<table>
<tr><td>Wydział: Fizyki i Informatyki Stosowanej</td><td colspan="2">Autor/Autorzy: Maciej Szeptuch</td><td>Rok: 2024</td><td>Grupa: –</td><td>Zespół: –</td></tr>
<tr><td colspan="2">Wstęp do Fizyki Kwantowej</td><td colspan="2">Bariera Potencjału - Efekt Tunelowania</td><td colspan="2">Ćwiczenie nr: 8.3.a</td></tr>
<tr><td>Data wykonania: 2024-12-06</td><td>Data oddania: 2024-12-06</td><td>Zwrot do popr.:</td><td>Data oddania:</td><td>Data zaliczenia:</td><td>Ocena:</td></tr>
</table>

1 Cel ćwiczenia

Proszę rozwiązać problem (tzn. znaleźć funkcje falowe) cząstki o energii E > 0 padającej na barierę potencjału o wysokości V_0 i szerokości d:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \text{ i } x > d \\ V_0 & \text{dla } 0 \leq x \leq d \end{cases}$$

Dodatkowo proszę znaleźć współczynniki transmisji T i odbicia R cząstki padającej na barierę. Własnoręcznie zapisane rozwiązania należy oddać na zajęciach, będą one ocenione jako aktywność (0-3 pkt.).

2 Rozważenia wstępne

Przekształcam niezależne od czasu równanie Schrödingera:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V\psi &= E\psi \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} &= (E - V)\psi \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} &= -\frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\psi \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} &= \frac{2m}{\hbar^2}(V - E)\psi \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{2m}{\hbar^2}(V - E)\psi &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

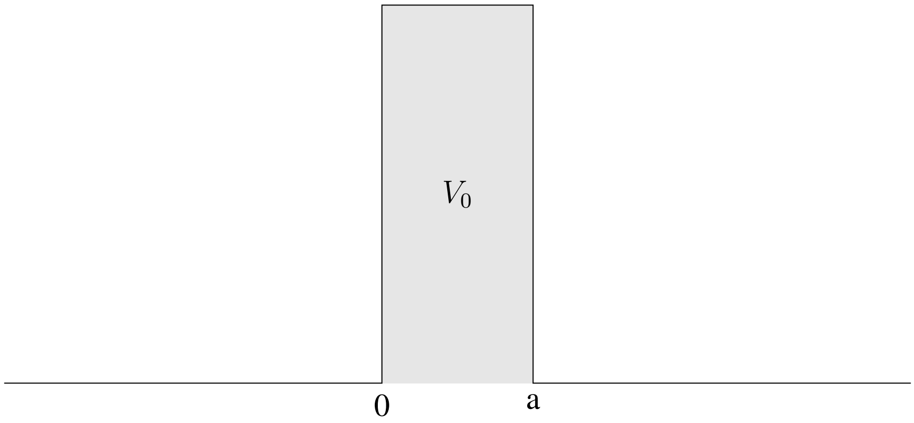
Ważne

Definiuję stałe k_1 i k_2 w następujący sposób:

$$\begin{aligned} k_1^2 &= \frac{2m}{\hbar^2}E \\ k_2^2 &= \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E) \end{aligned} \tag{2.2}$$

2.1 Ogólne rozwiązanie równania Schrödingera

Rozważam następujący rysunek.



Rys. 2.1: Bariera potencjału

Należy zapisać Równanie (2.1) dla trzech przypadków:

2.1.1 $x < 0$

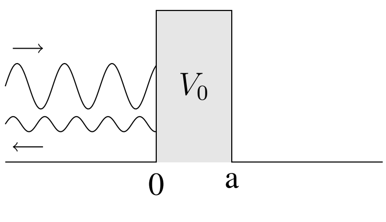
$V = 0$, więc (biorąc pod uwagę (2.2)) jest:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k_1^2 \psi = 0$$

Rozwiązaniem tak zdefiniowanego równania jest funcja w postaci:

$$\psi_1(x) = Ae^{ik_1 x} + Be^{-ik_1 x} \tag{2.3}$$

Warto zauważyć, że wyraz $Ae^{ik_1 x}$ odpowiada jest za ruch cząstki w prawo (ku barierze potencjału), natomiast $Be^{-ik_1 x}$ opisuje falę odbitą.



Rys. 2.2: Fala padająca i odbita

2.1.2 $x \in [0, a]$

Dla tego przypadku równanie (2.1) przyjmuje postać:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - k_2^2 \psi = 0$$

Takie równanie ma rozwiązanie w postaci:

$$\psi_2(x) = Ce^{k_2 x} + De^{-k_2 x} \tag{2.4}$$

2.1.3 $x > a$

Dla tego przypadku otrzymuję rozwiązanie analogiczne do (2.3). Zapisuję je w postaci:

$$\psi_3(x) = Fe^{ik_1x} + Ge^{-ik_1x}$$

Zauważam, że w tym przypadku nie może istnieć fala odbita, dlatego $G = 0$.

$$\psi_3(x) = Fe^{ik_1x} \tag{2.5}$$

2.2 Warunki brzegowe

Z założeń mechaniki kwantowej wiem, że funkcja falowa musi być ciągła. Ponadto pierwsza pochodna funkcji falowej względem zmiennej x również musi być ciągła. Z tych założeń mogę zapisać następujące równania:

$$\begin{cases} \psi_1(0) = \psi_2(0) \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x}(0) = \frac{\partial \psi_2}{\partial x}(0) \\ \psi_2(a) = \psi_3(a) \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x}(a) = \frac{\partial \psi_3}{\partial x}(a) \end{cases}$$
$$\begin{cases} A + B = C + D \\ ik_1(A - B) = k_2(C - D) \\ Ce^{k_2a} + De^{-k_2a} = Fe^{ik_1a} \\ k_2\left(Ce^{k_2a} - De^{-k_2a}\right) = Fik_1e^{ik_1a} \end{cases} \tag{2.6}$$
$$\begin{cases} A + B = C + D \\ A - B = -i\frac{k_2}{k_1}(C - D) \\ Ce^{k_2a} + De^{-k_2a} = Fe^{ik_1a} \\ Ce^{k_2a} - De^{-k_2a} = i\frac{k_1}{k_2}Fe^{ik_1a} \end{cases}$$

3 Współczynnik Transmisji

Definicja

Współczynnik transmisji T to kwadrat stosunku amplitudy fali po przejściu przez barierę do jej amplitudy przed nią

$$T = \left|\frac{F}{A}\right|^2 \tag{3.1}$$

Z układu (2.6) dodaję równanie 3 i 4:

$$\begin{aligned} Ce^{k_2a} + De^{-k_2a} + Ce^{k_2a} - De^{-k_2a} &= Fe^{ik_1a} + i\frac{k_1}{k_2}Fe^{ik_1a} \\ 2Ce^{k_2a} &= Fe^{ik_1a}\left(1 + i\frac{k_1}{k_2}\right) \\ C &= \frac{F}{2}e^{ik_1a}e^{-k_2a}\left(1 + i\frac{k_1}{k_2}\right) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Następnie odejmiję równanie 4 od równania 3:

$$
\begin{aligned}
Ce^{k_2a} + De^{-k_2a} - Ce^{k_2a} + De^{-k_2a} &= Fe^{ik_1a} - i\frac{k_1}{k_2}Fe^{ik_1a} \\
2De^{-k_2a} &= Fe^{ik_1a}\left(1 - i\frac{k_1}{k_2}\right) \\
D &= \frac{F}{2}e^{ik_1a}e^{k_2a}\left(1 - i\frac{k_1}{k_2}\right)
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Następnie podstawiam (3.2) i (3.3) do równania 1 z układu (2.6):

$$
\begin{aligned}
A + B &= \frac{F}{2}e^{ik_1a}e^{k_2a}\left(1 - i\frac{k_1}{k_2}\right) + \frac{F}{2}e^{ik_1a}e^{-k_2a}\left(1 + i\frac{k_1}{k_2}\right) \\
A + B &= \frac{F}{2}e^{ik_1a}\left(e^{k_2a}\left(1 - i\frac{k_1}{k_2}\right) + e^{-k_2a}\left(1 + i\frac{k_1}{k_2}\right)\right) \\
A + B &= \frac{F}{2}e^{ik_1a}\left(e^{k_2a} + e^{-k_2a} - i\frac{k_1}{k_2}\left(e^{k_2a} - e^{-k_2a}\right)\right) \\
A + B &= \frac{F}{2}e^{ik_1a}\left(2cosh\left(k_2a\right) - 2i\frac{k_1}{k_2}sinh\left(k_2a\right)\right) \\
A + B &= Fe^{ik_1a}\left(cosh\left(k_2a\right) - i\frac{k_1}{k_2}sinh\left(k_2a\right)\right) \\
1 + \frac{B}{A} &= \frac{F}{A}e^{ik_1a}\left(cosh\left(k_2a\right) - i\frac{k_1}{k_2}sinh\left(k_2a\right)\right)
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Analogiczne działania wykonuję dla równania 2 z układu (2.6):

$$
\begin{aligned}
A - B &= -i\frac{k_2}{k_1}\left(\frac{F}{2}e^{ik_1a}e^{-k_2a}\left(1 + i\frac{k_1}{k_2}\right) - \frac{F}{2}e^{ik_1a}e^{k_2a}\left(1 - i\frac{k_1}{k_2}\right)\right) \\
A - B &= -i\frac{k_2}{k_1}\frac{F}{2}e^{ik_1a}\left(e^{-k_2a}\left(1 + i\frac{k_1}{k_2}\right) - e^{k_2a}\left(1 - i\frac{k_1}{k_2}\right)\right) \\
A - B &= -i\frac{k_2}{k_1}\frac{F}{2}e^{ik_1a}\left(e^{-k_2a} - e^{k_2a} + i\frac{k_1}{k_2}\left(e^{k_2a} + e^{k_2a}\right)\right) \\
A - B &= -i\frac{k_2}{k_1}\frac{F}{2}e^{ik_1a}\left(-2sinh\left(k_2a\right) + 2i\frac{k_1}{k_2}cosh\left(k_2a\right)\right) \\
A - B &= i\frac{k_2}{k_1}Fe^{ik_1a}\left(sinh\left(k_2a\right) - i\frac{k_1}{k_2}cosh\left(k_2a\right)\right) \\
A - B &= Fe^{ik_1a}\left(i\frac{k_2}{k_1}sinh\left(k_2a\right) + cosh\left(k_2a\right)\right) \\
1 - \frac{B}{A} &= \frac{F}{A}e^{ik_1a}\left(i\frac{k_2}{k_1}sinh\left(k_2a\right) + cosh\left(k_2a\right)\right)
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Sumuję równania (3.4) i (3.5):

$$\begin{aligned} 1+\frac{B}{A}+1-\frac{B}{A} &= \frac{F}{A}e^{ik_1a}\left(cosh\left(k_2a\right)-i\frac{k_1}{k_2}sinh\left(k_2a\right)\right)+\frac{F}{A}e^{ik_1a}\left(i\frac{k_2}{k_1}sinh\left(k_2a\right)+cosh\left(k_2a\right)\right) \\ 2 &= \frac{F}{A}e^{ik_1a}\left(cosh\left(k_2a\right)-i\frac{k_1}{k_2}sinh\left(k_2a\right)+i\frac{k_2}{k_1}sinh\left(k_2a\right)+cosh\left(k_2a\right)\right) \\ 2 &= \frac{F}{A}e^{ik_1a}\left(2cosh\left(k_2a\right)+i\left(\frac{k_2}{k_1}-\frac{k_1}{k_2}\right)sinh\left(k_2a\right)\right) \\ 2 &= \frac{F}{A}e^{ik_1a}\left(2cosh\left(k_2a\right)+i\frac{k_2^2-k_1^2}{k_1k_2}sinh\left(k_2a\right)\right) \\ \frac{F}{A} &= 2e^{-ik_1a}\left(2cosh\left(k_2a\right)+i\frac{k_2^2-k_1^2}{k_1k_2}sinh\left(k_2a\right)\right)^{-1} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Podstawiam powyższy wynik do definicji T (3.1):

$$T=\left|\frac{F}{A}\right|^2$$

$$T=\left(\frac{F}{A}\right)\left(\frac{F}{A}\right)^*$$

$$T=2e^{-ik_1a}\left(2cosh\left(k_2a\right)+i\frac{k_2^2-k_1^2}{k_1k_2}sinh\left(k_2a\right)\right)^{-1}2e^{ik_1a}\left(2cosh\left(k_2a\right)-i\frac{k_2^2-k_1^2}{k_1k_2}sinh\left(k_2a\right)\right)^{-1}$$

$$T=4\cancel{e^{-ik_1a}}\left(2cosh\left(k_2a\right)+i\frac{k_2^2-k_1^2}{k_1k_2}sinh\left(k_2a\right)\right)^{-1}\cancel{e^{ik_1a}}\left(2cosh\left(k_2a\right)-i\frac{k_2^2-k_1^2}{k_1k_2}sinh\left(k_2a\right)\right)^{-1}$$

$$T=4\left(4cosh^2\left(k_2a\right)+\left(\frac{k_2^2-k_1^2}{k_1k_2}\right)^2sinh^2\left(k_2a\right)\right)^{-1}$$

Wskazówka

W poniższym przekształceniu wykorzystuję tzw. jedynkę hiperboliczną

$$cosh^2(x)-sinh^2(x)=1$$

$$T = 4\left(4 + 4sinh^2\left(k_2 a\right) + \left(\frac{k_2^2 - k_1^2}{k_1 k_2}\right)^2 sinh^2\left(k_2 a\right)\right)^{-1}$$
$$T = 4\left(4 + sinh^2\left(k_2 a\right)\left(4 + \left(\frac{k_2^2 - k_1^2}{k_1 k_2}\right)^2\right)\right)^{-1}$$
$$T = 4\left(4 + sinh^2\left(k_2 a\right)\left(\frac{4k_1^2 k_2^2 + k_2^4 - 2k_1^2 k_2^2 + k_1^4}{k_1^4 k_2^4}\right)\right)^{-1}$$
$$T = 4\left(4 + sinh^2\left(k_2 a\right)\left(\frac{k_2^2 + k_1^2}{k_1 k_2}\right)^2\right)^{-1}$$
$$T = \left(1 + sinh^2\left(k_2 a\right)\left(\frac{k_2^2 + k_1^2}{2k_1 k_2}\right)^2\right)^{-1}$$

Informacja

Za wyrażenie z k_1 i k_2 można podstawić wartości z definicji (2.2).

$$\begin{aligned} \left(\frac{k_2^2 + k_1^2}{2k_1 k_2}\right)^2 &= \\ = \frac{(k_1^2 + k_2^2)^2}{4k_1^2 k_2^2} &= \\ = \frac{\left(\frac{2m}{\hbar^2}E + \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)\right)^2}{4\frac{2m}{\hbar^2}E\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)} &= \\ = \frac{\left(\frac{2m}{\hbar^2}V_0\right)^2}{16\frac{m^2}{\hbar^4}E(V_0 - E)} &= \\ = \frac{V_0^2}{16E(V_0 - E)} \end{aligned} \tag{3.7}$$

W ostatecznej formię wzór na T można zapisać w następującej postaci:

$$\begin{aligned} T &= \left(1 + sinh^2\left(k_2 a\right)\frac{V_0^2}{16E(V_0 - E)}\right)^{-1} \\ T &= \left(1 + sinh^2\left(\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)}a\right)\frac{V_0^2}{16E(V_0 - E)}\right)^{-1} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Analogiczną postać wzoru przedstawia równanie 6-45 książki Eisberg'a i Restnick'a literatura.

4 Współczynnik Odbicia

Definicja

Analogicznie do *współczynnika Transmisji*, Współczynnik odbicia R definiuję jako:

$$R = \left|\frac{B}{A}\right| \tag{4.1}$$

Do równania (3.4) podstawiam (3.6):

$$1 + \frac{B}{A} = \cancel{e^{ik_1a}}\left(cosh\left(k_2a\right) - i\frac{k_1}{k_2}sinh\left(k_2a\right)\right) 2\cancel{e^{-ik_1a}}\left(2cosh\left(k_2a\right) + i\frac{k_2^2 - k_1^2}{k_1k_2}sinh\left(k_2a\right)\right)^{-1}$$

$$\frac{B}{A} = 2\frac{cosh\left(k_2a\right) - i\frac{k_1}{k_2}sinh\left(k_2a\right)}{2cosh\left(k_2a\right) + i\frac{k_2^2-k_1^2}{k_1k_2}sinh\left(k_2a\right)} - 1$$

$$\frac{B}{A} = \frac{cosh\left(k_2a\right) - i\frac{k_1}{k_2}sinh\left(k_2a\right)}{cosh\left(k_2a\right) + i\frac{k_2^2-k_1^2}{2k_1k_2}sinh\left(k_2a\right)} - 1$$

Przekształcenie

Sprowadzam powyższe ułamki do wspólnego mianownika i obliczam końcową postać licznika:

$$\begin{aligned} cosh\left(k_2a\right) - i\frac{k_1}{k_2}sinh\left(k_2a\right) - cosh\left(k_2a\right) - i\frac{k_2^2 - k_1^2}{2k_1k_2}sinh\left(k_2a\right) &= \\ = -i\frac{k_1}{k_2}sinh\left(k_2a\right) - i\frac{k_2^2 - k_1^2}{2k_1k_2}sinh\left(k_2a\right) &= \\ = -i\left(\frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2^2 - k_1^2}{2k_1k_2}\right)sinh\left(k_2a\right) &= \\ = -i\frac{2k_1^2 + k_2^2 - k_1^2}{2k_1k_2}sinh\left(k_2a\right) &= \\ = -i\frac{k_2^2 + k_1^2}{2k_1k_2}sinh\left(k_2a\right) &= \end{aligned}$$

$$\frac{B}{A} = \frac{-i\frac{k_2^2+k_1^2}{2k_1k_2}sinh\left(k_2a\right)}{cosh\left(k_2a\right) + i\frac{k_2^2-k_1^2}{2k_1k_2}sinh\left(k_2a\right)}$$

Następnie podstawiam do (4.1):

$$R = \frac{-i\frac{k_2^2+k_1^2}{2k_1k_2}sinh\left(k_2a\right)}{cosh\left(k_2a\right)+i\frac{k_2^2-k_1^2}{2k_1k_2}sinh\left(k_2a\right)}\frac{i\frac{k_2^2+k_1^2}{2k_1k_2}sinh\left(k_2a\right)}{cosh\left(k_2a\right)-i\frac{k_2^2-k_1^2}{2k_1k_2}sinh\left(k_2a\right)}$$

$$R = \frac{\frac{\left(k_2^2+k_1^2\right)^2}{4k_1^2k_2^2}sinh^2\left(k_2a\right)}{cosh^2\left(k_2a\right)+\frac{\left(k_2^2-k_1^2\right)^2}{4k_1^2k_2^2}sinh^2\left(k_2a\right)}$$

$$R = \frac{\frac{\left(k_2^2+k_1^2\right)^2}{4k_1^2k_2^2}sinh^2\left(k_2a\right)}{1+\left(1+\frac{\left(k_2^2-k_1^2\right)^2}{4k_1^2k_2^2}\right)sinh^2\left(k_2a\right)}$$

$$R = \frac{\frac{\left(k_2^2+k_1^2\right)^2}{4k_1^2k_2^2}sinh^2\left(k_2a\right)}{1+\frac{\left(k_1^2+k_2^2\right)^2}{4k_1^2k_2^2}sinh^2\left(k_2a\right)}$$

$$R = \frac{\left(k_2^2+k_1^2\right)^2}{4k_1^2k_2^2}sinh^2\left(k_2a\right)T$$

Po podstawieniu (3.7) otrzymuję:

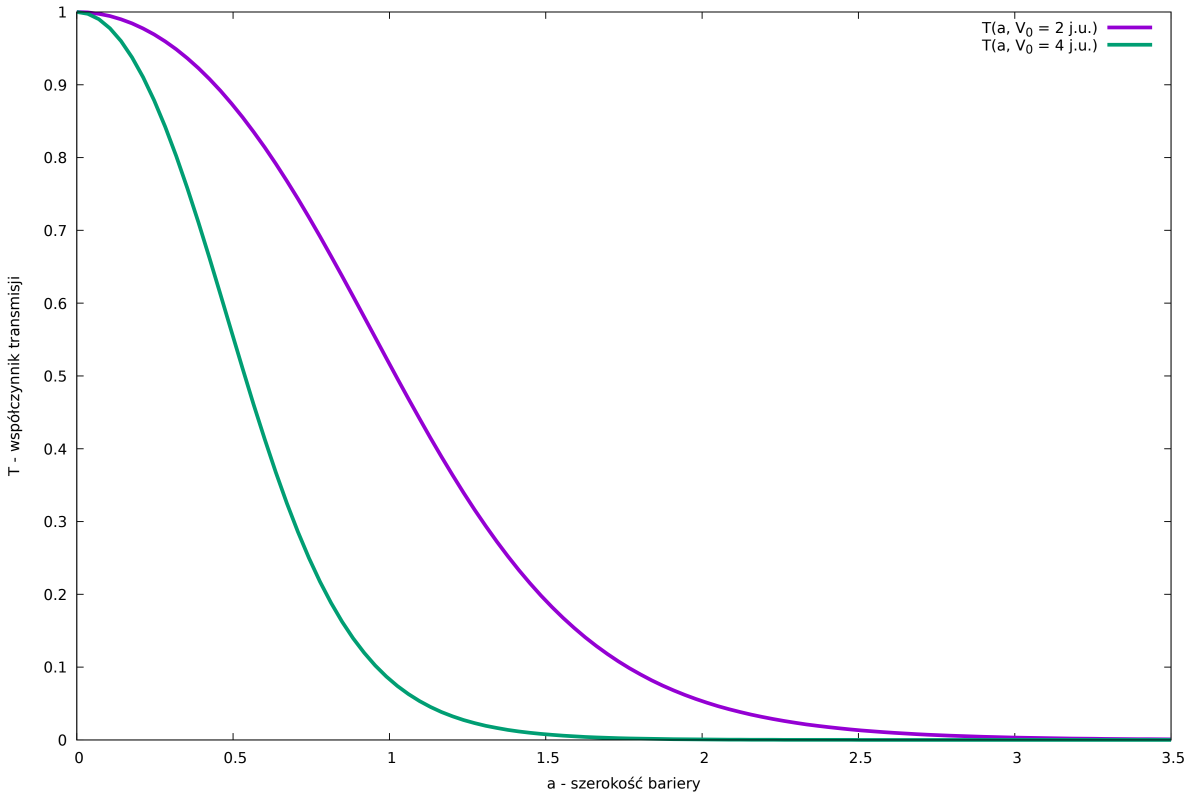
$$R = \frac{V_0^2}{16E(V_0-E)}sinh^2\left(k_2a\right)T$$

$$R = \frac{V_0^2}{16E(V_0-E)}Tsinh^2\left(\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0-E)}a\right)$$

5 Podsumowanie

Jak widać z (3.8) współczynnik Transmisji jest niezerowy, co oznacza, że cząstka o niewystarczającej energii może mimo to przeniknąć przez barierę potencjału.

Poniższy wykres przedstawia zależności $T(a)$ dla 2 przykładowch potancjałów.



Rys. 5.1: Zależność współczynnika transmisji od szerokości bariery.

Uwaga

Wielkości na powyższym wykresie są przedstawione w tzw. Jednostkach Umownych ($m = \hbar = E = 1$) - nie mają one związku z rzeczywistymi wartościami współczynników - powyższy wykres przedstawia jedynie kształt zależności.

6 Literatura

- wyprowadzenie: For the Love of Physics - Quantum Tunneling - https://youtu.be/78Sp1KboLtI?list=PLRN3HroZGu2mCtdalEmZAM2nr1xBWAtUn dostęp 05.12.2024 16:26
- sprawdzenie: Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles, R. Resnick, R. Eisberg

Źródło dokumentu: https://github.com/gucio321/potential-barrier-solution