<table>
<tr><td>Wydział:
Fizyki i Informatyki Stosowanej</td><td colspan="2">Autor/Autorzy:
Marcelina Kruczała, Maciej Szeptuch</td><td>Rok: 2025</td><td>Grupa: N/A</td><td>Zespół: N/A</td></tr>
<tr><td colspan="2">Matematyczne Metody Fizyki 1</td><td colspan="2">Obliczenie całki funkcji f(x)</td><td colspan="2">Ćwiczenie nr: 7</td></tr>
<tr><td>Data wykonania: 2025-06-15</td><td>Data oddania: 2025-06-15</td><td>Zwrot do popr.:</td><td>Data oddania:</td><td>Data zaliczenia:</td><td>Ocena:</td></tr>
</table>

1 Cel ćwiczenia

Oblicz Całkę $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^z dz}{z(1-z)^3}$ gdy:

- Punkt $z = 0$ leży wewnątrz konturu C,
- Punkt $z = 1$ leży wewnątrz konturu C,
- Zarówno punkt $z = 0$ jak i $z = 1$ leżą wewnątrz konturu C.

2 Wstęp teoretyczny

Twierdzenie Cauchy'ego o residuach

W rozwiązaniu zadania skorzystano przede wszystkim z twierdzenia **Cauchy'ego o residuach**. Twierdzenie to mówi, że:

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_k Res(f, z_k) \tag{2.1}$$

(*literatura 1. i 2.*)

Wzór na residuum w biegunie

W celu obliczenia biegunu n-rzędu w punkcie z_0 można wykorzystać następujący wzór:

$$Res(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left((z-z_0)^n f(z)\right) \tag{2.2}$$

(*literatura 3. i 4.*)

3 Rozwiązanie

3.1 Obliczenie Residuów

Pierwszym krokiem jest obliczenie residuów funkcji $f(z) = \frac{e^z}{z(1-z)^3}$ w punktach $z = 0$ i $z = 1$. Korzystając ze wzoru (2.2) mamy:

Dla $z_0 = 0$

$$\begin{aligned} Res(f,0) &= \frac{1}{(1-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d^{1-1}}{dz^{1-1}}\left((z-0)^1 f(z)\right) \\ &= \lim_{z\to 0} z f(z) \\ &= \lim_{z\to 0} \cancel{z}\frac{e^z}{\cancel{z}(1-z)^3} \\ &= \lim_{z\to 0}\frac{e^z}{(1-z)^3} \\ &= 1 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Natomiast dla $z_0 = 1$:

$$\begin{aligned} Res(f,1) &= \frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{d^{3-1}}{dz^{3-1}}\left((z-1)^3 f(z)\right) \\ &= \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\frac{d^2}{dz^2}\left((z-1)^3\frac{e^z}{z(1-z)^3}\right) \\ &= \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\frac{d^2}{dz^2}\left(\cancel{(z-1)^3}\frac{-e^z}{z\cancel{(z-1)^3}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{-e^z}{z}\right) \\ &= \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left(\frac{-e^z}{z}+\frac{e^z}{z^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}e^z\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}\right) \\ &= \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}e^z\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}\right)+e^z\left(\frac{-2}{z^3}+\frac{1}{z^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}e^z\left(\frac{-1}{z}+\frac{2}{z^2}-\frac{2}{z^3}\right) \\ &= \frac{1}{2}e\left(-1+2-2\right) \\ &= \frac{-e}{2} \end{aligned} \tag{3.2}$$

3.2 Obliczenie wartości całek

Zgodnie z twierdzeniem (2.1) możemy teraz obliczyć wartość całki

$$I = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz = \frac{1}{\cancel{2\pi i}}\cancel{2\pi i}\sum_k Res(f, z_k)$$

3.2.1 Gdy $z = 0$ leży wewnątrz konturu C

$$I = 1$$

3.2.2 Gdy $z = 1$ leży wewnątrz konturu C

$$I = \frac{-e}{2}$$

3.2.3 Gdy zarówno $z = 0$ jak i $z = 1$ leżą wewnątrz konturu C

$$I = 1 - \frac{e}{2}$$

4 Literatura

1. *Residue Theorem* https://en.wikipedia.org/wiki/Residue_theorem. Dostęp: 14.06.2025 16:06

2. *Mariusz Przybycień - Matematyczne Metody Fizyki II: Wykład 2* https://home.agh.edu.pl/~mariuszp/wfiis_mmf2/wyklad_mmf2_2.pdf. Dostęp: 14.06.2025 16:06

3. *Residue (complex analysis): Calculation of residues* https://en.wikipedia.org/wiki/Residue_(complex_analysis). Dostęp: 14.06.2025 16:21

4. *Mariusz Przybycień - Matematyczne Metody Fizyki II: Wykład 3* https://home.agh.edu.pl/~mariuszp/wfiis_mmf2/wyklad_mmf2_3.pdf. Dostęp: 14.06.2025 16:25