<table>
<tr><td>Wydział: Fizyki i Informatyki Stosowanej</td><td colspan="2">Autor/Autorzy: Maciej Szeptuch</td><td>Rok: 2025</td><td>Grupa: N/A</td><td>Zespół: N/A</td></tr>
<tr><td colspan="2">Matematyczne Metody Fizyki 1</td><td colspan="2">Zadanie Zaliczeniowe MMF1</td><td colspan="2">Ćwiczenie nr: N/A</td></tr>
<tr><td>Data wykonania: 2025-06-20</td><td>Data oddania: 2025-06-20</td><td>Zwrot do popr.:</td><td>Data oddania:</td><td>Data zaliczenia:</td><td>Ocena:</td></tr>
</table>

1 Zadanie 1

Mamy dwuwymiarowy piekarnik - płaszczyznę.

Niech $T(x, y)$ opisuje temperaurę. Znamy warunki początkowe:

- $T(x, 0) = 0$
- $T(x, d) = T_0$

Przez T_y oznaczmy temperaturę w punkcie y_0 ($T(x, y_0)$).

Informacja

Stałe:

- $T_0 = 453.15K$
- $d = 60cm$
- $y_0 = 40cm$
- $T_{min} = 347.15K$

1.1 Rozwiązanie równaniem Laplace'a

Równanie Laplace'a

Powyższy problem można rozwiązać przy pomocy równania Laplace'a:

$$\Delta T = 0 \tag{1.1}$$

Ponieważ problem jest de facto 1-wymiarowy (zakładamy że grzałki są szerokości piekarnika, więc temperatura zależy jedynie od y) Laplace'ian sprowadza się do drugiej pochodnej względem y:

$$\begin{aligned} \Delta T &= 0 \\ \frac{d^2T}{dy^2} = 0 \Rightarrow T(y) &= \iint dy = \\ &= Ay + B \end{aligned}$$

Teraz można zaaplikować warunki początkowe:

- $T(y = 0) = 0 \Rightarrow B = 0$
- $T(y = d) = T_0 \Rightarrow Ad = T_0 \Rightarrow A = \frac{T_0}{d}$

Więc ostatecznie otrzymujemy $T(y) = \frac{T_0}{d} y$.

1.2 Rozwiązanie przy pomocy transformacji konforemnej

Zakładamy $f(z) = e^{\frac{\pi z}{d}}$.

Wskazówka

Można zweryfikować działanie tej funkcji dla następujących przypadków:

- dolna płaszczyzna piekarnika ($y = 0$) niech $u = x + i * 0$ wtedy $f(u) = e^{\frac{\pi x}{d}}$ co będzie odpowiadało wartością na dodatniej póosi rzeczywistej.
- górna płaszczyzna piekarnika ($y = d$) niech $u = x + i * d$ wtedy $f(u) = e^{\frac{\pi x}{d}} e^{\pi i} = -e^{\frac{\pi x}{d}}$ co będzie odpowiadało wartością na ujemnej póosi rzeczywistej.
- Gdy $y \in [0, d]$, $f(u)$ pozostaje w górnej półpłaszczyźnie zespolonej, ponieważ $f(u) = e^{\frac{\pi x}{d}} e^{\gamma \pi i}$, dla $\gamma \in [0, 1]$ możemy wyliczyć $\Im f(u) = sin(\gamma\pi) e^{\frac{\pi x}{d}}$. Ta liczba jest zawsze większa bądź równa 0 (co znaczy że rozwiązanie znajduje się na górnej półpłaszczyźnie).

Widać, że $f(z)$ jest odwzorowaniem konforemnym $T(z)$ na płaszczyźnie zespolonej.

Należy dokonać transformacji odwrotnej $f(z)$, aby otrzymać funkcję $T(x, y)$.

$$T(x, y) = A * Arg(f(z)) = \frac{T_0}{\pi} * \frac{\pi}{d} x = \frac{T_0}{d} x$$

1.3 Podsumowanie

Ostatecznie w obu metodach otrzymujemy to samo rozwiązanie:

$$T(x, y) = \frac{T_0}{d} y$$

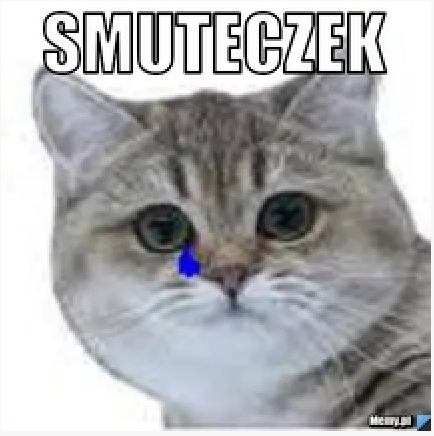
Po podstawieniu wartości stałych mamy:

$$T(x, y) = \frac{453.15}{60} y \frac{K}{cm} = 7.5525 y \frac{K}{cm}$$

Wyliczając $T(x, y_0)$ otrzymujemy $T(x, 40) = 7.5525 * 40 = 302.1K$ co niestety jest mniejsze niż T_{min}.

Wniosek

Ciasto się nie upiekło.



2 Zadanie 2

2.1 Wprowadzenie

Rozważamy pole elektrostatyczne pochodzące od 2 ładunków punktowych. (dodatniego q w $x = a$ i ujemnego $-q$ w $x = -a$). Pole to jest opisane następującą funkcją:

$$f(z) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z+a}\right) \tag{2.1}$$

Szukamy jego rozwinięcia w szereg Laurenta w okolicy punktu $z_0 = 0$ dla 2 przypadków:

1. $|z| < a$
2. $|z| > a$

2.2 Wstęp teoretyczny

2.2.1 Liniowość rozwinięcia w szereg Laurenta

Zdefiniujmy $\hat{L}$ jako operator rozwinięcia w szereg Laurenta.

$$\hat{L}(f(z), z_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

gdzie:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \tag{2.2}$$

Jak widać, całka (2.2) jest operacją liniową. Z tego wynika, ze $\hat{L}$ również jest operatorem liniowym.

Dlatego możemy rozpatrywać (2.1) jako sumę 2 niezależnych szeregów.

$$\hat{L}(f(z), z_0) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0}\left(\hat{L}\left(\frac{1}{z-a}, z_0\right) - \hat{L}\left(\frac{1}{z+a}, z_0\right)\right)$$

2.2.2 Szereg laurenta a suma szeregu geometrycznego

Zgodnie z *literaturą 1.*, funkcja postaci $f(z) = \frac{1}{1-z}$ ma rozwinięcie w szereg Laurenta wokół punktu $z_0 = 0$, które jest równe sumie szeregu geometrycznego:

$$\hat{L}\left(\frac{1}{1-z}, 0\right) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \tag{2.3}$$

Ważne

Zakłąda się, że w powyższym przypadku $|z| < 1$

Wskazówka

Oczywiście stosując odpowiednie przekształcenie, można uzyskać postać powyższego rozwinięcia dla $|z| > 1$ lub dla $z_0 \neq 0$.

2.3 Pierwszy składnik

Rozważamy rozwinięcie funkcji $f(x) = \frac{1}{z-a}$ w okolicy $z_0 = 0$.

dla $|z| < |a|$

$$f(z) = \frac{1}{z-a} = \frac{-1}{a}\frac{1}{1-\frac{z}{a}}$$

Przy spełnionych założeniach, wyrażenie $\frac{z}{a} < 1$, więc możemy skorzystać z równania (2.3):

$$\hat{L}(f(z), 0) = \frac{-1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^n$$

dla $|z| > |a|$

$$f(z) = \frac{1}{z-a} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{a}{z}}$$

wtedy również $\frac{a}{z} < 1$ i można skorzystać z równania (2.3):

$$\hat{L}(f(z), 0) = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n$$

2.4 Drugi składnik

Analogicznie, można dokonać rozwinięcia funkcji $\hat{L}\left(\frac{1}{z+a}, 0\right)$.

Dla $|z| < |a|$ jest to:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z+a} &= \frac{1}{a}\frac{1}{1-\frac{-z}{a}} \\ &= \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-z}{a}\right)^n\end{aligned}$$

natomiast dla $|z| > |a|$ analogicznie mamy:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z+a} &= \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{-a}{z}} \\ &= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-a}{z}\right)^n\end{aligned}$$

2.5 Podsumowanie

Po zsumowaniu obu składników otrzymujemy:

$$f(z) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0}\begin{cases} -\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^n - \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-z}{a}\right)^n, & |z| < a \\ \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-a}{z}\right)^n, & |z| > a \end{cases}$$

3 Literatura

1. *Laurent Series* - https://en.wikipedia.org/wiki/Laurent_series dostęp 18.06.2025 20:51