Matematyka

Maciej Szeptuch

Spis treści

1	ALG	SEBRA	3
	1.1	Zestaw 1 zadanie 5	3
	1.2	Ciało liczb zespolonych	4
	1.3	Zestaw 2 zadanie 4, przykład a	6
	1.4	Macierze	6
	1.5	Układy równań liniowych	9
	1.6	Geometria Analityczna	10
	1.7	Przestrzenie wektorowe	11
	1.8	Endomorfizmy	17
	1.9	Przestrzenie euklidesowe	21
	1.10	Przestrzenie euklidesowe	23
	1.11	Przestrzenie Unitarne	24
_	3.5 4		~-
2		ematyka 1	25
	2.1	Iloczyn kartezjański:	25
	2.2	Funkcja	25
	2.3	Ciągi	26
	2.4	Funkcje ciągłe	27
	2.5	Różniczkowanie	29
	2.6	Rachunek Całkowy	39
	2.7	Całka Oznaczona (Rimana)	44
	2.8	Zastosowania całek	45 46
	2.9	Krzywe Stożkowe	46
3	Mate	ematyka 1 - ćwiczenia	47
	3.1	Przydatne własności	47
	3.2	Przykładowa tabela przebiegu zmienności funkcji:	47
	3.3	Triksy	48
	3.4	Całki - Istotne wzory / wyprowadzenia	48
	3.5	Całki Rimmana - tricki / przydatne wzory	49
	3.6	Granice: - Tricki	50
4		hanika	51
	4.1	Wstęp	51
	4.2	Wstęp #2	51
	4.3	Podstawy Kinematyki	55
	4.4	Dynamika	62

	4.5 4.6	Dynamika ruchu krzywoliniowego punktu materialnego
	4.7	Ruch drgający
	4.8	Grawitacja
	4.9	Dynamika Układu Punktów
	4.10	Elementy Mechaniki Płynów
	4.11	Prawo Bernoilli'ego
	4.12	Własności sprężyste ciał
	4.13	Odniesienia
5	Mech	nanika - Ćwiczenia 97
6		IELSKI 99
	6.1	Lekcja 1 - zadanie domowe
7	Elekt	tromagnetyzm i Optyka 101
	7.1	Ruch Falowy
	7.2	Szczególna Teoria Względności
	7.3	Diagram Minkowskiego i interwał czasoprzestrzenny
	7.4	Pojęcie pola
	7.5	Elektrostatyka ładunków punktowych
	7.6	Obwody prądu stałego, energia i moc prądu elektrycznego
	7.7	Pole magnetyczne
	7.8	Prawo Ampera
	7.9	Magnetyczne własności materii
	7.10	Drgania elektromagnetyczne i prąd przemienny
	7.11 7.12	Obwód LC 119 Obwód RLC (Drgania EM tłumione) 119
	7.12	Optyka geometryczna
	7.13	Optyka falowa
	7.15	STW a elektromagnetyzm
	7.16	Względny charakter sił pola elektro-magnetycznego
	7.17	Elementy OTW
_		
8	_	dnienia na egzamin z EiO
	8.1	1.1 fale w ośrodku dyspersyjnym
	8.2	1.2 Równanie d'Alemberta
	8.3	1.3 energia stw
	8.4	1.4 problem pędu relatywistycznego
	8.5	1.5 Relatywistyczny efekt Dopplera
9		tromagnetyzm i Optyka - ĆWICZENIA 129
	9.1	zestaw 0 zadanie 1
	9.2	zestaw 0 zadanie 4
	9.3	zestaw 0 zadanie 5
	9.4	zestaw 0 zadanie 6
	9.5	Zestaw 1 Zadanie 1
	9.6	Zestaw 1 Zadanie 2
	9.7	zestaw 2 zadanie 2
	9.8	Zestaw 2 zadanie 16
	9.9	Zestaw 3
	9.10	Zestaw 2 zadanie 15
	9.11	Zestaw 6 zadanie 5
	9.12	Zestaw 9 Zadanie 8
	9.13	Zestaw 11 Zadanie 1

	9.14 Zestaw 11 zadanie 1	
10	Laboratorium Fizyczne 1	133
	10.1 Wstęp	133
11	Kolokwim ze statystyki (statystycznych metod poracowania danych pomiarowych)	135
12	Matematyka 2	137
	12.1 Całka powierzchniowa niezorientowana	137
	12.2 Całki dla przeciałów nieskończonych	
	12.3 Całki funkcji nieskończonych	138
	12.4 Funkcja Gamma Eulera	
	12.5 Funkcja β	
	12.6 Równania Różniczkowe	
	12.7 Równania Różniczkowe o zmiennych rozdzielonych	
	12.8 Równania liniowe	
	12.9 Funkcje wielu zmiennych	
	12.10 Rachunek całkowy wielu zmiennych	
	12.11 Całki Krzywoliniowe	
	12.12 Forma kwadratowa – przykłąd	154
13	Matematyka 2 - Ćwiczenia	157
	13.1 Metoda czynnika całkującego	
	13.2 Zestaw 9 Zadanie 1	
	13.3 Zestaw 10 zadanie 2a	
	13.4 Zestaw 11 Zadanie 1	
	13.5 Zestaw 14 Zadanie 1	158
14	Wstęp do Fizyki Kwantowej	159
	14.1 Promieniowanie termiczne	159
	14.2 Model atomu Bohra	161
	14.3 Efekt fotoelektryczny	
	14.4 Efekt comptona	
	14.5 Kreacja i anichilacja	
	14.6 De'Broglie	
	14.7 Egzamin - Pytania	
	14.8 PRzygotowanie do egzaminu (V2)	165
15	Wstęp do Fizyki Kwantowej - Ćwiczenia	167
	15.1 Intro	167
	15.2 Zestaw 1	167
16	Laboratorium Fizyczne - Kartkówka	169
	16.1 Tranzystor (125)	169
	16.2 Halotron (43)	
	16.3 Dozymetria (96)	
	16.4 Kriogenika (113)	
	16.5 Peltier (133)	
	16.6 Baterie słoneczne (134)	
	16.7 Wyznaczenie $\frac{e}{m}$ dla elektronu (45)	
	16.8 Efekt Fotoelektryczny (82)	
	16.9 Lasery (86/87)	
	16.10 Spektrometr (83)	
	16.11 Kąt Zwilżenia (15)	1/5

	16.12	Próżnia (22)
17	Mate	matyka 3
	17.1	szeregi liczbowe (pojęcie zbierzności sz.l.)
	17.2	
	17.3	Szereg trygonometryczny Furiera
	17.4	Szeregi Fouriera
	17.5	Równanie Różniczkowe cząstkowe 2 rzędu
	17.6	Przygotowanie do egzaminu
18	Mate	matyka Statystyczna 183
	18.1	Wstęp / pojęcia podstawowe
		Prawo rozdzielności dodawania i mnożenia
	18.3	Wiele sdarzeń
	18.4	rozszerzenie pojęć kombinatorycznych
		Prawdopodobieństwo warunkowe
	18.6	Statystyczna niezależność zdarzeń
	18.7	
	18.8	Dobra, po kolei:
		Metoda momentów
		Notatki do egzaminu (break it down)

Wskazówka

Z pewnymi trudnośćiami (pzdr M.P.) ukończyłem już sesję egzaminacypjną semestru zimowego 2024/2025! Z tego powodu życzę wszystkim odwiedzającym udanych feri! Do zobaczenia w przyszłym semestrze i powodzenia dla wszystkich którzy nadal walczą ze statystyką! gucio321 <gucio321@protonmail.com>

Niniejsza strona poświęcona jest Matematyce na studiach wyższych. W szczególności następującym przedmiotom:

Notatki z pliku notes/01algebra/algebra_2023.10.09.md

Spis treści 1

2 Spis treści

ROZDZIAŁ 1

ALGEBRA

1.1 Zestaw 1 zadanie 5

Korzystając z zas. indukcji udowodnij że: dla dowolnego $n\in\mathbb{N}, n\geq 4$ liczba diagonalnych w n-koncie wypukłym jest niewiększa niż $\frac{1}{2}n(n-3)$

- utworzenie wzoru na liczbę diagonalnych
 - dla 4-kątu jest to 1
 - dla 5-kątu 2
 - dla 6-kątu 3

z tego wniosek, że liczba diagonalnych d=n-3

• sprawdzenie warunku dla \sim n = 4

$$n-3 \le \frac{1}{2}n(n-3)$$
$$dla \ n = 4$$
$$1 \le 2*1$$

• krok indukcyjny

$$zamy, e: \\ \frac{1}{2}n(n-3) \ge n-3 \\ n(n-3) \ge 2n-6 \\ n^2 - 3n \ge 2n-6 \\ n^2 - 5n+6 \ge 0 \\ wtedy \ dla \ n+1: \\ \frac{1}{2}(n+1)(n-2) \ge n-2 \\ n^2 - n-2 \ge 2n-4 \\ n^2 - 3n+2 \ge 0 \\ (n^2 - 5n+2) + (2n-4) \ge 0 \\ z \ ind \ mat.$$

Notatki z pliku notes/01algebra/algebra_2023.10.10.md

1.2 Ciało liczb zespolonych

- w przeciwieństwie do liczb rzeczywistych nie można ich przedstawić w postaci linearnej
- dlatego też nie można powiedzieć że dana liczba jest ujemna/dodatnia
- liczba zespolona to para
- $i^2 = -1$

1.2.1 Dzielenie

Przy dzieleniu liczb zespolonych należy pomnożyć przez czynnik sprzężony (tak jak usuwanie niewymierności z mianownika)

1.2.2 Sprzężenie

Sprzężenie liczby zespolonej z określamy jako \bar{z} .

$$niech \ z \in \mathbb{C}$$
$$x, y \in \mathbb{R}z = x + y \ i$$
$$\bar{z} = x - y \ i$$

1.2.3 moduł liczby zespolonej

Utożsamiany z długością wektora będącego interpretacją liczby urojonej. niech z=(x,yi)

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

1 Informacja

4

|z| określamy również jako r

1.2.4 Postać trygonometryczna liczyb zespolonej

$$niech z = x + yi \neq 0$$
$$z = |z| \left(\frac{x}{|z|} + \frac{y}{|z|}\right)$$

$$\exists \phi \ cos \phi = \frac{x}{|z|} \land sin \phi = \frac{y}{|z|} z = |z|(cos \phi + i * sin \phi)$$

argz to tzw. argument główny gdzie $argz \in [0, 2\pi]$

potęgowanie liczby zespolonej w postaci trygonometrycznej

Wzór de Moivre'a
$$\$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(cos(\alpha-\beta)+isin(\alpha-\beta))$$
 $z^n = |z|^n(cosn\phi+i*sinn\phi)\$$

1.2.5 postać wykładnicza

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$$

1 Sprzężenie w postaci wykładniczej

 $\mathrm{niech}\ z\in\mathbb{C}$

$$z = |z|e^{i\phi} \Leftrightarrow \bar{z} = |z|e^{-i\phi}$$

$$z_k = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\phi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\phi + 2k\pi}{n}) k = 0, 1...n$$

Ważne

Pierwiastek n stopnia ma n rozwiązań

1.2.6 zasadnicze twierdzenie algebry

Każdy wielomian dodatniego stopnia ma rozwiązania w $\mathbb C$

Notatki z pliku notes/01algebra/algebra_2023.10.11_zadanie.md

1.3 Zestaw 2 zadanie 4, przykład a

Równanie jest spelnione dlz z=0

$$\begin{split} z^2 + 3\bar{z} &= 0 \\ z^2 &= -3\bar{z} \\ |z|^2 e^{2i\phi} &= -3|z|e^{-i\phi} \\ |z|e^{3i\phi} &= -3 \\ |z|e^{3i\phi} &= -3e^{2k\pi i} \\ |z| &= -3 \\ 3i\phi &= 2k\pi i \\ \phi &= \frac{2k\pi}{3} \quad k \in [0,2] \cap \mathbb{Z} \\ z &= -3 \lor z = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}i \lor z = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}i \end{split}$$

Notatki z pliku notes/01algebra/algebra_2023.10.17.md

1.4 Macierze

Oznaczenie: $M_{m \times n}(K)$ gdzie

- m, n wymiary macierzy
- K ciało na którym określamy macierz

1 Informacja

Dwie macierze są równe gdy ich wymiary są równe oraz wszystkie wartości są równe

Wskazówka

Macierzą kwadratową nazywamy macierz, w której m=n

Macierz zerowa

to taka macierz $0_{m \times n}$ gdzie wszystkie elementy są równe 0

11 Macierz diagonalna

Macierz, w której niezerowe elementy leżą jedynie na przekątnych

6 Rozdział 1. ALGEBRA

1.4.1 Działania na macierzach

- Dodawanie (i odejmowanie) macierzy których wyrazy są równe wykonujemy poprzez dodawanie odpowiednich wyrazów
- Mnożenie przez liczbę każdy wyraz macierzy mnożymy przez liczbę
- transponowanie wiersze zmieniają się na kolumny
- mnożenie macierzy przez macierz macierz A musi mieć tyle samo kolumn co wierszy

1.4.2 Własności działań

1 Informacja

działania są dziedziczone ze zbioru ${\mathbb R}$

• składanie odwzorowań jest łączne, ale **nie** przemienne Macierz diagonalna jednostkowa jest elementem neutralnym. Na przykład

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

· transponowanie:

$$(A^T)^T = A$$

Ważne

$$(AB)^T = B^T A^T$$

1.4.3 Suma elementów na przekątnych

$$tr \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 2 & -\mathbf{7} & 2 \\ 0 & 1 & \mathbf{3} \end{vmatrix} = 1 - 7 + 3 = -3$$

tr to ślad macierzy - suma elementów na przekątnej

1.4.4 Macierze symetryczne i antysymetryczne

1 Twierdzenie

każdą macierz kwadratową można rozbić na dwie macierze, z których jedna jest symetryczna, a druga antysymetryczna

1.4.5 Wyznacznik macierzy

1.4. Macierze 7

Definicja

wyznacznik to liczba detA taka, że:

- dla n = 1 $det A = a_1 1$
- dla $n \geq 2\sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} * a_i j * det A_i jgdzie$ det A_ij\$ to wyznacznik (tzw. minor) macierzy powstałej po skreśleniu i-ego wiersza i j-tej kolumny

 $det A = det A^T$

Wskazówka

dla macierzy trujkątnych górnych i dolnych detA to iloczyn elementów na przekątnej

zmiany na macierzy nie zmieniające wyznacznika

- $detA = detA^T$
- jeżeli w jednej kolumnie są same 0, det A = 0
- $det(nA) = n * detA \ n \in \mathbb{R}$
- dla A = B + C\$detA = detB + detC
- po zmianie kolumn miejscami wyznacznik zmieni znak
- jeżeli dwie kolumny są proporcjonalne detA = 0
- jeżeli kolumna jest kombinacją liniową pozostałych detA = 0
- do kolumny można dodać kombinację liniową pozostałych co nie zmieni wyznacznika

1.4.6 Macierz odwrotna

macierze kwadraowe

$$\exists A^{-1} \ A * A^{-1} = I$$

1 Informacja

macierz osobliwa jeżeli detA = 0

1 Informacja

Macierz jest odwracalna jeżeli jest niosobliwa

Notatki z pliku notes/01algebra/algebra_2023.10.24.md

Ważne

Macierze odwracalne tworzą grupę (tzw. grupę liniową)

Obliczanie macierzy odwrotnej

- · metoda dopełnień algebaicznych
 - możemy ją obliczyć tylko gdy $det A \neq 0$
 - $a_i j = (-1)^{i+j} * m_{ij}$
 - tak powstałą macierz transponujemy i kążdy element mnożymy przez $\frac{1}{det A}$
- metoda operacji elementarnych (bezwyznacznikiowa)
 - zestawienie macierzy blokowej z macierzy A i macierzy jednostkowej
 - jeżeli macierz A uda się sprowadzić do macierzy jednostkowej, to druga część bloku będzie macierzą odwrotną ${\cal A}^{-1}$

Algorytm gausa

- korzystając z operacji elementarnych uzyskać macierz trujkątną górną przemieszczając się od lewego górnego rogu macierzy
- zerowanie od prawej na lewą stronę

Własności macierzy odwrotnej

- $det A = \frac{1}{det A^{-1}}$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
- $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$
- $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ \$

1.5 Układy równań liniowych

Układ równań liniowych można zapisać jako A*X=B

1.5.1 Układ równań

1 układy crammerowskie

są to takie układy, w których liczba niewiadomych jest równa liczbie równań

- Macierz A jest kwadratowa
- $x = \frac{W}{W_x} \dots$
- jeśli W = 0 układ **nie** jest oznaczony
- jeśli macierz **nie** jest kwadratowa należy wykorzystać rząd macierzy

- rząd to największy stopień niezerowego minora

1.5.2 Wyznaczanie rzędu

- sprowadzanie macierzy do postaci schodkowej
- rząd macierzy to ilość "schodów"

1.5.3 Rozwiązywanie układów równań $m \neq n$

• układ jest sprzeczny jeżei rząd macierzy jest rożny od rzędu macierzy uzupełnionej

Notatki z pliku notes/01algebra/algebra_2023.10.31.md

1.5.4 Działania elementarne, które nie zmieniają rozwiązań

- skreślenie wiersza z samych zer
- skreślenie jednego z wierszy proporcjonalnych
- mnożenie wiersza przez dowolną stałą niezerową
- · przestawienie kolumn

Wskazówka

Rząd macierzy (układu równań) informuje ile niewiadomych można z danego układu wyliczyć

1.6 Geometria Analityczna

1.6.1 Wektory

wektor możemy oznaczac jako $(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}$

1 Informacja

Wektor od ługości 1 nazywamy wersorem.

Kąty kierunkowe to kąt między osią a wektorem.

Cosinus kierunkowy to stosunek $cos\alpha = \frac{u_x}{|\vec{q}|}$

Dla wersorów cosinusy kierunkowe to współrzędne wektora.

1.6.2 Działania na wektorach

Odniesienie

- iloczyn skalarny jest rozdzielny względem dodawania
- iloczyn mieszany $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$

10 Rozdział 1. ALGEBRA

1.6.3 Płaszczyzny w przestrzeni \mathbb{R}^3

Równanie płaszczyzny

$$\pi: \begin{cases} x = x_0 + t * a_x + s * b_x \\ y = y_0 + t * a_y + s * b_y \\ z = z_0 + t * a_z + s * b_z \end{cases}$$

Notatki z pliku notes/01algebra/algebra_2023.11.07.md

1.7 Przestrzenie wektorowe

Przestrzeń Wektorowa

(K, +, C, *) jest grupą abelową, natomiast V zbiorem $(V \neq \emptyset)$.

- (V, +) jest grupą abelową
- $\forall v,v \in V \quad \forall \alpha \in K \quad \alpha*(v+v) = (\alpha*v) + (\alpha*v)$ (występuje rozdzielność mnożenia względem dodawania w mnożeniu **sumy wektorów** przez **skalar**)
- $\forall v \in V \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha + \beta) * v = (\alpha * v) + (\beta * v)$ (występuje rozdzielność mnożenia względem dodawania w mnożenia **sumy skalarów** przez **wektor**)
- $\forall v \in V \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad \alpha * (\beta * v) = (\alpha * \beta) * v$ (mnożenie wektora i skalarów jest łączne)
- $\forall v \in V \quad 1 * v = v$ (występuje element neutralny)
- możliwe jest mnożenie przez skalar

Wskazówka

Elementy zbioru V nazywamy wektorami, a K - skalarami

1 Informacja

Zbiór $(\mathbb{R}^2,+,\mathbb{R},*)$ to tradycyjny zbiór wektorów na płaszczyźnie dwuwymiarowej. $V=\mathbb{R}^2$ określa dwa wymiary palszczyzny a $K=\mathbb{R}$ to ciało (zbiór) tzw. skalarów.

1.7.1 Podprzestrzenie liniowe

Zbiór U nazywamy podprzestrzenią przestrzeni V gdy działania zadeklarowane dla te podprzestrzeni są w niej wewnętrzne.

1 Informacja

Innymi słowy aby sprawdzić czy dany zbiór jest podprzestrzenią przestrzeni V dla dla dwuch wektorów $v_1iv_2\in V$ oraz skalara α

$$v_1 + v_2 \in V' \wedge \alpha v_1 \in V'$$

Ważne

0 musi należeć do podprzestrzeni

$$niech (\mathbb{R}^{\mathbb{H}}, +, \mathbb{R}, *)$$
$$-1 * v_1 = -v_1 \in \mathbb{R}^3$$
$$v_1 - v_1 = 0$$

Jeżeli w definicji przestrzeni występuje translacja (dodanie stałej) przestrzeń ta nie jest podprzestrzenią przestrzeni V.

$$V = (\mathbb{R}^3, +, K, *)$$

$$U = \{(x+1, y+x, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

$$x_1 + 1 + x_2 + 1 = (x_1 + x_2) + 2 \neq (x_1 + x_2) + 1$$

$$V = (\mathbb{R}^3, +, K, *)$$

$$U = \{(2x, y+x, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

$$2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2)$$

$$\alpha 2x_1 + \alpha 2x_2 = \alpha 2(x_1 + x_2)$$

Analogicznie można postępować dla innych wyrazów.

1.7.2 Liniowa zależność wektorów

1 liniowa zależność wektorów

Wektory są liniowo niezależne gdy żadnego z nich nie można przedstawić w formie kombinacji liniowej pozostałych.

Przykładowo $v = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$ nie jest liniowo niezależny.

Biorąc pod uwagę inny przykład:

$$v = (5, 4, -18)$$

$$v = 5\hat{i} + 4\hat{j} - 18\hat{k}$$

$$gdzie:$$

$$\hat{i} = (1, 0, 0)$$

$$\hat{j} = (0, 1, 0)$$

$$\hat{k} = (0, 0, 1)$$

Wskazówka

To tak jak w macierzach, gdzie jeden z rzędów można wyzerować za pomocą innych.

1 Informacja

Aby sprawdzić czy wektory są liniowo niezależne budujemy macierz z wektorami wpisanymi w kolumny (tak aby porócnywać x-owe współrzędne e.t.c.) i przyrównujemy do $(0,0,\ldots,0)$ i obliczamy jej rząd.

1 Generatory

Zbiór generatorów to zbiór wektorów pozwalających na zapisanie każdego innego wektora w danej podprzestrzeni.

$$v = \alpha w_1 + \beta w_2 + \ldots + \theta w_n$$

- ullet zbiór generatorów oznaczamy jako W
- natomiast generowaną przez nie podprzestrzeń limW

$oldsymbol{1}$ Twierdzenie o geneowaniu podprzestrzeni \mathbb{R}^n

Wektory $v_1, v_2, ..., v_k$ generują przestrzeń \mathbb{R}^n (o n wymiarach) $\Leftrightarrow rowA$ (rząd macierzy A) jest równy n. Macierz A to taka macierz, która składa się w kolejno wpisanych w wierszach wektorach v.

Wskazówka

 $k \ge n$ tzn. że generatorów może być więcej niż wymiarów przestrzeni, jednak jeżeli tak jest oznacza to że kilka z nich (k-n) jest liniowo zależnych.

Notatki z pliku notes/01algebra/algebra_2023.11.14.md

podzbiorami przestrzeni wektorowych \mathbb{R}^2 i \mathbb{R}^3 są:

- proste
- płaszczyzny

1 kombinacja zerowa

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n = 0$$

1 Powłoka liniowa

$$\{v = a_1v_1 + \dots + a_kv_k : v_1...v_k \in V \mid a_1...a_k \in A\}$$

Jest podprzestrzenią

1.7.3 Baza

Układ wektorów (generatorów) można nazwać bazą, jeżeli:

- są niezależne liniowo
- generują przestrzeń wektorową

1 Baza

Podsumowując: układ n wektorów-generatorów liniowo niezależnych w przestrzeni n-wymiarowej jest bazą

Ważne

przestrzeń $\{0\}$ nie posiada bazy.

Wskazówka

Najprostszą bazą przestrzeni 3-wymiarowej jet układ wersorów $(\hat{j}, \hat{k}, \hat{l})$

1 Reper Bazowy (aka Baza uporządkowana)

To uporządkowany ciąg wektorów bazowych.

1 Wymiar przestrzeni wektorowej V

To liczba eleentów bazy i oznaczamy $\dim X$ gdzie X to przestrzeń.

1 Informacja

dim0 = 0

Wskazówka

Wymiar podprzestrzeni jest mniejszy niż wymiar przestrzeni wyjściowej. Jeżeli $dimV = dimW \Rightarrow W = V$

Wskazówka

Współrzędnymi wektora nazywamy skalary $v=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+...+\alpha_nv_n$ i zapisujemy jako $v=[\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n]_B$

1.7.4 Macierz Przejścia

1 Informacja

Oznaczenie: $P_{B \to B'}$

Macierz przejścia

Wektor v należy do przestrzeni liniowej V.

W bazie B można zapisać go jako $v = [x_1, x_2, ..., x_n]_B$ natomiast w bazie B': $v = [x'_1, x'_2, ..., x'_n]_{B'}$

W takim przypadku macierz przejścia można powiązać z wektorami w poszczególnych bazach jako: $X=P_{B o B'}X'$.

X to wypisane w jdenej kolumnie współrzędne w bazie B a X' - w bazie B'.

$$X = \begin{cases} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{cases} \quad X' = \begin{cases} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{cases}$$

 $P_{B\to B'}$ to obraz azy B' w bazie B

$$P_{B\to B'} = \begin{cases} b_{1_1} & b_{1_2} & \dots & b_{1_n} \\ b_{2_1} & b_{2_2} & \dots & b_{2_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n_1} & b_{n_2} & \dots & b_{n_n} \end{cases}$$

1 Twierdzenie o N-Bazach

załóżmy że $B\ B'\ i\ B''$ to bazy przestrzenii V.

- $P_{B'\to B} = (P_{B\to B'})^{-1}$
- $P_{B \to B''} = P_{B \to B'} * P_{B' \to B''}$

Notatki z pliku notes/01algebra/algebra_2023.11.21.2023.md

- baza zbiór wekorów liniowo niezależnych generujących przestrzeń
- wymiar liczność bazy

aby przedstawić wektor w bazie kanonicznej w innej bazie należy rozwiązać układ równań $(b'_1 = \alpha \ b'_2 = \beta)$

Macierz Przejścia

niech $b_1, b_2...$ - stara baza i $b'_1, b'_2....$ nowa baza.

Wektory ze starej bazy można przedstawić jako kombinacje współrzędnych z nowej bazy oraz wypisac w macierzy w kolumnach. Następnie należy znaleźć macierz odwrotną.

- $P_{B\to B'} = (P_{B'\to B})^{-1}$
- $P_{B\rightarrow B'}*P_{B'\rightarrow B''}=B_{P\rightarrow B''}$

1.7.5 Odwzorowania Liniowe

- Załóżmy dwie przestrzenie liniowe nad tym samym ciałem
- morfizm przestrzeni liniowych (odwzorowanie liniowe) zachodzi jeżeli zachodzi odwzorowanie działań w tych przestrzeniach

$$\phi(\alpha x) = \alpha \phi(x)$$
$$\phi(x_1 + x_2) = \phi(x_1) + \phi(x_2)$$

Ważne

Jeżeli występuje translacja (dodanie stałęj) odwzorowanie nie jest liniowe (nie spełnia warunku addytywności).

operator różniczkowania $\frac{dy}{dx}$ jest odwzorowaniem liniowym

1 Informacja

Przy odwzorowaniu liniowym $0 \to 0$

- odwzorowanie może być surjekcją (tożsamość obu zbiorów) (epimorfizm)
- aby sprawdzić czy odwzorowanie jest injekcją można sprawdzić czy $0 \to 0$

Wskazówka

Zbiór wszystkich odwzorowań liniowych V w W oznaczamy przez $Hom_k(V, W)$

Ważne

Jezeli w liniowym występuje translacja nie jest ono liniowe.

$$\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \phi(x) = ax + b$$

Niech $x_1 = 1 \land x_2 = 2$ wtedy:

$$\phi(1+2) = a(1+2) + b = 3a + b \\ \phi(1) + \phi(2) = a + b + 2a + b = 3a + 2b \\ \Rightarrow \phi(1+2) \neq \phi(1) + \phi(2)$$

Notatki z pliku notes/01algebra/algebra_2023.11.28.2023.md

Wskazówka

Aby obraz wektorów liniowo niezależnych był liniowo niezależny odwzorowanie musi być injektywne.

Na przykład rzutowanie \mathbb{R}^3 na płaszczyznę OY

1 Informacja

macierz reprezentuje odwzorowanie liniowe

- dodawanie macierzy reprezentuje dodawanie odwzorowań
- natomiast mnożenie macierzy to składanie

1 Reprezencacja macierzowa odwzorowań liniowych

Macierz której kolumny nsą **obrazami** wektorów bazowych nazywamy reprezentacją macierzową odwzoorowania liniowego

Jadro

Przeciwobraz wszystkich elementów które przechodzą na 0.

Obliczamy Je następująco: $\phi(x) = 0$

Przykładowo

dla v w postaci
$$v=(x,y,z)$$

$$\phi(v)=(2x,y,x+y)$$

$$\phi(v)=0$$

$$(2x,y,x+y)=0 \Leftrightarrow x=0 \land y=0 \Rightarrow z \in \mathbb{R}$$

$$ker\phi=\{(0,0,z),z \in \mathbb{R}\}$$

$$dimKer\phi=1$$

Przeciwobraz - elementy które "podajemy" do odwzorowania (jak dziedzina funkcji)



przeciwobraz = Dziedzina Obraz = Zbiór Wartości

Notatki z pliku notes/01algebra/algebra_2023.12.05.md

1.8 Endomorfizmy

1 Endomorfizm

Odwzorowanie liniowe jednego zbioru na ten sam zbiór.

1 Informacja

Zbiór wszystkich endomorfizmów ma strukturę przestrzeni wektorowej

1.8. Endomorfizmy 17

$\mathbf{0}$ ϕ niezmiennicza

jeżeli u jest podzbiorem V, dla $x \in u \ \phi(x) \in u$

1 wartość włąsna

Liczba λ jest wartością własną jężeli istnieje niezerowy wektor v, który spełnia równość $\phi(v)=\lambda v$

1 Informacja

Zbiór wszystkich wartości własnych nazywa się spektrum (lub widmem) operatora

1 Operator rzutowania

Określea wszystkie wektory które po zrzutowaniu na oś OX nie zmieni kierunku (lub stanie się punktem)

$$spec = ?$$

$$\phi(0, V_y) = (0, v_y) \Rightarrow \lambda = 1$$

$$\phi(0, v_y) = (0, 0) \Rightarrow \lambda = 0$$

$$spec = \{0, 1\}$$

1.8.1 Szukanie wartości własnych

$$x_{\phi}(t) = det(A - tI)$$

Ważne

Nie wszystkie pierwiastki ww. równania są pierwiastkami charakterystycznymi. Należy pamiętać, że $t=\lambda\in K$, gdzie K to ciało nad którym pracujemy

1 Informacja

Wielomiany włąsne nie zależą od bazy

Notatki z pliku notes/01algebra/algebra_2023.12.12.md

1.8.2 Własności spektrum

- $spec(A) = spec(A^T)$
- $\operatorname{spec}(A^n) = \operatorname{spec}(A)^n$
- $\frac{1}{\lambda} = \operatorname{spec}(A^{-1})$

18 Rozdział 1. ALGEBRA

1 Kiedy można dokonać diagonalizacji macierzy odwzorowania?

Jeżeli wszystkie pierwiastki wielomianu (z któ©ego szukamy wartości włąsnych) są krotności 1.

Inaczej musi istnieć baza z wektoróœ własnych.

1 Informacja

macierze reprezentujące to samo odwzorowanie w różnych bazach są do siebie podobne

1.8.3 Schemat rozwiązywania zadań:

• załóżmy, że mamy dane odwzorowanie.

Wskazówka

Jeżeli odwzorowanie mamy zadane w następujący sposób:

$$\phi(1,0,0) = (1,0,0)$$

$$\phi(0,1,1) = (0,2,2) = 2*(0,1,1)$$
 e.t.c.

Oznacza to że mamy zadane już wektory/wartości własne w tym przypadku:

$$\lambda_1 = 1$$
 $v_1 = (1, 0, 0)$
 $\lambda_2 = 2$ $v_2 = (0, 1, 1)$

- · Najpierw należy skonstruować macierz odwzorowania
- teraz od wszystkich elementów na diagonali macierzy odejmujemy t (bądź λ ja przyjmuję tutaj t dla kompatybilności z panią dr)

Wskazówka

Jeżeli macierz ma postać trujkątną, można pominąć ten i następny krok przyjmując za λ elementy na diagonali.

• Obliczamy wyznacznik z którego później wyliczamy wartości t.

Ważne

Należy pamiętać o możliwych wartościach t ($\mathbb R$ czy $\mathbb C$)

Ważne

Jeśli wyszło nam w sumie (licząc krotności) mniej λ nniż wynika z wymiaru przestrzeni (na przykład część rozwiązań wyszła urojona i nie było to dopuszczone) macierz **NIE** jest diagonalizowalna.

1.8. Endomorfizmy 19

1 Spektrum

Otrzymane wyniki nazywamy spektrum odwzorowania.

1 Spektrum proste

Jeżeli wszystkie t są jednokrotnymi rozwiązaniami równania, i jest ich dokładnie tyle co wymiar przestrzeni, to mamy do czynienia ze spektrum prostym - pomiń następny krok (jeżeli zadanie tego nie wymaga)

• Obliczanie wektorów Własnych. Aby to zrobić rozwiązujemy następujące równanie:

$$\phi(v) = \lambda v$$
$$A * v = \lambda * I * v$$
$$(A - \lambda * I) * v = 0$$

Gdzie: A to macierz odwzorowania, λ to dana wartość t a v to szukany wektor własny

Ważne

jeśli λ jest n-krotna należy sprawdzić następujący warunek: $n=dimE_{\lambda}=dimA-Row(A-\lambda I)$ Jeżeli warunek nie jest spełniony - macierz nie jest diagonalizowalna.

• Teraz nowa macierz tego przekształcenia to

$$\begin{cases}
\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & \lambda_n
\end{cases}$$

A więc macierz ze współczynnikami λ na diagonali.

1 Informacja

Nowa macierz odwzorowania zapisana jest dla bazy złożonej z wektorów własnych!

załużmy wektor v w bazie kanonicznej. Aby przekształcić go taką macierzą diagonalną należy:

Pomnożyć lewostronnie wektor przez macierz przejścia (złożoną z wektorów nowej bazy - wektorów własnych)

$$P_{B_k \to B} * v$$

- Pomnożyć lewostronnie przez nową macierz diagonalną ${\cal D}$

$$D * P_{B_k \to B} * v$$

• na koniec można powrócić do bazy kanonicznej

$$P_{B_k\to B}^{-1}*D*P_{B_k\to B}*v$$

20 Rozdział 1. ALGEBRA

Wskazówka

Wizualizacja graficzna!

Notatki z pliku notes/01algebra/algebra_2024.01.07.md

1.9 Przestrzenie euklidesowe

1 Przestrzeń euklidesowa

to po prostu w dziwny sposób powiedziane "Iloczyn Skalarny".

To tak aprzestrzeń wektrowoa, nad któ©ą zdefiiowano iloczyn skalarny.

Oznaczenie: \mathbb{E}^n to \mathbb{R}^n ze zdefiniowanym standardowym iloczynem skalarnym.

1 Informacja

standardowy iloczyn skalarny to funkcja zefiniwoana w następujący sposób

$$u = (u_0, u_1, \dots u_n)$$

$$w = (w_0, w_1, ... w_n)$$

$$s(u, w) = u\dot{w} = \sum_{i=0}^{n} u_i * w_i$$

1 Norma

Norma to dziwna nazwa na "długość wektora"

oznaczenie: ||v||

1 Informacja

- Norma spełnia zasadę liniowości
- $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = \mathbf{0}$
- $||\alpha v|| = |\alpha| * ||v||$

Przestrzeń wektorową ze zdefiniowaną normą nazywamy Przestrzenią Unormowaną

Wskazówka

Jeżeli znamy iloczyn wektorowy możemy od razu zdefiniować normę. Określamy ją następującym wzorem:

$$||v|| = \sqrt{s(v,v)}$$

Obrazowo:

• iloczynu skalarny $v\dot{v}$ lub s(v,v) to po prostu z definicji iloczynu skalarnego długość v pomnożona przez rzut v na v czyli po prostu długość v podniesiona do kwadratu

Matematyka

ullet gdy nałożymy na to pierwiastek otrzymamy długość v

1 Wektor unormowany

Również znany jako wersor.

Jesto to wektor w przestrzeni V którego norma wynosi 1

Wskazówka

Każdy wektor z przestrzeni euklidesowej można unormować.

$$\hat{v} = \frac{v}{||v||}$$

Znając powyższe zależności można określić miarę kąta między wektorami.

$$cso\angle(u,v) = \frac{u\dot{v}}{||u|| * ||v||}$$

Ważne

To wszystko nie ma sensu dopuki togo nie zobaczysz, więc polecam

Wskazówka

W przypadku ww. zależnośći warto rozważyć dwa skrajne przypadki:

- jeżeli wektory są współliniowe, to długość rzutu u na v ma długość całego u, więc $\frac{||u||+||v||}{||u||+||v||} = 1 \Rightarrow \cos \angle(u,v) = 0^o$
- jeżeli wektory są prostopadelk, długość rzutu u na v ma długość $\mathbf{0}$ z czego wynika, że $\frac{0*||v||}{||u||*||v||}=0 \Rightarrow cos\angle(u,v)=90^o$

1 Wektory ortogonalne

To inaczej wektory prostopadłe (aka $u \perp w$). Z tego również wynika, że $u\dot{w} = 0$ (ofc w drugą stronę też to działa)

Ważne

w tym przypadku jednak inna nazwa ma sens, ponieważ pojęcie wektoróc ortogonalnych ma również sens w większej liczbie wymiarów (np. 4)

1 Układ ortonormalny

układ wektorów ortogonalnych, w którym każdy wektor jest dodatkowo unormowany.

Notatki z pliku notes/01algebra/algebra_2024.01.09.md

1 Informacja

Przykłądem bazy ortonormalnej jest baza kanoniczna w \mathbb{R}^3 .

Aby wyliczyć współrzędne wektora w bazie ortogonalnej?:

$$\alpha_a = \frac{\langle v, b_1 \rangle}{||b_1||^2}$$

1 Informacja

 $\langle v,b_1\rangle$ to $||v_{b_1}||*||b_1|$ po podzieleniu zostaje $\frac{||v_{b_1}||}{||b_1||}$ gdzie v_{B_1} to długość rzutu v na b_k

1.9.1 Metoda ortogonalizacji Gramma-Schmidta

Jeżeli istnieje basa generujaca jakąś podprzestrzeń to istnieje też inna **ortogonalna** baza która generuje tą podprzestrzeń.

- 0. najpierw warto sprawdzić, czy zadana baza nie jest już przypadkiem ortogonalna ;-)
- 1. $c_1 = b_1$
- 2. aby c_2 generował tą samą przestrzeć co $lin\{c_1,b_2\}$ musi on być kombinacją liniową tych wektorów $c_2=b_2+\alpha c_1$.
- 3. to samo należy zrobić dla 3 wektora. Również $c_2 = \langle c_2, b_2 \rangle = 0$

1.9.2 Rzut Ortogonalny

Wskazówka

również znany jako rzut prostokątny w \times^2

Notatki z pliku notes/01algebra/algebra_2024.01.16.md

1.10 Przestrzenie euklidesowe

1 Macierze ortogonalne

TO takie macierze, które $A^T * A = I$.

1 Informacja

$$det A \neq 0 \land (det A^2 = 1 \Rightarrow det A = 1 \lor det A = -1)$$

Wskazówka

Jeżeli macierze A i B są ortogonalne, wtedy A*B też jest ortogonalna.

Własności baz ortonormalnych. Niech B_{\perp} i B'_{\perp} będą dwiema bazami ortonormalnymi. Niech $P_{B\to B'}$ będzie macierzą przejścia pomiędzy nimi. Wtedy P również jest ortogonalna.

Wskazówka

Zauważ, że $P_{B' \rightarrow B} = P_{B \rightarrow B'}^{-1} = P_{B \rightarrow B'}^{T}$

1 Izometrie liniowe

to przekształcenia które nie zmieniają odległości między wektorami.

$$||u - w|| = ||\phi(u) - \phi(w)||$$

Można wysnuć wniosek, że ϕ jest ortogonalne.

Możliwe typy Izormorfizmów liniowych to:

- obrót
- odbicie (względem prostej o równaniu $y = tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)x$)

Notatki z pliku notes/01algebra/algebra_2024.01.23.md

1.11 Przestrzenie Unitarne

Przestrzeń unitarna to taka przestrzeń euklidesowa określona nad ciałęm liczb zespolonych.

1 Iloczyn hermitowski

Iloczyn skalarny zdefiniowany w następująćy sposób:

$$v_1 = [x_1, y_1, z_1] \quad v_2 = [x_2, y_2, z_2]$$
$$\langle v_1, v_2 \rangle = x_1 * \bar{x_2} + y_1 * \bar{y_2} + z_1 * \bar{z_2}$$

Notatki z pliku notes/01matematyka1/matematyka_2023.10.09.md

24 Rozdział 1. ALGEBRA

Matematyka 1

2.1 Iloczyn kartezjański:

$$A \times B = \left\{ (a, b) \mid \begin{array}{ll} a \in A \\ b \in B \end{array} \right\}$$

iloczyn kartezjański \mathbb{R}^2 przedstawiamy jako płaszczyznę (x,y) a pojedynczą pare przedstawiamy jako punkt

2.2 Funkcja

f:A o B - każdemu elementowi ze zbiour A jest przyporządkowany **dokładnie jeden** element zbioru B

- A dziedzina funkcji
- f(a) to zbiór wartości

2.2.1 własności funkcji

- funkcję f nazywamy iniekcją (odwzorowaniem różnowartościowym) jeżeli $\forall a_1, a_2 \in A \ f(a_1) \neq f(a_2)$
- funkcję f nazywamy surjekcją (odwzorowaniem na) jeżeli $\forall b \in b \exists ain A \ f(a) = b$
- f jest bijekcją ⇔ f jest injekcją oraz surjekcją

jeżeli surjekcja \Leftrightarrow równanie ma rozwiązanie $\forall y$ jeżeli injekcja \Leftrightarrow równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie jeżeli f jest bijekcją, wtedy istnieje funkcja odwrotna $f^{-1}: B \to A$ $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$

badanie własności fnkcji

- jeżeli prosta (równoległa do OX) przecina wykres f w 2 lub więcje punktach to funkcja ta nie jest injekcją
- jeżeli prosta (równoległa do OX) przecina wykres f w dokłądnie w 0 punktach to funkcja ta **nie** jest surjekcją

Ważne

prosta musi należeć do zW

Ważne

wykres funkcji f^{-1} jest symetryczny do wykresu f względem prostej y=x

niech f(x) = sin(x) niech $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \land y \in [-1, 1]$ tak zdefiniowana funkcja jest bijekcją $\Rightarrow \exists f^{-1} \sin^{-1}(\mathbf{x}) = \arcsin(\mathbf{x})$

składanie funkcji

$$\begin{split} f: A &\Rightarrow B \\ g: B &\Rightarrow C \\ h(x) &= g(f(x)) \\ h &= g \cdot f \end{split}$$

Notatki z pliku notes/01matematyka1/matematyka_2023.10.15.md

2.3 Ciągi

Zbierzność asymptotyczna $\frac{a_n}{b_n} \to 1$

1 wzór Sterlinga

 $n! \sim n^n - e^{-n} \sqrt{2 \pi i}$

2.3.1 ważne granice

•

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$$

•

$$dla \ a>1$$

$$lim_{x\to 0}a^x=1$$

$$\forall n\in \mathbb{N} \ a^{\frac{1}{n+1}}< a^x< a^{\frac{1}{n}}$$

•

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \log n \ a$$

2.4 Funkcje ciągłe

$$niech\ f:D\to\mathbb{R}$$

f jest ciągła w punkcie $x_0 \in D$ jeśli $\exists \lim_{x \to x_0} = f(x_0)$

Ważne

funkcja $f(x)=\frac{1}{x}$ $x\neq 0$ jest ciągła, mimo, że w $x_0=0$ granica nie istnieje, ponieważ $x_0\notin D$

Wskazówka

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

2.4.1 Własności funkcji ciągłych

1 Twierdzenie o lokalnym zachowaniu znaku

niech f ciągła. Dla dowolnego punktu $x_0 \wedge f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists a = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \ taki \ e \forall x_a \in a \ f(x_a) > 0$

Wskazówka

jeżeli f jest ciągła oraz $\exists a,b \ f(a) < 0 \land f(b) > 0 \Rightarrow \exists x_0 \in (a,b) \ f(x_0) = 0$

1 Twierdzenie Bezuta

jeżeli x_0 jest pierwiastkiem wielomianu to wielomian W(x) można przedstawić jako $W(x) = (x - x_0)P(x)$

1 własoność Garbouta

własnność o przyjmowaniu wartościpośrednich

dla
$$f:I \to \mathbb{R}$$
 Jeżeli f(a) = m i f(b) = M $\wedge m < M \wedge m < W < M$

$$\forall \mathbf{W} \in (\mathbf{m}, \mathbf{M}) \exists \mathbf{x} \in (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \ \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{W}$$

Notatki z pliku notes/01matematyka1/matematyka_2023.10.23.md

1 Twierdzenie o osiąganiu kresów

Jeżeli funkcja $f(a,b) \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to:

- · jest ograniczona
- oraz $\exists x_1 x_2 \in (a,b) \ f(x_1) = m \land f(x_2) = M$ gdzie m to kres dolny a M to kres górny

2.4. Funkcje ciągłe

1 Twierdzenie o ciągłości funkcji odwrotnej

niech funkcja $f\left\langle a,b\right\rangle \rightarrow\mathbb{R}$ będzie ciągła

$$f(a) = c$$

$$f(b) = d$$

wtedy

- f jest ściśle rosnąca ⇔ f ma funkcję odwrotną
- jeśli istnieje funkcja odwrotna, to jest ona również ciągła

Funkcja **ściśle rosnąca** to taka, dla którje prawdziwe jest twierdzenie $\forall x_1 < x_2 f(x_1) < f(x_2)$

1 Twierdzenie o ciągłości funkcji złożonej

Niec $f:D \to \mathbb{R}$ i $g:D \to \mathbb{R}$ będzie ciągła wtedy $h=f\dot{g}$ - h jest ciągła

1 Twierdzenie o 4 działaniach dla funkcji ciągłych

 $f,g:D o\mathbb{R}$, jeżeli f, g ciągłe w D $f+g\wedge f-g\wedge f*g$ są ciągłe. Ponadto jeżeli $g
eq 0\Rightarrow rac{f}{g}$ są również ciągłe

2.4.2 Przykłady funkcji ciągłych

- $f(x) \equiv const$
- f(x) = x
- f(x) = c * x
- $f(x) = c_1 * x + c_2$
- $f(x) = x^2$

1 Informacja

Wielomiany są funkcjami ciągłymi

- $\sqrt[n]{x}$ (funkcja odwrotna do x^n)
- $f(x) = a^x a > 0 \land a \neq 1$

Notatki z pliku notes/01matematyka1/matematyka_2023.10.24.md

$$cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} tgh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

28

2.4.3 Interpretacja krzywej

Opis parametryczny krzywej:

• Okrąg

$$\begin{cases} x = rsin(t) \\ y = rcos(t) \end{cases}$$

• Elipsa

$$\begin{cases} x = acos(t) \\ y = bsin(t) \end{cases}$$

• Hiperbola

$$\begin{cases} x = a cosh(t) \\ y = b sinh(t) \end{cases}$$

1 Informacja

$$arsinh(x) = logn\left(x + \sqrt{1+x}\right)$$

Notatki z pliku notes/01matematyka1/matematyka_2023.10.30.md

2.5 Różniczkowanie

Niech y = f(x) = a * x wtedy dla x = 1 $y = a \Rightarrow a = tg\alpha$

1 Informacja

podejście geometryczne:

Spróbujmy znaleźć wykres stycznej do wykresu funkcji \$f(x)

Sieczna - prosta przechodząca przez dowolne dwa punkty należące do wykresu funkcji f(x)

 $y-y_0=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)$ - równanie siecznej przechodzącej przez x i x_0

1 Definicja pochodnej

granicę $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ o ile istnieje nazywamy **pochodną** funkcji $\mathbf f$ w punkcie x_0 i oznaczymy $f'(x_0)$ lub $\frac{df}{dx}$

Ważne

Interpretacja geometryczna

 $f'(x_0)$ to tg kata nachylenia stycznej do fykresu funkcji f w punkcie x_0

$$f: I \to \mathbb{R}$$
 jeżeli $\forall x in I \exists f'(x) \quad f': X \to \mathbb{R}$

2.5. Różniczkowanie 29

2.5.1 Przykłady funkcji pochodnych

f(x)	f'(x)
f(x) = a	f'(x) = 0
y = ax + b	$\frac{a(x+h)+b-(ax+b)}{h} = a$
$y = ax^2$	$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = x + h dla h \to 0 f'(x) = 2x$
$y = \sqrt{x}$	$\frac{f(x+\tilde{h})-f(x)}{h} = \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} o \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = x^n$	$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = n * x^{n-1}$
y = sin(x) więcej	y' = cos(x)
y = arctg(x)	$\frac{1}{x^2+1}$

Zaawansowany Kalkulator Pochodnych

2.5.2 Przykłady funkcji, które nie mają pochodnych

$$f(x) = |x|$$

$$f'(0) = \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h}$$

$$Dla \ h < 0 \quad f'(0) \to -1 \land dla \ h > 0 \quad f'(0) \to 1$$

1 Twierdzenie o ciągłości funkcji różniczkowalnej

Jeżeli f jest różnniczkowalna, to f jest ciągła

$$f(x_0 + h) = f(x_0 + h) - f(x) + f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} * h + f(x) = 0 + f(x)$$

2.5.3 Działania na pochodnych

1 Twierdzenie o różniczkowalności złożeń funkcji różniczkowalnych

Jeżeli funkcje f i g sa różniczkowalne, to funkcje f+g oraz c*g są różniczkowalne i zachodzą następujące wzory

$$(f+g)' = f' + g'$$
$$(c*g)' = c*g'$$

Wskazówka

Nie jest prawdą stwierdzenie, że "suma pochodnych jest pochodną sumy". prawdą jest, że "suma pochodnych jest pochodną sumy **Przy stosownych założeniach**".

Wskazówka

f(x) = ax + b nie jest operacją liniową, ponieważ $f(x_1 + x_2) \neq ax_1 + b + ax_2 + b$

2.5.4 Pochodne funkcji trygonometrycznych

$$y = sin(x)$$

$$y' = \frac{sin(x+h) - sin(x)}{h}$$

$$y' = \frac{sinx * cosh + cosx * sinh - sinx}{h} = \frac{2sinx(cosh - 1)}{h}) = cosx$$

2.5.5 Pochodna funkcji wykładniczej

$$(a^{x})' = \frac{a^{x}a^{h} - a^{x}}{h} = a^{x}\frac{a^{h} - 1}{h} = = logna * a^{x}$$

$$(e^{x})' = logn e * e^{x} = e^{x}$$

Notatki z pliku notes/01matematyka1/matematyka_2023.10.31.md

1 pochodna iloczynu

Jeżeli f, g są różniczkowalne (f*g)'=f'g+fg'

1 pochodna ilorazu

jeżeli f i g są różniczkowalne i $g \neq 0$ wtedy $\frac{f}{g} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$$tg'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{1}{\cos^2(x)}$$
$$ctg'(x) = \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)' = \frac{-1}{\sin^2(x)}$$

1 twierdzenie

jeżeli
$$\exists f^{-1} \land \exists f' \text{ wtedy } \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$$

$$arctg'(x) = \frac{1}{arctg(x)}$$

 $(log_a x)' = \frac{1}{lna} * \frac{1}{x}$

1 pochodna złożenia funkcji

złożenie możliwe \Leftrightarrow f i g są różniczkowalne, wtedy g(f(x)) też jest różniczkowalna i $\frac{dh}{dx} = \frac{dz}{dy} * \frac{dy}{dx}$

2.5. Różniczkowanie 31

2.5.6 Pochodna logarytmiczna

jeżeli f jest różniczkowalna i f > 0

$$ln(f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Notatki z pliku notes/01matematyka1/matematyka_2023.11.06.md

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Funkcja jest różniczkowalna w punkcie **x=0** $(\frac{h^2}{h} \to 0)$

2.5.7 Zastosowanie pochodnych

1 Maksimum lokalne

$$f: I \to \mathbb{R} \quad I = (a, b)$$

$$\exists \delta \quad x_0 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

$$f(x) \le f(x_0)$$

1 Twierdzenie o zerowaniu się pochodnych w maksimum lokalnym

Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna i ma w punkcie x_0 maksimum lokalne $\Leftrightarrow f'(x_0) = 0$

$$R = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$dla \ x_0 > x \land x \to x_0$$

$$f(x) - f(x_0) \le 0 \land x - x_0 \ge 0 \Rightarrow R < 0$$

$$dla \ x_0 > x \land x \to x_0$$

$$f(x) - f(x_0) \le 0 \land x - x_0 \le 0 \Rightarrow R > 0$$

$$R \le 0 \ge R \Rightarrow R = 0$$

1 Informacja

jeżeli f jest ciągła i różniczkowalna

$$f: I \to \mathbb{R} \quad I = (a, b)$$
$$jeeli \ f(a) = f(b)$$
$$\exists \ c \in I, \ f'(c) = 0$$

1 Twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej

- f jest ciągła
- f jest różniczkowalna

$$f'(c) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

1 Twierdzenie Coushy'ego

- f, g, są ciągłe \$\in \left[a, b\right]
- f, g, są różniczkowalne
- $g' \neq 0 \in (a, b)$

wtedy:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Wskazówka

 $g(a) \neq g(b)$ ponieważ g jest różniczkowalna $\Rightarrow \ g(b) - g(a) \neq 0$

Notatki z pliku notes/01matematyka1/matematyka_2023.11.07.md

Wnioski Tw. Lagrange'a

Ważne

funkcja $f:I\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna

- jeżeli $f'\equiv 0 \Rightarrow f\equiv const$
- jeżeli $f' \ge 0 \Rightarrow$ f jest niemalejąca
- jeżeli $f' \le 0 \Rightarrow$ f jest nierosnąca

1 Twierdzenie AGH

2.5. Różniczkowanie 33

$$\forall x \geq 0 \quad \sqrt{x} \leq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$a, b > 0$$

$$A = \frac{a+b}{2}$$

$$G = \sqrt{a*b}$$

$$x = \frac{a}{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} \leq \frac{1}{2}\frac{a}{b} + \frac{1}{2}$$

$$b*\sqrt{\frac{a}{b}} \leq \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$$

$$G \leq A$$

$$\frac{1}{H} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}$$

$$A \quad G \quad H$$

Reguła de l'Hospitala

1 Reguła de l'Hospitala

f, g to funkcje różniczkowalne.

$$jeeli \lim_{x \to a} \frac{f}{g} = \frac{0}{0}$$
$$jeeli \exists \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = G \Rightarrow \exists \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = G$$

♀ Wskazówka

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\sin(x))'}{x'}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1 \Rightarrow \exists \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

1 Informacja

- f jest niższego rzędu (niż g) gdy $\frac{f}{g} \rightarrow 0$
- f i g są równego rzędu gdy $\frac{f}{g} \to const \neq 0$

- jeżeli $rac{f}{g}
ightarrow 1$, to f i g są asymptotycznie równoważne

Notatki z pliku notes/01matematyka1/matematyka_2023.11.13.md

Pojęcie Różniczki

Jeżeli f jest różniczkowalna

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \to f'(x)$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \to 0$$

$$\frac{f(x+h) - f(x) - f'(x) * h}{h} \to 0$$

$$f(x+h) - f(x) - f'(x_0) * h = o(h)$$

$$\Delta y - f'(x_0) * \Delta x + o(\Delta x)$$

1 Informacja

Odwzorowanie liniowe $h \to f'(x_0) * h$ nazywamy różniczką funkcji f w punkcie x_0 .

Jest to odwzorowanie takie, że $f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0) * h + o(h)$

Oznaczenia

f	pochodna	
f	f'	$\frac{df}{dx}$
f'	f''	$\frac{d^2f}{dx^2}$

1 Definicja

Funkcję nazywamy **funkcją klasy** C^k jeżeli ma pochodne do rzędu ${\bf k}$ i ${\bf k}$ ta pochodna jest ciągła.

Wzór Taylora

$$F:I\rightarrow \mathbb{R} \ \wedge \ "fklasy"C^1$$
tw. lagrange'a dla przedziału (x_0,x_0+h)
$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(\psi)*h$$

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(\psi)*h$$

$$\exists \psi \in (x_0,x_0+h)$$

$$\psi=x_0+\theta h \quad \theta \in \langle 0,1 \rangle$$

2.5. Różniczkowanie 35

Niche f bdzie klasy C^n

$$\exists \psi \ f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!}f'(x_0) + \frac{h}{2!}f''(x_0) + \dots + \frac{h}{n!}f^{(n)}(\psi)$$

Ostatnie równanie nazywamy Równaniem Taylora z resztą Lagrange'a

11 Wzór Maclaurina

$$f(x) = f(0) + x * f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} * f^{(n)}(\theta x)$$

f(x)	Rozwinięcie
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} * e^{\theta x}$
sin(x)	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + R_n$
cos(x)	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + R_n$
ln(1+x)	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + R_n$ $0 + x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots + R_n = \left(\sum_{i=1}^n (-1)^{n+1} * \frac{x^n}{n}\right) + R_n$
$(x+1)^{\alpha}$	$1 + {\alpha \choose 1}x + {\alpha \choose 2}\frac{x^2}{2!} + {\alpha \choose 3}*\frac{x^3}{3!} + \dots + R_n$

Ważne

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(alpha-2)*\dots*(\alpha-k)}{k!}$$

Wskazówka

Zastosowanie wzoru Taylora do obliczeń przybliżonych:

dla x = 1, n = 6

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} * e^{\theta}$$
$$0 \le \theta \le 1$$
$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120}$$

Notatki z pliku notes/01matematyka1/matematyka_2023.11.14.md

1 Twierdzenie

Liczba e nie jest liczbą wymierną.

Przypuśćmy, że e jest liczbą wymierną w postaci $\frac{p}{q}p,q\in\mathbb{N}$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{q!} + \frac{1}{(q+1)!}e^{\theta}$$

e jest liczbą przestępną (nie jest pierwiastkiem wiielomianu o współczynnikah rzeczywistych)

Reszta Peano

$$f(x+h) = f(x_0) + \frac{h}{1!}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + o(h^n)$$

Ekstrema lokalne



1 Informacja

Jeżeli funkcja osiąga w punkcie x_0 extremum, ot jej pochodna jest równa 0



Ostrzeżenie

nie oznacza to, że spełnione jest twierdzenie odwrotne

Jeżeli pochodna funkcji zeruje się, oznacza to, że punkt x_0 jest punktem podejrzanym oe ekstremum.

Punkty podejrzane o ekstrenum znajdują się również w punktach, w których pochodna nie istnieje.

Szukanie ekstremów:

- pochodna musi zmieniać znak
- jeśli $f'(x_0) \wedge f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ f posiada minimum lokalne\$
- druga pochodna wskazuje czy dany punkt to minimum czy maksimum

Notatki z pliku notes/01matematyka1/matematyka_2023.11.20.md

Zadania



1 Informacja

Z kwadratoweo arkusza blachy wycinamy 4 kwadratowe kawałki (na rogach). Z czego powstaje nam "pudełko". Jaka największa objętość?

$$0 < x < \frac{a}{2}$$
$$V(x) = (a - 2x)^2 x$$

szukamy największą wartość funkcji w przedziale $x \in \langle 0, \frac{a}{2} \rangle$

$$V'(x) = (a - 2x)^{2} - 4x(a - 2x)$$

$$V'(x) = (a - 2x)(a - 2x - 4x)$$

$$V'(x) = (a - 2x)(a - 6x)$$

$$x = \frac{a}{2} \lor x = \frac{a}{6}$$

2.5. Różniczkowanie 37

1 Informacja

$$O(h) = C * sin\alpha * \frac{1}{r^2}$$

$$\frac{a}{r} = cos\alpha$$

$$O(h) = C * sin\alpha * \frac{cos^2\alpha}{a^2}$$

$$O(h) = \frac{C}{a^2} * sin\alpha * cos^2\alpha$$

$$f(x) = sinx * cos^2x$$

$$x \in \left<0, \frac{\pi}{2}\right>$$

$$f'(x) = cos^3x - 2sin^2xcosx$$

$$f'(x) = cosx(cos^2x - 2sin^2x)$$

$$x = \frac{\pi}{2} \lor tg^2x = \frac{1}{2}$$

$$\lor tgx = \frac{1}{\sqrt{2}} tg > 0 \text{ w przedziale}$$

$$\lor x = arctg \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Wypukłość funkcji

f jest wypukłą ku górze jeśli w pewnym otoczeniu wykres f jest poniżej wykresu stycznej.

Funkcja jest wypukła ku dołowi w punkcie x_0 jeżeli w tm punkcie wykres jest powyżej wykresu stycznej

1 Twierdzenie o wypukłości

f klasy C^2

Jeżeli f wypukła ku górze $\Rightarrow f''(x_0) \le 0$ Jeśli $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ funkcja jest wypukła ku górze.

Asymptoty

Asymptoty to proste, do których wykres danej funkcji zbliża się dowolnie blisko.

Wskazówka

Prosta o równaniu y=ax+b jest asymptotą ukośną, jeśli $f(x)-ax-b\to 0$ $dla\ x\to \infty$

Prosta o równaniu y=ax+b jest asymptotą ukośną funkcji f $\Leftrightarrow \exists lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}=a \land \exists lim_{x\to\infty} f(x)-ax=b$

Notatki z pliku notes/01matematyka1/matematyka_2023.11.21.md

Sporządzanie wykresów funkcji

- faza I:
 - "Dziedzina" funkcji
 - granice na krańcach (e.g. w $\infty, -\infty$)
 - punkty charakterystyczne typu f(0)
 - szczególne własności funkcji (np. f jest parzysta f(x) = f(-x))
 - okresowość
- · szkic wykresu
- · poprawki na wykresie
 - obliczanie pochodnej funkcji (ekstrema, przegięcia, monotoniczność)
 - obliczanie drugiej pochodnej (badanie wypukłości, asymptoty ukośne)

Notatki z pliku notes/01matematyka1/matematyka_2023.12.04.md

2.6 Rachunek Całkowy

Kalkulator Całek

definicja całki

f to funkcja określona na przedziale otwartym

jeżeli F na tym samym przedziale ma pochodną i F'(x) = f(x) funkcję F nazywamy funkcją pierwotną f lub całką nieoznaczoną funkcji ${\bf f}$ i oznaczamy $\int f(x)dx$

1 Twierdzenie o stałej całkowania

Jeżeli F jest funkcją pierwotną f
, to F+C rócenież jest pierwotną funkcji f\$

 $\int f(x)dx$ to rodzina funkcji. Funkcja pierwotna jest określona z dokładnością do stałej. \$\$

2.6.1 Metody obliczania całek

Zgadywanie

f(x)	$\int f(x)dx$
0	const
C	Cx
x^2	$\frac{1}{2}x^2$
x^{α}	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ $\alpha \neq -1$
$\frac{1}{x}$	\$ln(
cos(x)	sin(x)
sin(x)	-cos(x)
ctg(x)	\$ln(
tg(x)	\$-ln(
$\frac{tg(x)}{\frac{1}{\cos^2(x)}}$	tg(x)
$\frac{-1}{\sin^2(x)}$	ctg(x)\$
e^x	e^x
e^{-x}	$-e^{-x}$
$\frac{1}{1+x^2}$	arctg(x)
cosh(x)	sinh(x)
sinh(x)	cosh(x)
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	arcsin(x)
$\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$	$ln(x+\sqrt{x^2+a})$

1 Liniowość*

Jeśli **f** i **g** mają funkcje pierwotne f+g oraz c*f też mają funkcje pierwotne oraz $\int f+g=\int f+\int g$ natomiast $\int c*f=c*\int f$.

Ważne

Operacja całkowania nie jest liniowa, ponieważ wystębuje translacja o stałą

Ważne

niech $f(x) \neq 0$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(f(x))$$

1 Informacja

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} ln(1+x^2) + C$$

$$\int ctg(x) dx = \int \frac{cos(x)}{sin(x)} dx = ln(sin(x)) + C$$

$$\int tg(x) dx = \int \frac{sin(x)}{cos(x)} dx =$$

$$= -\int \frac{-sin(x)}{cos(x)} dx = -ln(|cos(x)|) + C$$

przez części

$$f * g = \int f' * g + \int f * g'$$
$$\int f' * g = f * g - \int fg'$$

1 Informacja

$$\int x * e^x = \int x * (e^x)' = x * e^x - \int e^x = x * e^x - e^x$$

$$\int x * e^x = \int \frac{(x^2)'}{2} * e^x = \frac{x^2}{2} e^x - \int \frac{(x^2)}{2} e^x$$

$$\int ln(x) = \int 1 * ln(x) = \int (x)' ln(x) = x ln(x) - \int x * \frac{1}{x} = x * ln(x) - x$$

Ostrzeżenie

EGZAMIN Z ANALIZY

- Czas trwania: 90 min
- 1 termin na początku sesji
- 4 zadania (3 zadania-zadania + 1 teoria).
- · Zadania klasyczne

Notatki z pliku notes/01matematyka1/matematyka_2023.12.11.md

Przez podstawienie

1 Podstawienie

Niech G(y) będzie funkcją pierwotną funkcji g(y) a f(x) będzie klasy C^1 . Wtedy $\int G(y) dy |_{y = f(x)} = \int G(y) dy$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx$$

$$x = sint$$

$$dx = costdt$$

$$\int \sqrt{1-sin^2t} cost * dt =$$

$$= \int cos^2(t) dt = \frac{1}{2} \int 2cos^2t dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int 1 + cos(2t) dt =$$

$$= \frac{1}{2} (t + \frac{1}{2} sin(2t)) =$$

$$\frac{1}{2} arcsin(x) + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2}$$

$$I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

$$I_1 = arctg(x)$$

$$I_n = \int \frac{1+x^2-x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n} dx =$$

$$= I_{n-1} - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n} I_n = \frac{1}{2n-2} \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}$$

Całki funkcji wymiernych

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} = ?$$

Należy znaleźć rozkład funkcji na ułamki proste:

$$\begin{array}{c|c} f(x) & \int f(x) dx \\ \hline \frac{A}{x-A} & \$ \ln(x-A) \\ \frac{A}{(x-A)^k} & \frac{-1}{x-1} \cdots \end{array}$$

- $\frac{Cx-B}{(x-n)^2+a^2}$
- $\bullet \quad \frac{Cx-B}{((x-p)^2+q^2)^k}$

Notatki z pliku notes/01matematyka1/matematyka_2023.12.18.md

Całkowanie ułamków prostych

$$\frac{Ax+B}{((x-p)^2+q)^k}$$

Wskazówka

$$x+3 \over ((x-2)^2+5)^2$$

$$y = (x-2)^2+5$$

$$dy = 2(x-2)dx$$

$$\frac{2(x-2)-2(x-2)+x+3}{((x-2)^2+5)^2}$$

1 Informacja

Rozkładanie na ułamki proste

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$
$$1 = A(x+2) + B(x-1)$$
$$1 = Ax + 2A + Bx - B$$
$$\begin{cases} A+B=0\\ 2A-B=1 \end{cases} \Rightarrow A = -B = \frac{1}{3}$$

Całkowanie Funkcji typu R(cos(x), sin(x))

Metoda: Podstawienie $t=tg\frac{x}{2}$

$$sin(x) = 2 * sin(\frac{x}{2})cos(\frac{x}{2}) = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}}$$

$$cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$tg(x) = \frac{2t}{1 + t}$$

$$dt = 2\frac{1}{1 + t^2}dt$$

Całki z pierwiastkiem

$$\int \sqrt{1 - x^2} dx$$

$$x = \sin(t)$$

$$dx = \cos(t)$$

$$\int \sqrt{1 - \sin^2(t)} \cos(t) dt$$

$$\int \cos^2(t) dt$$

$$\int \sqrt{1 + x^2} dx$$
$$x = \sinh(t)$$

Notatki z pliku notes/01matematyka1/matematyka_2024.01.08.md

2.7 Całka Oznaczona (Rimana)

Podzielmy przedział (a, b) na n części, w taki sposób.

$$\Delta x_i = |X_i - X_{i-1}|$$
$$\delta_n = \max(\Delta x)$$

$$s_n = \sum_i n_i * \Delta x_i$$
$$c_n = \sum_i \psi(i) \Delta x_i$$
$$S_n = \sum_i M \Delta x_i$$

- n_i to infinum funkcji w danym przedziale (najmniejsza wartość)
- \bullet M to supremum funckji w danym przedziale (czyli mnożenie przez największą wartość funkcji w przedziale)

Wskazówka

 s_n reprezentuje sumę wszystkich prostokątów w zaokrągleniu pod wykresem, natomiast S_n - wszystkich kawałkóc zaokrąglonych do maksymalnej wartości

definicja całki oznaczonej

Jeżeli suma σ_n przy dowolnym coraz rócniejszym podziale (tzn. przy $\sigma_n \to 0$) dąży do tej samej granicy niezależnie od wyboru punktóc podziału ani od wyboru od wyboru punktów ψ_i to granicę tę nazywamy **Całką Oznaczoną** z funkcji $\mathbf f$ w przedziale $\langle a,b \rangle$ (tzw. całka Rimmana)

Oznaczenia:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{\langle a,b\rangle} f$$

Całka nie zawsze istnieje.

Całka
$$\exists \int_a^b \Leftrightarrow s_n = S_n$$

Wskazówka

f jest jednostajnie ciągła, $\forall \epsilon>0, \exists \delta>0$ że jeżeli $|x-x'|<\delta\Rightarrow f(x)-f(x')<\epsilon$ $\epsilon>0$ i f jednostajnie ciągła, $x-x'<\epsilon\Rightarrow f(x)-f(x')<\delta$

$$S_n - s_n = \Sigma_i x_i (M - m) \le \epsilon \Sigma_i x_i = \epsilon (a - b)$$

2.7.1 Własności całki Rimmana

- spełnia zasadę liniowości (rozdzielność względem dodawania oraz mnożenia przez skalar)
- addytywność względem przedziału jeżeli $c \in \langle a,b \rangle$ to $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$
- $m(b-a) \le \int_a^b \le M(b-a)$
- twierdzenie o wartośći średniej dla całęk (jeżeli f
 ciągła) $\exists \psi \in \langle a,b \rangle \ \frac{1}{b-a} \int_a^b f = f(\psi)$

Notatki z pliku notes/01matematyka1/matematyka_2024.01.15.md

2.8 Zastosowania całek

2.8.1 Pole pod wykresem

Jeżeli funkcja jest całkowalna, to pole pomiędzy prostymi a i b wynosi $\int_a^b f(x)dx$.

1 Informacja

całka to **nie** jest pole. (e.g. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \ dx = 0$)

1 pole elipsy

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

$$y = + -\frac{B}{A} * \sqrt{A^2 - x^2}$$

$$P = 4 \int_0^a \frac{B}{A} \sqrt{A^2 - x^2} = \pi * A * B$$

###4 Obliczanie długości krzywej

$$l = \Sigma_{i} \sqrt{(\phi(t_{i}) - \phi(t_{i} - 1))^{2} + (\psi(t_{i}) - \psi(t_{i} - 1))^{2}} =$$

$$= \Delta t_{i} \Sigma_{i} \sqrt{\phi'(u_{i})^{2} + \psi(\zeta_{i})^{2}}$$

$$\int_{0}^{\beta} \sqrt{\phi'^{2} + \psi'^{2}} dt$$

1 Twierdzenie

$$\gamma = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\phi'^2 + \psi'^2} dt$$

jeżeli krzywa jest opisana równaniem

$$\gamma = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Notatki z pliku notes/01matematyka1/matematyka_2024.01.22.md

2.9 Krzywe Stożkowe

Te krzywe powstają poprzezs przecięcie stożka płaszczyzną.

- okrag
- elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Mimośrodem elpisy nazywamy parametr $e = \frac{c}{a} < 1$ (c to odległość ognisk od środka elipsy)
- hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $||PF_1|-|PF_2||=2a$
- parabola: Załóżmy ognisko F i prostą k nieprzechodzącą przez ten punkt. Prostą nazywamy kierownicą. |PF|=odl(P,k) $y^2=2px$

Ogólen róænanie krzywych stożkowych: $\rho = \frac{p}{1+e^*\cos\phi}$

Notatki z pliku notes/01matematyka1_cw/matematyka_cw_2023.10.19.md

ROZDZIAŁ 3

Matematyka 1 - ćwiczenia

1 Wzór sterlinga

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Notatki z pliku notes/01matematyka1_cw/matematyka_cw_2023.11.30.md

3.1 Przydatne własności

Wskazówka

Przy wistępowaniu nioznaconości typu $[0*\infty]$ wystarczy iloczyn zapisać w postaci ilorazu na przykład

$$\lim_{x \to 0} x * \left(\frac{1}{x} + 1\right) = \frac{\frac{1}{x} + 1}{\frac{1}{x}}$$

W ten sposób otrzymamy nieoznaczoność typu $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ więc możemy skorzystać z reguły de l'Hospital'a

3.2 Przykładowa tabela przebiegu zmienności funkcji:

	$(-\infty, -1)$	-1	$\left(-1, -\frac{2}{5}\right)$	$-\frac{2}{5}$	$\left(\frac{-2}{3},0\right)$	0	(0,2)	2	$(2,\infty)$
f'(x)	+	0	-	-	-	X	-	0	+
f''(x)	-	-	-	0	+	X	+	+	+
f(x)	rośnie	$\max e^{-1}$	maleje	$PP \frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}}$	maleje	X	maleje	$\min 4\sqrt{e}$	rośnie

3.3 Triksy



Równość:

$$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

jest prawdziwa tylko dla $x \ge 0$ ponieważ:

$$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{x^2}$$

Przykładowo dla x = -1

$$\sqrt[3]{-1} = -1$$

$$\sqrt[6]{(-1)^2} = 1$$

Notatki z pliku notes/01matematyka1_cw/matematyka_cw_2024.01.03.md

3.4 Całki - Istotne wzory / wyprowadzenia

• Wzór redukcyjny (na $sin^n x$)

$$\int \sin^n x = -\frac{\sin^{n-1} x * \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$$

$$\int \sin^{n} x =$$

$$= \int \sin^{n-1} x * \sin x =$$

$$\begin{vmatrix} u = \sin^{n-1} x & v' = \sin x \\ u' = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x & v = -\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= -\sin^{n-1} x * \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} \cos^{2} x =$$

$$= -\sin^{n-1} x * \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x (1 - \sin^{2} x) dx =$$

$$= -\sin^{n-1} x * \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x - (n-1) \int \sin^{n} x dx =$$

$$n \int \sin^{n} x dx = -\sin^{n-1} x * \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x dx$$

$$\int \sin^{n} x dx = -\frac{\sin^{n-1} x * \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$$

Notatki z pliku notes/01matematyka1_cw/matematyka_cw_2024.01.04.md

• Podstawienia dla funkcji niewymiernych:

typ funkcji	podstawienie za x
$R(x,\sqrt{a^2-x^2})$	a*sin t
$R(x, \sqrt{a^2 + x^2})$	a * tg t
$R(x,\sqrt{x^2-a^2})$	$\frac{a}{\cos t}$

Wskazówka

Najważniejsze wzory dla funkcji cyklometrycznych

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$sinh 2x = 2 * sinh x * cosh x$$

 $cosh 2x = sinh^2x + cosh^2x$
 $1 = cosh x - sinh 1$

• Podstawienia uniwersalne dla funkcji trygonometrycznych:

$tg\frac{x}{2}$	cos x	sin x	dx
t	$\frac{1-t^2}{1+t^2}$	$\frac{2t}{1+t^2}$	$\frac{2}{1+t^2}dt$

tg x	cos^2x	sin^2x	dx
t	$\frac{1}{1+t^2}$	$\frac{t^2}{1+t^2}$	$\frac{1}{1+t^2}$

• Wzór obniżający potęgę sin^2x

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

Notatki z pliku notes/01matematyka1_cw/matematyka_cw_2024.01.17.md

3.5 Całki Rimmana - tricki / przydatne wzory

Oto definicja całki oznaczonej:

$$\int_{a}^{b} = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{b-a}{n} * \sum_{i=1}^{n} f(a+i\frac{b-a}{n}) \right]$$

Wskazówka

Ta funkcja oznacza po prostu pocięcie "pola figury" ograniczonej funkcją f na małe prostokąty, zbudowanie z nich "wieży" o podstawie $\frac{b-a}{n}$ i wysokości $\sum \dots$ i obliczenie jej pola jako pola prostokąta

Notatki z pliku notes/01matematyka1_cw/matematyka_cw_2024.01.25.md

Objętość bryły utworozonej przez krzywą obracaną wokół osi OX: $|V| = \pi \int_a^b f^2(x) dx$

Pole powierzchni figury utworzonej poprzez obrut prostej f(x) wokół osi x $|S|=\int_a^b f(x)*\sqrt{1+f'(x)^2}$

Notatki z pliku notes/01matematyka1_cw/matematyka_cw_2024.01.27.md

3.6 Granice: - Tricki

3.6.1 Symbole Nieoznaczone czyli co z tym robić?

 $0*\infty$

$$[0*\infty] = \left[\frac{0}{\frac{1}{\infty}}\right] = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Teraz można użyć twierdzenia de l'Hospital.

Dowód:

$$\lim_{n\to\infty} n \frac{1}{n^2} \stackrel{[0*\infty]}{=} 0$$

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \frac{1}{n} \stackrel{[0*\infty]}{=} \infty$$

 $\infty - \infty$

Dowód:

$$\lim_{n \to \infty} n - n^2 \stackrel{[\infty - \infty]}{=} \lim_{n \to \infty} n^2 \left(\frac{1}{n} - 1\right) = -\infty$$
$$\lim_{n \to \infty} n^2 - n \stackrel{[\infty - \infty]}{=} \lim_{n \to \infty} n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \infty$$

 $\frac{\infty}{\infty}$ i $\frac{0}{0}$

Dowód analogiczny jak powyżej. Aby rozwiązać korzystamy z twierdzenia de l'Hospital'a

Notatki z pliku notes/01mechanika/index.md

ROZDZIAŁ 4

Mechanika

4.1 Wstęp

Przedmiot Mechanika realizowany jest na 1 roku i 1 semestrze studiów wyższych I stopnia na Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica w Krakowie na kierunku Fizyka Techniczna.

4.2 Wstęp #2

4.2.1 Układy Odniesienia

- Kartezjański
 - współrzędne punktu opisane za pomocą wektora wodzącego \vec{r}
 - $\vec{r} = \vec{r_x} + \vec{r_y}$
 - współrzędne punktu są określane parą liczb (x,y)
 - $\vec{r_x} = r_x * \hat{n_x}$

Ważne

Wersor to wektor o długości 1.

W Kartezjańskim układzie współrzędnych używany do ustalenia jednostki na osiach.

Co do samego wersora, to można powiedzieć że dla $\vec{a} = \hat{a}$

- Biegunowy
 - Współrzędne określane parą liczb $(|\vec{r}|, \phi)$
 - ϕ to kąt pomiędzy vecr a osią OX
 - wersory $\hat{n_r}, \hat{n_\phi}$ oraz $\hat{n_r} \perp \hat{n_\phi}$
 - $-\vec{r} = r * \hat{n_r}$

Ważne

Wersory układu biegunowego są zmienne

1 Informacja

Przejścia między układami odniesienia:

Kartezjański → biegunowy:

$$\vec{r} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\phi = arctg(\frac{x}{y})$$

• Kartezjański ← biegunowy:

$$x = r * sin(\phi)$$

$$y = r * cos(\phi)$$

♀ Wskazówka

3-wymiarowa wersja układu biegunowego to układ sferyczny. Współrzędne w takim układzie określa następująca trójka uporządkowana: (r, θ, ϕ)

4.2.2 Matma

Działania na wektorach

1 Informacja

Własności wektora:

- Punkt zaczepienia
- Wartość
- Kierunek
- Zwrot
- Dodawanie wektorów mam nadzieje że jest jasne

Wskazówka

odejmowanie wektorów $\vec{a}-\vec{b}$ to po prostu $\vec{a}+(-\vec{b})$

- Mnożenie wektora przez skalar $x*\vec{a} = [a_x*x, a_y*x]$ (oczywiście wszystkie inne duchowe wymiary obsługiwane)
- Mnożenie wektora przez wektor
 - wektorowy iloczyn skalarny (wynikiem jest skalar)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a * b * cos\alpha = a_x * b_x + a_y * b_y$$

52 Rozdział 4. Mechanika

Ważne

$$\cos\alpha = \frac{\tilde{\mathbf{a}} \cdot \tilde{\mathbf{b}}}{\mathbf{a} * \mathbf{b}}$$

Wskazówka

$$\mathbf{\tilde{a}}\perp\mathbf{\tilde{b}}\Leftrightarrow\mathbf{\tilde{a}}\cdot\mathbf{\tilde{b}}=\mathbf{0}$$

• wektorowy iloczyn wektorowy (wynikiem jest wektor)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

1 Informacja

Kierunek wektora \vec{c} określa się na podstawie zasady śruby prawoskrętnej oraz $\vec{a} \perp \vec{c} \wedge \vec{b} \perp \vec{c}$

Z tego powodu $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$

$$\begin{aligned} niech \; a, b, \alpha \\ |\vec{a} \times \vec{b}| &= a * b * sin \alpha \end{aligned}$$

$$niech \ \vec{a}, \vec{b}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y * b_z - a_z * b_y, a_z * b_x - a_x * b_z, a_x * b_y - a_y * b_x)$$

1 Informacja

Powyższy wzór otrzymamy rozważając następującą macierz:

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z W = \\ \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \end{array}$$

$$= \hat{i} * a_y * b_z + a_x * b_y * \hat{k} + b_x * \hat{j} * a_z - \hat{k} * a_y * b_x - a_z * b_y * \hat{i} - b_z * \hat{j} * a_x$$

$$= \hat{i} * (a_y * b_z - a_z * b_y) + \hat{j} * (a_z * b_x - a_x * b_z) + \hat{k} * (a_x * b_y - a_y * b_x)$$

4.2. Wstęp #2 53

Wskazówka

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b}$$

Rachunek różniczkowy

- ullet pochodna określa jak szybko zmienia się funkcja w punkcie x_0 względem x_1
- $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ to tzw. iloraz różnicowy
- f'(x) to granica ilorazu różnicowego przy $\Delta x \to 0$
- Wrażenie $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ nazywamy różniczką

Wskazówka

$$niech f(x) = x^{2}wtedy$$

$$\frac{dy}{dx} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^{2} - x^{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^{2} + 2x\Delta x + \Delta x^{2} - x^{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x =$$

$$= 2x$$

Wskazówka

$$(e^x)' = e^x$$

Rachunek całkowy

Istnieją 2 typy całek

- · Całka nieoznaczona:
 - pozwala na odnalezienie funkcji pierwotnej (z której powstała pochodna)
- · całka oznaczona
 - może być interpretowana jako pole pod wykresem krzywej

$$niechF(x) = \int g(x)dx$$

$$dS = f(x)dx$$

$$S = \int_{A}^{B} f(x)dx$$

$$\int_{A}^{B} f(x)dx = F(B) - F(A)$$

4.3 Podstawy Kinematyki

4.3.1 Ruch punktu materialnego na płaszczyźnie

1 Informacja

korzystamy z modelu punktu materialnego (pomijamy wszystkie statystyki z wyjątkiem masy)

Równanie ruchu: $\vec{r}(t) = x(t) * \hat{n_x} + y(t) * \hat{n_y}$

Prędkość

1 Prędkość Średnia

$$v_r = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta r}$$

1 Prędkość chwilowa

$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (x * \hat{n_x} + y * \hat{n_y}) =$$

$$= \frac{dx}{dt} * \hat{n_x} + \frac{dy}{dt} * \hat{n_y} =$$

$$= v_x * \hat{n_x} + v_y * \hat{n_y} =$$

$$= \tilde{\mathbf{v_x}} + \tilde{\mathbf{v_y}}$$

Wskazówka

v jest zawsze styczne do toru, po którym porusza się ciało.

1 Informacja

• dla $\vec{v} = const$ ruch jednostajny prostoliniowy $\vec{r} = \vec{v} * t$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$
$$d\vec{r} = \vec{v}dt$$
$$\int d\vec{r} = \int \vec{v}dt$$

$$\int d\vec{r} = \vec{r}$$

$$\vec{r} = \int \vec{v} dt$$

$$dla \ v = const$$
$$\int \vec{v} dt = \vec{v} \int dt$$

$$\vec{r} = \vec{v} \int dt$$
$$\vec{r} = \vec{v}t + C$$

- ruch jest prostoliniowy, gdy kierunek prędkości jest stały
- ruch jednostajny krzywoliniowy występuje, gdy $|\vec{v}| = const$

Przyspieszenie

• określa szybkość zmiany prędkości

1 Przyspieszenie średnie i chwilowe

Przyspieszenie średnie definiujemy jako:

$$a_r = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Rzut ukośny (przykład 1)

Założenia początkowe

$$\vec{r_0} = [0, 0]$$

$$\vec{v_0} = [\vec{v_0} cos\alpha, \vec{v_0} sin\alpha]$$

⚠ Ostrzeżenie

Jedyną siłą działającą na ciało w rzucie ukośny jest grawitacja. $a_x=0$ $a_y = -g$

56 Rozdział 4. Mechanika

$$\int a_x dt = v_x$$

$$\int 0 dt = v_x$$

$$v_x = C_1 = v_0 cos\alpha$$

$$\int a_y dt = v_y$$

$$\int -g dt = v_y$$

$$-g t + C_2 = v_y$$

$$dla chwili t_0:$$

$$-g * 0 + C_2 = \vec{v} sin\alpha$$

$$C_2 = v_0 sin\alpha$$

$$v_y = -g t + v_0 sin\alpha$$

$$x(t) = \int v_0 cos\alpha dt$$

$$x(t) = \int v_0 cos\alpha dt$$

$$x(t) = v_0 cos\alpha t + C_3$$

$$dla t_0 x = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

$$x(0) = v_0 cos\alpha t$$

$$y(t) = \int v_y dt$$

$$y(t) = \int (-g t + v_0 sin\alpha) dt$$

$$y(t) = \int -g t dt + \int v_0 sin\alpha dt$$

$$y(t) = \frac{-g t^2}{2} + v_0 sin\alpha t + C_4$$

$$dla t_0 y_0 = 0 \Rightarrow C_4 = 0$$

$$y(t) = \frac{-g t^2}{2} + v_0 sin\alpha t$$

Zasięg

$$t = \frac{x}{v_0 cos \alpha}$$

$$podstawienie do rwnania y$$

$$y = \frac{-gx^2}{2v_0^2 cos^2 \alpha} + v_0 sin\alpha \frac{x}{v_0 cos \alpha}$$

$$y = \frac{-gx^2}{2v_0^2 cos^2 \alpha} + xtg\alpha$$

$$d = \frac{2v_0 sin\alpha * \cos \alpha}{g} = \frac{v_0 * sin2\alpha}{g}$$

Ruch łudki w poprzek rzeki (przykład 2)

1 Załorzenia

• prękdość rzeki na środku jest największa (przy brzegu prędkość wynosi 0) Profil prędkości sinusoidalny. $(x=cos(\frac{\pi y}{L}))$

$$\vec{r} = [0,0]$$

$$v_x = v_0 * sin\alpha \ v_0 cos\alpha * t$$

$$v_y = v_0 cos\alpha$$

$$\begin{split} x(t) &= \int v_x dt \\ x(t) &= \int v_0 * sin(\alpha) dt \\ x(t) &= v_0 \frac{L}{\pi v_1} * cos(\frac{\pi v_1}{L}) * t + C \\ C &= v_0 \frac{L}{\pi v_1} \\ x(t) &= -v_0 \frac{L}{\pi v_1} * cos(\frac{\pi v_1}{L}) * t + v_0 \frac{L}{\pi v_1} \\ x(t) &= v_0 \frac{L}{\pi v_1} * (-cos(\frac{\pi v_1}{L}) * t + 1) \\ y(t) &= v_1 t \\ x &= \frac{v_0 L}{\pi V_1} * (1 - cos \frac{\pi L}{y}) \\ d &= \frac{2v_0 L}{\pi v_1} \end{split}$$

4.3.2 Ruch względny i transformacja galileusza

Rozważmy dwa układy odniesienia (S i S'). $\vec{V_U} = const$ - prędkość S' względem S.

Ważne

Załużmy, że $X \parallel X'$

1 Informacja

$$S \Leftrightarrow S'$$
$$t' = t = t_0$$

58 Rozdział 4. Mechanika

Załużmy punkt A, wtedy jego położenie można określić zrówno jako \vec{r} względem S oraz $\vec{r'}$ względem S'

Transformacja to związek między \vec{r} a $\vec{r'}$.

Niech \vec{R} to wektor określający położenie S' względem S

1 Informacja

$$dla t_0$$

$$\vec{R} = 0$$

$$\vec{R} = v_u * t$$

$$\mathrm{niech}\; R_x = R \wedge R_y = 0 \wedge R_z = 0$$

$$\vec{r'} = \vec{r} - \vec{R}$$

$$x' = r_x - v_u t$$

$$v_x' = v_x - v_u$$

Przyspieszenie w obu układach jest stałe ⇔ wykonują one względem siebie ruch jednostajny prostoliniowy

4.3.3 Dynamika ruchu po okręgu

$$\omega = \frac{d\phi}{dt}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Wskazówka

 $\vec{\omega}$ jest prostopadły do wektora prędkości i promienia wodzącego (prostopadły do płaszczyzny na której odbywa sie ruch)

Przyspieszenie kątowe $\epsilon = \frac{d\omega}{dt}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt}$$

× traktujemy jak zwykłe mnożenie i liczymy pochodną

$$\begin{split} \vec{a} &= \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{\omega} \\ \vec{a} &= \vec{\epsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} \end{split}$$

4.3.4 Względność ruchu po okręgu

Niech S' będzie układem inercjalnym względem S. Niech z=z' i niech $\vec{\omega}_{S'}\parallel z\parallel z'$

Dla
$$t = t' = 0$$
 $x = x' \wedge y = y'$

$$\mathbf{\tilde{v}} \leftrightarrow \tilde{\mathbf{v'}}$$

$$\begin{aligned} dla \ \vec{v'} &= 0 \qquad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \\ dla \ \vec{v'} &\neq 0 \qquad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v'} \end{aligned}$$

dla układu biegunowego

$$\begin{split} \hat{n_r} &= cos\phi \hat{n_x} + sin\phi \hat{n_y} \\ \hat{n_\phi} &= -sin\phi \hat{n_x} + cos\phi \hat{n_y} \end{split}$$

$$\begin{split} \vec{v} &= \frac{d}{dt}(r\hat{n_r}) \\ \vec{v} &= \frac{dr}{dt}\hat{n_r} + \frac{d\hat{n_r}}{dt}r \\ \vec{v} &= \frac{dr}{dt}\hat{n_r} + r\frac{d}{dt}(\cos\phi\hat{n_x} + \sin\phi\hat{n_y}) \\ \vec{v} &= \frac{dr}{dt}\hat{n_r} + r\left(\frac{d\phi}{dt}(-\sin\phi)\hat{n_x} + \frac{d\phi}{dt}\cos\phi\hat{n_y}\right) \\ \vec{v} &= \frac{dr}{dt}\hat{n_r} + r\frac{d\phi}{dt}(-\sin\phi\hat{\mathbf{n_x}} + \cos\phi\hat{\mathbf{n_y}}) \\ \vec{v} &= \frac{dr}{dt}\hat{n_r} + r\frac{d\phi}{dt}(-\sin\phi\hat{\mathbf{n_x}} + \cos\phi\hat{\mathbf{n_y}}) \end{split}$$

$$\mathbf{\tilde{a}} \leftrightarrow \mathbf{\tilde{a'}}$$

$$\vec{a} = \vec{a'} + 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

60 Rozdział 4. Mechanika

dla układu biegunowego

$$\vec{a} = a_r \hat{n_r} + a_\phi \hat{n_\phi}$$

$$a_r = \frac{dv_r}{dt} \quad a_\phi = \frac{dv_\phi}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{dv_r}{dt} \hat{n_r} + \frac{dv_\phi}{dt} \hat{n_\phi}$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \hat{n_r} + r \frac{d\phi}{dt} \hat{n_\phi} \right)$$

$$niech \ x = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \hat{n_r} \right) \land y = \frac{d}{dt} \left(r \frac{d\phi}{dt} \hat{n_\phi} \right)$$

$$x = \frac{d^2r}{dt^2} \hat{n_r} + \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} \hat{n_\phi} \land y = \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} \hat{n_\phi} + r \frac{d}{dt} \left(\frac{d\phi}{dt} \hat{n_\phi} \right)$$

$$y = \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} \hat{n_\phi} + r \left(\frac{d^2\phi}{dt^2} \hat{n_\phi} + \frac{d\phi}{dt} \frac{d\hat{n_\phi}}{dt} \right)$$

$$\frac{dn_\phi}{dt} = \frac{d}{dt} \left(-\sin\phi \hat{n_x} + \cos\phi \hat{n_y} \right)$$

$$\frac{dn_\phi}{dt} = -\frac{d\phi}{dt} \left(\cos\phi \hat{n_x} - \sin\phi \hat{n_y} \right)$$

$$\frac{dn_\phi}{dt} = -\frac{d\phi}{dt} \hat{n_\phi} + r \left(\frac{d^2\phi}{dt^2} \hat{n_\phi} - \frac{d^2\phi}{dt^2} \hat{n_r} \right)$$

$$\vec{a} = \frac{d^2r}{dt^2} \hat{n_r} + \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} \hat{n_\phi} + \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} \hat{n_\phi} + r \left(\frac{d^2\phi}{dt^2} \hat{n_\phi} - \frac{d^2\phi}{dt^2} \hat{n_r} \right)$$

$$\vec{a} = \frac{d^2r}{dt^2} \hat{n_r} + \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} \hat{n_\phi} + \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} \hat{n_\phi} + r \left(\frac{d^2\phi}{dt^2} \hat{n_\phi} - \frac{d^2\phi}{dt^2} \hat{n_r} \right)$$

$$\vec{a} = \hat{n_r} \left(\frac{d^2r}{dt^2} \hat{n_r} - r \frac{d^2\phi}{dt^2} \right) + \hat{n_\phi} \left(\frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} + \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} + r \frac{d^2\phi}{dt^2} \right)$$

$$a_y = +\hat{n_\phi} \left(\frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} + \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} + r \frac{d^2\phi}{dt^2} \right)$$

Przyspieszenie styczne i normalne

$$a_{s} = \frac{d |\vec{v}|}{dt}$$

$$\vec{v} = \hat{n_{s}}v$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{n_{s}} + \frac{d\hat{n_{s}}}{dt}v$$

z tożsamości wersorów stycznego i transwersalnego

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{n_s} - \hat{n_n}v$$

4.4 Dynamika

4.4.1 Prawo bezwładności aka I Zasada Dynamiki Newtona

1 Definicja

Swobodny* punkt materialny** zawsze wykonuje ruch jednostajny prostoliniowy

- 1 Informacja
- * Swobodny nie oddziaływuje z innymi ciałami ($\vec{a} = 0$)
- ** Punkt materialny model bezywmiarowego ciała, w którym jedyną istotną statystyką jest masa

Wskazówka

Układy inercjalne to takie, które wykonują względem siebie jedynie ruch jednostajny prostoliniowy.

4.4.2 Pęd

1 Pęd

 $\vec{p} = m\vec{v}$

Wskazówka

 $p = \left[kg * \frac{m}{s}\right]$

1 Informacja

Działa zasada zachowania pędu

Całkowity pęd ukłądy, na którego nie oddziaływują siły zewnętrzne jest stały

Manewr grawitacyjny

Manewr grawitaqcyjny (aka Gravity Assistance - GA) - wykorzystanie zjawisk grawitacyjnych do zwiększenia prędkości obiektu.

4.4.3 Zasady dynamiki Newtona

1 II Zasada Dynamiki Newtona

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

1 III Zasada Dynamiki Newtona

$$\Delta p_1 = -\Delta p_2$$

$$\frac{d\vec{p_1}}{dt} = -\frac{d\vec{p_2}}{dt}$$

$$\vec{F_1} = -\vec{F_2}$$

$$ec{F}=rac{dec{p}}{dt}$$

$$ec{F}=rac{d}{dt}(mec{v})$$
 $ext{dla m}= ext{const}$ $ec{F}=mrac{dec{v}}{dt}$ $ec{F}=mec{a}$

4.4.4 Układy nieinercjalne i siły bezwładności

Układy Inercjalne (UI)	Układy Nieinercjalne (UN)
$\vec{u} = const$	$\vec{u} \neq const$
a = a'	$ec{a'} = ec{a} - ec{a_u}$
$ec{F'} = ec{F}$	$\vec{F} = \vec{a}m - m\vec{a_u}$

Ważne

W układzie nieinercjalnym obserwator zawsze stwierdzi istnienie siły bezwładnoći $\vec{F_b}$

Przykłady

- wachadło stożkowe (zwykłę wachadło wprowadzone w ruch kołowy) w układzie inercjalnym powiązanym z kulką wahadła można zaobserwować siłę odśrodkową (czyli siłę bezwładności)
- Winda

4.4. Dynamika 63

Siły działające na ciała na powierzchni ziemii

$$\begin{split} \vec{a} &= \vec{a'} + 2\vec{\omega} \times \vec{v'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r'}) \\ \vec{a'} &= \vec{a} - 2\vec{\omega} \times \vec{v'} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r'}) \\ m\vec{a'} &= m\vec{a} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v'} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r'}) \\ \vec{F'} &= \vec{F} - \vec{F_c} - \vec{F_{od}} \\ \vec{F_c} &= -2m\vec{\omega} \times \vec{v} \\ \vec{F_{od}} &= -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r'}) \end{split}$$

f i Siła Coriolisa $\vec{F_c}$

- znika dla ciał nieruchomych
- jest prostopadła do prędkości
- powoduje zakrzywienie toru

Tor spadającego ciała odchyli się na wschód.

Wskazówka

Ciało w rzucie poziomym npl. $\vec{v'}$ na zachód, Siła Coriolisa odchyli ciało na północ

1 Informacja

Wachadło fuco - doświadczenie pozwalające udowodnić że ziemia się obraca - istnieje siła Coriolisa

4.4.5 Zastosowania praw dynamiki

Ważne

Przy rozwiązywaniu zadań należy pamiętać o kilku istotnych elementach, m.in:

- Duży rysunek
- · Oznaczenie wszystkich istotnych sił
- Wypisanie równań dynamiki (należy uwzględnić tyle równań, ile jest ciał w układzie)
- Bilans równań i niewiadomych
- Jeśli konieczne poszukać dodatkowych równań (np. związki sił)

maszyna Atwooda

1 Informacja

Na bezwładnym bloczku na nieważkiej nici zawieszono dwie masy: m_1 i m_2

64 Rozdział 4. Mechanika

Jakie będzie przyspieszenie układu?

$$\begin{cases} m_1 * a_1 = m_1 * g - N \\ m_2 * a_2 = N - m_2 * g \\ a_1 = a_2 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} m_1 * a = m_1 * g - N \\ m_2 * a = N - m_2 * g \end{cases}$$

$$a * (m_1 + m_2) = m_1 * g - m_2 * g$$

$$a = g * \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$$

Siły tarcia

1 Siła tarcia

Tarcie występuje gdy jedno ciało porusza się względem drugiego oraz występuje siła dociskająca je do siebie.

• tarcie kinetyczne ma miejsce gdy jedno ciało przesuwa się o powierzchni drugiego

$$T = \mu * N$$

Ważne

Współczynnik tarcia kinetycznego μ - wartość tablicowa.

Tarcie Statyczne

1 Tarcie statyczne

równoważy siłę zsuwającą

- nie jest określone konkretnym wzorem
- $T_s \in \langle 0, T_{s_{max}} \rangle$
- $T_{s_max} = \mu_s N$
- Najczęściej $\mu_s > \mu$

Ciało na równi pochyłej

$$a = g * (sin \alpha - k * cos \alpha) \Leftrightarrow k * cos \alpha > sin \alpha$$

Wskazówka

kąt graniczny przejścia tarcia kinetycznego na statyczne gdy $tg\alpha=k$

4.4. Dynamika 65

Ruch pod wpływem siły sprężystej

1 Prawo Hooke'a

$$F = -kx$$

Równanie dynamiki dla oscylatora harmonicznego

$$F = -kx$$

$$am = -kx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}m = -kx$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$niech\frac{k}{m} = \omega^2$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$$

Ważne

Równania różniczkowe - równania, w których szukana zmienna znajduje się pod pochodną

Wskazówka

równanie $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ jest:

- zwyczajne (jednej zmiennej)
- liniowe
- o stałych współczynikach ($\omega = const$)
- jednorodne (po prawej stronie jest 0)

$$x(t) = C_1 * e^{\lambda_1 t} + C_2 * e^{\lambda_2 t}$$

 C_1 i C_2 otrzymujemy z warunków początkowych λ z technicznego podstawienia

$$x = e^{\lambda t}$$
$$\frac{dx}{dt} = \lambda e^{\lambda t}$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \omega^2 e^{\lambda t} = 0$$
$$\lambda^2 = -\omega^2$$

66 Rozdział 4. Mechanika

$$\lambda^2 = -\omega^2$$

$$\lambda_1 = i\omega$$

$$\lambda_2 = -i\omega$$

$$x(t) = C_1 * e^{i\omega * t} + C_2 * e^{-i\omega * t}$$

$$niech C_1 = C_2 = C$$

$$x(t) = C * e^{i\omega * t} + C * e^{-i\omega * t}$$

$$x(t) = C * (cos(\omega t) + i sin(\omega t)) + C * (cos(\omega t) - i sin(\omega t))$$

$$x(t) = 2C * cos(\omega t)$$

$$niech 2C = A$$

$$x(0) = A$$

$$m\frac{dv}{dt} = \frac{dp}{dt} - v_g \frac{dm}{dt}$$

Ważne

Wzór Ciołkowskiego

$$v_k = v_p ln \frac{m_p}{m_k}$$

4.5 Dynamika ruchu krzywoliniowego punktu materialnego

1 Informacja

- siła styczna $m*\frac{dv}{dt}$
- siła normalna $m*\frac{v^2}{\rho}$

4.5.1 Moment Siły

Moment Siły

$$\vec{\tau} = \vec{F} \times \vec{r}$$

Moment Pedu:

$$\begin{split} \vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} \\ \frac{dL}{dt} &= \frac{dr}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \\ \frac{dL}{dt} &= \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} \\ \frac{dL}{dt} &= \vec{v} \times \vec{v} * m + \vec{r} \times \vec{F} \\ \frac{dL}{dt} &= \vec{r} \times \vec{F} \end{split}$$

$$\vec{L} = m * \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

Dla ruchu punktu materialnego na płaszczyźnie: $L=\omega mr^2$

4.5.2 Siła Centralna

• $\vec{F} \parallel \vec{r}$

1 Informacja

Jeżeli ciało wykonuje ruch pod wpływem siły centralnej, to jego moment pędu względem centrum siły jest stały

4.6 Praca i Energia

4.6.1 Praca

$$W = \vec{F} * \vec{s}$$

$$W_{AB} = \int_{A}^{B} F * r$$

$$\mathbf{W} = \int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{r}}) * d\mathbf{r}$$

1 Przykład

Praca siły oscylatora harmonicznego

$$\int_{0}^{x_{0}} kx dx = k \int_{0}^{x_{0}} x dx =$$

$$= k \left[\frac{1}{2} x^{2} \right]_{0}^{x_{0}} =$$

$$= k \left(\frac{x_{0}^{2}}{2} - \frac{0^{2}}{2} \right) =$$

$$\begin{array}{ccc}
 & 2 \\
 & = \frac{1}{2}kx_0^2
 \end{array}$$

4.6.2 Moc

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} * d\vec{r}}{dt} = \vec{F} * \vec{v}$$

4.6.3 Energia

Energia Kinetyczna

$$\begin{split} W &= \int_A^B F ds = \int_A^B m \frac{dv}{dt} ds = m \int \frac{ds}{dt} dv = \\ &= m \int_A^B v dv = m \left[\frac{v^2}{2} \right]_A^B = \\ &= m (\frac{v_B^2}{2} - \frac{v_A^2}{2}) \end{split}$$

Energia Potencjalna

$$niechF = const$$

$$\int_{A}^{B} F dr = F \int_{A}^{B} dr = F [r]$$

4.6.4 Siła Zachowawcza

1 Siła Zachowawcza

to taka, dla której praca nie zależy od toru.

Wskazówka

Aby sprawdzić czy siłą jes zachowawcza należy obliczyć rotację siły

niech F będzie siłą zachowawczą $F \leftrightarrow E_p$

$$dW = F*dr = F_s*ds = -dE_p$$

$$\vec{F} = gradE_p$$

$$F(\vec{r}) = -\frac{dE_p}{dr}$$

Ważne

$$E_k + E_p = const$$

1 Informacja

Energia oscylatora harmonicznego

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{\frac{dx^2}{dt}m}{2}$$
$$E_k = \frac{m}{2}A^2\omega^2\cos^2\omega t$$

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{k}{2}A^2\cos^2\omega t$$

$$E_p + E_k = \frac{m\omega^2A^2}{2}$$

4.6.5 Siła oporu w ośrodku lepkim

$$F_{op} \sim v$$
$$F_{op} = -K\eta \vec{v}$$

gdzie:

- η współczynnik lepkości
- K współczynnik oporu

Wskazówka

Dla **kuli** $k=6\pi R$

1 Wzór Stoksa

$$F_{op} = -6\pi \eta R \vec{v}$$

Spadek w powietrzu

$$v(t) = ?$$

$$F_w = m * g - bv$$

$$v_{\infty} = \frac{mg}{b}$$

$$m * \frac{dv}{dt} + bv = mg$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{bv}{m} = g$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{b}{m} * \frac{dv}{dt} = 0$$

$$v = C_1 * e^0 t + C_2 e^{-\frac{b}{m}t}$$

$$v' = C_2 * (\frac{-b}{m}) e^{-\frac{b}{m}t}$$

$$C_1 = \frac{mg}{b}$$

$$v(t = 0) = 0$$

$$C_2 = -\frac{mg}{b}$$

$$v(t) = \frac{mg}{b} \left(1 - e^{-\frac{m}{b}t}\right)$$

4.6.6 Dynamika ciało o zmiennej masie

3 przykłady

• Na jadącej po poziomym torze platformie osadza się śnieg

$$M = m_0 + \mu * t$$

$$\mu = \frac{dm}{dt}$$

$$F = \frac{dp}{dt}$$

$$dp = (m + dm) * (v + dv) - mv$$

$$dp = dm * v + m * dv + dm * dv$$

$$dm * dv \rightarrow 0$$

$$dp = dm * v + m * dv$$

$$dp = d(mv)$$

$$F = 0 \Rightarrow d(mv) = 0 \Rightarrow mv = const$$

$$mv = m_0 v_0$$

$$v = \frac{m_0 v_0}{m}$$

$$v = \frac{m_0 v_0}{\mu * t}$$

• Siła jest stała

$$niech \ v_0 = 0$$

$$v(t) = ?$$

$$m = m_0 + \mu * t$$

$$\mu = \frac{d\mu}{dt}$$

$$F = \frac{dp}{dt}$$

$$dp = (m + dm) * (v + dv) - mv$$

$$dp = dm * v + m * dv + dm * dv$$

$$dp = d(mv)$$

$$F = \frac{dp}{dt}$$

$$F = \frac{d(mv)}{dt}$$

$$d(mv) = F * dt$$

$$\int d(mv) = \int F * dt$$

$$mv = F * t + C$$

$$m * 0 = F * 0 + C \Rightarrow C = 0$$

$$v = \frac{F * t}{m}$$

$$v = \frac{F * t}{m_0 + \mu t}$$

• Utrata masy

$$niech F = const$$

 $v(t) = ?$
 $m = m_0 - \mu * t$

$$F = \frac{dp}{dt}$$

Masa którą tracimy również ma prędkość v, z tąd należy uwzględnić jej pęd

$$dp = ((m - dm) * (v + dv) + dm * v) - mv$$
$$dp = m * dv$$

$$F = \frac{dp}{dt}$$

$$F = \frac{m * d(v)}{dt}$$

$$m * dv = F * dt$$

$$\int (m_0 - dm)dv = \int F * dt$$

$$v = -\frac{1}{\mu} ln(m_0 - \mu t) * F + C$$

$$v = \frac{F}{\mu} ln \frac{m_0}{m_0 + \mu t}$$

Dynamika rakiety

• v_g - prędkość gazów względem rakiety $v_g = v' - v$

$$niech F = const$$

$$v(t) = ?$$

$$m = m_0 - \mu * t$$

$$//dp = ((m + dm) * (v + dv) + (-dm) * v') - mv$$

$$dp = m * dv - v_g dm$$

$$F = \frac{dp}{dt}$$

$$F = \frac{d(mv)}{dt}$$

$$md(v) = F * dt$$

$$\int (m_0 - dm) dv = \int F * dt$$

$$v = -\frac{1}{\mu} ln(m_0 - \mu t) * F + C$$

$$v = \frac{F}{\mu} ln \frac{m_0}{m_0 + \mu t}$$

Energia w płaskim ruchu krzywoliniowym

$$E = \frac{mv^2}{2} + E_p$$

$$E = \frac{m}{2} \left(\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 * r^2 \right) + E_p$$

$$\vec{L} = mr^2 * \vec{\omega}$$

$$E = \frac{m}{2} \left(\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \omega^2 * r^2 \right) + E_p$$

$$E = \frac{m}{2} \left(\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(\frac{L}{mr} \right)^2 \right) + E_p$$

$$E = \frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + E_p$$

niech siła będzie centralna

$$\frac{L^2}{2m} = const = C$$

$$E = \frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{C}{r} + E_p$$

4.7 Ruch drgający

4.7.1 Kinematyka prostego ruchu harmonicznego

$$x(t) = Asin(\omega * t + \phi_0)$$
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$
$$\hat{x} = \hat{A}e^{i*\omega t}$$
$$\hat{A} = e^{i\phi}$$

4.7.2 Wachadło matematyczne

1 Informacja

 ${f Wachadlem\ matematycznym\ }$ nazywamy punktową mase m zawieszoną na nieważkiej, nierozciągliwej i nieskończenie cienkiej nici o dlugości L

$$F = am$$

$$gsin\alpha = L\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{gsin\alpha}{L} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$niechsin\alpha \approx \alpha$$

$$g\alpha = L\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\alpha(t) = Asin(\omega t + \phi_0)$$

$$\omega^2 = \frac{g}{L}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}Jeeli\ sin\alpha \neq \alpha$$

$$T' = T'_0\sqrt{1 + \frac{\alpha_0}{16} + \dots}$$

4.7.3 Superpozycja drgań prostych

• dla
$$\phi = 0$$
 $\alpha = (A_1 + A_2)cos(\omega t)$

• dla
$$\phi = \pi$$
 $\alpha = |A_1 - A_2| cos(\omega t)$

$$\hat{x} = \hat{A}e^{i(\omega t + \phi)}$$

$$\hat{x_1} + \hat{x_2} = e^{i\omega t}(\hat{A_1} + \hat{A_2}e^{i\phi})$$

$$\omega_1 \neq \omega_2$$

Niech
$$\phi = 0$$

• Niech
$$A_1=A_2$$

$$x_1+x_2=Acos\omega_1t+Acos\omega_2tx=2A_1cos\frac{\omega_1t-\omega_2t}{2}*cos\frac{\omega_1t+\omega_2t}{2}$$

•
$$x_1 \perp x_2$$

$$x_1 = A\cos(\omega t)$$

$$x_1 = B\cos(\omega t)$$

$$E_p = C + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$$

4.7.4 Drgania Harmoniczne tłumione

$$\vec{F} = b\vec{v}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x = e^{\lambda t}$$
$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$$
$$\Delta = 4\beta^2 - 4\omega_0^2$$
$$\Delta = -4(\omega_0^2 - \beta^2)$$

Występują 3 przypadki:

• przypadek słabego tłumienia: $\beta < \omega_0 \Rightarrow \Delta < 0$

$$\sqrt{\Delta} = 2i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$$niech \ \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$$\sqrt{\Delta} = 2i\omega'$$

$$\lambda_1 = \frac{-2\beta - 2i\omega'}{2}$$

$$\lambda_1 = -\beta - \omega'$$

$$\lambda_2 = -\beta + \omega'$$

$$x = C_1 e^{(-\beta - \omega')*t} + C_2 e^{(-\beta + \omega')*t} niech C_1 = C_2$$

$$x = C e^{-\beta t} (e^{i\omega'*t} + e^{-i\omega'*t})$$

$$z \text{ eulera}$$

$$x = C e^{-\beta t} 2cos\omega't$$

$$niech 2C = A$$

$$x = A * e^{-\beta t} 2cos\omega't$$

• silne tłumienie

Obydwa pierwiastki z delty są rzeczywiste Nie pojawiaja się funkcje trygonometryczne ⇒ nie pojawiają się drgania. Występuje pęzanie

• tłumienie krytyczne $\omega_0 = \beta$

4.7.5 Drgania wymuszone i rezonans

$$F_w(t) = F_0 * sin(\omega t)$$

$$am = -kx - bv + F_w$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} sin(\omega t)$$

$$x(t) = Asin(\omega t + \delta)$$

$$\frac{d^2\hat{x}}{dt^2} + 2\beta \frac{d\hat{x}}{dt} + \omega \hat{x} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

$$\hat{x} = \hat{A}e^{i\omega t}$$

...

$$\begin{split} \hat{A}(\omega_0^2 - \omega^2 + 2\beta\omega i) &= \frac{F_0}{m} \\ \hat{\mathbf{A}} &= \frac{\frac{\mathbf{F_0}}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\mathbf{i}\beta\omega} \\ A &= |\hat{A}| &= \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - 4\beta^2\omega^2}} \\ tg\delta &= -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{split}$$

4.7.6 Analiza Furiera Ruchu Harmonicznego

1 Informacja

funkcja jest okresowa jeżeli x(t+T)=x(t), wtedy T nazywamy okresem.

$$niech x(t) = C_1 cos(\omega t) + C_2 sin(\omega t)$$

1 Twierdzenie Furiera

Każda funkcja okresowa o okresie T może być przedstawiona jako suma funkcji sinusoidalnych w następującej postaci:

$$x(t) = a_0 + a_1 cos(\omega t) + a_2 cos(2\omega t) + \dots + a_n cos(n\omega t) + b_1 sin(\omega t) + b_2 sin(2\omega t) + \dots + b_n sin(n\omega t)$$

Wskazówka

To ile wyrazów ww. ciągu należy użyć zależy od tego jak bardzo wykres danej funkcji różni się od sinusoidy

4.7.7 Reprezentacja ruchu drgającego w przestrzeni fazowej

1 Przestrzzeń Fazowa

Przestrzeń zależności położeń i pędów (lub położeń i prędkości). Wymiar przestrzeni fazowej wynosi dla 3-wymiarowego ruchu 6n dla n cząstek

Niech:

ruch 1-wymiarowy,

$$x = Acos\omega t$$

$$v = A\omega sin\omega t$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{A^2\omega^2} = 1$$

Wykres V(x)

Wskazówka

załóżmy wachadło matematyczne skłądająće się z nieważkiego sztywnego pręta oraz masywnej kulki.

$$E_{p} = mgh$$

$$E_{p} = mg(L - Lcos\alpha)$$

Szukamy wykresu ruchu w przestrzenii fazowej

dla dużych amplitud pręta elipsa opisująca drgania (patrz wykres powyżej) staje się coraz bardziej krzywą przypominającą "romb"

1 Informacja

Punkt osobliwy - punkt w którym zachowanie ukłądu jest nieokreślone - na przykłąd gdy nasz pręt jest skierowany pionowo do góry a jego prędkość jest zerowa nie wiadomo w którą stronę rozpocznie się ruch

1 atraktor

kształt do którego dążą wszystkie trajektorie przy $t \to \infty$

Tłumienie i wymuszenie

- trajektorią ruchu harmonicznego oscylatora tłumionego jest spirala.
- dla ruchu wymuszonego atraktorem jest elipsa

Atraktorem trajektorii w dynamice jest elipsa, a w ewolucji krab



1 Informacja

Problem 3 mas - rozważmy ruch jednego ciała w polu grawitacyjnym dwuch nieruchomych gwiazd...

4.7.8 Chaos

$$F_s = -kx$$
$$F_w - bv$$

- nieliniowość
- czułość na warunki początkowe

4.7. Ruch drgający 79

1 bifurkacja

Dla pojedynczej nieliniowości występuje podwojenie okresu, czyli ciało powraca do tego samego punktu po przebyciu dwuch okresów.

Ważne

Ukłąd opisany całkowicie deterministycznymi równaniami staje się **nieprzewidywalny** jeżeli istotne jest **niedokładne** określenie **warunków początkowych**.

Zachowanie układu chaotycznego w czasie jest nieregularne i nieprzewidywalne.

4.8 Grawitacja

4.8.1 Prawa Kepplera

1 Prawo Kepplera

Planety poruszają się po elipsach.

1 II Prawo Kepplera

Wektor wodząćy planety zartacza równe pola powierzchni w równych przedziałach czasu

1 III Prawo Kepplera

Kwadraty okresów obiegóœ planet są proporcjonalne do sześcianów i ch średnich odległości od Słońca.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = const$$

4.8.2 Dynamika planet według Newtona

Rozważmy pojedynczy wycinek trajektorii planety. Po przypliżeniu fragmentu łuku do prostej:

$$s = \frac{1}{2}Rh$$

$$\alpha = \frac{h}{r}$$

$$\alpha = \omega * \Delta t$$

$$L = mr^2 \omega \Delta t$$

$$\vec{L} = const$$

Ważne

Siła odpowiadająca za ruch planety jest centralna

$$F(R) \sim \frac{1}{R^2}$$
$$F(R) = G \frac{mM}{r^2}$$

1 Masa Ziemii

$$M_z = \frac{gR_z^2}{G}$$

4.8.3 Oddziaływanie grawitacjyne

Oddziaływanie grawitacyjne między dwoma ciałąmi jest opisane przez centralną siłę przyciągającą proporcjonalną do iloczynu ich mas i odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości między nimi.

Wskazówka

• natężenie pola grawitacyjnego oznaczamy jako $\vec{\gamma}$

$$\vec{\gamma} = \frac{\vec{F}}{m} \quad [\gamma] = \frac{m}{s^2}$$

3 Zasada superpozycji pól

Nateżenie pola grawitacyjnego wytworzonoego przez układ mas jest równe sumie wektorowej pól wytworzonych przez poszczególne składniki.

1 Potencjał

$$\Phi = \frac{E_p}{m}$$

$$F(R) = -G\frac{Mm}{r^2}$$

$$E_P = \int G\frac{Mm}{R^2} = GMm\frac{-1}{R} + C$$

4.8. Grawitacja 81

Energia Potencjalna

4.8.4 Ruch w centralnym polu grawitacyjnym

Rozważamy dwie masy: Masę centralną (np. Słońce) oraz ciało w małej masie.

Obiekt wpada w pole grawitacyjne M z prędkością v_0 .

Opis krzywych stożkowych w biegunowym układzie współrzędnych

załużmy dodatkową prostą pionową w układzie w odległlości d od bieguna (kierownica). rozważmy dwa parametry:

- r długość wektora
- odległość punktu od kierownicy: $r d * cos\phi$

zbiór wszystkich punktów równo odległych od bieguna i kierownicy tworzy parabolę.

$$\frac{r}{d - r cos \phi} = 1$$

Niech:

$$\begin{split} \frac{r}{d-rcos\phi} &= \epsilon = const \\ r &= \frac{\epsilon d}{1+\epsilon cos\phi} \\ niech \; p &= \epsilon d \\ \mathbf{r} &= \frac{\mathbf{p}}{1+\epsilon \mathbf{cos}\phi} \end{split}$$

Informacja

 ϵ nazywamy mimośrodem.

Wskazówka

wartość mimośrodu dla paraboli wynosi 1

1 Informacja

- dla $\epsilon = 0$ równanie opisuje okrąg (nie ważne że w p jest epsilon)
- dla $\epsilon \in (0,1)$ elipsa
- dla epsilon = 1 parabola dla $\epsilon > 1$ hiperbola

twierdzenie o krzywych stożkowych

$$E_k = \frac{mv^2}{2} =$$

$$E_p = G\frac{mM}{R}$$

$$E_C = \frac{m}{2} * \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{Mm}{R}$$

$$\frac{m}{2} * \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = -E_c - \frac{L^2}{2mr^2} + G\frac{Mm}{R}$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right) = \sqrt{\frac{2}{m}}(E_c + G\frac{Mm}{R}) - \frac{L^2}{m^2r^2}$$

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}}(E_c + G\frac{Mm}{R}) - \frac{L^2}{m^2r^2}}$$

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{L}{mr^2}dt = \frac{d\phi mr^2}{L}$$

$$\frac{d\phi mr^2}{L} = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}}(E_c + G\frac{Mm}{R}) - \frac{L^2}{m^2r^2}}$$

$$d\phi = \frac{\frac{L}{mr^2}dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \frac{GMm}{r}\right) - \frac{L^2}{m^2r^2}}}$$

$$\phi = \arccos\left(\frac{\frac{L}{r} - G\frac{m^2M}{L}}{\sqrt{2mE + G^2\frac{m^4M^2}{L^2}}}\right) + C$$

$$\cos\phi = \frac{\frac{L}{r} - G\frac{m^2M}{L}}{\sqrt{2mE + G^2\frac{m^4M^2}{L^2}}}$$

$$\cos\phi = \frac{\frac{L^2}{Gm^2M} - 1}{\sqrt{\frac{2EL^2}{G^2m^3M^2} + 1}}$$

$$\frac{P}{r} - 1$$

$$ok \ niech \ cos\phi = \frac{\frac{p}{r} - 1}{\epsilon}$$

$$cos\phi = r = \frac{p}{1 + \epsilon cos\phi}$$

$$E = \frac{G^2 M^2 m^3}{2L^2} (\epsilon^2 - 1)$$

1 Informacja

- dla energii najmniejszej ruch po okręgu
- dla ujemnej po elipsie
- dla równej 0 po paraboli
- dla większej od 0 po hiperboli

4.8. Grawitacja 83

Wskazówka

$$b = \frac{L}{\sqrt{2m|E|}}$$

4.8.5 Oddziaływanie grawitacyjne mas kulistych

Przykłady wstępne

rozważmy pole grawitacyjne pręta.

z zasady wuperpozycji

rozważmy punkt na osi pręta

$$d\gamma = -\frac{GdM}{x^2}$$

$$\gamma = \int -\frac{GdM}{x^2} dx$$

$$dM = \frac{M}{L}$$

$$\gamma = -G\frac{M}{L}\int x^{-2}dx$$

$$\gamma = GM * \frac{1}{(a)(a+L)}$$

Z tego wynika ze w przypadku pręta nie można założyć że cała masa jest skupiona w środku pręta

Pole powierzchni sfery

podzielmy sferę na małe paski o kształcie pierścienia o powierzchni ds.

$$ds = 2\pi R d\phi * Rsind\phi = R^2 d\phi sind\phi$$

$$P = \int_0^{\pi} 2\pi R d\phi * Rsind\phi = R^2 d\phi sind\phi d\phi$$

$$P = R^2 2\pi (1+1) = 4piR^2$$

Objętość kuli

dzielimy kulę na warstwy sferyczne.

$$dV = 4\pi r^2 * dr$$

$$V = \int_0^R 4\pi r^2 * dr$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Pole grawitacyjne wytworzone przez sferę

$$\frac{dE_P}{dr} = -F\frac{d\Phi}{dr} = \gamma$$

kula o masie M i promieniu R

$$d\Phi = -G\frac{dm}{a}$$
$$\Phi = -G\frac{m}{a}$$

a to odległość od punktów na pierścieniu

- Wzór na potencjał od całęj sfery: $\Phi = -G * \frac{M}{r}$
- Potencjał pola wewnątrz sfery wynosi $\Phi = -G\frac{M}{R} = const$
- potencjał od kuli $\Phi = -G\frac{M}{r}$

_R - promień sfery, r - odległość od środka sfery\$

4.8.6 Podstawy eksploracji przestrzeni kosmicznej

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R_z + h}}$$

$$T = \frac{2\pi R_z}{v_I}$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R_z}{GM_z}}$$

1 Informacja

Okres przelotu z I Prędkością kosmiczną wokół ziemii jest równy okresowi przelotu przez tunel wywiercony przez środek ziemi.

Eksploracja układu słonecznego

$$\frac{mv_{II}^2}{2} - \frac{GM_z}{R_z}$$

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM_z}{R_z}} = v_I\sqrt{2}$$

4.9 Dynamika Układu Punktów

4.9.1 Środek masy

W układzie punktów znajduje się punkt reprezentujący układ mas okreśłony wektorem \$\vec{r_{Cm}}

$$\begin{split} r_{Cm} &= \frac{m_1 \vec{r_1} + m_2 \vec{r_2} + \ldots + m_n \vec{r_n}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{1}{M} * \Sigma_{i=0}^n m_i \vec{r_i} \\ v_{Cm} &= \frac{1}{M} * \Sigma_{i=0}^n p_i \\ a_{Cm} &= \frac{1}{M} \Sigma_{i=0}^n F_i \end{split}$$

Wskazówka

Środek masy ukłądu cząstek porusza się w taki sposób, jakby cała masa była skupiona w środku masy i jakby na niego działały wszystkie siły zewnętrzne.

Wskazówka

Względny ruch cząstek poddany działaniu tylko sił wewnętrznych jest równoważny ruchowi cząstki o masie zredukowanej poddanej działaniu siły równej wzajemnemu oddziaływaniu.

4.9.2 Moment Pędu układu cząstek

1 Informacja

$$L = m * \vec{r} \times \vec{v}$$

$$L = \sum_{i=0}^{n} L_i$$

1 Informacja

szybkość zmian momentu siły dowolnego ukłądu cząsteg Jest róna sumie momentów sił zewnętrznych (względem tego samego punktu działających na ten układ.)

Gdy nie ma sił zewnętrznych lub ukłądu z zerowym zewnętrznymmomentem sił moment układu jest stały co do kierunku i wartości.

$$\frac{dL}{dt} = 0$$

Wewnętrzny i orbitalny moment pędu

 \mathcal{L}_w to wewnętrzny moment pędu - suma całkowitego momentu pędu względem środka masy. Orbitalny moment pędu to pęd względem ukłądu laboratoryjnego

$$L = L_w + L_o$$

4.9.3 Moment Pędu Bryły Sztywnej

🚺 bryła sztywna

ukłąd punktóce gdzie $\vec{r} = const$

1 Informacja

Typy ruchu:

- postępowy = translacyjny = posuwisty $v = v_1 = v_2 = \dots = v_n$
- obrotowy = wirowy = rotacyjny $v_{cm} = 0 \ \omega = const$

4.9.4 Moment bezwładności

1 Moment Bezwładności

- jest to wielkość tensorowa
- istnieją co najmniej 3 prostopadłe do siebie kierunki (osie główne), gdzie $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$. Wtedy I jest skalarem

Ruch obrotowy poszczególnych brył:

• płaska płyta obraca się wokół osi przechodzącej przez środek masy i prostopadłej do płyty.

$$\vec{L} = ?$$

$$\vec{L}_i = r_i \times p_i$$

$$\vec{L}_i = r_i \times m_i v_i$$

$$\vec{L}_i = r_i \times m_i r_i \times \omega$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times m \times \vec{r} \times \vec{\omega}$$

$$\vec{L} = \omega \Sigma m \vec{r}^2$$

$$\vec{L} = I\omega$$

• Hantle obracająće się w stosunku do osi przechodzącej przez środek pręta gdy oś nie jest prostpoadła

$$\vec{L_1} = r_1 \times m_1 \vec{v_1}$$

$$\vec{L_2} = r_2 \times m_2 \vec{v_2}$$

$$\vec{L} \not \mid \vec{\omega} \Rightarrow \vec{L} \neq I\omega$$

1 Tensor

Moment bezwłądności i nazywamy tensorem.

 $\hat{I} \vee \mathbb{I} \text{ można zapisać w postaci macierzy} \begin{cases} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{cases}$

Ogólny wzór na moment pędu bryły sztywnej to $\vec{L} = \hat{I}\omega$

• dla bryły 3-wymiarowej r to odległość od osi obrotu

$$I = \int dI = \int r^2 dm$$

• dla preta

$$\frac{dr}{dm} = \frac{M}{L}$$

$$I = \int r^2 \frac{M}{L} dr$$

$$I = \frac{M}{L} \int_{\frac{-R}{2}}^{\frac{R}{2}} r^2 dr$$

$$I = \frac{M}{L} \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_{\frac{-R}{2}}^{\frac{R}{2}}$$

$$I = \frac{1}{12} mR^2$$

• walec

$$I = \int dmx^{2}$$

$$dm = \frac{M}{\pi R^{2}L} 2\pi x L dx$$

$$I = \int 2\frac{M}{R} x^{3} dx$$

$$I = 2\frac{M}{R} \int x^{3} dx$$

$$I = 2\frac{M}{R} \left[x^{3}\right]_{0}^{R}$$

$$I = \frac{1}{2}MR^{2}$$

1 Informacja

Każda bryła niezależnie od rozkłądu masy posiada 3 osie główne przecinająće się w środku masy. Osie główne zawsze są wobec siebie prostopadłe. Dla brył o symetrycznym rozkładzie masy osie główne powiązane są ze środkiem symetrii.

Jeżeli bryła obraca się wzdłuż osi symetrii możemy traktować moment bezwłądności jako skalar.

4.9.5 Dynamika ruchu obrotowego bryły względem osi głównej

1 II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego

$$\frac{dL}{dt} = I \frac{\omega}{dt}$$
$$M = I\epsilon$$

Staczanie walca z róceni pochyłej

Gdy nie ma poślizgu:

$$Ma = Mgsin\alpha - T_sI * \epsilon = \tau = T_s * R$$

 $a = \epsilon R$

Informacja

założywszy dwa dowolne ruchy obrotowy i postępowy $v_w=v+\omega r$ dla warunku braku poślizgu punkt styczności musi mieć v = 0

Rozważmy przypadek, w którym występuje poślizg:

$$Ma = Mgsin\alpha - T_kI * \epsilon = \tau = T_k * R$$

$$T_k = k * mgcos\alpha$$

Twierdzenie Steinera

Niech bryła obraca się względem osi, która nie przechodzi przez środek masy.

Wskazówka

przykłądowo pręt obracająćy się względem swojego końca

$$I_d = I_0 + md^2$$

Wachadło Fizyczne

$$\begin{split} I\frac{d^2\phi}{dt^2} + Mgdsin\phi &= 0\\ niech \; sin\phi &\approx \phi\\ T &= 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}} \end{split}$$

Wachadło Torsyjne



→ Zobacz także

Oscylator torsyjny

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k}}$$

Energia kinetyczna bryły sztywnej

Wokół osi w układzie inercjalnym. Każda cząstka bryły ma energię kinetyczną $\Rightarrow E_k = \Sigma E_{K_i}$

$$E_k = \frac{1}{2} \Sigma m_i \omega^2 r_i^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} \omega^2 \Sigma m_i r_i^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} \omega^2 I = \frac{I \omega^2}{2}$$

Tarcie toczne

tarcie toczne wynika z faktu, że siła reakcji na toczące się ciało pochodzi od odkształcenia podłoża. Gdy bryła się toczy, musi ona cały czas wtaczać się na "pochyłość wgniecenia".

Moment siły tarcia oznaczamy jako au

$$\tau = k * N$$

Elipsoida bezwładności

Rozważmy ruch prostopadłościanu o wyraźnie różnych wymiarach.

Wyróżnijmy 3 główne momenty bezwładności względem osi głównych.

1 Twierdzenie o elipsoidzie bezwładności

Spośród 3 momentów głównych, jedenz nich jest największy spośród wszystkich momentów bezwładności w środku masy danej bryły

Elipsoidę bezwładności otrzymujemy zaznaczając na osiach związanych ze środkiem masy i osiami głócnymi odległość $r_i=\frac{1}{L}$

otrzymujemy
$$\frac{x^2}{R_x^2}+\frac{y^2}{R_Y^2}+\frac{z^2}{R_z^2}=1=x^2I_x+y^2I_y+z^2I_z$$

Konsekwencje zasady zachowania momentu pędu

rozważmy ruch bąka.

Moment pędu leży na pionowej osi głównej.

$$\vec{L} = \frac{d\tau}{dt}$$

$$\vec{\tau} = M \ g \ b \sin \phi$$

$$\vec{L} \perp \vec{\tau}$$

Moment siły τ wymusza zmainę momentu pędu (nie zmieniając prędkości kołowej).

1 Informacja

Częstość precesji

$$\begin{split} \omega &= \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{dL}{Lsin\phi} * \frac{1}{dt} &= \\ &= \frac{M \ g \ bsin\phi}{I\omega sin\phi} = \frac{M \ g \ b}{I \]\omega \end{split}$$

4.9.6 Statyka Bryły Sztywnej

Rozważmy sytuację drabiny opartej o ścianę. Tarcie drabiny o ścianę pomijamy.

$$T = R_x$$

$$Mg = R_y$$

$$Mg\frac{L}{2}sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = R_yLsin\alpha$$

$$\alpha_g r < ctg2k$$

A

90

Ostrzeżenie

Egzamin z mechaniki

- egzamin jest ustny
- egzamin z "teorii"
- 4 pytania
- na stronie profesora są materiały z numerami działów
- dla każdej grupy jeden dzień, 30 minut na osobę
- 0 termin 26.01
- pokój 308 (główny budynek 3 piętro)

4.10 Elementy Mechaniki Płynów

1 Informacja

w fizyce za płyn uznaje się zarówno ciecze jak i gazy

- ciecz przyjmuje kształt naczynia
- gaz róœnież, ale dodatkowo zajmuje całą dostępną przestrzeń

Gęstość

oznaczana jako ρ lub d

$$\rho = \frac{d}{V} = \left[\frac{kg}{m^3}\right]$$

1 Ciśnienie

- jest wartością skalarną
- \bullet oznacza się jako p
- $p = \frac{|\vec{F}|}{s}$
- jeżeli przyjmiemy element skierowany powierzchni \vec{dS} (normalny do fragmentu powierzchni) wtedy $\vec{dF}=p*\vec{dS}$
- jednostką ciśnienia w układzie SI jest $p = \left[\frac{N}{m^2}\right] = [Pa]$

4.10.1 Ciśnienie hydrostatyczne

Niech:

- · wysokość słupa h
- pole podstawy S
- ciężar = F = mg

Matematyka

- masa = $m = \rho * V = \rho Sh$
- ciśnienie $p = \rho * s * h * g$

Ważne

w powyższym doświadczeniu również atmosfera wywiera ciśnienie na ciecz o wartości p_0

$$p = p_0 + \rho * g * h$$

4.10.2 Hydrostatyka

1 Prawo Pascala

Ciśnienie zewnętrzne wywierane na zamknięty **płyn** jest przekezywane niezmienione na każdą część płynu i na ścianki naczynia.

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$

$$F_1 = F_2 \frac{S_1}{S_2}$$

1 Paradoks hydrostatyczny

2 naczynia o identycznych kształtach zawierające identyczne płyny jedno w kształćie stożka, a drugie w kształcie odwróconego stożka.

Na dno obu naczyń działa takie samo ciśnienie

1 Prawo archimedesa

Na ciało zanużone w naczyniu działa siła wyporu.

Niech:

- ρ_0 to gęstość cieczy
- ρ₁ to gęstość ciała
- na górną powierzchnię działą siła F_1 a na dolną F_2
- h to odległość od górnej powierzchni ciała do powierzchni cieczy

$$F_w = F_2 - F_1 F_w = S(P_2 - P_1) F_w = \rho * g * V$$

Na każde ciało zanużone w płynie działą sila wyporu skierowana do góry i równa ciężarowi wypartej cieczy

Barometr Torrichellego

$$\rho * g * h = p_0$$

1 Informacja

normalne ciśnienie wynosi około 760 mmHg

4.10.3 Ogólny opis przepływu płynów

→ Zobacz także

równania Naviera-Stoksa

Podział przepływów:

- laminarny (ustalony / stacjonarny). Jego charakterystyki nie zależą od czasu. lub turbulentny (nieustalony) zmienia się w czasie
- · wirowe i bezwirowe
- · płynów ściśliwych i nieściśliwych
- · lepki lub nielepki

Pojęcie strugi

załużmy przepływ laminarny. Struga to pęk linii przepływu cząstek.

Prawo ciągłości strugi

S*v = const gdzie S jest polem przekroju przepływu.

4.11 Prawo Bernoilli'ego

rozpatrujemy strugę z S_1 i S_2 Przepływ nielepki,

$$W = F_1 * v_1 \Delta t - F_2 v_2 \Delta t$$
$$W = \Delta v(p_1 - p_2)$$

$$P + \rho g h + \frac{\rho v^2}{2} = const$$

$$p*V + m*g*h + \frac{mv^2}{2} = const$$

Z tego wynika, że im większa prędkość tym mniejsze ciśnienie.

1 Siła nośna działająca na skrzydło

skrzydło jest płąskie od spodu i wybrzuszone od góry. Powietrze kumuluje się nad skrzydłem tworząc siłę nośną.

4.11.1 Opis przepływu laminarnego cieczy przez rurę

cząstecznki na samym środku rury płyną najszybciej, natomiast przy ściankach w praktyce się nie poruszają.

$$v(r) = ?$$

$$\Delta p\pi r^2 = \eta 2\pi r l \frac{dv}{dr}$$

1 Prawo Hagena Poisseli

Objętość cieczy jaka przepłynie przez rurę o promieniu R przy danej różnicy ciśnień i długośći.

$$V = \frac{\pi * \Delta p * t}{8\eta L} * R^4$$

Siła oporu:

$$K = C * S * \frac{\rho v^2}{2}$$

4.11.2 Podobieństwo hydrodynamiczne i liczba Raynoldsa

Wokół ciał geometrycznie podobnych uzyskuje się podobny przepływ cieczy (linie prąðu są podobne) jeżeli **stosunek oporu ciśnienia do oporu tarcia jest stały**

$$Re = \frac{K}{F} = C * \frac{d^2 \rho v^2}{\eta v d} = C \frac{d\rho v}{\eta} = const$$

$$[Re] = 1$$

Wskazówka

jeżeli dla przepływu cylindrycznego Re < 2000 przepływ jest laminarny, dla Re > 4000 przepływ turbulentny

4.12 Własności sprężyste ciał

4.12.1 Prawo Hooke'a dla 1-wymiarowego rozciągania

$$\Delta L = k * \frac{F * l}{S} \Delta l \ F$$

po pozbyciu się F, ciało wraca do pierwotnego kształtu (pamięć kształtu).

Niech p - naprężenie (wewnętrzne) $(\frac{F}{S}=P)$

 $\frac{\Delta l}{l} = k*p$ To tak zwane odkształcenie (wzglęðne). Oznaczane $lpha \quad [lpha] = 1$

$$\alpha = k * pp = \frac{1}{k} * \alpha$$

 $\frac{1}{k} = E$ to moduł Yanga.

4.12.2 Odkształcenia sprężyste

- zcinanie: do przymocowanego do podłoża ciała przykładamy stycznie poziomo siłę F. $p = G * \alpha$, gdzie G to kąt przechylenia się ciałą.
- $skrecanie: \phi = \frac{21}{\pi^4} * \frac{1}{G}$

- Ściskanie hydrostatyczne Ciało jest równomiernie ściskanie ze wszystkich stron. $p=-K\alpha,\,\alpha=\frac{\Delta V}{V}$
- Ściskanie i rozciąganie $\frac{b}{b} = M \frac{1}{1}$. M to współczynnik Puasona.

Wszystkie te współczynniki są specyficzne dla każdego materiału.

4.12.3 Odkształcanie belek

- ugięcie belki. (Moduł Yanga). $z(l)=rac{Fl^3}{SEI}$ dla leżącej prostokąßnej belkii $I=\int_S y^2 dS=rac{bd^3}{12}$
- wyboczenie belki Belka zastosowan ajako filar. Kształt wyboczonej belki to $y=k*sin(\frac{\pi x}{l})$. $F=\frac{\pi^2 EI}{L^2}$

4.12.4 Odkształcenie plastyczne i granica wytrzymałości (wytrzymałość na zerwanie)

W pewnym momencie odkształćania sprężystego przechodzimy do fazy odkształceń plastycznych. Łączą się one z trwałym zmianem kształtu ciała po usunięciu naprężeń.

Po jeszcze większym zwiększeniu siły nastąpi zerwanie.

4.13 Odniesienia

- Przedmiot prowadzony przez profesora dr. hab. inż. Wojciecha Łużny
- Sylabus Przedmiotu
- · Program wykładów

Notatki z pliku notes/01mechanika_cw/mechanika_cw_2023.11.24.md

4.13. Odniesienia 95

ROZDZIAŁ 5

Mechanika - Ćwiczenia

Siłą zachowawcza - praca siły na dowolnym zamkniętym torze jest równa 0



$$gradF(x,y,z) = \vec{A}(x,y,z) \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Notatki z pliku notes/01mechanika_cw/mechanika_cw_2024.01.08.md

Bryła	ı
kula	$\frac{2}{5}$
walec	1
sfera	$\frac{\overline{2}}{\overline{3}}$
obręcz	1

Notatki z pliku notes/02angielski/angielski_0000.00.00.md

ROZDZIAŁ 6

ANGIELSKI

Notatki z pliku notes/02angielski/angielski_2024.03.01.md

6.1 Lekcja 1 - zadanie domowe

6.1.1 zadanie 1

- 1. premise
- 2. fallacy
- 3. claim
- 4. rebut

6.1.2 zadanie 2

- 1. k
- 2.
- 3. 1
- 4. a
- 5. b
- 6. d
- 7. c
- 8. e
- 9. i
- 10. h
- 11. f

Matematyka

12. G

Notatki z pliku notes/02eio/eio_0000.00.00.md

100 Rozdział 6. ANGIELSKI

ROZDZIAŁ 7

Elektromagnetyzm i Optyka

Notatki z pliku notes/02eio/eio_2024.02.27.md

7.1 Ruch Falowy

7.1.1 Uwagi wstępne

• Rozważamy fale sprężyste

1 fala

Falą nazywamy zaburzenie ośrodka rozchodzące się w przestrzeni

1 Ośrodek sprężysty

To taki ośrodek, który spełnia założenia prawa Hook'a

1 Fale sprężyste

to fale rozchodzące się w ośrodku sprężystym

7.1.2 Podział fal ze względu na kierunek propagacji

Fale poprzeczne	Fale Podłużne
ruch cząsteczek następuje w kierunku prostopadłym do kierunku propagacji występuje tylko w ciałach stałych	wszystkie cząsteczki drgają równolegle do kierunku propagacji mogą się rozchodzić w gazach cieczach i ciałąch stałych
	przykład: sprężyna, pręt w imadle

Fale Płaskie	Fale Kuliste
czoło fali jest odcinkiem prostej (lub fragmentem płaszczyzny)	powierzchnie falowe rozchodzą się symetrycznie we wszystkich kierunkach

1 Fala okresowa (periodyczna)

Fukncja opisująca kształt fali jest funkcją periodyczną.

1 Fala o stałym kształcie

taka fala, która nie zmienia kształtu podczas rozchodzenia się w przestrzeni

Przykład

Rozważmy pojedynczy impuls falowy fali o stałym kształćie. kształt odkształćenia można opisać w postaci funkcji $\psi(x,t)$ Można zapisać jako $\psi(x+-v*t)$.

Rozważmy falę sinusoidalną:

$$\begin{split} \psi(x,t) &= A*sin(x+-v*t) = Asin(2\pi(\frac{x}{\lambda}+-\frac{t}{T})) = Asin(kx+-\omega t) \\ & k = \frac{2\pi}{\lambda} \\ & k*v = \omega \\ & k = lambda*f \\ & \psi(\vec{r},t) = Asin(\vec{r}*k-\omega t) = \hat{A}*e^{i*(k*\vec{r}-\omega t)} \end{split}$$

wektor falowy

ma tki kierunek i zwrot jak propagacja fali w przestrzeni

Równanie D'Aramberta

Każda fala o stałym kształcie spełnia poniższe równanie

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

$$\psi(x, y, z, t)$$

$$\frac{\partial^2 \psi()}{\partial t^2} = v^2 * \Delta \psi$$

Notatki z pliku notes/02eio/eio_2024.02.29.md

7.1.3 Fale Sprężyste

Rozpatrzmy mechanizm propagacji fali w pręcie (fala podłużna) (Eksperyment z wygiętym prętem w imadle).

Rozpatrzmy wycinek pręta ("Plasterek") przed dojściem impulsu falowego wycięty w odległości A i A', szerokości dx wykonanego z materiału o gęstości ρ

Po dojściu impulsu przekrój A odchyli się o ψ . Ponieważ materiał jest sprężysty, przekrój A' nie przesunie się o ψ tylko o $d\psi$.

$$m = \rho * s * dx$$

$$a = \frac{d^2 \psi}{dt^2}$$

$$dF = F - F'$$

$$dF = \rho * s * dx * \frac{d^2 \psi}{dt^2}$$

$$\frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{x}} = \rho * \mathbf{s} * \frac{\mathbf{d}^2 \psi}{d\mathbf{t}^2}$$

Teraz należy wykonać obliczenia zgodnie z prawem Hook'a

$$P = E * \frac{d\psi}{dx}$$

$$F = E * s * \frac{d\psi}{dx}$$

$$\frac{F}{dx} = E * s * \frac{d^2\psi}{dx^2}$$

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{E}{\rho} \frac{d^2\psi}{dx^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

7.1.4 Ogólna Formuła na prędkość fali sprężystej

• rozchodzenie fali podłużnej w cieczy (lub gazie).

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

• fala poprzeczna w pręcie (rozchodząca się na zasadzie mechanizmu ścinania).

7.1. Ruch Falowy

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

G to moduł sztywności.

Wzór Newtona

Niech M oznacza odpowiedni moduł sprężystości, wtedy

$$v = \sqrt{\frac{M}{\rho}}$$

• Fala poprzeczna na strunie

7.1.5 Fale na powierzchni wody

$$F = 2\sigma l$$

Przybliżony wzór dla fal harmnoicznych

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}}$$

Wzór jest adekwatny gdy głebokość zbiornika jest dużo większa od długości fali.

Ośrodek dyspersyjny

rozpatrzmy propagację fal bardzo długich. Można zauważyć, że w tym przypadku im większa długość fali λ tym prędkość większa.

Ośrodek dyspersyjny

Ośrodek dyspersyjny to taki, w którym prędkość rozchodzenia się fali zależy od długości fali

Pakiet falowy to połączenie fali harmonicznej (sinusoidalnej) z pojdeynczym impulsem falowym.

W środowisku dyspersyjnym pakiet falowy się rozpadnie (dystorsia).

$$v = \lambda f = \frac{\omega}{k}$$

Rozważamy pakiety falowe złożone z dwuch częstości. Dla pakietów o dowolnej liczbie składowych występuje prętkość grupowa $v_g = \frac{d\omega}{dk}$

7.1.6 Natężenie Fali

I - powierzchniowa gęstość mocy $\left[\frac{W}{m^2}\right]$.

Notatki z pliku notes/02eio/eio_2024.03.05.md

1 Prędkość fazowa

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{k}$$

$$v_{g} = \frac{d\omega}{dk}$$

$$v_{g} = \frac{d}{dk}(v_{\phi} * k)$$

Relacje dyspersji $(E(\vec{k}), E(p))$

7.1.7 Efekt Dopplera

$$\ni' = \ni \frac{v + -v_o}{v - +v_z}$$

7.1.8 Zasada Heuyhens'a

Każdy punkt ośrodka, do którego dotarła fala staje się źrudłem cząstkowej fali kulistej. Fala dalej propagująca się jest złożeniem tych cząstkowych fal kulistych.

Ta zasada tłumaczy dyfrakcję fal na szczelinie.

7.1.9 Interferencja dwóch fal

Fale stojące

$$\psi = Asin(kx - \omega t)$$

$$\psi_{odbita} = -Asin(kx + \omega t)$$

$$\psi + \psi_{odbite} = 2Asin(kx)cos(\omega t)$$

Rezonans akustyczny

Doświadczenie: 2 kamertony doświadczenie: rury śpiewające

Notatki z pliku notes/02eio/eio_2024.03.07.md

7.2 Szczególna Teoria Względności



Szczególna Teoria Względności

7.2.1 Problem prędkości światła i postulaty Einsteina

Doświadczenie Michaelsona-Marleya

- 1. Prędkość światła w próżni jest taka sama dla każdego obserwatora w układzie inercjalnym.
- 2. Prawa fizyki mają jednakową postać we wszystkich inercjalnych układach odniesienia.

7.2.2 Transformacja Lorentza

rozważmy 2 ukłądy odniesienia (jak przy transformacji galileusza). załużmy, że $y=y'\wedge z=z'$. Szukamy związku x z x'. Zależność ta musi być liniowa.

$$\begin{cases} x' = Ax + bt \\ t' = Mx + Nt \end{cases}$$

$$v' = \frac{dx'}{dt'}$$
$$v' = \frac{Adx + Bdt}{Mdx + Ndt}$$
$$v' = \frac{Av + B}{Mv + N}$$

Jeżeli A spoczywa w S'

$$v' = 0$$
$$v = u$$
$$0 = Au + B$$

Jeżeli A spoczywa w S

$$v = 0$$

$$v' = -u$$

$$-u = \frac{B}{N}$$

Jeżeli A porusza się z prędkością c względem obu układów

$$c = \frac{Ac + B}{Mc + N}$$

$$\begin{cases} Nu = -B \\ B = -Au \\ N = A \end{cases}$$

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} t' = \frac{t - \frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

7.3 Diagram Minkowskiego i interwał czasoprzestrzenny

ponieważ t' zależy również od wpsółrzędnej przestrzennej, należy mówić o 4-wymiarowej czaso-przestrzeni. Diagramem Minkowskiego nazywamy wykres c*t(x)

1 Linie świata

Linie rysowane na diagramie Minkowskiego

Notatki z pliku notes/02eio/eio_2024.03.12.md

1 Diagram minkowskiego

wykres zależnośći c*t(x) gdzie x tow ektory 3-wymiarowe

Wskazówka

linie świata pod kątem $\alpha=45^{\circ}$ określają zdarzenia zachodzące z prędkością światła

FIgura wyznaczone przez te linie nazywa się "Stożkiem Minkowskiego"

1 Interwał czasoprzestrzenny

$$S_{AB}^2 = c^2(t_B - t_A)^2 - (x_b - x_A)^2 - (y_B - y_A)^2 - (z_B - z_A)^2$$

7.3.1 Niezmienniczość interwału czasoprzestrznennego

$$\begin{split} S_{AB}^2 &= c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 \\ S_{AB}'^2 &= c^2 (\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 \\ S_{AB}'^2 &= c^2 (\Delta t')^2 - (x')^2 \\ S_{AB}'^2 &= c^2 (t'_B - t'_A)^2 - (x'_B - x'_A)^2 \\ S_{AB}'^2 &= c^2 \left(\gamma (t_B - \frac{ux_B}{c^2} - t_A + \frac{ux_A}{c^2}) \right)^2 - (x_B - ut_B - x_A + ut_A)^2 \\ S_{AB}'^2 &= c^2 (\gamma (t_B - \frac{ux_B}{c^2} - t_A + \frac{ux_A}{c^2}))^2 - \gamma^2 (x_B - ut_B - x_A + ut_A)^2 \\ S_{AB}'^2 &= \gamma ((c\Delta t - \frac{u}{c^2} \Delta x)^2 - (\Delta x - u\Delta t)^2) \end{split}$$

wyliczenie ze wzoróc skruconego mnożenia gamma się skruci

7.3.2 Konsekwencje transformacji Lorentza

Relatywistyczne dodawanie prędkośći

$$\frac{dx}{dt} = v_x \wedge v_x' = \frac{dx'}{dt'}$$

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - udt)}{\gamma(dt - \frac{udx}{c^2})} \dots$$

$$v_x' = \frac{v_x + u}{1 + \left(\frac{v_x}{c}\right)^2}$$

$$v_y' = \frac{dy'}{dt'}$$

$$v_y' = \frac{dy}{\gamma(dt - \frac{udx}{c^2})}$$

Relatywistyczna transformacja przyspieszenia

$$a_x' = \frac{dv_x'}{dt'}$$

Relatywistyczne skrócenie długości

- w układzie, w którym pręt spoczywa ma on długość 1
- przy mierzeniu długośći pręta zakładamy, że robimy to w tym samym czasie.

W układzie, w którym spoczywa (s')

$$l' = x'_b - x'_A$$

$$x = x_b - x_a$$
...
$$l' = \gamma * l$$

Relatywistyczne wydłużenie czasu

• dwa zdarzenia zachodzą w tym samym miejscu w S'.

$$\Delta t = \gamma * \Delta t'$$

zegar w S chodzi szybciej niż w S' dla obserwatora w S

Czas własny procesu

Czas własny procesu jest krótszy Dla każdego innego obszerwatora czas procesu będzie o γ dłuższy.

Notatki z pliku notes/02eio/eio_2024.03.19.md

7.3.3 Wybrane efekty relatywistyczne

Podłużny Efekt Dopplera

Efekt ten występuje również dla światłą.

Rozważmy dwa układy, gdzie S' zbliża się do S z prędkością relatywistyczną.

S' wysyła impulsy świetlne w co T sekund.

Dla zbliżania, wzpółczynnik dl aokresu.

$$fT = \gamma (T - \frac{u}{c}T)$$

$$f = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

$$\beta = \frac{u}{c}$$

Poprzeczny efekt dopplera

Relatywistyczne zwężenie wiązki promieniowania

2 układy. Światło skierowane pod kątem ϕ' (zmierzony w ukłądzie S').

$$\cos\phi' = \frac{\frac{u}{c} + \cos(\phi)}{1 + \cos(\phi)}$$

Paradoks bliźniąt

ref: Wróblewski, Zakrzewski podręcznik

Notatki z pliku notes/02eio/eio_2024.03.21.md

7.4 Pojęcie pola

→ Zobacz także

dr R. Strzałka - Zestaw 0 - Tabela

$$\Phi(\vec{r},t)$$
 $A(\vec{r},t)$

1 Informacja

$$\Phi(\vec{r}) = const \Rightarrow \text{pole state}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = const \Rightarrow \text{Pole jednorodne}$$

7.4.1 Układ współrzędnych sferyczny

Współrzędne zapisujemy jako $(r, \theta \phi)$

7.4.2 Operatory różniczkowe

Operator wektorowy ∇

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Gradient pola Φ definiujemy jako $\nabla \Phi$.

Wektor gradientu Φ wskazuje kierunek i wartość maksymalnego przyrostu przestrzennego wielkości skalarnej Φ .

Dywergencja $div\Phi = \nabla * \Phi$

$$div\vec{A} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_{S} \vec{A} d\vec{s}$$

Opisuje wirowość pola - gęstość powierzchniową krożenie pola \vec{A} .

$$(rot\vec{A})_z = \lim_{S \to 0} \frac{1}{L} \oint \vec{A} ds$$

7.4.3 Laplasian pola skalarnego

$$\Delta = \nabla^2$$

7.4. Pojęcie pola 109

1 Funkcje harmoniczne

to ciągłę rozwiązania równania laplasa

7.4.4 Laplasian pola wektorowego

7.4.5 Szczegulne przypadki pól wektorowych

• Pole bezwirowe (\vec{P}) - $rot\vec{P} = 0$

1 cechy

- zerowanie się rotacji
- istnienie niezerowej dywergencji (przynajmniej w niektórych punktach pola
- pole bezźródłowe (dywergencja wszędzie znika)

1 cechy

- zerowanie się dywergencji
- istnieje potencjał wektorowy
- nie istnieje potencjał skalarny
- istnieje rotacja (przynajmniej w niektórych punktach pola

```{admonition} Twierdzenie

Każde pole wektorowe może być przedstawione jako suma trzech pól:

- potencjalnego
- wirowego
- harmonicznego

### 7.4.6 Przykład

prędkość prądu w rzece rozkład jak |x|.

$$\vec{v} = 0, v_u, 0$$

Notatki z pliku notes/02eio/eio\_2024.03.26.md

### 7.5 Elektrostatyka ładunków punktowych

### 7.5.1 Ładunek elektryczny, przewodniki i izolatory

Istnieją dwa rodzaje ładunku elektrycznego: dodatnie i ujemne

Ładunek jest zkwantowany (łądunek elementarny  $e = -1.6 * 10^{-19} C$ )

Notatki z pliku notes/02eio/eio\_2024.04.04.md

### 7.5.2 Dipol elektryczny

układ ładunków elektrycznych +q i -q.

Dipolowy moment elektryczny:

$$\vec{\mu_e} = q\vec{A} \ [\vec{\mu_e}] = D = 3.33 \times 10^{-30} \ \mathrm{Cm}$$

Notatki z pliku notes/02eio/eio\_2024.04.09.md

#### 7.5.3 Prawo Gausa

### Pojęcie strumienia pola elektrycznego

całkowity strumień pola elektrycznego przez dowolną powierzchnię zamkniętą jest równy stosunkowi całkowitej ładunków elektrycznych wewnątrz tej powierzchni do przenikalności elektrycznej próżni.

- 1. rozpoznanie symetrii pola
- 2. konstrukcja powierzchni Gaussa
- 3. obliczenie strumienia
- 4. prawo gaussa

Notatki z pliku notes/02eio/eio\_2024.04.12.md

### 7.5.4 Kondensator płaski

$$E = \frac{U}{d}$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

#### Łączenie kondensatorów

- Połączenie szeregowe  $Q_1=Q_2~U=U_1+U_2~\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}$
- Połączenie rócenoległe  $U_1=U_2 \ C=C_1+C_2$

### Kondensator cylindryczny

Jest to kondensator zbudowany z dwóch cylindrycznych okładek.

$$C = 2\pi\varepsilon_0 \frac{l}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

#### Kondensator kulisty

Dla pojedynczej sfery:

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 r$$

Dla kondensatora zbudowanego z dwóch sferycznych okłądek

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

### Energia pola elektrycznego

$$W = \int dW$$

$$W = \int dq * U$$

$$U = \frac{Q}{C}$$

$$W = \frac{1}{C} \int_{0}^{Q} q dq$$

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^{2}}{C} = \frac{1}{2} C U^{2}$$

 $\rho_e$  - gęstość natężenia pola elektycznego

$$W = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} d * S :$$

| materiał  | $\epsilon_r$ |
|-----------|--------------|
| próżnia   | 1            |
| powietrze | 1.006        |
| woda      | 78           |
| teflon    | 2.1          |

### f 1 Prawo Gauss'a z $\epsilon_r$

$$\epsilon_0 \oint \epsilon_r \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q_{wewntrzne}$$

$$q' = q(1 - \frac{1}{r})$$

#### Wektory elektryczne

niech  $\vec{P}$  oznacza polaryzacje. Wektor ten opisuje polaryzację wewnątrz dielektryka.

### 1 polaryzacja

Indukowany moment dipolowy przyapdający na jednostkę objętości dielektryka  $\left[\frac{C*m}{m^3} = \frac{C}{m^2}\right]$ 

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

- Pole  $\vec{E}$  wiąże wszystkie ładunki, składowa styczna jest ciągła. ``
- Wektor  $\vec{B}$  wiąze tylko ładunki swobodne (nie wyindukowane na dielektryku)o
- · Pole P znika w próżni

Ważne

poniższe wzory działają w normalnych materiałach (nie ferroelektrykach)

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E}$$

### 7.6 Obwody prądu stałego, energia i moc prądu elektrycznego

$$I = \frac{dQ}{dt} = \left[\frac{C}{s} = A\right]$$

Notatki z pliku notes/02eio/eio\_2024.04.16.md

#### 7.6.1 PRawo Ohma

Ważne

Prawo Ohma jest spełnione dla przewodników metalicznych w stałej temperaturze

$$I = \frac{U}{R}$$
 
$$[R] = 1\Omega$$

Dla prawa Ohma charakterystyka prądowo-napięciowa (wykres  ${\cal I}(U)$ ) jest liniowa.

$$R = \rho \frac{L}{S}$$

gdzie  $\rho$  to oporność właściwa.

### Różniczkowa postać Prawa Ohma

$$\vec{\gamma} = \sigma \vec{E}$$
 
$$dW = U * dQ$$
 
$$\frac{dW}{dt} = U \frac{dQ}{dt}$$
 
$$P = U * I$$

1 Ciepło

$$P = U * I = I * R * I$$
 
$$Q = I^2 Rt$$

### 7.6.2 Obwody prądu stałego

### i siłą elektromotoryczna (SEM)

$$\varepsilon = \frac{dW}{dq} \left[ \epsilon \right] = \frac{J}{C} = 1V$$

Miarą SEM jest napięcie na bigunach otwartego źródła.

### **1** Informacja

\*\*otwarte źródło - takie przez które nie płynie prąt

$$U = \epsilon - I * r_w$$

#### Łączenie oporników i opór zastępczy

- szeregowo  $R = R_1 + R_2 + ... + R_n$
- róœnolegle  $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + ... + \frac{1}{R_n}$

#### 7.6.3 Prawa Kirchhoffa

#### 1 prawo - prawo dla węzłów

suma prądów wpływających jest równa sumie pradóœ wypływających

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = 0$$

#### 2 prawo - prawo dla oczek

algebraiczna suma sem i napięć w dowolnym obwodzie zamkniętym jest równa 0.

$$\sum_{i=0}^{m} \epsilon_i + \sum_{j=0}^{n} I_j * R_j = 0$$

Notatki z pliku notes/02eio/eio\_2024.04.18.md

### 1 Informacja

dla tych samych warunków brzegowych rozkłąd potencjału elektrycznewgo w ośrodku przewodzącym jest taki sam jak w próżni.

### 7.7 Pole magnetyczne

### 7.7.1 Pojęcie pola magnetycznego i siła Lorentza

$$\vec{F_b} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

### 7.7.2 Linie pola magnetycznego

źródłem lini pola jest biegun północny.

Linie pola magnetycznego zawsze tworzą zamknięte pętle.

### 7.7.3 Strumień pola magnetycznego

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

### Działanie pola magnetycznego na przewodnik z prądem

$$\vec{F} = \vec{B} \cdot I \cdot \vec{l}$$

Rozważmy pole od zamkniętego przewodnika

Na obwód z prdem działa moment siły będący iloczynem dwóch wektorów  $\tau=\vec{M_B}\times\vec{B}$  gdzeie  $\vec{M_B}$  to moment magnetyczny dipolowy.

### 7.7.4 Pole magnetyczne wytworzone przez prąd elektryczny

Doświadczenie Oersteda i prawo Ampere'a

dla dwolonego przewodu otoczonego dowolnym konturze zamkniętym

$$\oint Bdl = \mu_0 I$$

Notatki z pliku notes/02eio/eio\_2024.04.23.md

### 7.8 Prawo Ampera

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\rm prz} = \mu_0 I$$

gdzie:

- I całkowite natężenie prądu objęte konturem całkowania
- $\mu_0 = 4\pi*10^{-7} \frac{T*m}{a}$  przenikalność magnetyczna próżni

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}$$

### Wskazówka

zwojnica = selenoid = cewka

rozważmy zwojnicę o N zwojach:

7.8. Prawo Ampera 115

rozpatrzmy prostokąt przez jeden bok selenoidu.

$$\oint Bdl = Ba$$
 
$$Ba = \mu_0 ki$$
 
$$n = \frac{N}{L} \text{koncentracja zwojów}$$
 
$$k = n*a$$
 
$$B \not = \mu_0 n \not =$$
 
$$B = \mu_0 ni$$

$$\Phi_B = BS = \mu_0 niS = \mu_0 \frac{N}{L} iS$$

### 7.8.1 Oddziaływanie magnetyczne dwóch przewodników z prądem

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{I_2} \frac{a}{d}$$

#### 7.8.2 Prawo Biot-Savarta

przewód dzielimny na elementy prądowe Idl. Konstruujey wektor wodzący r.

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dl \times r}{r^3}$$

#### 7.8.3 Prawo Lentza



indukowany prąd ma taki kierunek, że przeciwstawia się zmianie, któ©a go wywołała

Notatki z pliku notes/02eio/eio\_2024.04.25.md

### 7.8.4 Indukcyjność wzajemna i włąsna

#### **Transformator**

Transformator - dwie cewki nawinięte na jeden zwój

$$\epsilon_2 = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

L to indukcyjność [L] = 1henr

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

Rozważmy pojedynczą cewkę o ilości zwojów N i prądzie I

$$\Phi = \frac{\mu_0 i N s}{l}$$

$$\varepsilon = N \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\varepsilon = N \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu_0 i N s}{l}\right)$$

$$\varepsilon = L * \frac{dI}{dt}$$

$$L = \frac{\mu_0 N^2 s}{l}$$

$$dW = \varepsilon_s dq$$

$$W = \frac{LI_0^2}{2}$$

$$\rho_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

### 7.9 Magnetyczne własności materii

### 7.9.1 Pojęcie monopola magnetycznego

### 1 Informacja

Nie istnieje monopol magnetyczny

### 7.9.2 Prawo gaussa dla magnetyzmu

Strumień pola magnetycznego przenikający przez dowolną powierzchnię zamkniętą daje zawsze  $\boldsymbol{0}$ 

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{R} = 0$$
$$div\vec{B} = 0$$

### 7.9.3 Podstawowe rodzaje materiałów agneteycznych

### **Paramagnetyki**

### **1** namagnesowanie

namagnesowanie to wypadkowe pole namagnesowanego ciała  $M = \frac{\mu_B}{V}$ 

### 1 Prawo Curie

zależność  $\frac{M}{M_{max}}(\frac{B}{T})$ jest liniowa w stosunkowo dużym zakresie pola



Ważne

paramagnetyki są magnesami jedynie pod działąniem zewnętrznego pola

### Diamagnetyki

materiały, któ©ych atomy nie mają włąsnych elementów dimagnetycznych.

### Ferromagnetyki

### 7.9.4 3 wektory magnetyczne

- $\bullet$  B -indukcja magnetyczna
- $\bullet$  M -namaganesowanie
- H natężenie pola magnetycznego

$$H = \frac{B}{\mu_0} - M$$



Zobacz także

$$D = \epsilon_0 E + P$$

$$B = \mu_0 \kappa H$$

→ Zobacz także

$$D = \epsilon_0 \epsilon_r E$$

Notatki z pliku notes/02eio/eio\_2024.04.30.md

- ullet wiąże się ze wzystkimi prądami, skłądowa normalna jest ciągłą
- ullet wiąże się tylko z prądami rzeczywistymi

$$M = (\kappa - 1)\vec{H}$$
$$\chi \, \kappa - 1$$

 $\chi$  to podatność magnetyczna\$

### 7.10 Drgania elektromagnetyczne i prąd przemienny

#### 7.10.1 Obwód RC

w obwodzie A łaczymy źródło SEM z kondensatorem i opornikiem. W obwodzie B odłączamy SEM.

$$\epsilon = I^{2}Rdt + d\left(\frac{Q^{2}}{C}\right)$$
$$Q(t) = C * E(-e^{-})$$

w sytuacji B następuje rozładowanie kondensatora.

#### 7.10.2 Obwód RL

zamiast kondensatora mamy cewkę

### 7.11 Obwód LC

rozważmy obwód złożony wyłącznie z połączonych cewki i kondensatora.

$$\frac{Q}{C} + L \frac{d^2 Q}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{1}{LC} = 0\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

### 7.12 Obwód RLC (Drgania EM tłumione)

Notatki z pliku notes/02eio/eio\_2024.05.07.md

Impedancja Kondensatora:  $\hat{Z_C}=\frac{1}{j\omega C}=-\frac{j}{\omega C}$  Impedancja cewki  $\hat{Z_L}=j\omega L$ 

$$\hat{Z} = Ze^{j\omega}\hat{I} = \frac{\hat{\epsilon}}{\hat{R}}O$$

### 7.12.1 Moc w obowodach prądu przemiennego

#### Natężenie i napięcie skuteczne

Natężeniem skutecznym nazywamy takie natężenie prądu stałego, któ©y wydziela w tym samym czasie tę samą ilość energii co dany prąd przemienny.

$$I_{sk} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$
 
$$dW = U_0 sin(\omega t) Icos(\omega t + \phi) dt$$
 
$$W = \int_0^{\pi} dW = \frac{1}{2} U_0 I_0 cos \phi t$$
 
$$P = U_0 I_0 cos \phi$$

Notatki z pliku notes/02eio/eio\_2024.05.09.md

### 7.12.2 Ruch łądunków w jednorodnym polu elektrycznym

$$m\frac{d^2r}{dt^2}=q\vec{E}$$

$$\begin{split} m\frac{d^2x}{dt^2} &= qE & m\frac{d^2y}{dt^2} &= 0 & m\frac{d^2z}{dt^2} &= 0 \\ v_x &= \frac{qE}{m}t + v_0cos\alpha & v_y &= v_0sin\alpha & v_z &= 0 \\ x &= \frac{qE}{2m}t^2 + v_0cos\alpha t & y &= v_0sin\alpha t & z &= 0 \end{split}$$

### 7.12.3 Ruch ładunków w jednorodnym polu magnetycznym

$$F = qv \times B$$
$$B = [B, 0, 0]$$

### 7.12.4 Ruch łądunków w prostopadłych jednorodnych polach E i B

### 7.12.5 Równania Maxwella w próżni w postaci całkowej

- 1. prawo Gaussa dla elektrycznośći  $\oint_S Es = \frac{Q}{\varepsilon_0}$
- 2. prawo Gaussa dla magnetyzmu  $\oint_S Bs = 0$
- 3. prawo Faradaya dla elektryczności  $\oint_L E dl = -\frac{d\Phi_B}{dt}$
- 4. prawo Ampera dla magnetyzmu  $\oint_L Bdl = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$

### 7.12.6 Równania Maxwell'a w próżni w postaci różniczkowej

- 1.  $divE = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
- 2. divB=0 (pole bezźródłowe)
- 3.  $rotE = -\frac{dB}{dt}$
- 4.  $rotB = \mu_0 J + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{dE}{dt}$

### 7.12.7 Równania Maxwella w ogólnej postaci różniczkowej

- 1.  $divD = \rho$
- 2. divB = 0
- 3.  $rotE = -\frac{dB}{dt}$
- 4.  $rotH = J + \frac{dD}{dt}$

$$D = \epsilon_0 \epsilon_r E$$

$$B = \mu_0 \kappa_m H$$

$$J = \sigma E$$

Notatki z pliku notes/02eio/eio\_2024.05.14.md

### 7.12.8 Fale elektromagnetyczne jako konsekwencja równań Maxwell'a

Z III Prawa Maxwell'a:

$$c = \frac{E_0}{B_0}$$

Notatki z pliku notes/02eio/eio\_2024.05.16.md

### 7.12.9 Wektor Pointing'a

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

(H to natężenie magnetyczne)

- · wektor jest róœnolenły do kierunku propagacji
- jednostka to  $\frac{W}{m^2}$  (tzw. powierzchniowa gęstość mocy)

### 7.12.10 Zachowanie się fali elektromagnetycznej na granicy dwóch ośrodków

### 7.12.11 współczynnik załamania

$$n = \frac{c}{v}$$

 $v < c \Rightarrow n \ge 1$ 

Notatki z pliku notes/02eio/eio\_2024.05.21.md

### 7.13 Optyka geometryczna

#### 7.13.1 Prawo odbicia i załamania

o rożważmy 2 ośrodki o różnych współczynnikach załamania  $n_{@}>n_{1}$  Promień światła białego pada na granicę ośrodków pod kąßem  $\alpha$ .

#### 1 Prawo odbicia

- kąt padania jest równy kątowi odbicia
- promień padająćy, normalna powierzchni i promień odbity leżą w jednej płąszczyźnie

### f prawo załamania

stosunek sinusa kaβa padania do sinusa kata załamania jest równy stosunkowi ośrodka 2 do ośrodka 1

#### Całkowite wewnętrzne odbicie

promień światła przechodzi z ośrodka gęstrzego do rzadszego.

### **Pryzmat**

$$nsin\frac{\theta}{2} = sin\frac{\theta + \gamma_{min}}{2}$$

w przybliżeniu  $\gamma_{min} = (n-1)\theta$ 

### 7.13.2 Powstawanie tęczy

na kuliste kropelki wody pada światło słoneczne

### 7.13.3 soczewki i zwierciadła

#### Analiza obrazu

- rzeczywisty/urojony (pozorny)
- powiększony/pomniejszony
- · prosty/odwrócony

| typ                                | pomniej-<br>szony/powiększony | odwró-<br>cony/prosty | rzeczywi-<br>sty/urojony | no-<br>tatki      |
|------------------------------------|-------------------------------|-----------------------|--------------------------|-------------------|
| zwierciadło proste                 | równy                         | odwrócony             | urojony                  |                   |
| zwierciadło kuliste wklęsłe $x>2f$ | pomniejszony                  | odwrócony             | rzeczywisty              | $f = \frac{r}{2}$ |

Notatki z pliku notes/02eio/eio\_2024.05.23.md

$$\frac{n_1}{x} + \frac{n_1}{y} = (n_1 - n_2)(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})$$

### 7.14 Optyka falowa

### 7.14.1 interferencja i dyfrakcja światła, siatka dyfraktcyjna

#### Doświadczenie Yanga

przez dwie szczeliny przechodzi fala płaska.

Na ekranie obserwujemy natężenie światła

$$dsin\Theta = m\lambda$$

$$E_1 = E_0 sin\omega t$$
 
$$E_2 = E_0 sin(\omega t + \phi)$$
 
$$E = E_1 + E_2 = E_0 (sin\omega t + sin(\omega t + \phi)) = 2E_0 cos \frac{\phi}{2} sin(\omega t + \frac{\phi}{2})$$
 
$$E_{\Theta} = 2E_0 cos \beta \beta = \frac{\Theta}{2}$$

$$I_{\Theta} = I_m cos \beta$$

Notatki z pliku notes/02eio/eio\_2024.05.28.md

#### Interferencja światłą w cienkich błonkach

jeden promień odbija się od powierzchni błony, a drugi "W błonie". dochodzi do zmiany fazy dla fali która odbija się od osrodka żadszego (2).

$$2dn = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

ponieważ w powyższym rócnaniu występuje współczynnik załamania (różny dla każdej barwy) można zauważyć ciekawe efektyw izualne.

### 7.14.2 Dyfrakcja światła na szczelninie

Szczelinę dzielimy na n małych kawałków ( $n \to \infty$ ) i dla każdego kawałka obliczamy różnicę dróg dla dwóch promieni. Sumujemy te różnice i otrzymujemy

$$I_{\Theta} = I_w * \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^2$$

### 7.14.3 Równoczesna interferencja i dyfrakcja na dwuch szczelinach

$$I_{\Theta} = I_n * \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^2 * \cos^2 \beta$$
$$\beta = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \Theta$$
$$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \Theta$$

### 7.14.4 Siatka dyfkrakcyjna

układ wielu szczelin

Rozważmy układ n=5 szczelin o szerokości a każda.

Notatki z pliku notes/02eio/eio\_2024.06.04.md

$$\Delta\Theta_0 = \frac{\lambda}{Nd}$$
 
$$\Delta\Theta_m = \frac{\lambda}{Ndcos\Theta_m}$$

### 7.14.5 Siatka dyfrakcyjna (rozdzielczość)

dto tzw. stała siatki  $d\approx 2\mu m$ 

$$dsin\Theta_m = m\lambda$$

Zdolność rozdzielcza  $R = \frac{\lambda}{\Delta \lambda}$ 

Różniczkujemy definicję i porównujemy z równaniem siatki  $R=\ldots=Nm$ 

Notatki z pliku notes/02eio/eio\_2024.06.11.md

7.14. Optyka falowa 123

### 7.15 STW a elektromagnetyzm

### 7.15.1 Uwagi wstępne

jeśli łądunek spoczywa wytwarza tylko pole E, a jak się porusza to wytwarza pole B, ale jeżeli jeden obserwator się porusza?

### 7.16 Względny charakter sił pola elektro-magnetycznego

W ukłądzie S' ładunki dodatnie poruszają się, a ujemne pozostją w miejscu.

Efekt relatywistyczny polega na tym, że pojawia się nowe pole elektryczne.

Jest tak, ponieważ dojdzie do skrócenia lorentza na długość przewodu (i gęstości ładunków)

$$\rho_- = \gamma \rho'_-$$

 $\rho_{+}' = \gamma \rho \rho_{-} + \rho' = \rho \rho_{-} + \rho \rho$ 

### 7.16.1 Czterowektory

• czterowektor położenia

$$\mathbb{R} = (ct, x, y, z)$$

· czterowektor pędu

$$\mathbb{P} = (\frac{E}{c}, p_1, p_2, p_3)$$

· czterowektor prądu

$$\mathbf{J} = (c\rho, j_1, j_2, j_3)$$

· czteropotencjał

$$\mathbb{A} = (\frac{\phi}{c}, \vec{A})$$

· czterogradient

$$\nabla=(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t},-\nabla)$$

Notatki z pliku notes/02eio/eio\_2024.06.13.md

### 7.16.2 Zjawisko fotoelektryczne

Energia wybitych elektronów zależy jedynie od "koloru" fotonów

$$E_k = h\nu - W$$

gdzie W to praca wyjścia

### 7.16.3 Doświadczennie yanga w kontekście fotonowego modelu światła

eksperyment dyfrakcyjny z opóźnionym wyborem

### 7.17 Elementy OTW

powinny być sformuowane w taki sposób, że nie jest możliwe rozróżnienie między jednorodnym polem grawitacyjnym a ukłądem nieniercjalnym

Notatki z pliku notes/02eio/eio\_egzamin.md

7.17. Elementy OTW 125

### ROZDZIAŁ 8

### zagadnienia na egzamin z EiO

### 8.1 1.1 fale w ośrodku dyspersyjnym

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}\psi(x,t) = Asin(k(x+vt) = Asin(kx+vt))$$

Q: Proszę opisać ruch falowy w ośrodku dyspersyjnym i prędkość grupową

A:

• Ruch falowy w ośrodku dyspersyjnym to ruch falowy, w którym prędkość fazowa fali zależy od częstotliwości  $\omega = \omega(k)$ .

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$
 
$$niech\ \omega = vk$$
 
$$v_g = \frac{d(vk)}{dk} = vv_g = v + k\frac{dv}{dk}$$

• Prędkość grupowa to prędkość obwiedni kilku złożonych fal harmonicznych.

wykres sinusa z obwiednią

$$y = y_0 sin(kx - \omega t) + y_0 sin(k'x - \omega' t) = 2y_0 sin(\frac{k + k'}{2}x - \frac{\omega + \omega'}{2}t)cos(\frac{k - k'}{2}x - \frac{\omega - \omega'}{2}t)$$

Można ją przedstawić jako pochodną prędkości fazowej po wektorze falowym.

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

### 8.2 1.2 Równanie d'Alemberta

Q: Opisać równanie d'Alemberta w 3 wymiarach. Do jakich fal się odnosi?

A:

Równanie d'Alemberta w 3 wymiarach to równanie różniczkowe drugiego rzędu, które opisuje ruch falowy w ośrodku jednorodnym i izotropowym.

$$v^2 \Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

chyba elaborate? TODO

### 8.3 1.3 energia stw

Q: Opisać problem energii w ujęciu relatywistycznym

A:

W ujęciu relatywistycznym energia jest sumą energji spoczynkowej i kinetycznej.

$$E = mc^2 = \gamma m_0 c^2 = E_0 + E_k$$

ref: jezierski wzory 1 str 113

### 8.4 1.4 problem pędu relatywistycznego

\*\*Q:\$\$ Problem pędu relatywistycznego

A:

Pęd relatywistyczny to pęd, który uwzględnia zależność masy od prędkości.

$$p=\gamma mv$$

**ELABORATE** 

### 8.5 1.5 Relatywistyczny efekt Dopplera

Q: Relatywistyczny efekt dopplera

A:

Relatywistyczny efekt Dopplera to zjawisko zmiany częstotliwości fali elektromagnetycznej w wyniku ruchu źródła fali

gdzie  $\beta = \frac{v}{c}$ 

Notatki z pliku notes/02eio\_cw/eio\_0000.00.00.md

### rozdział 9

### Elektromagnetyzm i Optyka - ĆWICZENIA

Notatki z pliku notes/02eio\_cw/eio\_2024.02.27.md

### 9.1 zestaw 0 zadanie 1

Prawo Bernuliego

$$\rho * g * h + \frac{\rho v^2}{2} + p = const$$

przy czym h to odległość przekroju od poziomu referencyjnego (więc to nie ciśnienie hydrostatyczne)

Równanie ciągłości:  $V_1s_1=V_2s_2$ 

### 9.2 zestaw 0 zadanie 4

$$a * m = gm - 6\pi\eta r - \rho g \frac{4}{3}\pi r^3$$

### 9.3 zestaw 0 zadanie 5

$$f(x, y, z) = x^{2} * y - z^{3}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$$

$$f(x,y) = x^{2}e^{x}y$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{x}y + x^{2}ye^{x}y$$

### 9.4 zestaw 0 zadanie 6

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Notatki z pliku notes/02eio\_cw/eio\_2024.03.05.md

### 9.5 Zestaw 1 Zadanie 1

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$
$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho_l}}$$

### 9.6 Zestaw 1 Zadanie 2

$$\psi_1(x,t) = Asin(kx - \omega t + \phi_0) = \hat{A}_1 e^{i(kx - \pi t + \phi_0)}$$

Notatki z pliku notes/02eio\_cw/eio\_2024.03.12.md

### 9.7 zestaw 2 zadanie 2

$$x_1 = x_2 = x$$

$$x' = \gamma(x_1 - ut)$$

$$t_2 = \gamma(t_1 - \frac{ux}{c^2})$$

Notatki z pliku notes/02eio\_cw/eio\_2024.03.15.md

### 9.8 Zestaw 2 zadanie 16

$$E_k = mc^2(\gamma - 1)$$
$$E_c = mc^2$$
$$E^2 - (pc)^2 = const$$

Notatki z pliku notes/02eio\_cw/eio\_2024.03.18.md

### 9.9 **Zestaw 3**

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Notatki z pliku notes/02eio\_cw/eio\_2024.03.19.md

### 9.10 Zestaw 2 zadanie 15

Wzory na transformacje Lorentza energii i pędu:

$$E' = \gamma(E - u * p)$$
$$p' = \gamma(p - \frac{u}{c^2} * E)$$

Notatki z pliku notes/02eio\_cw/eio\_2024.04.23.md

### 9.11 Zestaw 6 zadanie 5

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\Phi = E * s = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Notatki z pliku notes/02eio\_cw/eio\_2024.06.07.md

### 9.12 Zestaw 9 Zadanie 8

$$\oint Edl = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \varepsilon$$

Notatki z pliku notes/02eio\_cw/eio\_2024.06.08.md

### 9.13 Zestaw 11 Zadanie 1

Równania Maxwella

| Postać całkowa                                                             | Postać różniczkowa                                      | Opis                                |
|----------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|-------------------------------------|
| $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$                     | $ abla 	imes ec{E} = -rac{\partial ec{B}}{\partial t}$ | Prawo Faradaya                      |
| $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu I + \mu \epsilon \frac{d\Phi_E}{dt}$ |                                                         | Uogulnione prawo Ampera             |
| $\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon}$                                           | $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$       | Prawo Gaussa dla pola elektrycznego |
| $\Phi_B = 0$                                                               | $\nabla \cdot \vec{B} = 0$                              | Prawo Gaussa dla pola magnetycznego |

Notatki z pliku notes/02eio\_cw/eio\_2024.06.11.md

### 9.14 Zestaw 11 zadanie 1

### 9.15 Zestaw 11 Zadanie 4

Prawa Maxwella w próżni  $\$  \div E = 0 \ \div B = 0 \ \nabla \times E = - \\frac{\pi B}{\pi L} \ \nabla \times B = \mu\_0 \\ \partial E}{\partial t}

Notatki z pliku notes/02ekonomia\_menedzerska/ekonomia\_menedzerska\_2824.02.28.md

- wymyślamy inwestycje
- założenia
- · analiza w układzie rocznym
- źrudła inwestycji (kapitał włąsny/kredyt zaciągany w 2 transzach po roku)

•

Notatki z pliku notes/02labfiz1/labfiz1\_0000.00.00.md

## rozdział 10

### Laboratorium Fizyczne 1

Notatki z pliku notes/02labfiz1/labfiz1\_2024.03.28.md

### 10.1 Wstęp

### 10.1.1 Luźne notatki

- wnek@fis.agh.edu.pl
- Template nazw plików: FT2z<zespół (7)>c<ćwiczenie>v<wersja>
- Sprawozdania do poniedziałku 23:59
- Sprawozdania

### 10.1.2 Wygląd sprawozdania

- 0. tabela nagłówkowa
- 1. cel ćwiczenia
- 2. wstęp teoretyczny (wzory, prawa)
- 3. Aparatura i metodyka wykonania
- 4. Wyniki pomiarów (jednostki, tytuł "wyniki pomiaru...", Tytuł nad tabelą,)
- 5. Obliczenia
- 6. Szacowanie niepewności
- 7. Podsumowanie (cytat wyniku z niepewnością, zaokrąglenie i właściwy zapis, prorównanie z wartością tablicową, komentarz)
- 8. Literatura
- 9. aneks (duże tabele)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{l}{g}$$
(10.1)

• Zmierzenie długości: 600-312=288do dolnej krawędzi, nakrętka  $\phi=16$  Długość wynosi280

Niepewności: 2mm

pomiar 20 okresów

| Lp | Т     |
|----|-------|
| 1  | 22.11 |
| 2  | 21.24 |
| 3  | 21.44 |
| 4  | 21.45 |
| 5  | 21.30 |
| 6  | 21.19 |
| 7  | 21.25 |
| 8  | 21.29 |
| 9  | 21.31 |
| 10 | 21.36 |

Notatki z pliku notes/02labfiz1/statystyka.md

## ROZDZIAŁ 11

# Kolokwim ze statystyki (statystycznych metod poracowania danych pomiarowych)

1. umiejętności rozstrzygania jakiego rodzaju szacowanie niepewności

przeprowadzić - A czy B czy złożone czy z prawa przenoszenia niepewności

Niepewność typu A: estymato odchylenia średniej  $S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ 

Niepewność typu B: "Naukowa ocena eksperymentatora":

- dla prostych przyżądów mechanicznych równa najmniejszej podziałce
- dla urządzeń elektronicznych podawana przez producenta  $\Delta x = C_1 x + C_2 * zakres$
- dla przyrządów wskazówkowych  $U(x)=\frac{\text{klasa przyrządu}}{100}*zakres U(x)=\frac{\Delta x}{\sqrt{x}}$
- 2. jak ustalać istotny zakres w zapisie otrzymanych wyników
- 3. jak zapisywać wynik końcowy wraz z niepewnością (dobrze zaokrągloną).
- 4. Jak porównywać dwie wielkości ze sobą.
- 5. Jak wydobyć potrzebne informacje z dopasowania prostej metodą

najmniejszych kwadratów - i na czym ta metoda polega i jak się ma do linii trendu i czy ewentualnie można by to zrobić jakoś po swojemu ?

#### Wskazówka

Linia trędu jest zastosowaniem metody najmniejszych kwadratów.

metoda najmniejszych kwadratów polega na minimalizacji odległości punktów od prostej, czyli  $min \sum_{i=1}^{n} (y_i - b - ax_i)^2$ .

w MS Excel'u można użyć funkcji linest aby uzyskać wykaz parametrów dopasowania linii metodą najmniejszych kwadratów.

Tabela ta wygląda jak następuje:

| współczynnik a         | współczynnik b                      |
|------------------------|-------------------------------------|
| niepewność A           | niepewność B                        |
| wartość $\mathbb{R}^2$ | odchylenie standardowe estymatora y |
|                        | stopnie swobody                     |
| suma kwadratów         | suma kwadratów reszt                |

- 6. Jakieś alternatywne reguły sobie wymyślić na najlepsze dopasowanie prostej co sprawdzać?
  - 7. jak stosować zdrowy rozsądek w tych szacowaniach
  - 8. Jak sprawić, żeby pomiar był precyzyjny lub dokładny lub jedno i drugie?
  - 9. Jaką informację niosą ze sobą niepewności względne?
  - 10. Co właściwie robią pochodne cząstkowe w prawie przenoszenie niepewności?
  - 11. I do tego wszystko o rozkładzie Gaussa i teście, testowaniu chi kwadrat.

Np. czy ma sens użycie k=4 w niepewności rozszerzonej i dlaczego zazwyczaj k=2?

Notatki z pliku notes/02matematyka2/matematyka2\_0000.00.00.md

## ROZDZIAŁ 12

### Matematyka 2

Notatki z pliku notes/02matematyka2/matematyka2\_06.05.2024.md

### 12.1 Całka powierzchniowa niezorientowana

i\$x = x(u, v)

y = y(u, v)

z = z(uxv)

 $u, v, \in \Delta$ \$)

### **1** wektor normalny

$$\vec{V} = det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}$$

W szczegulnym przypadku, kiedy obszar jest opisany wykresem funkcji

$$u = xv = yz = f(x, y)$$

$$\iint_S f(x,y,z)ds = \iint_S f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{A^2+B^2+C^2}dudv$$

Notatki z pliku notes/02matematyka2/matematyka2\_2024.02.26.md

### 12.2 Całki dla przeciałów nieskończonych

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Całka jest zbierzna, jeżeli

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx < \infty$$

### Przykład

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x} dx$$

$$\int_{1}^{b} \frac{1}{x} dx = |\ln(x)|_{1}^{b}$$

$$\lim_{b \to \infty} \ln(b) - \ln(1) \to \infty$$

Ta całka nie jest zbierzna.

### 12.3 Całki funkcji nieskończonych

Jeżeli  $f(x) \to \infty$   $x \to b$ , to mówimy, że  $\int_a^b f(x) dx$  jest zbierzna, jeśli  $\exists \lim_{\psi \to b} \int_a^\psi f(x) dx$ .

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\psi \to \infty} \ln(1) - \ln(\psi) = -\infty \Rightarrow \text{Całka jest rozbierzna}$$

### 12.3.1 Szczególne przypadki całek na przedziałach nieograniczonych

• Kiedy całka  $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$  jest zbierzna?

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \left| \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_{1}^{\infty} =$$

$$= \lim_{b \to \infty} \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$$

Całka jest zbierzna dla \$1-\alpha < 0

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \psi^1 - \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

### 12.3.2 Kryteria porównawcze

- jeżeli  $f(x) > 0 \land f(x) < g(x) \in (a,b)$  i  $\int_a^b g(x) dx$  jest zbierzna to  $\int_a^b f(x) dx$  też jest zbierzna.
- jeżeli f(x) jest asymptotycznie zbierzne z g(x) to  $\int_a^b f(x)$  i  $\int_a^b g(x)$  są obie równocześnie zbierzne lub rozbierzne.

### 12.3.3 Szeregi

#### → Zobacz także

Szerzej rozważane w MATEMATYKA 3

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{\infty}$$

Jeżeli ciąg  $a_n$  jest zbierzny, wtedy mówimy, że szereg jest zbierzny.

Rozważmy tzw. szereg harmoniczny:

$$\sum_{n} = 1^{\infty} \frac{1}{n}$$

### **1** bezwzględna zbierzność

jeżeli  $\int_a^b f(x) dx$ jest zbierzna, to t acałka jest bezwzględnie zbierzna jeżeli  $\int_a^b |f(x)| dx$ 

### Informacja

Jeżeli całka  $\int_a^b f(x)dx$  jest bezwzględnie zbierzna, to jest również zbierzna

Notatki z pliku notes/02matematyka2/matematyka2\_2024.02.27.md

# 12.4 Funkcja Gamma Eulera

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

• W otoczeniu 0

$$\Gamma \int_0^\infty t^{x-1} dt$$

Funkcja jest zbierzna jeżeli  $1 - x < 1 \Leftrightarrow x > 0$ 

W "otoczeniu"  $\infty$ 

$$\mathrm{dla}\,t\to\infty$$
$$t^{x-1}\le e^t$$

### 12.4.1 Własnośći

• 
$$\Gamma(x+1) = x * \Gamma(x)$$

dowóð z obliczenia całki  $\Gamma(x+1)$  przez części

• 
$$\Gamma(1) = -e^{-t}|_0^{\infty} = 1$$

• Definicja silni

$$\Gamma(2) = 1 * \Gamma(1) = 1$$
  
$$\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2 * \Gamma(2) = 2$$
  
$$\Gamma(4) = 3 * \Gamma(3) = 6$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

• 
$$\Gamma(\alpha) * \Gamma(1 - \alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi \alpha)}$$
  
 $n! \ n^n * e^{-n} * \sqrt{2\pi n}$ 

# 12.5 Funkcja $\beta$

$$\beta(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) * \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} = \int_0^1 x^{\alpha - 1} (1 - x)^{\beta - 1} dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} = \sqrt{\pi}$$

Notatki z pliku notes/02matematyka2/matematyka2\_2024.03.05.md

### 12.6 Równania Różniczkowe

1 postać ogólna równania różniczkowego zwyczajnego I Rzędu

Rząd rócenania zależy od najwyższego rzędu pochodnej z tego rócenania.

1 Krzywa całkowa

wykres całki szczególnej - rozwiązania róœnania różniczkowego

### 12.6.1 Przykłąd 1

$$y' = x^4 + 2x$$

$$\int y'dx = \int x^4 + 2xdx$$

$$y = \frac{1}{5}x^5 + x^2 + C$$

### 12.6.2 Przykład 2

$$y' = x^{4} + 2x y(0) = 1$$

$$\int y' dx = \int x^{4} + 2x dx$$

$$y = \frac{1}{5}x^{5} + x^{2} + C$$

$$1 = \frac{1}{5}0^{5} + 0^{2} + C \Rightarrow C = 1$$

$$y = \frac{1}{5}x^{5} + x^{2} + 1$$

### 12.6.3 Przykłąd 3

$$\begin{split} y' &= 1 + y^2 \\ \frac{y'}{1 + y^2} &= 1 \\ \int \frac{y'}{1 + y^2} dx &= \int dx \\ \int \frac{\frac{dy}{dx}}{1 + y^2} dx &= \int dx \\ arctg(y) &= x \\ y &= tg(x + C) \ X \in \left( -\frac{\pi}{2} - C, \frac{\pi}{2} - C \right) \right) \end{split}$$

### 1 Twierdzenie o istnieniu rozwiązań równania różniczkowego

jeżeli prawa strona równania różniczkowego jest funkcją ciągłą w obszarze D, to przez każdy punkt tego obszaru musi przechodzić **conajmniej jedna** krzywa całkowa.

# 1 warunek na jedyne rozwiązanie problemu początkowego

Oprócz ciągłości prawej strony zakłada się również ciągłość pochodnej cząstkowej  $\frac{\partial y}{\partial x}$ 

### 12.6.4 Przyład 4

$$y' = \sqrt[3]{y^2}$$

Zauważmy, że f(x) = 0 jest rozwiązaniem równania

$$\frac{y'}{\sqrt[3]{y^2}} = 1$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt[3]{y^2}} = x$$

$$3\sqrt[3]{y} = x + C$$

# 12.7 Równania Różniczkowe o zmiennych rozdzielonych

### 1 Postać ogólna równania różniczkowego o zmienych rozdzielonych

$$y' = \frac{f(x)}{g(x)}$$

### 1 Rozwiązanie problemu coshiego

Jeżeli f jest ciągła w X i g jest ciągła i różna od 0 w Y, to  $(x,y) \in X \times Y$  przechodzi jedna krzywa całkowa

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}dy * g(y) = dx * f(x) \int dy * g(y) = \int dx * f(x)$$

Notatki z pliku notes/02matematyka2/matematyka2\_2024.03.11.md

### 12.8 Równania liniowe

### 12.8.1 Równania liniowe 1 rzędu

$$y' + p(x) * y = f(x)$$

$$niech L(y) = y' + p(x) * y$$

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$$

$$L(\alpha y) = \alpha L(y)$$

Mówi się, że równanie jest liniowe, jeżeli lewa strona jest liniowa ze względu na y.

### 1 Informacja

jeżeli f(x) = 0, mówimy o równaniu jednorodnym.

### Wskazówka

niech  $y^*$  i y będą rozwiązaniami równania liniowego niejednorodnego, wtedy

$$L(y^*) - L(y) = f(x) - f(x) = 0$$
$$L(y^* - y) = 0$$

Z tego wynika, że różnica  $y^* - y$  jest rozwiązaniem równania jednorodnego

# 1 tw. kukurydzy

$$CORN = CSRN + CORJ$$

- CORN = całka ogólna równania niejednorodnego
- CSRN = Całka szczególna równania jednorodnego
- CORJ = Całka ogólna równania jednorodnego

$$y' + p(x)y = 0$$

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int -p(x)dx$$

$$ln(y) = \int p(x)dx + C$$

$$|y| = e^{\int p(x)dx} + C$$

$$CORJ: \quad y = Ce^{\int p(x)dx}$$

#### Metoda Uzmienniania stałej:

Szuikamy CSRN W postaci  $y(x) = C(x) * e^{-\int p(x)dx}$ 

$$C'(x) * e^{-\int p(x)dx} + \underline{C(x) * (-p(x))e^{-\int p(x)dx}} + \underline{p(x) * C(x)e^{-\int p(x)dx}} = f(x)$$

$$C'(x) * e^{-\int p(x)dx} = f(x)$$

$$C'(x) = f(x)e^{\int p(x)dx}C(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx}$$

#### Metoda Przewidywania

Jeżeli p(x) = const

$$\frac{dy}{dx} + 3y = x^2$$

Pomińmy COFJ, CSRN: Rozwiązaniem Najprawodopodobniej będzie wielomian stopnia 2

$$y = Ax^{2} + Bx + C$$

$$y' = 2Ax + b$$

$$2Ax + B + 3Ax^{2} + 3Bx + 3C = x^{2}$$

$$\begin{cases}
3A = 1 \\
2A + 3B = 0 \Rightarrow \begin{cases}
A = \frac{1}{3} \\
B = \frac{-2}{9} \\
3C = \frac{2}{27}
\end{cases}$$

Jeżeli f(x) jest w postaci funkcji trygonometrycznych, zakładamy rozwiązanie w postaci Asin(x) + Bcos(x)

Notatki z pliku notes/02matematyka2/matematyka2\_2024.03.18.md

12.8. Równania liniowe 143

### 12.8.2 Równania II liniowe rzędu

$$y'' = x^2$$
$$y' = \frac{x^3}{3} + C$$
$$y = \frac{x^4}{12} + Cx + C_1$$

### Wskazówka

rodzina funkcji wyjściowych zeleży od 2 parametrów

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

### 1 Informacja

liniowe, ponieważ  $L(y_1+y_2)=L(y_1)+L(y_2)\wedge L(\alpha y)=\alpha L(y)$ 

### 1 Informacja

twierdzenie CORN nadal zachodzi

Rozważmy nastębujące równanie:

$$y'' + py' + qy = 0$$

### 1 Macierz Wrońskiego

Dwa rzowiażania rówania jednordnego stanowią tzw. **układ fundamentalny** jeżeli następujący wyznacznik  $\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$ 

Jeżeli  $y_1(x)$  oraz  $y_2(x)$  stanowią ukłąd fundamentalny dla RJ, to  $y = C_1y_1 + C_1y_2$  to CORJ.

Ponadto zagadnienie Coshiego tj.  $\begin{cases} y(x_0) = a \\ y'(x_0) = b \end{cases}$  ma dokładnie jedno rozwiązanie.

ROzwiązania szukamy w postaci  $y = e^{r*x}$ . Udowadniamy z dowodu nie-wprost.

$$r^2 + pr + q = 0$$

• jeżeli  $\Delta > 0$  istnieją 2 pierwiastki.

$$y = e^{r_1 x} + e^{r_2 x}$$

•  $\Delta = 0$ 

$$r = \frac{-p}{2}$$

$$y_1 = e^{rx}$$
$$y_2 = x * e^{rx}$$

• 
$$\Delta < 0$$

załóżmy, że rozważamy rócenanie w dziedzinie  $\mathbb C$ 

$$r_1 = \alpha + \beta i$$
$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$$
$$y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Notatki z pliku notes/02matematyka2/matematyka2\_2024.03.19.md

# 12.9 Funkcje wielu zmiennych

**12.9.1**  $I \to \mathbb{R}^n$ 

$$\vec{f}:I\to\mathbb{R}^N$$

· Pochodna:

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{f}(t_0 + h) - \vec{f}(t_0)}{h}$$

..

$$\frac{d}{dt}(f \times g) = \frac{df}{dt} \times g + \frac{dg}{dt} \times f$$

**12.9.2**  $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ 

Przykład:

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

### **1** granice wielu zmiennych

jeżeli chcemy liczyć granice kilku zmiennych to tak nie można.

• Jeżeli  $x,y\to(0,0)$  można przejść na współrzędne biegunowe, ale wtedy okaże się że granicy nie ma, dyż zależy ona od kąta  $\phi$ 

#### 1 Tw. Boltzmana-Weierstrassa

metoda polowania na lwa. Obszar ogradzamy i dzielimy na 4 części za każdym razem Jeźli otoczenie punktu  $x_0$  jest rozłączne, to x jest punktem zewnętrznym.

Jeśli U =  $int(u) \Rightarrow U$  otwarty

Notatki z pliku notes/02matematyka2/matematyka2\_2024.03.25.md

### 12.9.3 Pochodne cząstkowe

Granicę  $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y,z)-f(x,y,z)}{h}$  o ile istnieje nazywamy pochodną cząstkową względem zmiennej x i oznaczamy  $\frac{\partial f}{\partial x}$ .

### 1 Tw. Schwartza

Jeżeli pochodne mieszane są ciągłe, to są równe.

Funkcja 2 zmiennych jest klasy  $C^1$  jeżeli  $\frac{\partial f}{\partial x}$  i  $\frac{\partial f}{\partial y}$  są ciągłe.

Funkcja jest klasy  $C^2$  jeżeli  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  są ciągłe.

### 12.9.4 Pojęcie różniczkowalności

$$f(\vec{x} - \vec{h}) - f(\vec{x}) = L_{\vec{x}}(\vec{h}) + o(||h||)$$

### 12.9.5 Pochodna funkcji złożonych

 $\mathrm{niech}\, f(x,y,z) \wedge x = x(t)\, y = y(t)\, z = z(t). \, \mathrm{Wtedy}\, F(t) = f(x(t),y(t),z(t)) \, \mathrm{Wtedy}\, \tfrac{dF}{dt} = \tfrac{\partial f}{\partial x} * \tfrac{dx}{dt} + \tfrac{\partial f}{\partial y} \tfrac{dy}{dt} + \tfrac{\partial f}{\partial z} \tfrac{dz}{dt} + \tfrac{\partial f}{\partial z} \tfrac{dz}{dz} + \tfrac{\partial f}{\partial z} - \tfrac{\partial f}{\partial z} - \tfrac{\partial f}{\partial z} + \tfrac{\partial f}{\partial z} - \tfrac{\partial f}{\partial z} + \tfrac{\partial f}{\partial z}$ 

#### 12.9.6 Pochodna kierunkowa

Niech  $\omega = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$  będzie wektorem jednostkowym.

Granica

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + t cos\alpha, y + t * cos\beta, z + t * cos\gamma)}{t}$$

o ile istnieje nazywana jest pochodną f w kierunku  $\omega$  i oznaczamy  $\frac{\partial f}{\partial \omega}$ 

Notatki z pliku notes/02matematyka2/matematyka2\_2024.03.26.md

#### Wskazówka

gradient równy 1 pokazuje kierunek największego wzrostu funkcji

### 12.9.7 Funkcje uwikłane

### 1 tw. o funkcji uwikłanej

niech funkcja f(x,y) będzie klasy  $C^1$  w obszarze D.

- $f(x_0, y_0) = 0$
- $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$  w punkcie  $(x_0, y_0)$

• istnieje prostokąt postaci  $P=(x_0-\delta,x_0+\delta)\times(y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon)$ , taki że f(x,y)=0 ma jednoznaczne rozwiązanie  $y=\varphi(x)$  taki, że F(x,f(x))=0

### $oldsymbol{0}$ tw. o funkcji uwikłanej w przestrzeni $\mathbb{R}^3$

Jeżeli F jest klasy  $C_1$  w obszarze D

- $F(x_0, y_0, z_0) = 0$
- $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$  w punkcie  $(x_0, y_0, z_0)$
- istnieje funkcja z = z(x, y) taka, że F(x, y, z(x, y)) = 0

### 12.9.8 płaszczyzna styczna

### 1 Informacja

Ogólne rócenanie płaszczyzny to Ax + By + Cz + D = 0

Szukana płaszczyzna ma równanie  $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ 

Równanie płaszczyzny ma postać  $\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial f}{\partial z}(z-z_0)=0$ 

Notatki z pliku notes/02matematyka2/matematyka2\_2024.04.09.md

#### 1 Pole potencjalne

pole nazywamy potecjalnym, jeżeli  $\exists U(x) \ grad U(x) = F(x)$ 

Notatki z pliku notes/02matematyka2/matematyka2\_2024.04.15.md

# 12.10 Rachunek całkowy wielu zmiennych

## 12.10.1 Całka podwójna

Niech f = f(x, y)

• 
$$F: P \to \mathbb{R}$$
  $P = [a, b] \times [c, d]$ 

Przypuśćmy, że mamy prostokąt (płąszczyznę) nad którą znajduje się wykres f.

Załużmy, że musimy obliczyć objętość pod wykresem f.

Tworzymy 3 sumy (jakd dla całek) dla prostopadłościanów skłądających się na wykres funkcji. ( $s_n$  dla najmniejszej wartości,  $S_n$  dla największej oraz  $\sigma$ )

### **1** Definicja

Jeżeli przy każdym, coraz drobniejszym, podziałe prostokąta P ciąg  $\sigma_n$  dąży do tej samej granicy niezależnej od podziału, ani od wyboru punktów pośrednich, to granicę tę nazywamy całką podwójną funkcji f po prostokącie P i oznaczamy  $\iint_P f(x,y) dx dy$ .

### 1 Informacja

Całka  $\iint_{P} f(x,y) dx dy$  nie zawsze istnieje

### 12.10.2 Całka podwójna nie dla prostokąta

jeżeli nie mamy prostokaβa, rozszeżamy naszą funkcję żeby była na prostokacie Przykłądowo:  $f = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 

### 🚺 zbiór miary 0

Jeżeli zbiór A jest zbiorem miary 0, to całka podwójna po A jest równa 0. przykładowo:

• punkt jest miary 0 ponieważ można go pokryć prostokatem o dowolnie małym polu

### **1** podstawowe twierdzenie

Jeśli  $F: P \to \mathbb{R}$  i zbiór punktów nieciągłości F ma miarę 0, to F jest całkowalna na P.

Aby rozpoznać czy brzeg jest miary 0, można posłużyć się następującym twierdzeniem:

#### 1 Twierdzenie

jeżeli  $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$  jest całkowalna, to jej wykres (krzywa) ma miarę 0.

#### Wniosek:

Jeżeli  $f:[a,b] \to \mathbb{R}$  jest ciągła  $\Rightarrow$  jej wykres ma miarę 0.

Na przykłądzie wykresu koła:

- · brzeg to okrąg
- · okrąg można traktować jako wykres funkcji
- · wykres jest ciągły
- wykres jest miary 0
- · funkcja jest całkowalna

Notatki z pliku notes/02matematyka2/matematyka2\_2024.04.16.md

### 12.10.3 obliczanie całki podwójnej

$$\iint_{P} f(x,y)dxdy = \int_{a}^{b} \left[ \int_{c}^{d} fdy \right] dx$$

### Obszar normalny

D jest **obszarem normalnym** względem osi X jeżeli jet opisany w następujący sposób:

$$x \in \langle a, b \rangle y \int \langle \phi_1, \phi_2 \rangle$$

gdzie  $\phi_1, \phi_2$  są są klasy  $C^1$ .

zmiana zmiennych:

$$\iint_{D} f(x,y)dxdy$$

$$x = x(u,v)$$

$$y = y(u,v)$$

$$\iint_{\Lambda} f(x(u,v), y(u,v))j(u,v)dudv$$

gdzie j(u, v) to jakobian przekształcenia.

$$j(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Notatki z pliku notes/02matematyka2/matematyka2\_2024.04.22.md

# 12.10.4 Całka potrójna

#### **1** Obszar

obszar jest normalny do płąszczyzny jeżeli

$$(x,y) \in Dz \in \langle \phi_1(x,y), \phi_2(x,y) \rangle$$

### 1 całka potrójna

$$\iiint f(x,y,z)dxdydz = \iint_D dxdy \int_{\phi_1}^{\phi_2} f(x,y,z)dz$$

#### 12.10.5 Zastosowania całek

pole: obszar płąski  $D = \iint y_D = \int 1 dx dy$ 

Objętość bryły  $\iiint 1 dx dy dz$ 

Pole powierzchni

$$P_{ij} = r_{ij} * cos(\phi_{ij})$$

$$cos(\phi_{ij}) = (f_x'^2 + f_y'^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$P = \iint_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2 + 1} dx dy$$

$$P = \iint_D ||\vec{N}|| dx dy$$

### Wskazówka

krzywą f(x) obracamy wogół osi OX.

środek Ciężkości:

Jeżeli środek ciężkości ma współżędne  $\xi, \eta$ , to

$$\xi = \frac{1}{|D|} \iint_D x dx dy$$
$$\eta = \frac{1}{|D|} \iint_D y dx dy$$

### 1 Informacja

Objętość bryły jest równa polu powierzchni obszaru zakreślającego bryłę pomnożonemu przez drogę jaką przebył środek masy.

Notatki z pliku notes/02matematyka2/matematyka2\_2024.04.29.md

$$\psi = \frac{1}{|D|} \iint_D x dx dy$$

### 1 Informacja

Przykłąd:

rozważmy pókole (fragment łuku)

$$x = r cos \phi$$
 
$$y = r sin \phi$$
 
$$\phi \in [0, \pi]$$
 
$$x'^2 = r^2 sin^2 \phi$$
 
$$y'^2 = r^2 cos^2 \phi$$
 
$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = r$$
 
$$\psi = \frac{1}{\pi r} \int_0^{\pi} r cos \phi r^2 d\phi = 0 \phi = \frac{2r}{\pi}$$

#### Ważne

Pole powierzchni otrzymanej przez obrót łuku 1 dookoła prostej e (łuk nie przecina prostej) wynosi długość łuku razy droga przebyta przez środek ciężkości łuku.

### **1** Informacja

objętość takiego obszaru jest równe pole tego co się obraca razy droga środka ciężkości

$$4\pi r^2 = 2\pi \eta \pi r$$
$$2r = \eta \pi$$
$$\eta = \frac{2r}{\pi}$$

# 12.11 Całki Krzywoliniowe

### 12.11.1 Całka krzywoliniowa nieskierowana

### 1 definicja

jeżeli dla każdego podziału krzywej k suma  $\sum f(N_i)\Delta s$  dąży przy średnicy podziału do zera dąży do tej samej liczby niezależnej od punktów podziału e.t.c., to granicę tę nazywamy całką krzywolinią nieskierowaną i oznaczamy  $\int_k f(s)ds$ 

niech

$$x = x(s)$$

y = y(s)

gdzie s to długość ktrzywej liczona od punktu a

### 12.11.2 Całka krzywoliniowa skierowana

w obszarze pewnej krzywej rozważmy pole wektorowe.

### **1** def

jeżeli ... granicę tę nazywamy całką krzywoliniową skierowaną z pola  $\vec{R}$  wzdłuż krzywej k i oznaczamy  $\int_k \vec{R} \cdot d\vec{s}$ 

$$\int p(x(t))\frac{dx}{dt} + q(y(t))\frac{dy}{dt}$$

Notatki z pliku notes/02matematyka2/matematyka2\_2024.04.30.md

$$\int_{k(a \to b)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{k(b \to a)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

### 1 def: Obszar Jednospójny

 $D \in \mathbb{R}^{ee}$  nazywamy obszarem jednospójnym, jeżeli brzeg tego obszaru jednego kawałka

#### tw. Greena

D jest obszarem jednospójnym. Krzywa  $k=\partial D$  jest zorientowana dodatnio, wtedy

$$\int_{k} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{D} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Można sforumować następująće twierdzenia: Pole jest ptencjalne (gradientowe) jeżeli

- 1.  $\oint_k \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \Leftrightarrow \vec{F}$  jest polem gradientowym
- 2.  $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ nie zależy od drogi, tylko od punktów początkowego i końcowego
- 3.  $\frac{\partial Q}{\partial X}$  i  $\frac{\partial P}{\partial y}$  są ciągłe na D

Notatki z pliku notes/02matematyka2/matematyka2\_2024.05.13.md

### 12.11.3 Całka powierzchniowa zorientowana

### 1 Informacja

nie każda powierzchnia ma 2 strony

Zakłądamy, że powierzchnia jest dwutronna

$$\iint_{+s} f dS = \iint_{S} f \cdot \vec{n} dS$$

### 1 Tw. Gaussa-Ostrogradzkiego

$$\iint_S F \cdot dr = \iiint_V \nabla \cdot F dV$$

Współ©zędne sferyczne: przyjhmujemy  $\phi$  od osi OX i  $\theta$  od osi OZ.

Notatki z pliku notes/02matematyka2/matematyka2\_2024.05.20.md pole E nazywamy selenoidalnym, jeżeli rotG=E

4 warunki są róœnoważne:

- $\iint_S E \cdot dS = 0$  dla dowolnej powierzchni zamkniętej S
- $\iint_S E \cdot dS$  zależy tylko od konturu s oraz od orientacji powierzchni S

- pole E jest selenoidalne
- divE = 0

#### dygresja

solen -  $\sigma o \lambda \epsilon \ni$  - rurka \$\$

Notatki z pliku notes/02matematyka2/matematyka2\_2024.06.03.md

kryterium sylfwstra (aka kryterium sylwestera)

- jeżeli oba wyznaczniki są dodatnie, to w punkcie znajduje się minimum
- jeżeli oba wyznaczniki są ujemne, to w punkcie znajduje się maksimum
- jeżeli wyznacznik jest dodatni, a drugi ujemny, to punkt jest punktem siodłowym

#### 1 Informacja

Przykłąd

obszar D: 
$$x \in (0, 2\pi) \land y \in (0, 2\pi) \land x + y = 2\pi \ u(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$$

Etap 1 poszukać punktóce podejżanych

$$u'_x = \cos x - \cos(x+y) = 0$$
  
$$u'_y = \cos y - \cos(x+y) = 0$$

$$P = \left(\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\right)$$

$$u_x'' = -\sin x + \sin(x+y)$$

$$u_y'' = -\sin y + \sin(x+y)$$

$$u_{xy}'' = \cos(x+y) - \cos(x+y) = 0$$

$$\begin{bmatrix} u_{xx}^{\prime\prime} & u_{xy}^{\prime\prime} \\ u_{yx}^{\prime\prime} & u_{yy}^{\prime\prime} \end{bmatrix}$$

ogólnie wychodzi na to że jest maksimum lokalne ponieważ  $W_1$  i  $W_2$  są ujemne.

etap 2 sprawdzić co się dzieje na brzegu

$$y = 0, x \in (0, 2\pi)$$

$$u(x) = \sin(x) - \sin(x) = 0$$

$$x = 0, y \in (0, 2\pi)$$

$$u(y) = 0 + \sin(y) - \sin(y) = 0$$

$$x \in (0, 2\pi) \land x + y = 2\pi \Rightarrow y = 2\pi - x$$

$$u(x,y) = sin(x) + sin(2\pi - x) - sin(2\pi) = sin(x) - sin(x) = 0$$

wnioski: największa wartość jest w punkcie P, natomiast najmniejsza jest na brzegu (0).

### 12.11.4 Metoda lagrange'a

załużmy, że mamy funkcję f(x,y) oraz ograniczenie g(x,y)=0 wtedy tworzymy funkcję  $\Phi(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$  następnie liczymy pochodne cząstkowe  $\Phi$  po x,y i  $\lambda$  i rozwiązujemy układ równań

Notatki z pliku notes/02matematyka2/matematyka2\_2024.06.10.md

## 12.12 Forma kwadratowa - przykłąd

niech 
$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$
 ,  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ 

$$f(x_1, x_2, x_3) = X^T * A * X = a_1 1x_1^2 + a_2 2x_2^2 + a_3 3x_3^2 + 2a_1 2x_1 x_2 + 2a_1 3x_1 x_3 + 2a_2 3x_2 x_3$$

szukamy najmniejszej wartośći tej funkcji na sferze jednostkowej  $1-x_1^2-x_2^2-x_3^2=0$ 

$$\begin{split} \Phi(x_1,x_2,x_3) &= f(x_1,x_2,x_3) + \lambda * g(x_1,x_2,x_3) = a_1 1 x_1^2 + a_2 2 x_2^2 + a_3 3 x_3^2 + 2a_1 2 x_1 x_2 + 2a_1 3 x_1 x_3 + 2a_2 3 x_2 x_3 + \lambda(x_1,x_2,x_3) \\ \begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} &= 2a_1 1 x_1 + 2a_1 2 x_2 + 2a_1 3 x_3 - 2\lambda x_1 = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} &= 2a_2 2 x_2 + 2a_1 2 x_1 + 2a_2 3 x_3 - 2\lambda x_2 = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} &= 2a_3 3 x_3 + 2a_1 3 x_1 + 2a_2 3 x_2 - 2\lambda x_3 = 0 \\ g(x_1,x_2,x_3) &= 0 \end{split}$$

$$\begin{cases} 2*A*X - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \lambda X = 0 \\ g(x_1, x_2, x_3) = 0 \end{cases} = \begin{cases} A*X - \lambda X = 0 \\ g(x_1, x_2, x_3) = 0 \end{cases}$$

#### **1** twierdzenie

Jeżeli szukamy najmniejszej i największej wartośći funkcji  $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$  na sferze jednostkowej, to punkty podejrzane to wektory własne macierzy  $A-Z*\lambda$ 

### Ważne

Podsumowanie wykłądu

- Γ euler'a
- funkcje wielu zmiennych, różniczkowalność e.t.c. (analogicznie jak dla 1 zmiennej)
- pojęcie ciąnłości (tw. Darbou)
- funkcje z  $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$  ciągłość, granice)

• różniczkowanie fcji wielu zmiennych; pochodne cząstkowe; różniczka 
$$df = \begin{bmatrix} \frac{\partial_f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

- ekstrema fcji wielu zmiennych (forma kwadratowa, tw. La'grange'a)
- całki (podwójne, potrójne, krzywoliniowe, powierzchniowe, objętościowe, zorientowane, niezorientowane, tw. Stokes'a, tw. Green'a, tw. Gauss'a-Ostrogradskiego, tw. o polu bezźródłowym)
- zadania typu oblicz objętość/ppowierzchnię
- Reguły GULDINA  $\leftarrow$  przypadkiem zawsze się pojawiają na egzaminie...

Notatki z pliku notes/02matematyka2\_cw/matematyka2\_cw\_0000.00.00.md

# ROZDZIAŁ 13

# Matematyka 2 - Ćwiczenia

Notatki z pliku notes/02matematyka2\_cw/matematyka2\_cw\_2024.03.13.md

# 13.1 Metoda czynnika całkującego

$$y' + p(x) = q(x)$$
$$y'\mu(x) + \mu(x)p(x)y = q(x)\mu(x)$$
$$(y * \mu(x))' = q(x)\mu(x)$$
$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

Rozwiązywanie rócenań liniowych II rzędu

• wielomian harakterystyczny

$$y'' + y' - 2y = e^{-x}$$
$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$
$$\lambda = 1 \lor \lambda = -2$$
$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$$

- dla  $\Delta < 0$  suma sinus+cos, ignorujemy i
- dla  $\Delta = 0$   $Ce^x + Cxe^x$

$$\begin{cases} C_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \end{cases}$$

Notatki z pliku notes/02matematyka2\_cw/matematyka2\_cw\_2024.04.17.md

### 13.2 Zestaw 9 Zadanie 1

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} \right\} * \left\{ \begin{matrix} \cos\phi & -r sin\phi \\ sin\phi & r cos\phi \end{matrix} \right\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial r} & \frac{\partial f}{\partial \phi} \right\}$$

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} \right\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial r} r cos\phi - \frac{\partial f}{\partial \phi} sin\phi \qquad \frac{\partial f}{\partial r} r sin\phi + \frac{\partial f}{\partial \phi} cos\phi \right\} * \frac{1}{r}$$

Notatki z pliku notes/02matematyka2\_cw/matematyka2\_cw\_2024.04.24.md

### 13.3 Zestaw 10 zadanie 2a

Notatki z pliku notes/02matematyka2\_cw/matematyka2\_cw\_2024.05.15.md

### 13.4 Zestaw 11 Zadanie 1

Liczenie całek krzywoliniowych:

- parametryzacja krzywej
- · zapisanie całki pojedynczej
- · ustalenie granic

Notatki z pliku notes/02matematyka2\_cw/matematyka2\_cw\_2024.06.12.md

### 13.5 Zestaw 14 Zadanie 1

szukanie ekstremów lokalnych

- warunek konieczny liczymy I pochodne i sprawdzamy w jakich punktach się zerują
- warunek wystarczająćy tworymy macierz z pochodnych
- liczymy wyniki
- jeżeli są same plusy to minimum, jak jest na przemian od -, to jest maximum

Notatki z pliku notes/kwanty/kwanty\_0000.00.00.md

# ROZDZIAŁ 14

Wstęp do Fizyki Kwantowej

Notatki z pliku notes/kwanty/kwanty\_2024.10.08.md

http://website.fis.agh.edu.pl/~Wolny/index2.php.htm

### 1 Informacja

egzamin ustny, dostaniemy notatki i zagadnienia. 2/10 pytań.

### 14.1 Promieniowanie termiczne

### 14.1.1 Skale temperatur

- celcjusz (0 zamarzanie wody, 100 wrzenie wody)
- Kelwina (przesunięta o 273.15)
- Farenheita (0 najniższa temperatura zmierzona, 100 temperatura ciała ludzkiego)

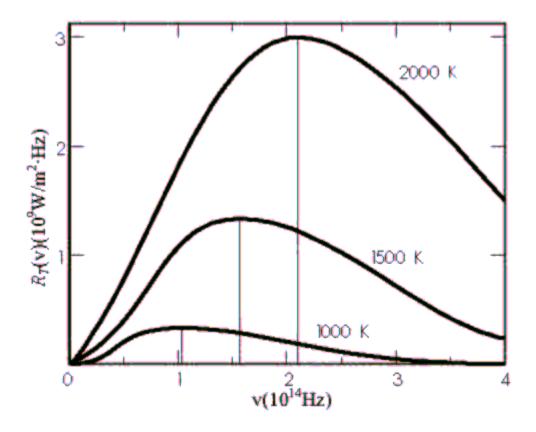
#### doświadczenie

bierzemy pudełko i robimy w nim dziurę. Gdy promieniowanie wpada (pod kątem) przez otwór, ścianki pudełka odbijają promieniowanie aż zostanie ono całkowicie pochłonięte. To jest tak zwany model **ciała doskonale czarnego** 

### 14.1.2 Zdolność emisyjna

Zdolność emisyjną ciała doskonale czarnego oznaczamy jako  $R_T$ 

Wykres Zdolności emisyjnej od częstotliwości fali przedstawia następujący wykres:



Całkowita zdolność emisyjna:  $R_t = \int_0^\infty R_T d\nu$ 

### 1 Prawo Stefana

$$R_T = \sigma T^4$$

#### Gdzie:

- T temperatura (w kelwinach)
- $\sigma$  stała Stefana-Boltzmanna

#### Wskazówka

Jeżeli chcemy zastosować to prawo do ciała innego niż CDC, musimy wynik przemnożyć jeszcze przez stałą  $0<\epsilon<1$  określającą, jaką część promieniowania CDC emituje Ciało

Gdy **temperatura** ciała wzrasta, następuje przesunięcie (górki na wykresie są bardziej w lewo) długości fal/częstotliwości ku **falom krutszym**.

 $\lambda_{max} = \frac{C}{T}$ , gdzie C to stała. Tą zależność nazywamy **prawem Wiena**.

### 14.1.3 Teoria Plancka

Planck zauważył, że energia "stanu" zależy od częstotliwości fali.

Notatki z pliku notes/kwanty/kwanty\_2024.10.15.md

### 14.2 Model atomu Bohra

Ref:

- · Notatki do wykładu
- Krótki wstęp
- pasma emisyjne wstęp
- Ćwiczenia

### 14.2.1 Wstęp

Zgodnie z postulatem Plancka, energia emisyjna Ciała Doskonale Czarnego (dalej CDC) jest zkwantowana (oznacza to, że energia emitowanych fal musi być w postaci  $E = n * \Delta \epsilon$ ).

Zauważono, że to samo dotyczy długości fal emitowanych przez atomy.

Zauważono następującą zależność:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

gdzie:

- m nr serii
- n nr dla poszczególnych linii serji (n > m)

### 1 Termy

z powyższego wzoru widać, że poszczególne "wyrazy" wzoru można przedstawić jako

$$T_n = \frac{R}{n^2}$$

Równanie można również rozszerzyć na bardziej skomplikowane atomy (dotychczas była mowa tylko o wodorze)

$$\frac{1}{\lambda} = T_1 - T_2$$

### 1 Prawo Kombinacji Rydberga-Ritz'a

Liczby falowe dowolnych linii spektralnych mogą być wyrażone jako różnice odpowiednich termów, które z kolei przez kombincję z innymi termami służyć mogą do obliczania liczb falowych innych linii tego samego widma.

### 14.2.2 Budowa Atomu - postulaty Bohra

Istniało kilkanaście koncepcji modelu atomu (Thomson'a, Rutherford'a), jednak wszystkie zostały obalone.

Bohr sormuował następujące postulaty:

- 1. "Stacjonarne Orbity": Istnieją stany atomu, w których nie emituje on żadnej energii.
- 2. "kwantowanie": Moment Pędu elektronu w stanie stacjonarnym wynosi  $L = mVr = n\hbar$  (gdzie  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ )
- 3. "zasada częstości": Gdy atom przechodzi z jednego stanu w inny, zachodzi to przy udziale kwantu energii (wyemitowanego/pochłoniętego)

### 14.2.3 Poprawki do modelu Bohra

- wprowadzenie poprawki na masę jądra
- dlaczego nie orbity eliptyczne? (uogulniony postulat Bohra-Sommerfeld'a)  $\oint pdr = nh$

Notatki z pliku notes/kwanty/kwanty\_2024.10.21.md

# 14.3 Efekt fotoelektryczny

ref:

https://www.youtube.com/watch?v=ObQ7Di\_xuIs&list=PLRN3HroZGu2mCtdalEmZAM2nr1xBWAtUn&index=8

Światło padające na powierzchnię ciała wybija z niego fotony. Przeprowadzono eksperyment z katodą i anodą oraz prostym obwodem elektrycznym co doprowadziło do 3 spostrzeżeń:

- · proces wybijania elektronów jest natychmiastowy
- Energia kinetyczna elektronów nie zależy od natężenia światła
- energia kinetyczna elektronów jest proporcjonalna do częstotliwości

Powyższych punktów nie da się wytłumaczyć klasyczną fizyką. Rozwiązanie podał Einstain.

Zauważył on, że światło jest skwantowane i przenosi ono  $E=h\nu$  energii.

$$h\nu = E_k + W_W$$

gdzie:

- $E_k$  to energia kinetyczna jaką otrzyma elektron
- $W_w$  to praca wyjścia

Powyższy wzór można rozpisać również w innych wariantach na przykład (w nawiązaniu do cw 82 z pracowni)

$$U_h = \frac{h\nu}{e} - \frac{W_w}{e}$$

Albo też z częstotliwością progową:

$$E_k = h(\nu - \nu_0)$$

Notatki z pliku notes/kwanty/kwanty\_2024.10.22.md

# 14.4 Efekt comptona

ref:

https://www.youtube.com/watch?v=oTNiJVdEyCc&list=PLRN3HroZGu2mCtdalEmZAM2nr1xBWAtUn&index=9

Gdy swiatło pada na materię, czasami wybija z niej elektrony, przekazując im część swojej energii. Powoduje to zmianę długości fali (dowód z zasady zachowania pędu i zasaday zachowania energii  $E=\sqrt{m^2c^4+p^2c^2}$ )

Końcowe przesunięcie fali 
$$\Delta\lambda=\frac{h}{m_{e}c}\left(1-cos\Theta\right)=\lambda_{C}(1-cos\Theta)$$

W doświadczeniu z rozpraszaniem wiązki lasera na materii powoduje to dwa "piki" na wykresie odbieranych długości fali. Pik dalszy (przesunięty w prawo o dłuższych falach to właśnie efekt Coptona). Drugi (pierwszy o niższej dł. Fali) powstaje w wyniku interakcji fotonów z całym atomem (nie udało im się wybić elektronu a atom jest większy)

# 14.5 Kreacja i anichilacja

ref:

- http://website.fis.agh.edu.pl/~Wolny/Wc680ac88c02ae.htm
- https://www.youtube.com/watch?v=AfQj5ISTU3s&list=PLRN3HroZGu2mCtdalEmZAM2nr1xBWAtUn&index=10

Gdy materia bombardowana jest wysokoenergetycznym promieniowaniem (światłem) ( $E=h\nu\approx NmeV~N>1$ ) dochodzi do stworzenia nowej pary cząstek (elektronu i pozytonu) z energią kinetyczną  $E_k=E-2m_ec^2$ .

$$E = h\nu = m_{e^-}c^2 + E_{e^-} + m_{e^+}c^2 + E_{e^+} = 2m_ec^2 + E_k$$

### 1 Informacja

Odwrotny proces wydarza się gdy elektron spotyka pozyton.

#### Wskazówka

Minimalna długość fali tworzącej elektrony wynosi  $\lambda = 1.2pm$  - fotony gamma.

#### Ważne

Zjawisko to nie zachodzi (nie powinno zachodzić) w próżni. Porces ten wymaga obecności nukleonów

Dowód:

Z ZZE mamy:

$$E = 2\gamma m_0 c^2$$

Natomiast z ZZP:

$$2p_x = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = 2p\cos\theta$$

$$h\nu = 2p\cos\theta$$

$$= 2\gamma m_0 v \cos\theta$$

$$= 2\gamma m_0 c^2 \frac{v}{c} \cos\theta$$

- z założenia  $\frac{v}{c} < 1$
- z definicji  $cos\theta \leq 1$

Więc mamy:  $\$\frac{v}{c} < 0 \land cos\theta \le 1 \Rightarrow \frac{v}{c}cos\theta < 1 \Rightarrow h\nu < 2m_0c^2\$$ 

Ostatnie spostrzeżenie nie zgadza się z ZZE.

### 1 Cciekawostka

W zależności od energii fotonów obserwujemy różne efekty kwantowe:

- niska energia efekt fotoelektryczny
- średnia energia przesunięcie Comptona
- Bardzo duża energia kreacja par elektron/pozyton

Notatki z pliku notes/kwanty/kwanty\_2024.10.26.md

# 14.6 De'Broglie

Hipoteza De'Broglie'a mówi mówi, że skoro dla fotonów mamy

$$E = h\nu$$

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

To dla cząstek materialnych równiez można zastosować to prawo wtedy  $p=\frac{h}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{n}$ 

| Nie-Relatywistycznie                    | Relatywistycznie                        |
|-----------------------------------------|-----------------------------------------|
| $E_k = \frac{p^2}{2m}$                  | $p = \gamma m_0 v$                      |
| $\lambda = \frac{\kappa}{\sqrt{2mE_k}}$ | $\lambda = \frac{\kappa}{\gamma m_0 v}$ |

Notatki z pliku notes/kwanty/kwanty\_2025.01.14.md

# 14.7 Egzamin - Pytania

## 14.7.1 Pytanie 1

#### Promieniowanie termiczne

Promieniowanie generowane przez ciało rozgrzane do pewnej T. Ciało któ©e odbija całość dostarczonego promieniowania to ciało doskonale czarne.

Notatki z pliku notes/kwanty/kwanty\_2025.02.11.md

# 14.8 PRzygotowanie do egzaminu (V2)

#### 14.8.1 Promieniowanie termiczne i reliktowe. katastrofa w nadfiolecie

- Emisyjność to funkcja  $R_T(\nu)$  (Względnie  $R_T(\lambda)$ ) to jest ilość energii na jednostkę powierzchni w danej temperaturze jaką CDC wyemituje.
- Prawo Stefana-Boltzmana mówi o **całkowitej** emisyjności  $R_T = \int_0^\infty R_T(\nu) d\nu = \sigma T^4$ .
- Przesunięcie Wiena (prawo Wiena) mówi o częstotliwości (względnie długości) w jakiej ciało emituje najwięcej energii  $\lambda_{max} = \frac{b}{T}$  gdzie b to stała.
- Promieniowanie reliktowe to mikrofalowe promieniowanie tła obecne w całym wszechświecie.
- Po analizie ekperymentu Rayleigha-Jeansa (wnęka)  $\frac{8\pi\nu^2a^3}{c^3}d\nu$  (nie wiem skąd się to bierze...) co potwierdza wartości eksperymentalne tylko dla małych  $\nu$ . Dla większych wzór się nie zgadza co prowadzi do katastrofy w nadfiolecie.

### 14.8.2 Teoria Bohra

- Postulaty Bohra:
  - Elektron porusza się po okręgu
  - $L * r = n * \hbar$
- kwantowanie promienia liczy się z równowagi sił elektrycznej i odśrodkowej
- doświadczenie francka-hertza przyspieszanie elektronów z katody na anodę. zamiast liniowego wzrostu napięcia na anodzie mamy wykres "piłokształtny"

### 14.8.3 Fale De'Broglie'a

- Istnieją fale materii  $p = \frac{h}{\lambda}$
- doświadczenie devisona-germera potwierdza że elektrony doświadczają dyfrakcji (nikiel zastępuje siatkę dyfrakcyjną).

### 14.8.4 Postulaty fizyczne mechaniki kwantowej

- Zasada Odpowiedniości (niektóre rzeczy są 1:1 jak w mechanice klasycznej). Wszystkie tw. mechaniki klasycznej
   NIE zawierające pochodnej aplikują się także do mechaniki kwantowej po zastąpieniu odpowiednich wielkości fizycznych operatorami.
- Zasada Komplementarności jest bezpośrednią konsekwencją zasady nieoznaczoności Heisenberga. Niektóre elementy ukaldów mikroskopowych wzajemnie się wykluczają
- zasada superpozycji układ kwantowy może być w stanie superpozycji (np. w stanie  $|\psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$ )
- Równanie kleine-gordona bierzemy niezmiennik  $E^2-p^2c^2=m^2c^4$  i "podstawiamy" operatory z r. Schrodingera na przykład  $p=-i\hbar^2\nabla^2$  oraz  $E=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$

Notatki z pliku notes/kwanty\_cw/kwanty\_0000.00.00.md

# ROZDZIAŁ 15

# Wstęp do Fizyki Kwantowej - Ćwiczenia

Notatki z pliku notes/kwanty\_cw/kwanty\_02.10.2014.md

### 15.1 Intro

- 10 zadań z zestawów (może ulec zmianie)
- zaliczenie: 50% z kartkóœek i aktywności + zadania

### 15.2 Zestaw 1

### 1 Macierz Hermitowska

wykonanie następujących operacji da macierz początkową:

- sprzężenie zespolone
- transpozycja (tak zwane sprzężenie hermitowskie)

ozn:  $A^{\dagger}$ 

znajdowanie wektoróœ włąsnych (see algebra)

$$Av = \lambda v$$
$$(A - \lambda \mathbb{I})v = 0$$

#### **1** Komutator

podaje czy operatory są przemienne

Notatki z pliku notes/labfiz/labfiz\_2025.01.18.md



#### Ważne

DISCLAIMER: W opracowywaniu poniższych zagadnień jako wyszukiwarki korzystałem z ChatGPT!

### **⚠** Ostrzeżenie

Ponieważ piszemy kratkówkę tylko z ćwiczeń, które odbył mój zespół, następująće ćwiczenia nie są tu opisane:

- diody (123)
- polarymetr (74)
- dyfrakcja (71)
- pętla histerezy (39)

# Laboratorium Fizyczne - Kartkówka

# **16.1 Tranzystor (125)**

- · Tranzystor to element półprzewodnikowy
- Budowa: Emiter (wytwarzane są z niej łądunki), Baza (steruje przepływem łądunków), Kolektor (zbiera ładunki)
- · Podział ref:
  - Bipolarne i Uniplorane
  - pnp i npn (dla bipolarnych) ze względu na warstwy przewodzenia
  - materiał wykonania (krzem, german, e.t.c.)
  - {małej, dużej} mocy {małej, wielkiej} częstotliwości e.t.c.
- Prąd dyfuzyjny mechanizm transportu ładunków w tranzystorze związany z przemieszczaniem nośników (elektronów lub dziur) wzdłuż gradientu stężeń.
  - $J_n = q * \frac{\partial n}{\partial x}$  (dla elektronów. analogicznie dla dziur) gdzie n i p to koncentracja nośników (odpowiednio).
- Polaryzacje złącza Baza-Emiter (EB):
  - w kierunku przewodzenia: nośniki przepływają z emitera do bazy (odpowiedni potencjał emitera względem bazy)
  - w kierunku zaporowym: odwrotna polaryzacja niż ww. Blokuje przepływ prądu.
- $\frac{e}{k}$  oznacza stosunek ładunku elektrycznego do stałej Boltzmanna
- Stała Boltzmana łączy energię kinetyczną cząstek z temperaturą.
- Zastosowania: Silnik Cieplny (cykl Carnot'a), Rozkład Boltzmana
- dlaczego tranzystor bipolarny a nie dioda? W tranzystorze bipolarnym łątwo da się zbadać charakterystykę prądową (prąd kolektora  $I_c$  zależy od  $U_{EB}$ . zależność t ajest znana  $I_C = A*exp(\frac{U_{EB}}{kT})$ )

# 16.2 Halotron (43)

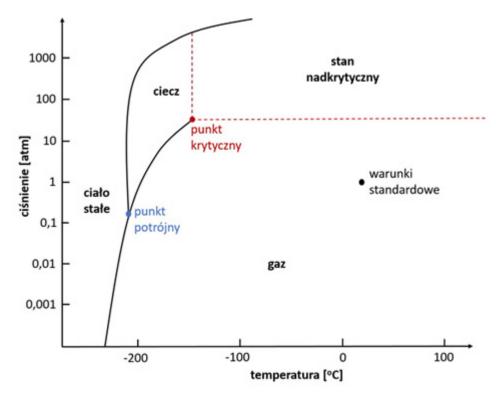
- Napięcie Halla Napięcie powstałe w przewodniku z prądem umieszczonym w polu magnetycznym.
  - ładunki płyną przez halotron
  - po "włączeniu" B, ładunki pod wpływem siły lorentza zostają przeciągnięte na jdeną stronę przewodnika
  - ponieważ jednoimienne ładunki sią na jednej stronie przewodnika powstaje napięcie zwane napięciem Hala.
- Stała Halotronu zależy od materiału wykonania urządzenia. Określa intensywoność zjawiska  $R_H = \frac{I*d}{U*B}$ .
- Kalibracja: Przy znanym B dokonujemy pomiarów napięcia halla.
- Zastosowania:
  - pomiar prędkości kątowej
  - bezkontaktowy pomiar prądu
  - kompas (w smartfonach)
- Halotron wykorzystuje siłę Lorentza
- Pomiar: B ~ c\*U

# 16.3 Dozymetria (96)

- Radioaktywne izotopy używane w labie to m.in. Cez (Cs) bądź Kobalt (Co)
- Izotopy promieniotwórcze to materiały niestabilne ulegające rozpadowi po określonym czasie (określany probabilistycznie).
- Aktywność:
  - Miara liczby rozpadów w czasie  $\frac{dN}{dt}$
  - Zależy od:
    - \* Liczby jąder
    - \* Okresu połowicznego rozpadu  $T_{\frac{1}{2}}$
    - \* rodzaju promieniotwórczości (alfa, beta, gamma)
  - Zmienia się w czasie jak  $e^{-\lambda t}$  gdzie  $\lambda = \frac{ln(2)}{T_{\frac{1}{2}}}$
- Zależnośc mocy dawki od odległości wynika z zasady kwadratu odległości  $P \sim \frac{1}{r^2}$
- Rodzaje promieniowania:
  - $-\alpha$  (duża energia, niska penetracja),
  - $\beta$  (średnia energia, średnia penetracja),
  - $-\gamma$  (niska energia, duża penetracja)
- prawo osłabienia  $I(x) = I_0 * e^{-\mu x}$  gdzie  $\mu$  to współczynnik osłabienia zależy od energii promieniowania i od materiału.
- Czas połowicznego rozpadu wiąże się ze stałą rozpadu jak  $T_{\frac{1}{2}}=\frac{\ln(2)}{\lambda}$

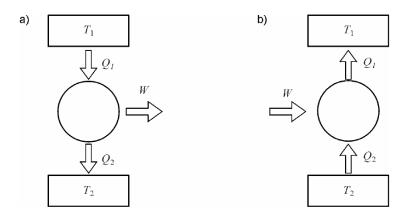
# 16.4 Kriogenika (113)

• Ciekły azot z uwagi na swą "ciekłość" utrzymuje stałą temperaturę  $-209^{o}C$  (tak jak lód dopuki jest lodem ma najwyżej  $0^{o}C$ )



- Diagramy fazowe:
  - Punkt potrójny: współistnienie trzech faz
  - Punkt krytyczny: punkt, w którym zanika różnica między fazami ciecz i gaz
- · Przejścia fazowe:
  - I Rodzaju: zachodzi skokowa zmiana pewnych właściwości (np. gęstości). Pochodne są nieciągłe. Wymagają dostarczenai ciepła przemiany.
  - II Rodzaju charakteryzują się ciągłością wszystkich pochodnych f'cji termodynamicznym. Zwykle występują jako punkty krytyczne.
- R. Clausiusa-Clapeyrona  $\frac{dp}{dT} = \frac{\Delta H}{T\Delta V}$  gdzie:
  - $\Delta H$  to entalpia (aka ciepło) przemiany
  - $-\Delta V$  to zmiana objętości
  - p to ciśnienie
  - ${\it T}$  to temperatura
  - \$\frac{dp}{dT} to współczynnik nachylenia krzywej fazowej

## 16.5 Peltier (133)



**Rys. 4.** Schemat przepływu ciepła i pracy w maszynie Carnota pracującej jako:

- Bilans cieplny Peltiera:
  - Dla chłodziarki:  $Q_{chodzone} + W = Q_{chodnicy}$  ciepło jest zabierane z obszaru chłodzonego i przekazywane do chłodnicy
- Efekt Thomsona: generacja ciepła w przewodniku z prądem w wyniku przpeływu prądu  $Q_{thomsona} = \tau * I \Delta T * t$  gdzie  $\tau$  to współczynnik Thomsona\* w sumie to ten wzór jest z chata GPT i nie mogę nigdzie znaleźć więcej danych więc bym mu nie ufał
- Ciepło Joula-Lentza opozycja do ciepła Thomsona. Powstaje w wyniku istnienia oporu. Jest wydzielane przez płynący prąd.
- Sprawność to stosunek uzyskanej pracy do włożonego ciepłą (dla silnika)

#### Ważne

Sprawność stosujemy dla silnika cieplnego

Wydajność stosuje się dla chłodziarki, gdzie jest to stodunek uzyskanego odpływu ciepła do włożonej pracy. MOŻE BYĆ WIĘKSZA OD 1

- Kierunek działania elementu peltiera można odwrócić. Wtedy różnica temperatur wymusza przepływ prądu.
- zastosowania generatora cieplnego: zasilanie np. stacji badawczych. Opłacalność zależy mało efektywne i drogie.

# 16.6 Baterie słoneczne (134)

- Rodzaje ogniw fotowoltaicznych:
  - Amorficzne (niska wydajność) (elastyczne, lekkie, tanie, działają przy niskim oświetleniu, ale mniej trwałe)
  - Polikrystaliczne (niska wydajność, powszechnie używane z uwagi na niskie koszty produkcji)
  - Monokrystaliczne (najwyższa wydajność, najdroższe)
- Granica Shockleya-Queissera teoretyczna granica wydajności ogniw fotowoltaicznych (33.7% dla widma światła słonecznego)

### 1 Informacja

Granica SQ dotyczy tylko ogniw jednozłączowych. Ogniwa wielozłączowe (np. tandemowe - cokolwiek to znaczy) mogą osiągać wydajność większą niż 33.7%

- Zmiana natężenia wraz z odległością tak jak w dozymetrii  $\frac{1}{r^2}$  (chociaż nam to w sprawku wyszło bardziej coś jak  $A*0.99^x$ )
- luxomierz mierzy natężenia światła na jednostkę powierzchni. Detektorem jest zazwyczaj fotodioda.

# 16.7 Wyznaczenie $\frac{e}{m}$ dla elektronu (45)

- Siła Lorentza siła działająca na łądunki w polu magnetycznym  $F = q * v * B * sin(\alpha)$
- Jednorodne Pole M prostopadłe linie pola magnetycznego o takiej samej indukcji. Przykłady:
  - pole magnetyczne wewnątrz solenoidu
  - pole między sztabkami magnesu
  - pole magnetyczne ziemii można przybliżyć jako jednorodne
- Cewki Hermholtza ukłąd 2 identycznych cewek aby wytworzyć jednorodne pole magnetyczne. Prąd płynie w tym samym kierunku.
  - Wektor B jest wzdłuż osi cewek
  - v musi być prostopadłe do osi cewek
  - F jest zgodnie z siłą lorentza

# 16.8 Efekt Fotoelektryczny (82)

• Zjawisko polegające na emisji elektronów z powierzchni materiału pod wpływem padającego na niego światła.

#### 

$$h * \nu = E_k + m_e c^2$$

Również  $W + E_{max} = h * \nu$ 

gdzie W to praca wyjścia a E\_{max} to maksymalna energia kinetyczna elektronów

ref

• Energia Fermiego to energia maksymalna dla temperatury metalu 0K

# 16.9 Lasery (86/87)

- Emisja spontaniczna następuje w skutek przejścia atomu z wyższego stanu pobudzenia na niższy w wyniku czego emitowany jest foton.
- Emisja wymuszona:

- Atom na wyższym poziomie pobudzenia jest zmuszony do przejścia na niższy poziom przez foton. Emitowany w ten sposób foton ma taką samą fazę jak foton wymuszający.
- inwersja obsadzeń: więcej atomów jest w stanie wzbudzonym. Kluczowe do działania lasera zapewnia większą emisję wymuszoną niż absorpcję. Inwersje osiąga się dzięki pompowaniu.
- Pompowanie optyczne polega na dostarczaniu atomom światła o odpowiednio dużej energii aby mogły przejść na wyższy poziom energetyczny
- Akcja laserowa:
  - 1. pompowanie energii
  - 2. inwersja obsadzeń pompowanie przewyższa liczbę atomów wzbudzonych
  - 3. emisja wypmuszona atomy emitują fotony o takiej samej fazie
  - 4. wzmocnienie fotony poruszają się w aktywnym ośrodku powodując więcej emisji wymuszonych
  - 5. rezonans fale odbijają się pomiędzy 2 zwierciadłami. jedno z nich odbija 100% fotonów, drógie przepuszcza niektóre z nich.
- · cechy światła laserowego:
  - kocherętne (zgodne w fazie)
  - monochromatyczne (jedna długość fali), skupione (mała średnica wiązki), spójne (mała rozbieżność wiązki)

# **16.10 Spektrometr (83)**

- widmo emisyjne widmo światła emitowane przez atomy przechodzące ze stanu wzbudzonego do podstawowego (lub niższego)
- · każdey pierwiastek ma swoje unikatowe widmo
- widmo absorbcyjne wartości energii promieniowania które są absorbowane aby wzbudzić atom.

#### Wskazówka

Just BTW.

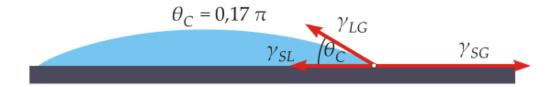
$$E = h * \nu$$
 
$$c = \lambda * \nu E = \frac{h * c}{\lambda}$$

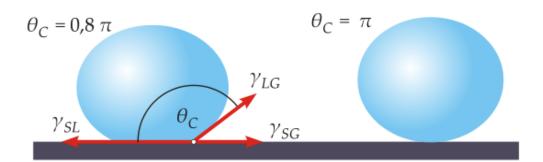
- widmo emisyjne pierwiastka zależy od:
  - poziomy energetyczne atomu zależą od liczb kwantowych, któ©e pośrednio zależą od liczby protonów w jądrze.
  - Liczby kwantowe:
    - \* n główna liczba kwantowa (powłoka)
    - \* 1 poboczna liczba kwantowa (moment pędu, kształt orbity) (od 0 do n-1)
    - \* m magnetyczna liczba kwantowa (orientacja orbitalu względem zewnętrznego pola magnetycznego) (od -l do l)
    - \* s spinowy moment elektronu (1/2 lub -1/2)
- zdolność rozdzielcza: zdolność spektrometru do rozróżniania dwuch położonych plisko siebie linii spektralnych.

- definiowana jako  $\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$
- od czego zależy?
  - \* rodzaje:
    - · siatka dyfrakcyjna
    - · pryzmat
  - \* szerokość szczeliny wejściowej
  - \* długośc drogi optycznej
  - \* warunki zewnętrzne (temperatura e.t.c.)
- kryterium Rayleigha określa kiedy 2 położone blisko siebie obiekty są rozróżnialne.  $\Theta=1.22*\frac{\lambda}{D}$ . Oznacza to że dwa obiekty są rozróżnialne tylko wtedy, gdy różnica między nimi jest przynajmniej  $\Theta$

## 16.11 Kąt Zwilżenia (15)

- ciecze hydrofobowe nie chcą się mieszać z wodą (np. olej)
- ciecze hydrofilowe mieszają się z wodą (np. alkochole)
- kąt zwilżenia kąt utworzony przez powierzchnię stałą ze styczną do powierzchni cieczy w punkcie styku 3 faz:
  - statyczny mieżony na nieruchomej cieczy na statycznej powierzchni
  - dynamiczny kształt kropli zmienia się w czasie (postępujący i cofający różnica to kąt histerezy)





- Powieżchniowa energia swobodna energia zgromadzona w atomach na powierzchni.  $\frac{J}{m^2}$ . Im wyższa energia swobodna tym wyższa "hydrofilność" (np. szkło)
- Napięcie powierzchniowe zjawisko wynpikające z dążenia powierzchni cieczy do najmniejszej powierzchni.
   Definiowana jako energia potrzebna na zwiększenie powierzchni o jednostkę powierzcni.

- Praca adhezji energia potrzebna do rozdzielenia 2 faz (np. cieczy i ciała stałego).  $W_a = \gamma_c + \gamma_s \gamma_{cs}$ . Im większa praca tym większa "przyczepialność"
  - da się wyrazić z równania Yanga-Dupré:  $W_a = \gamma_c + \gamma_s \gamma_{cs} = \gamma_c (1 + cos(\theta))$

| Nazwa  | równanie                                             | Opis                                                                   |
|--------|------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|
| Yanga  | $\gamma_{sg} = \gamma_{sl} + \gamma_{lg}cos(\theta)$ | opisuje równowagę sił na granicy 3 faz                                 |
| Dupre  | $W_a = \gamma_c + \gamma_s - \gamma_{cs}$            | opisuje pracę adhezji - siłę potrzebną do rozdzielenia 2 faz           |
| yanga- | $W_a = \gamma_{lg}(1 + \cos(\theta))$                | połączenie obu powyższych równań - łączy kąt zwilżenia z pracą adhezji |
| Dupre  | _                                                    |                                                                        |

Równania używane przy projektowaniu powłok i klejów (kleje mają dużą pracę adhezji żeby się ich nie dało rozkleić). Oznacza to że muszą mieć mały kąt zwilżenia (1 przykłąd na rysunku) - cos musi być duuuży.

### **1** Efekt Lotosu

Chat ciągle coś pisze o efekcie lotosu, więc z ciekawości spytałem o co cho:

Liście lotosu są super hydrofobowe - czyli tak bardzo nie lubią wody, że woda się po nich toczy zbierająć przy okazji zanieczyszczenia. Dzięki temu liście lotosu pozostają czyste nawet w błotnistych okolicach. Innymi przykłądami to na przykład nartniki które dzięki superhydrofobości chodzą po powierzchni wody. Efekt wykorzystuje się na przykłąd w odzierzy przeciwdeszczowej albo w lakierach i farbach (niebrudzące się elewacje budynków).

## 16.12 Próżnia (22)

- Gaz doskonały model teoretyczny gazu w idealnych warunkach (cząsteczki nie oddziaływują ze sobą obrucz sprężystych zderzeń, cząsteczki punktowe, poruszają się chaoteycznie).
- Opisywany przez rócenanie clapeyrona pV = nRT:
  - p ciśnienie
  - V objętość
  - n liczba moli gazu
  - R uniwersalna stałą gazowa
  - T temperatura
- działa w niskim ciśnieniu i wysokiej temperaturze
- Prawo Boyle'a-Mariotte'a to po prostu r. Clapeyrona dla stałej temperatury i liczby moli.
- · Jednostki ciśnienia
  - Pa pascal jednostka SI
  - atm atmosfera ciśnienie wywierane przez słup rtęci o wysokości 760mm (1 atm = 101325 Pa)
  - bar 1 bar = 100 kPa
  - mmHg milimetry słupa rtęci 1 mmHg = 133.322 Pa
- Manometry mierzą ciśnienie rodzaje:
  - ze względu na typ pomiaru:
    - \* ciśnienie absolutne (od próżni absolutnej)

- \* względne od ciśnienia atmosferycznego
- ze względu na konstrukcję:
  - \* cieczowe (np. U-rurkowe)
  - \* sprężynowe wykorzystują odkształcenia sprężyste pod wpływme ciśnienia.
- pompa rotacyjna po prostu coś się kręci i przepycha gaz (poszukaj sobie schematu). Rodzaje pomp:
  - zębate
  - łopatkowe
- Pompy mogą osiągnąć niską lub średnią próżnię. Niektóre pompy olejowe łopatkowe mogą osiągnąc próżnię wysoką
- Klasyfikacje próżni:

| Nazwa            | Ciśnienie            | Opis                                                              |
|------------------|----------------------|-------------------------------------------------------------------|
| ultraekstremalna | poniżej $10^{-12}$   | badanie nad teorią kwantową, eksperymenty w CERNie                |
| ekstremalna      | $10^{-9} - 10^{-12}$ | Eksperymenty w fizyce cząsteczek                                  |
| ultra wysoka     | $10^{-7} - 10^{-9}$  | badania materiałów i nanotechnologia, urządzenie półprzewodnikowe |
| wysoka           | $10^{-3} - 10^{-7}$  | w laboratoriach, ,mikroskopia                                     |
| średnia          | $10^{-1} - 10^{-3}$  | pakowanie próżniowe, chemia                                       |
| niska            | $10^1 - 10^{-1} Pa$  | w przemyśle                                                       |

Notatki z pliku notes/matematyka3/matematyka\_0000.00.00.md

16.12. Próżnia (22)

# ROZDZIAŁ 17

## Matematyka 3

Notatki z pliku notes/matematyka3/matematyka\_2024.10.11.md

- egzamin pisemny (część teoretyczna i obliczeniowa)
- kolokwium poprawkowe razem z egzaminem
- zbió© zadań Stańkiewicza (Witold Stańkiewicz) Zadania z Matematyki dla wyższych uczelni technicznych (cz. 1 B) link
- Stańkiewicz + Wojtowicz (część 2)

## 17.1 szeregi liczbowe (pojęcie zbierzności sz.l.)

dla ciąnu  $a_n$  definiujemy ciąn  $s_n$  gdzie  $s_1=a_1$  i  $s_{n+1}=s_n+a_n$ 

Mówimy, że szereg  $a_n$  jest zbierzny jeżeli ciąg  $s_n$  ma granicę właściwą S, wtedy  $\sum a_n = S$ .

#### 1 twierdzenie

z: Szereg  $a_n$  jest zbierzny

T: ciąg wyrazów z tego szeregu zmierza do 0

D: 
$$\$a_n = s_n - s_{n-1}$$
  
 $n \to \infty$   
 $a_n = S - S = 0\$$ 

przykładowo szereg  $\frac{1}{n}$ nie jest zbierzny, bo $\lim s_n - s_{2n} \to \frac{-1}{2}$ 

Szereg liczbowy jest bezwzględnie zbierzny jeżeli zbierzny jest szereg szereg wartości bezwszględnych

### 17.1.1 szereg anharmoniczny

szereg  $\frac{(-1)^n}{n}$  jest zbierzny (later), ale nie jest zbierzny bezwzględnie (szereg harmoniczny nie jest zbierzny).

### 17.1.2 Kryteria zbierzności szeregu

• kryterium porównawcze  $|a_n| < |b_n|$  i  $b_n$  jest bezwzględnie zbierzny  $\Rightarrow$  to znaczy że  $a_n$  również

### 17.1.3 Kryterium Cossiego

 $\gamma = \lim \sqrt{n} |a_n| jeeli$  amma < 1toszerega\_njestbezwzgldniezbierzny.jeeli gamma > 1\$ nie jest bezwzględnie zbierzny (jest można nawet powiedzieć rozbierzny).

### 17.1.4 Kryterium d'Alamberta

 $\gamma = \lim \frac{a_{n-1}}{a_n}$ dalej tak samo jak wyżej

Notatki z pliku notes/matematyka3/matematyka\_2024.10.18.md

Kryterium Całkowe:

- jeżeli wyrazy w szeregu zsą dodatnie
- dana jest f-cja, malejąća  $f(n) = a_n$
- ciąn jest zbierzny  $\Leftrightarrow \int_1^\infty f(n)dn$  jest zbierzna

Notatki z pliku notes/matematyka3/matematyka\_2024.10.25.md

## 17.2 Szereg funkcyjny potęgowy

$$a_n = a_0(x - x_0)^n$$

$$r = \frac{1}{\lambda}\lambda = \sqrt{n}a_n$$

$$r = \frac{1}{\lambda}\lambda = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

## 17.2.1 Różniczkowanie i całkowanie szeregu potęgowego

szereg potęgowy można różniczkować wyraz po wyrazie.

## 17.2.2 Rozwijanie fcji w szereg potęgowy

$$Q(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$$

Jest funkcją pierwotn, takż, że  $Q(x_0) = 0$ 

Notatki z pliku notes/matematyka3/matematyka\_2024.11.15.md

## 17.3 Szereg trygonometryczny Furiera

$$f(x) = \frac{1}{2}x$$

$$a_0 = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{pi} f(x)$$

Warunki divikleta

- funkcja jest przedziałąmi ciągła w przedziale
- funkcja ma skończone granice jednostronne

Notatki z pliku notes/matematyka3/matematyka\_2024.12.15.md

## 17.4 Szeregi Fouriera

Po pierwsze, przepraszam za długi brak update'ów strony - w tym semestrze wiekszość rzeczy zamiast z wykładów ogarniam z youtube albo gotowych prezentacji ze stron prowadzących, więc robienie notatek na bierząco przestało mieć sens. Zapraszam do zerknięcia na ref'y na poszczegulnych podstronach.

Rozważamy funkcję f(x) na przedziale [-p,p]. Wtedy szereg Fouriera tej funkcji to:

#### Warunki Dirichleta

- funkcja jest przedziałami monotonicnza (czyli na przykład nie funkcja weierstrassa)
- funkcja ma skończoną liczbę punktów nieciągłości, z tym, że  $f(x)=\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$
- funkcja na granicach przedziału spełnia warunek  $f(-p)=f(p)=rac{f(p)+f(b)}{2}$

Definiujemy następujące ciągi:

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx$$
$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx$$

#### 

w skrajnym przypadku  $a_0$  przyjmuje postać:

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) dx$$

Szereg Fouriera funkcji f(X) przyjmuje następującą postać:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \right)$$

Notatki z pliku notes/matematyka3/matematyka\_2025.01.10.md

## 17.5 Równanie Różniczkowe cząstkowe 2 rzędu

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = D(x,y)$$

Niech  $\Delta = B^2 - AC$ .

dla  $\Delta > 0$  równanie paraboliczne. Ma jedną rodzinę charakterystyk  $F_1(x,y) = C_1$ 

Notatki z pliku notes/matematyka3/matematyka\_2025.02.04.md

## 17.6 Przygotowanie do egzaminu

#### 17.6.1 Zadania od Profesora

#### 1 Informacja

Numery zadaąń tutaj odnoszą się do książki "W. Stankiewicz - Zadania z Matematyki dla uczelni wyższych Część 2"

| Częś | Temat                            | Zadanie                                                                                                                                                                                                                    |
|------|----------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1B   | Szeregi<br>Liczbowe              | § 40 7ac; 10ad; 11abehmr; 12a; 13acfg § 41. Zadania: 16acefhij (proszę dodatkowo zbadać zbieżność tych szeregów na końcach przedziałów zbieżności), 17beg, 18cfg, 21bc, 23b, 30a § 42. Zadania: 36ah, 37ac, 39ab, 40b, 41d |
| 1B   | Szeregi<br>Fouriera              | § 42. Zadania: 36ah, 37ac, 39ab, 40b, 41d.                                                                                                                                                                                 |
| 2    | R. Róż-<br>niczkowe<br>zwyczajne | 86b, 87a, 88ab, 104a, 105b. 182ab, 180i, 181e, 183.                                                                                                                                                                        |
| 2    | R. Róż-<br>niczkowe<br>cząstkowe | 540c, 541d, 542abd, 547, 550, 551b, 554, 555.                                                                                                                                                                              |

- 40.7.a z kryt całkowego, potem rozpisać sumę
- 40.7.c najpierw z kryt porównawczego uprościć, potem z d'Alemberta. Sumę z 2 szeregów geometrycznych
- 40.11.b z kryt. Cauchy'ego wychodzi  $\frac{1}{2}$
- 40.11.h można rozbić na iloczyn. z jednej części wychodzi 4 a z  $2 \lim_{n \to \infty} \left(1 \frac{1}{n+1}\right)^{2n} = e^{-2}$  (po przekształceniach i użyciu def)
- 40.11.e z kryt. d'Alemberta wychodzi 8 więc rozbierzny

Notatki z pliku notes/statystyczna/statystyczna\_0000.00.00.md

## Matematyka Statystyczna

Notatki z pliku notes/statystyczna/statystyczna\_2024.10.07.md

https://home.agh.edu.pl/mariuszp

## 18.1 Wstęp / pojęcia podstawowe

populacja - zbiór wszystkich przedstawicieli przedstawiających daną cechę

próbka losowa - reprezentatywna próbka całej populacji

**prób prosta** - ma miejsce gdy prawdopodobieństwo jednego wyboru nie ma wpływu na kolejne/inne wybory (białe/czarne kule, losowanie z/bez zwracania)

zachowanie ukłądu któ©ego nie jesteśmy w stanie przewidzieć nazywamy przypadkowym a miarą przypadkowośći jest prawdopodobieństwo.

zdarzenie losowe - dowolny podzbiór przestrzeni zdarzeń elementarnych

zdarzenie elementarne musi być ekskluzywne (nie zawiera innych zdarzeń elementarnych)

**Prawdopodobieństwo**: Każdemu zdarzeniu losowemu z PZA przypisujemy liczbę określająćą prawdoopodbieństwo tego zdarzenia (0, 1). zdarzenie pewne = 1 prawdopodobieństwo Sumay ekskluzywnych zdarzeń jest równe sumie prawdopodobieństw.

#### 1 prawdopodobieństwo subiektywne

gdy nie wiemy czy dane są prawdziwe (np. czy istnieje życie pod powierzchnią oceanu jednego z księżyców saturna).

albo, czy wolisz dostać 100 czy wziąć udział w loterii o 1000

### 18.1.1 Prawa De Morgana

$$A \bar{\cup} B = \bar{A} \cap \bar{B}$$
$$A \bar{\cap} B = \bar{A} \cup \bar{B}$$

### 18.2 Prawo rozdzielności dodawania i mnożenia

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Wnioski:

$$A \cup B = A \cup (B - A \cap B)$$

#### Wskazówka

Prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego jes trówne  $P(\bar{A})=1-P(A)$ 

### 18.3 Wiele sdarzeń

$$P(U_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n P(A_i \cap A_j) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \sum_{k=j+1}^n P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots$$

### 1 przykłąd

A\_i = i-ta ścianka nie wypadła ani raz  $P(A_i) = \frac{5}{t}^n A_j$  = dowolne 2 ścianki nie wypadły ani raz  $P(A_j) = \frac{2}{3}^n$  itd. formuła wł/wył

\$\$

## 18.4 rozszerzenie pojęć kombinatorycznych

dwa typy losowań:

- bez powtórzeń raz wylosowany element nie wraca do populcji
- z powtórzeniami element wraca do populacji

Jeżeli kolejność jest istotna to warjacja, jeśli nie to kiombinacja

- Warjacja z powtórzeniami  $W(n,k) = n^k$  (np. rozkłąd n rozróżnialnych cząstek w k komórkach)
- warjacja bez powtórzeń  $V(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}$  (k rozróżnialnych kól w n komórkach gdy w komórce może być tylko jedna kula) (winda)
- Permutacja P(n) = n! (Boltzman: k kul w k komórkach)
- Kombinacja bez powtórzeń  $C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- kombinacje z powtó©zniami C(n+k-1,k)

Notatki z pliku notes/statystyczna/statystyczna\_2024.10.07\_post.md

#### Wskazówka Wskazówk

Przez P(E) profesor oznacza zdarzenie elementarne

### Kwestia/przykład o kulach

Jest N komórek. Do każdej z nich można włożyć kulę/kilka kul (zależy od typu losowania). Kule mogą być rozróżnialne (na przykład ponumerowane) lub nierozróżnialne Istnieje też przypadek, w którym równiez komórki są nierozróżnialne.

Notatki z pliku notes/statystyczna/statystyczna\_2024.10.11.md

## 18.5 Prawdopodobieństwo warunkowe

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

## 18.6 Statystyczna niezależność zdarzeń

Jeżeli  $p9a \cap B$ ) = P(A) \* P(B) zdarzenia nazywamy niezależnymi. [więcej na prezentacji]

Notatki z pliku notes/statystyczna/statystyczna\_2024.10.16.md

### 18.7 Zmienna losowa

Ref:

- · wykład
- · zmienna losowa
- · dyskretne/ciągłe

Zmienna losowa jest jak zwykła zmienna tylko że jest losowa.

Są 2 typy zm. Losowych:

- dyskretna są konkretne wartości jakie może przyjmować
- · ciągła przyjmuje wszystkie wartośći z przedziału

Notatki z pliku notes/statystyczna/statystyczna\_2024.10.31.md

## 18.8 Dobra, po kolei:

ref;

- https://www.youtube.com/watch?v=OvTEhNL96v0
- https://home.agh.edu.pl/~mariuszp/wfiis\_stat/wyklad\_stat\_4.pdf

#### 18.8.1 Wartość Oczekiwana

Wartość oczekiwana to teoretyczna (bo liczymy prawdopodobieństwo) wartość średniej pomiarów/danych.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i * p(x_i)$$

### ♀ Wskazówka

Dlaczeog średnia?

Rozważmy taką tabelkę:

$$\begin{array}{c|ccccc} x_i & 1 & 2 & 3 \\ \hline p(x_i) & 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ \end{array}$$

To przecież oznacza, że gdybyśmy zrobili 10 pomiarów, to 2 z nich to byłoby 1, 5 - 2 i 3 3. Prawdopodobieństwo  $p(x_i)oznaczaprocentowyudziax_i$ \$ w docelowych pomiarach.

$$\bar{x} = \frac{1+1+5*2+3*3}{10} = (1*0.2) + (2*0.5) + (3*0.3) = \sum_{i=1}^{3} x_i * p(x_i)$$

hehe, mam nadzieję że to jasne.

## 1 Informacja

Oznaczenia: na wartość oczekiwaną X mamy następujące oznaczenia

- E(x) (z youtube) również  $\mu$
- profesor oznacza jako  $\epsilon[x] = \langle x \rangle$

### 1 Informacja

Wartość Oczekiwana Funkcji Zmiennej losowej  $E(g(x)) = \sum_i g(x_i) * p(x_i)$ 

Notatki z pliku notes/statystyczna/statystyczna\_2025.01.15.md

### 18.9 Metoda momentów

K-ty teoretycznyy moment zdefiniowany jest jako:

$$\mu_k = E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx$$

(Czyli wartość oczekiwana  $X^k$ ).

Można rócnież zdefiniować ten moment dla określonej "średniej"  $\mu_k = E((X - \mu)^k)$ .

Moment k-tego rzędu próby (odnosi się bezpośrednio do danych, a nie do teoretycznej funkcji gęstości):

$$M_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k$$

Można zauważyć, że dla k=1 powyższe wyrażenie uprości się do  $M_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i=\bar{x}$  (średnia próby).

Notatki z pliku notes/statystyczna/statystyczna\_2025.01.30.md

## 18.10 Notatki do egzaminu (break it down)

### **18.10.1 Momenty**

ogólnie moment ntego rzędu to wartość oczekiwana x podniesionego do n:

$$m_n = \langle x^n \rangle$$

Moment pierwszego rzędu jest popularnie zwany średnią.

Moment centralny, to... Moment zwykły tylko że wokół środka (czyli od każdego x odejmujemy średnie x aka jego wartośc oczekiwaną - serio tu nie ma różnicy chyba).

Moment centralny oznacza się przez  $\mu$  i definuje jako:

$$\mu_n = \langle (x - \langle x \rangle)^n \rangle$$

#### Ważne

moment centralny 1 rzędu byłby równy zero:

$$\mu_{hipotetycznie1} = \langle (x - \langle x \rangle)^1 \rangle = \langle x \rangle - \langle \langle x \rangle \rangle = \langle x \rangle - \langle x \rangle = 0$$

Można to udowodnić (szczególnie cześć z  $\langle\langle x\rangle\rangle=\langle x\rangle$  z faktu, że  $\langle x\rangle$  jest liczbą więc można wyciągnąć przed całkę i mieć całkę z f która jest oczywiście 1 (zachęcam do policzenia. ja to mam w zeszycie i mi się nie chce przepisywać).

Dlatego też moment centralny 1 rzędu to... moment zwykły 1 rzędu czyli po prostu średnia.

### Ważne

Spoiler alert! tak na prawdę to "śrdnia"  $\neq \langle x \rangle$ , bo średnia to estymator wartości oczekiwanej, a wartość oczekiwana to wartość oczekiwana.

To jest tak, że średnią aka estymator liczysz z **DANYCH**, natomiast wartość oczekiwaną z **ROZKŁADU**. Więc hipootetycznie to te same rzeczy ale no jednak nie.

Moment mieszany  $\mu_{m,n}$  to moment centralny dla 2 rzeczy

$$\mu_{m,n} = \langle (x - \langle x \rangle)^m (y - \langle y \rangle)^n \rangle$$

### 18.10.2 ważne momenty

- wariancja:  $\sigma^2 = \mu_2 = \langle x^2 \rangle \langle x \rangle^2$
- kowariancja to moment mieszany 1 rzędu  $\mu_{1,1}=\langle xy\rangle-\langle x\rangle\langle y\rangle$  Jeżeli zmienne są statystycznie niezależne  $\Rightarrow$  kowariancja równa 0

### 18.10.3 Współczynnik korelacji (Pearsona)

$$p = \frac{cov[x, y]}{\sqrt{v[x]v[y]}}$$

Notatki z pliku notes/statystyczna/statystyczna\_2025.02.01.md

### 18.10.4 Rozkłady

- 1. Poissona  $P_k(\mu) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$ , gdzie  $\mu > 0$ . Wartość oczekiwana:  $E(X) = \mu$  (jedyne dziwne przejście to z Teylora mamy  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu^i}{i!} = e^{\mu}$ ).
- 2. Geometryczny  $G(p)=p*(1-p)^{k-1}$ , gdzie  $k\in\mathbb{N}$ . Wartość oczekiwana:  $E(X)=\frac{1}{p}$  (w obliczeniu robimy pochodna z  $\sum_{k=0}^{\infty}q^{k}=\frac{1}{1-q}$  suma ciągu geometrycznego)

### 18.10.5 Populacja a Próba

Prawdę mówiąc te pojęcia są często używane praktycznie wszędzie w wykładach ale... jest to trochę mylące.

## Populacja

zbiór WSZYSTKICH obiektów, które nas interesują.

Na przykład - badając wzrost ludzi na świecie populację stanowią... wszyscy ludzie na świecie. Inny przykład - badamy czy cegły danego producenta są wadliwe. Populacje stanowią wszystkie cegły tego kolesia ever.

#### 1 Próba

jak widać z powyższej definicji badanie całej populacji jest średnio wykonalne/praktyczne.

Próba to Element populacji co do którego mamy dane.

W przykładach powyżej:

- 1000 losowo wybranych osób
- n losowych cegieł.

| Nazwa     | Populacja  | Próba         |
|-----------|------------|---------------|
| średnia   | $\mu$      | $\frac{x}{x}$ |
| wariancja | $\sigma^2$ | $s^2$         |

#### **1** Centralne Twierdzenie Graniczne

mamy n niezależnych zmiennych losowych  $X_1, X_2, ..., X_n$  pochodzących z tego samego rozkładu.

Niech: 
$$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$$
 oraz  $\bar{X} = \frac{S_n}{n}$ 

wtedy dzieje się fajna rzecz, otóż:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{S_n - n\mu}{\sigma \sqrt{n}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = N(0, 1)$$

Polecam poniższy kod:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def central_limit_theorem_demo(sample_size=1000, num_samples=10000): # ode mnie: można_
→ustawić sample size na 1 i za dużo to nie zmieni - dalej działa
 means = []
 for _ in range(num_samples):
 sample = np.random.uniform(0, 1, sample_size) # Losujemy próbkę z rozkładu_
→ jednostajnego
 means.append(np.mean(sample)) # Obliczamy średnią próbki
 # Rysowanie histogramu średnich
 plt.hist(means, bins=50, density=True, alpha=0.6, color='b')
 # Teoretyczna krzywa normalna
 mu = 0.5 # Średnia rozkładu jednostajnego U(0,1)
 sigma = np.sqrt(1/12) / np.sqrt(sample_size) # Wariancja U(0,1) wynosi 1/12
 x = np.linspace(min(means), max(means), 100)
 plt.plot(x, (1 / (sigma * np.sqrt(2 * np.pi))) * np.exp(- (x - mu) ** 2 / (2 * sigma_
\rightarrow** 2)), 'r', linewidth=2)
 plt.title(f'CTG: Średnie {num_samples} próbek (rozmiar próbki={sample_size})')
 plt.xlabel('Średnia próbek')
 plt.ylabel('Gestość prawdopodobieństwa')
 plt.show()
Uruchamiamy demonstrację
central_limit_theorem_demo(sample_size=30, num_samples=10000)
```

Notatki z pliku notes/statystyczna/wyklady\_tracker.md

### 1 Tracker wykłądóœ

• 07.10.2024 (dodatkowy)

### 

#### Materialy:

- wykłady: https://home.agh.edu.pl/~esowa/ft\_2023\_24\_malf.html
- https://www.3blue1brown.com/
- kalkulator granic: https://mathdf.com/lim/pl/
- kalkulator pochodnych: https://mathdf.com/der/pl/
- kalkulator całek: https://mathdf.com/int/pl/

#### Ważne

Kolejność treści na tej stronie jest generowana automatycznie przez automatyczny skrypt. Jeśli coś jest ułożone w złej kolejności, bardzo proszę o zgłoszenie tego faktu na moim GitHubie (link poniżej)

#### 1 Informacja

Niniejszy dokument jest również dostępny w formacie PDF'a!

# **Pobierz PDF!**

Zapraszam do przeglądania kodu źródłowego strony w moim repozytorium GitHub