为 M（1，4），图像与 x 轴的两个交点的距离是 6，则抛物线的解析式为__________________.

【难度】★

【答案】 $y=-\dfrac{4}{9}x^2+\dfrac{8}{9}x+\dfrac{32}{9}$.

【解析】函数顶点为 M（1，4），可知抛物线对称轴为直线 $x=1$，依题意可得：$\begin{cases}x_1+x_2=2\\x_2-x_1=6\end{cases}$，

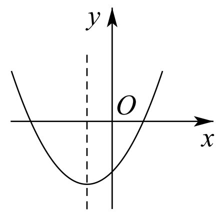
解得：$\begin{cases}x_1=-2\\x_2=4\end{cases}$，可设抛物线解析式为 $y=a(x+2)(x-4)$，抛物线过点 M（1，4），

则有 $(1+2)\times(1-4)a=4$，解得：$a=-\dfrac{4}{9}$，得抛物线解析式为 $y=-\dfrac{4}{9}(x+2)(x-4)$，

整理即为 $y=-\dfrac{4}{9}x^2+\dfrac{8}{9}x+\dfrac{32}{9}$.

【总结】考查根据韦达定理与二次函数相结合求二次函数解析式.

【习题2】 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 图像如图所示，则点 A（b^2-4ac，$-\dfrac{b}{a}$）在第______象限．



【难度】★

【答案】四．

【解析】由图像可知函数与 x 轴有两不同的交点，即对于方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 而言，方程有两不相等的实数根，则有 $\Delta=b^2-4ac>0$；同时抛物线对称轴在 y 轴左侧，则有 $-\dfrac{b}{2a}<0$，得 $-\dfrac{b}{a}<0$，由此可知点 A（b^2-4ac，$-\dfrac{b}{a}$）在第四象限．

【总结】考查根据函数大致图像判定二次函数的相关特征值的问题，注意抓住二次函数特征量与系数之间的关系．

【习题3】 已知一次函数 $y=-\dfrac{1}{2}x+m$ 的图像经过点 A（-2，3），并与 x 轴相交于点 B，二次函数 $y=ax^2+bx-2$ 的图像经过点 A 和点 B．

（1）分别求这两个函数的解析式；

（2）如果将二次函数的图像沿 y 轴的正方向平移，平移后的图像与一次函数的图像相交于点 P，与 y 轴相交于点 Q，当 $PQ\,//\,x$ 轴时，试问二次函数的图像平移了几个单位？

【难度】★★

【答案】（1）一次函数 $y=-\dfrac{1}{2}x+2$，二次函数 $y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{3}{2}x-2$；（2）$\dfrac{5}{2}$．

【解析】（1）一次函数 $y=-\dfrac{1}{2}x+m$ 过点 A（-2，3），则有 $-\dfrac{1}{2}\times(-2)+m=3$，解得：$m=2$，则一次函数解析式为 $y=-\dfrac{1}{2}x+2$；令 $y=-\dfrac{1}{2}x+2=0$，解得 $x=4$，即得 $B(4,0)$，二次函数过点 A 和点 B，则有 $\begin{cases}4a-2b-2=3\\16a+4b-2=0\end{cases}$，解得：$a=\dfrac{1}{2}$，$b=-\dfrac{3}{2}$，即得二次函数解析式为：$y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{3}{2}x-2$；

（2）设平移后的抛物线解析式为 $y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{3}{2}x-2+k$，则有 $Q(0,\ k-2)$，$PQ\,//\,x$ 轴，则有 P、Q 关于抛物线对称轴 $x=\dfrac{3}{2}$ 对称，由此可得 $P(3,\ k-2)$，P 在一次函数图像上，则有 $-\dfrac{1}{2}\times 3+2=k-2$，解得：$k=\dfrac{5}{2}$，即二次函数图像平移了 $\dfrac{5}{2}$ 个单位．

【总结】考查“待定系数法”求二次函数解析式，同时考查二次函数图像的平移变换，注意二次函数的对称性的应用．

【习题4】 已知抛物线 $y=(1-m)x^2+4x-3$ 开口向下，与 x 轴交于点 A（x_1，0）和点 B（x_2，0），其中 $x_1<x_2$，若 $x_1^2+x_2^2=10$，则抛物线的解析式为________________.

【难度】★★

【答案】 $y=-x^2+4x-3$.

【解析】令 $y=(1-m)x^2+4x-3=0$，根据韦达定理可得方程两根满足 $x_1+x_2=\dfrac{4}{m-1}$，

$x_1x_2=\dfrac{3}{m-1}$， $x_1^2+x_2^2=10$，即 $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=10$，代入即 $\left(\dfrac{4}{m-1}\right)^2-2\times\dfrac{3}{m-1}=10$，

整理得 $5m^2-7m-6=0$，解得：$m_1=-\dfrac{3}{5}$，$m_2=2$，由抛物线开口方向向下，可得 $1-m<0$，

则有 $m>1$，得： $m=2$，则二次函数解析式为 $y=-x^2+4x-3$.

【总结】考查韦达定理与二次函数想结合求相应二次函数解析式.

【习题5】 在直角坐标系中，把点 A（-1， a）（a 为常数）向右平移 4 个单位得到点 A'，经过 A、 A' 的抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 y 轴的交点的纵坐标为 2.

（1）求这条抛物线的解析式;

（2）设该抛物线的顶点为点 P，点 B 的坐标为（1，m），且 $m<3$，若 ΔABP 是等腰三角形，求点 B 的坐标.

【难度】★★★

【答案】（1） $y=-x^2+2x+2$；（2） $B\left(1,3-2\sqrt{5}\right)$ 或 $B(1,\dfrac{1}{2})$ 或 $B(1,-5)$.

【解析】（1）点 A（-1， a）向右平移 4 个单位得到 $A'(3,a)$，A、 A' 的抛物线与 y 轴交点纵坐标为 2，即有 $\begin{cases}a-b+c=a\\9a+3b+c=a\\c=2\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a=-1\\b=2\\c=2\end{cases}$，得抛物线解析式为 $y=-x^2+2x+2$；

（2）由（1）可得 $y=-x^2+2x+2=-(x-1)^2+3$，即得 $P(1,3)$，由 $A(-1,-1)$， $B(1,m)$，

根据两点间距离公式， $BP=3-m$， $AP=2\sqrt{5}$， $AB=\sqrt{2^2+(m+1)^2}=\sqrt{m^2+2m+5}$，

ΔABP 是等腰三角形，可进行如下的分类讨论：

① $BP=AP$，即 $3-m=2\sqrt{5}$，解得： $m=3-2\sqrt{5}$，点 $B\left(1,3-2\sqrt{5}\right)$；

② $BP=AB$，即 $3-m=\sqrt{m^2+2m+5}$，解得： $m=\dfrac{1}{2}$，则点 $B(1,\dfrac{1}{2})$；

③ $BA=AP$，即 $\sqrt{m^2+2m+5}=2\sqrt{5}$，解得：$m_1=3$（舍去），$m_2=-5$，则点 $B(1,-5)$．

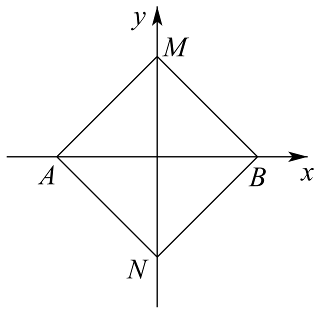
综上所述，点 B 坐标为 $\left(1,3-2\sqrt{5}\right)$ 或 $(1,\frac{1}{2})$ 或 $(1,-5)$．

【总结】等腰三角形存在性问题，从三边长进行分类讨论．

【习题6】对于任意两个二次函数：$y_1=a_1x^2+b_1x+c_1$，$y_2=a_2x^2+b_2x+c_2$（$a_1a_2\neq0$），当 $|a_1|=|a_2|$ 时，我们称这两个二次函数的图像为全等抛物线．现有 ΔABM，A（-1，0），B（1，0）．记过三点的二次函数抛物线为“$C_{\square\square\square}$”（“$\square\square\square$”中填写相应三个点的字母）．已知 M（0，1），$\Delta ABM\cong\Delta ABN$，如图．请通过计算判断 C_{ABM} 与 C_{ABN} 是否为全等抛物线．

【难度】★★★

【答案】是全等抛物线．



【解析】由 M（0，1），$\Delta ABM\cong\Delta ABN$，可得 $N(0,-1)$，设

$C_{ABM}=a_1(x-1)(x+1)$，抛物线过 $M(0,1)$，可得：$a_1=-1$；

设 $C_{ABN}=a_2(x-1)(x+1)$，抛物线过 $N(0,-1)$，可得：$a_2=1$；

由 $|a_1|=|a_2|=1$，可知 C_{ABM} 与 C_{ABN} 是全等抛物线．

【总结】新定义题型，根据新定义判断题意所需即可，实际上，本题中两条抛物线关于 x 轴对称，易于判断．

【习题7】已知抛物线 $y=mx^2-\left(3m+\frac{4}{3}\right)x+4$ 与 x 轴交于 A、B 两点，与 y 轴交于点 C，若 ΔABC 是等腰三角形，求抛物线的解析式．

【难度】★★★

【答案】$y=-\frac{4}{9}x^2+4$，$y=-\frac{8}{7}x^2+\frac{44}{21}x+4$，$y=-\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{3}x+4$，$y=\frac{1}{6}x^2-\frac{11}{6}x+4$．

【解析】令 $y=mx^2-\left(3m+\frac{4}{3}\right)x+4=0$，解得：$x_1=\frac{4}{3m}$，$x_2=3$，则有 $AB=\left|3-\frac{4}{3m}\right|$，$C(0,4)$，

勾股定理可得：$BC=\sqrt{CO^2+BO^2}=5$，$AC=\sqrt{AO^2+CO^2}=\sqrt{\left(\frac{4}{3m}\right)^2+4^2}$，

ΔABC 是等腰三角形，依题意可进行如下分类讨论：

① $AC=BC$，此时易得 $AO=BO$，则抛物线对称轴为 y 轴，由此可得：$-\left(3m+\frac{4}{3}\right)=0$，

解得：$m=-\frac{4}{9}$，对应抛物线解析式为 $y=-\frac{4}{9}x^2+4$；

② $AC=AB$，即得 $\sqrt{\left(\frac{4}{3m}\right)^2+4^2}=3-\frac{4}{3m}$，解得：$m=-\frac{8}{7}$，此时对应抛物线解析式为

$y=-\frac{8}{7}x^2+\frac{44}{21}x+4$；

③ $AB=BC$，即得 $\left|3-\frac{4}{3m}\right|=5$，解得：$m_1=-\frac{2}{3}$，$m_2=\frac{1}{6}$，当 $m=-\frac{2}{3}$ 时，对应抛物线解析式为 $y=-\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{3}x+4$；当 $m=\frac{1}{6}$ 时，对应抛物线解析式为 $y=\frac{1}{6}x^2-\frac{11}{6}x+4$．

【总结】考查等腰三角形的存在性问题，在解方程的基础上，利用勾股定理计算出线段长度，再进行分类讨论即可，注意长度要添加绝对值．

课后作业

【作业1】 二次函数的图像的对称轴是 $x=\frac{1}{2}$，在 y 轴上的截距是 3，且过点（2，7），则它的解析式为________________________．

【难度】★

【答案】 $y=2x^2-2x+3$．

【解析】可设抛物线解析式为 $y=a\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+k$，抛物线过点 $(0,3)$，$(2,7)$，

依题意可得：$\begin{cases}\frac{1}{4}a+k=3\\ \frac{9}{4}a+k=7\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a=2\\ k=\frac{5}{2}\end{cases}$，即得二次函数解析式为：$y=2x^2-2x+3$．

【总结】考查根据题意设合适的二次函数解析式解决问题．

【作业2】 抛物线 $y=2(x-1)^2+4$ 关于原点对称的抛物线的表达式为________________．

【难度】★

【答案】 $y=-2x^2-4x-6$．

【解析】抛物线 $y=2(x-1)^2+4$ 关于原点对称抛物线解析式为 $y=-2(x+1)^2-4$，整理成一般形式即为 $y=-2x^2-4x-6$．

【总结】考查二次函数关于原点对称的的抛物线解析式与原函数的关联.

【作业3】若二次函数的图像与 x 轴只有一个交点，对称轴是直线 $x=3$，与 y 轴的交点是（0，6），则二次函数解析式为____________________.

【难度】★

【答案】$y=\frac{2}{3}x^2-4x+6$.

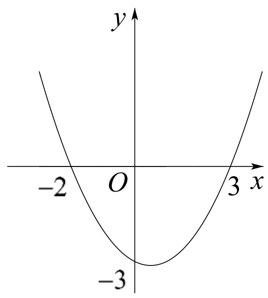
【解析】抛物线与 x 轴只有一个交点，对称轴是直线 $x=3$，由此可设抛物线解析式为 $y=a(x-3)^2$，抛物线过 $(0,6)$，则有 $9a=6$，解得 $a=\frac{2}{3}$，则抛物线解析式为 $y=\frac{2}{3}x^2-4x+6$.

【总结】考查对二次函数与 x 轴只有一个交点题意的理解.

【作业4】已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像如图所示，函数的解析式为________________.

【难度】★★

【答案】$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-3$.



【解析】由函数图像可设函数解析式为 $y=a(x+2)(x-3)$，函数过点 $(0,-3)$，则有 $-6a=-3$，解得：$a=\frac{1}{2}$，则二次函数解析式为 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-3$.

【总结】考查根据二次函数的图像设交点式求解二次函数解析式.

【作业5】已知抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+\left(3-\sqrt{m^2}\right)x+m-1$ 的顶点在 y 轴的正半轴上，求抛物线的表达式、顶点坐标、对称轴，并分析抛物线的上升、下降趋势.

【难度】★★

【答案】抛物线解析式 $y=\frac{1}{2}x^2+2$，顶点坐标 $(0,2)$，对称轴为 y 轴，$x\geq0$ 时函数值随 x 增大而增大，即函数上升，$x<0$ 时函数值随 x 增大而减小，即函数下降.

【解析】抛物线顶点在 y 轴正半轴，可知抛物线对称轴即为 y 轴，由此可得：$\begin{cases}3-\sqrt{m^2}=0\\m-1>0\end{cases}$，即得：$m=3$，抛物线解析式即为 $y=\frac{1}{2}x^2+2$，抛物线顶点即为 $(0,2)$，函数开口方向向上，在对称轴右侧，即 $x\geq0$ 时，函数值随着 x 的增大而增大，在对称轴左侧，即 $x<0$ 时，函数值随着 x 的增大而减小.

【总结】考查二次函数的特征量，首先由顶点在 y 轴上判断出函数对称轴为 y 轴.

【作业6】 已知直线 l 经过点（4，0），且与 x 轴、y 轴围成的直角三角形的面积等于 8．如果一个二次函数的图像经过直线 l 与两条坐标轴的交点，以直线 $x=3$ 为对称轴，且开口向下，求这个二次函数的解析式．

【难度】★★

【答案】 $y=-\frac{1}{2}x^2+3x-4$．

【解析】设直线 l 解析式为 $y=kx+b$，直线 l 与 x 轴、y 轴所围成直角三角形面为 8，即 $\frac{1}{2}\times 4|b|=8$，解得：$b=\pm 4$，抛物线过点（4，0），且对称轴为直线 $x=3$，则抛物线与 x 轴另一交点为（2，0），可设抛物线解析式为 $y=a(x-2)(x-4)$，抛物线开口向下，则有 $a<0$，抛物线与 y 轴交点为 $(0,8a)$，即 $(0,\ b)$，由此可得 $b=8a<0=-4$，解得：$a=-\frac{1}{2}$，由此可得二次函数解析式为 $y=-\frac{1}{2}(x-2)(x-4)$，整理即为 $y=-\frac{1}{2}x^2+3x-4$．

【总结】考查二次函数的对称性的应用，同时由开口方向决定抛物线与 y 轴交点在 y 轴上的位置．

【作业7】 若抛物线 $y=ax^2+bx+3$ 与 $y=-x^2+3x+2$ 的两交点关于原点对称，求 a、b 的值．

【难度】★★

【答案】 $a=-\frac{3}{2}$，$b=3$．

【解析】令 $ax^2+bx+3=-x^2+3x+2$，整理即为 $(a+1)x^2+(b-3)x+1=0$，抛物线两交点关于原点对称，根据韦达定理则有 $x_1+x_2=\frac{3-b}{a+1}=0$，得：$b=3$，则 $y_1=-x_1^2+3x_1+2$，$y_1=-x_2^2+3x_2+2$，$y_1+y_2=0$，该式即为 $-(x_1+x_2)^2+2x_1x_2+3(x_1+x_2)+4=0$，得 $x_1x_2=-2$，根据韦达定理 $x_1x_2=\frac{1}{a+1}=-2$，得：$a=-\frac{3}{2}$．

【总结】考查点坐标的对称与二次函数交点的综合应用，结合韦达定理确定相应字母未知数的取值．

【作业8】已知在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=ax^2-4$ 与 x 轴的负半轴相交于点 A，与 y 轴相交于点 B，$AB=2\sqrt{5}$．点 P 在抛物线上，线段 AP 与 y 轴的正半轴交于点 C，线段 BP 与 x 轴交于点 D．设点 P 的横坐标为 m．

（1）求这条抛物线的解析式；

（2）用含 m 的代数式表示线段 CO 的长；

（3）当 $\tan\angle ODC=\frac{3}{2}$ 时，求 $\angle PAD$ 的正弦值．

【难度】★★★

【答案】（1）$y=x^2-4$；（2）$CO=2m-4$；（3）$\frac{\sqrt{2}}{2}$．

【解析】（1）抛物线 $y=ax^2-4$ 交 y 轴于点 $B(0,-4)$，则有 $OB=4$，根据勾股定理可得 $OA=\sqrt{AB^2-OB^2}=2$，抛物线与 x 轴负半轴相交，可知点 $A(-2,0)$，$A(-2,0)$ 在抛物线上，则有 $(-2)^2a-4=0$，得：$a=1$，即抛物线解析式为 $y=x^2-4$；

（2）点 $P(m,\ m^2-4)$，$A(-2,0)$，线段 AP 与 x 轴正半轴相交，可知 $m>2$，

设 AP 解析式为 $y=k_1x+b_1$，则有 $\begin{cases}-2k_1+b_1=0\\k_1m+b_1=m^2-4\end{cases}$，解得：$\begin{cases}k_1=m-2\\b_1=2m-4\end{cases}$，即 AP 解析式为 $y=(m-2)x+2m-4$，令 $x=0$，得 $y=2m-4$，则有 $CO=2m-4$；

（3）设 BP 解析式为 $y=k_2x+b_2$，由 $B(0,-4)$，则有 $\begin{cases}b_2=-4\\k_2m+b_2=m^2-4\end{cases}$，解得：$\begin{cases}k_2=m\\b_2=-4\end{cases}$，

即 BP 解析式为 $y=mx-4$，令 $y=0$，得 $x=\frac{4}{m}$，则有 $OD=\frac{4}{m}$，

$\tan\angle ODC=\frac{3}{2}=\frac{OC}{OD}=\frac{2m-4}{\frac{4}{m}}=\frac{m^2-2m}{2}$，解得 $m_1=-1$（舍），$m_2=3$，由此可得：$CO=2$，

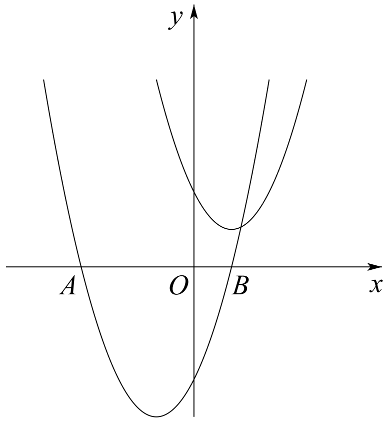
又 $AO=2=CO$，则有 $\angle PAD=45°$，$\sin\angle PAD=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

【总结】考查平面直角坐标系中点坐标和长度的转化，注意正负．

【作业9】 已知抛物线 $y_1=x^2-mx+\frac{m^2}{2}$ 与抛物线 $y_2=x^2+mx-\frac{3}{4}m^2$ 在同一平面直角坐标系中的位置如图所示.

（1）试判断哪条抛物线经过 A、B 两点，并说明理由；

（2）若 A、B 两点到原点的距离 AO、BO 的长满足 $\frac{1}{OB}-\frac{1}{OA}=\frac{2}{3}$，求经过 A、B 两点的抛物线解析式.



【难度】★★★

【答案】（1） $y_2=x^2+mx-\frac{3}{4}m^2$；（2） $y=x^2+2x-3$.

【解析】（1）两条抛物线对应的一元二次方程，抛物线与 x 轴有两交点表示其 $\Delta>0$，对于 $y_2=x^2+mx-\frac{3}{4}m^2$，其对应方程 $\Delta=m^2-4\times\left(-\frac{3}{4}m^2\right)=4m^2\geq 0$ 恒成立，由此可知经过 A、B 两点的抛物线即为 $y_2=x^2+mx-\frac{3}{4}m^2$；

（2）令 $y_2=x^2+mx-\frac{3}{4}m^2=0$，解得 $x_1=-\frac{3}{2}m$，$x_2=\frac{1}{2}m$，抛物线对称轴在 y 轴左侧可知 $-\frac{m}{2}<0$，得 $m>0$，$\frac{1}{OB}-\frac{1}{OA}=\frac{2}{3}$，即 $\frac{1}{\frac{1}{2}m}-\frac{1}{\frac{3}{2}m}=\frac{2}{3}$，解得 $m=2$，由此可得抛物线解析式即为 $y=x^2+2x-3$.

【总结】考查二次函数与方程的结合应用，结合方程知识将坐标转化为长度即可求解.

【作业10】 已知抛物线 $y=ax^2+4ax+t$ 与 x 轴的一个交点为 A（-1，0）．

（1）求抛物线与 x 轴的另一个交点 B 的坐标；

（2）D 是抛物线与 y 轴的交点，C 是抛物线上一点，且以 AB 为一底的梯形 $ABCD$ 的面积为 9，求此抛物线的解析式；

（3）E 是第二象限内到 x 轴、y 轴距离的比为 $5:2$ 的点，如果点 E 在（2）中的抛物线上且它与点 A 在此抛物线对称轴的同侧，问：在抛物线的对称轴上是否存在点 P，使 ΔAPE 的周长最小？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由．

【难度】★★★

【答案】（1）$B(-3,0)$；（2）$y=x^2+4x+3$ 或 $y=-x^2-4x-3$；（3）$P\left(-2,\frac{1}{2}\right)$．

【解析】（1）抛物线 $y=ax^2+4ax+t$ 对称轴为直线 $x=-\frac{4a}{2a}=-2$，抛物线与 x 轴一个交点是 A（-1，0），与之对称的另一个交点坐标则为 $B(-3,0)$；

（2）抛物线 $y=ax^2+4ax+t$ 过点 A（-1，0），则有 $a-4a+t=0$，得 $t=3a$，$D(0,3a)$，

$CD//AB//x$ 轴，可知点 C 和点 D 关于对称轴 $x=-2$ 对称，则有 $C(-4,3a)$，$CD=4$，

$AB=2$，梯形面积为 9，则有 $\frac{1}{2}(AB+CD)\cdot OD=9$，即 $\frac{1}{2}\times(2+4)\cdot|3a|=9$，得 $a=\pm1$，

由此可得抛物线解析式为 $y=x^2+4x+3$ 或 $y=-x^2-4x-3$；

（3）E 是第二象限到 x 轴、y 轴距离比为 $5:2$ 的点，可设 $E(2m,-5m)$，

①点 E 在抛物线 $y=x^2+4x+3$ 上时，则有 $(2m)^2+4\cdot2m+3=-5m$，解得：$m_1=-\frac{1}{4}$，$m_2=-3$，

此时得 $E\left(-\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right)$ 或 $E(-6,15)$，点 E 与点 A 在抛物线对称轴同侧，可得 $E\left(-\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right)$，$AE$ 长度确定，ΔAPE 周长最小，即 $AP+PE$ 之和最小，由抛物线的对称性，则有 $AP=BP$，可知 B、P、E 在同一直线上时 ΔAPE 的周长有最小值，设直线 BE 解析式为 $y=kx+b$，

则有 $\begin{cases}-3k+b=0\\ -\frac{1}{2}k+b=\frac{5}{4}\end{cases}$，解得：$k=\frac{1}{2}$，$b=\frac{3}{2}$，即直线 BE 解析式为 $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$，

令 $x=-2$，得 $y=\frac{1}{2}$，即得点 $P\left(-2,\frac{1}{2}\right)$；

②点 E 在抛物线 $y=-x^2-4x-3$ 上，则有 $-(2m)^2-4\cdot2m-3=-5m$，方程无解，

即此时不存在这样的 P 点．

综上所述，点 P 坐标为 $P\left(-2,\frac{1}{2}\right)$．