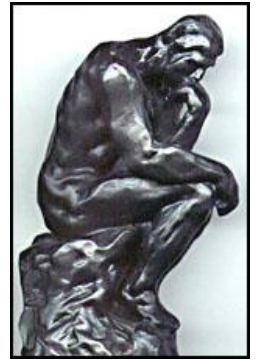




# 核子、轻子和玻色子 (Nucleons, leptons and bosons)



- § 1.  $\mu$ 子和 $\pi$ 介子
- § 2. 奇异介子和超子
- § 3. 带电 $\pi$ 介子的量子数
- § 4. 带电轻子和中微子
- § 5. 狄拉克方程
- § 6. 正电子
- § 7. 反质子

粒子物理研究的对象是微观高速运动客体，（假设）遵循两个最基本的原理：量子力学和狭义相对论

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle$$
$$|\psi\rangle = |\psi_{\{m, \sigma, Q, \dots\}}\rangle$$

- 粒子的各种状态（种类，数目，运动状态等）均对应量子系统的状态；如上， $m$  (mass),  $\sigma$  (spin) 描述粒子的时空特征， $Q$  (charge) 描述内部特征
- 运动方程是Lorentz协变的
- 本小结首先介绍（复习）量子力学的基本原理

## 【非相对论量子力学基本原理】

1. 波函数和其几率解释

2. 每个物理可观测量以一个厄米算符表示，如

$$\vec{p} \rightarrow -i\nabla$$

3. 一个物理系统处于算符  $\Omega$  的本征态，如果

$$\Omega |\Phi_n\rangle = \omega_n |\Phi_n\rangle$$

4. 展开公设：物理系统的任一波函数可按对易算符全集 ( $\Omega_n$ ) 的完全正交归一本征函数集展开

$$|\psi\rangle = \sum_n a_n |\psi_n\rangle, \quad \langle \psi_n | \psi_m \rangle = \delta_{nm}$$

5. 对物理可观察量的一次测量结果是其本征值的任意一个。  
对于全同制备的系统，多次测量的平均值

$$\langle \Omega \rangle = \langle \psi | \Omega | \psi \rangle$$

6. 物理系统随时间的演化由Schrödinger方程表述

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi$$

在相对论量子力学中，1—5可以保留。但非相对论的波动方程，例如对自由粒子

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m} \nabla^2 \psi$$

不满足相对论协变性的要求。

## 【非相对论Schrödinger方程】

- 非相对论 Schrödinger方程可以由以下步骤得到：

$$\left. \begin{aligned} E &= \vec{p}^2 / 2m \\ E &\rightarrow i \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \rightarrow -i\nabla \end{aligned} \right\} i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m} \nabla^2 \psi$$

- 从非相对论Schrödinger方程可以导出两个重要结论：

— 能量是正定的，对任意  $\psi$ ，  $\langle \psi | E | \psi \rangle \geq 0$

— 连续方程：  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$   $\begin{cases} \rho = \psi^* \psi \\ \vec{j} = -\frac{i}{2m} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \end{cases}$

## 【 Klein-Gordon方程】

参考 *M. Thomson, Chapter 4*

- 仿照导出非相对论 Schrödinger 方程的步骤, 相对论情形:

$$\left. \begin{aligned} E^2 &= \vec{p}^2 + m^2 \\ E &\rightarrow i \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \rightarrow -i \nabla \end{aligned} \right\} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \psi = 0$$

这个方程称为Klein-Gordon方程。利用,

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right), \quad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$$

$$\square \equiv \partial^\mu \partial_\mu$$

Klein-Gordon 方程还可以写成:

$$(\square + m^2) \psi = 0$$

- 平面波解

$$\psi(x) = Ne^{-ip \cdot x}$$

其中 $N$ 为归一化因子，满足Klein-Gordon 方程，如果

$$E = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$

与非相对论情形不同，这里出现了负能解！

- 如果规定 
$$E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$

Klein-Gordon 方程的平面波解可以写成正能和负能两部分

$$\psi_+(x) = e^{-ip \cdot x}$$

$$\psi_-(x) = e^{ip \cdot x}$$

- 负能解不能被简单地忽略：

- 正能解本身不能构成一个完全集

$$\psi(x) = \int \frac{d^3 p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E}} (a(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} + a^*(\vec{p}) e^{ip \cdot x})$$

- 在有相互作用的情形，不能避免正能级到负能级的跃迁

- 仿照非相对论情形，也可以从Klein-Gordon方程得到

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left[ i \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \right]}_{\rho} + \nabla \cdot \underbrace{\left[ -i (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \right]}_{\vec{j}} = 0$$



对平面波解  $\psi(x) = Ne^{-ip \cdot x}$ ，可以得到：

$$\rho = 2E |N|^2, \quad \vec{j} = 2\vec{p} |N|^2$$

或者写成协变形式  $j^\mu = 2p^\mu |N|^2$

- $\rho$  不是正定的（ $E < 0$  时， $\rho < 0$ ），在这里无法解释为几率密度。因此，将Klein-Gordon方程理解为单粒子波动方程的尝试是不成功的。

在量子场论中，Klein-Gordon方程不再被理解为单粒子的波动方程，而是经典场的运动方程！

## 【 Dirac方程】

参考 *M. Thomson, Chapter 4*

- **Klein-Gordon** 方程是对时间的二阶微分方程，这是造成负几率密度的直接原因。历史上，**Dirac**试图寻找一个一阶偏微分方程来代替**Klein-Gordon** 方程。

— 简单的替代：

$$E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$
$$\rightarrow i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left( \sqrt{-\nabla^2 + m^2} \right) \psi$$

将导致一个非定域理论，在数学上非常难处理。



P.A.M. Dirac

一 将质能关系式  $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$  理解为n×n矩阵形式:

$$(E \bullet I)^2 = (\vec{\alpha} \bullet \vec{p} + \beta \bullet m)^2$$

其中  $I$  为单位矩阵, 并且

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij}, \quad \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0$$

$$\alpha_i^2 = \beta^2 = 1$$

则由  $E \bullet I = \vec{\alpha} \bullet \vec{p} + \beta \bullet m$  可以得到一个矩阵方程

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = (-i \vec{\alpha} \bullet \nabla + \beta m) \psi$$

此时波函数具有n个分量  $\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$

— 满足要求的最小维数  $n=4$ ，一个可能的表示是

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$$

其中：

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

这时，**Dirac**方程

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = (-i \vec{\alpha} \bullet \nabla + \beta m) \psi$$

描述一个具有4分量波函数的粒子。

- 引入波函数的厄米共扼  $\psi^+ = [\psi_1^* \cdots \psi_4^*]$  , 从Dirac方程得到

$$\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{[\psi^+ \psi]}_{\rho} + \nabla \cdot \underbrace{[\psi^+ \vec{\alpha} \psi]}_{\vec{j}} = 0$$

这时几率密度显然是正定的！

- 旋量粒子的自旋

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = (-i \vec{\alpha} \cdot \nabla + \beta m) \psi$$

可以看出，系统的哈密顿量

$$H = -i \alpha \cdot \nabla + \beta m$$

轨道角动量不是自由旋量粒子系统的守恒量

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad [H, \vec{L}] = -i (\vec{\alpha} \times \vec{p})$$

定义总角动量算符

$$\vec{J} = \vec{L} + \frac{1}{2} \vec{\Sigma}, \quad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad \vec{\Sigma} = \begin{bmatrix} \vec{\sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \vec{\sigma} \end{bmatrix}$$

则有：  $[H, \vec{J}] = 0$  这表明Dirac粒子具有“内禀”的角动量1/2.

Dirac方程正确预言了电子的磁距

$$\mu_e = g \mu_B S$$

这里玻尔磁子

$$\mu_B = \frac{q_e h}{2m_e} = 5.788 \times 10^{-11} \text{MeV T}^{-1}$$

朗德g因子

$$g = 2$$

- Dirac方程的协变形式

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$$

$$\gamma^0 = \beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \gamma^i = \beta \alpha_i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{bmatrix}$$

$\gamma$ -矩阵满足关系

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$

定义符号

$$\not{Q} \equiv \gamma^\mu Q_\mu = \gamma_\mu Q^\mu$$

Dirac方程可以写成

$$(i\not{Q} - m)\psi = 0$$

协变性证明参考 *M. Thomson*, 附录B.2



- 双线性协变量

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma_0$$

$$\gamma_5 \equiv \gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

$$\bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \bar{\psi}(x)\psi(x)$$

$$\bar{\psi}'(x')\gamma_5\psi'(x') = \det(\Lambda)\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)$$

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') = \Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x)$$

$$\bar{\psi}'(x')\gamma_5\gamma^\mu\psi'(x') = \det(\Lambda)\Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma^\nu\psi(x)$$

$$\bar{\psi}'(x')\sigma^{\mu\nu}\psi'(x') = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\bar{\psi}(x)\sigma^{\rho\sigma}\psi(x)$$

参考 *M. Thomson*, 附录B.3

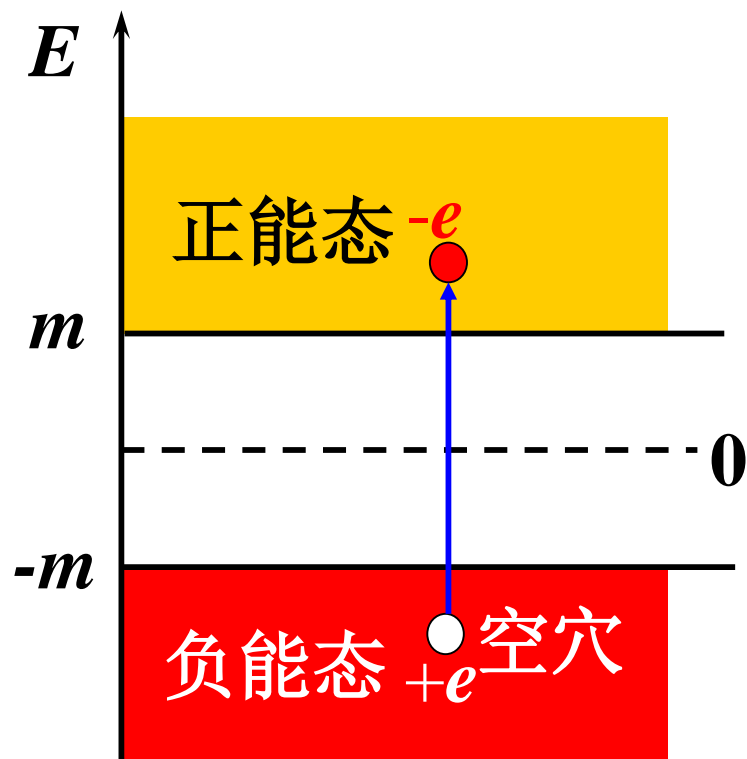
## • Dirac方程的解

- 考虑一个质量为 $m$ 的Dirac粒子，解方程得到静止时的波函数

$$\psi^1 = e^{-imt} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \psi^2 = e^{-imt} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \psi^3 = e^{+imt} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \psi^4 = e^{+imt} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

这表明Dirac方程依然不能避免负能解！

## • Dirac 空穴理论



— 负能级已被电子填满，构成感受不到的背景；

— 真空相当于负能级填满，而正能级无电子的状态；

— 把负能态的电子激发到正能态，负能态上就少了负能量和负电荷，于是就出现了正能量和正电荷。

预言了正电子的存在！



# 核子、轻子和玻色子 (Nucleons, leptons and bosons)



- § 1.  $\mu$ 子和 $\pi$ 介子
- § 2. 奇异介子和超子
- § 3. 带电 $\pi$ 介子的量子数
- § 4. 带电轻子和中微子
- § 5. 狄拉克方程
- § 6. 正电子
- § 7. 反质子

## § 6. 正电子 (The positron)

### • 硬 $\gamma$ 射线和物质的相互作用 (1930)

赵忠尧研究了硬 $\gamma$ 射线在各种物质中的吸收  
在轻元素（如铝）中，硬 $\gamma$ 射线吸收与Klein-Nishina公式（描述光子电子Compton散射）  
预言符合很好

但在重元素（如铅）中，硬 $\gamma$ 射线吸收比  
Klein-Nishina公式预言高出40%

在重元素（如铅）中，硬 $\gamma$ 射线被吸收同时有各向均匀  
分布的能量0.5MeV的辐射发出！



赵忠尧  
1902-1998

C. Y. Chao, Phys. Rev. 36, 1519 (1930)

# THE PHYSICAL REVIEW

## SCATTERING OF HARD $\gamma$ -RAYS

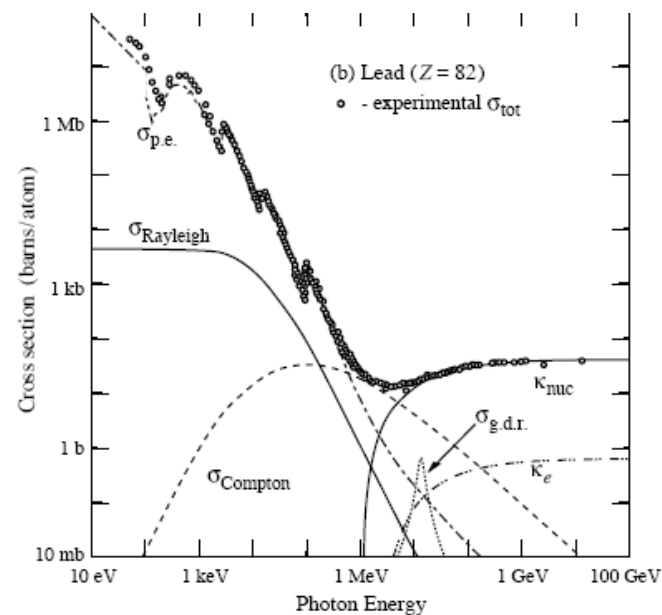
BY C. Y. CHAO\*

NORMAN BRIDGE LABORATORY OF PHYSICS, CALIFORNIA  
INSTITUTE OF TECHNOLOGY

(Received October 13, 1930)

### ABSTRACT

Measurements have been made on the scattering of  $\gamma$ -rays from Th C<sup>''</sup> by Al and Pb. For Al the scattering is, within experimental error, that predicted by the Klein Nishina formula. For Pb additional scattered rays were observed. The wavelength and space distribution of these are inconsistent with an extranuclear scatterer, and hence they must have their origin in the nuclei.



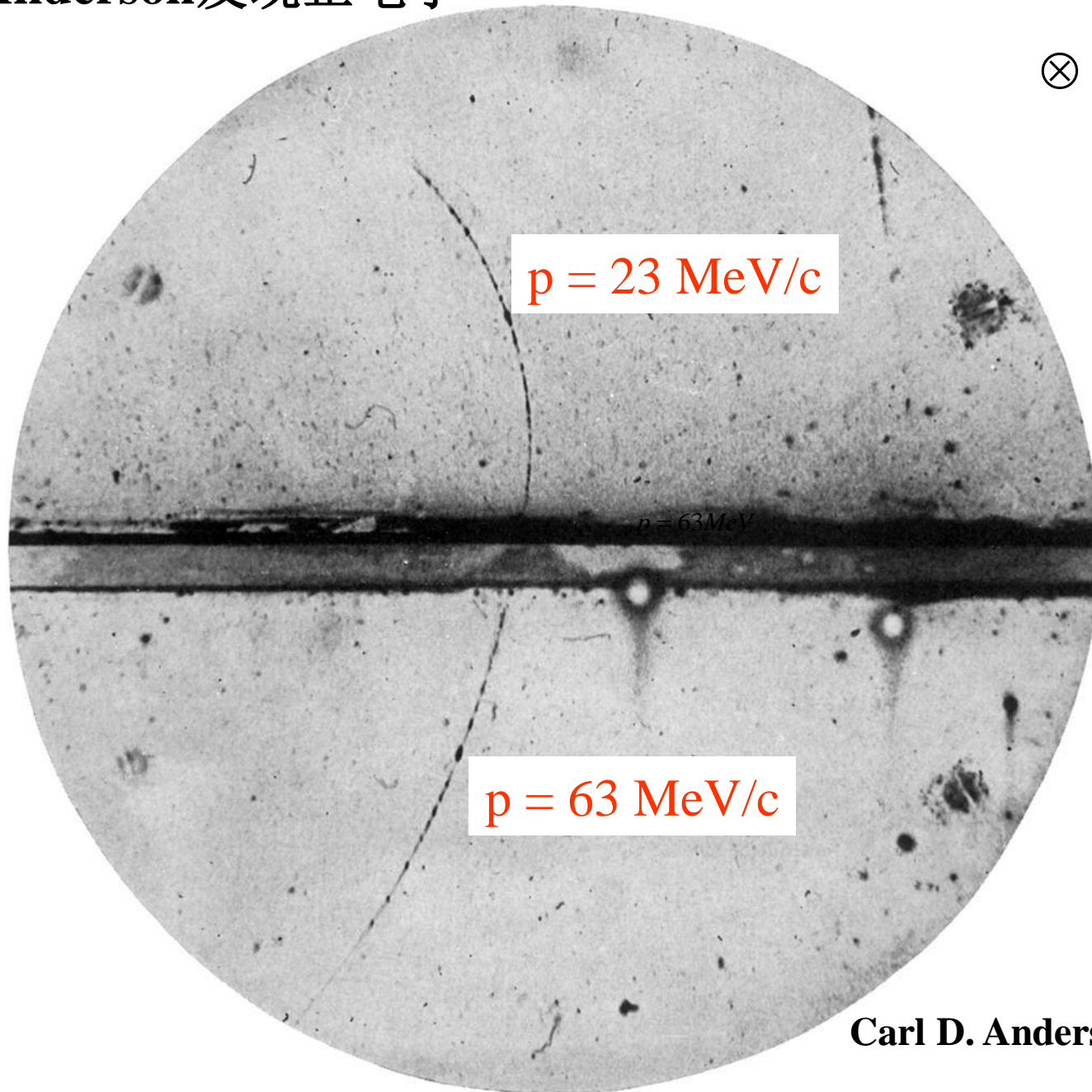
硬 $\gamma$ 射线被额外吸收源于电子对产生:  $\gamma + N \rightarrow N + e^+ + e^-$

$$\sigma \propto Z^2$$

0.5 MeV各向同性的辐射: 正负电子对湮灭!  $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$

- Anderson发现正电子

⊗  $B = 15000$  Gauss



↓  
6 mm 铅板  
↑

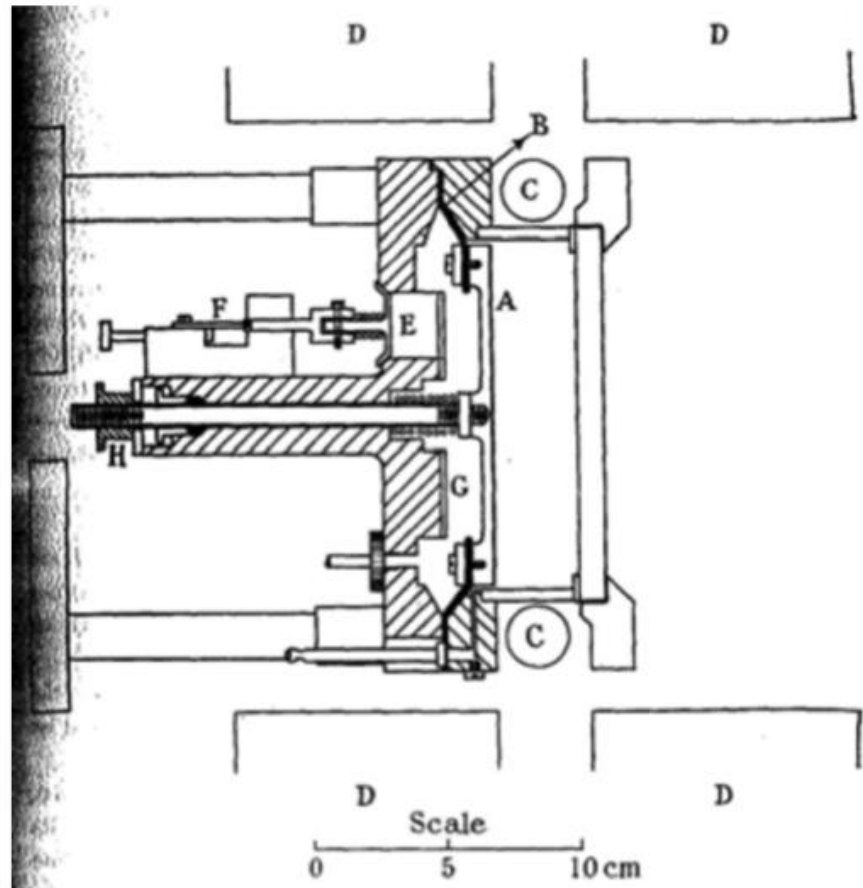
Carl D. Anderson PR 43(1933) 491

## •Blackett-Occhialini实验

发明了盖格技术器控制的云室，提高了探测效率！

在宇宙线中发现了大量正电子径迹，确认了Anderson的实验结果

在云室中观测到了电子对产生过程







# 核子、轻子和玻色子 (Nucleons, leptons and bosons)



- § 1.  $\mu$ 子和 $\pi$ 介子
- § 2. 奇异介子和超子
- § 3. 带电 $\pi$ 介子的量子数
- § 4. 带电轻子和中微子
- § 5. 狄拉克方程
- § 6. 正电子
- § 7. 反质子

# § 7. 反质子 (The antiproton)

既然存在正电子，是否存在反质子？

宇宙线中很难找到反质子

质子加速器中产生反质子过程，

$$p + p \rightarrow p + p + \bar{p} + p$$

重子数守恒

反应的阈能是  $E_p(thr.) = 7m_p = 6.6\text{GeV}$

Berkeley在1954年建成最大能量7GeV的质子加速器Bevatron

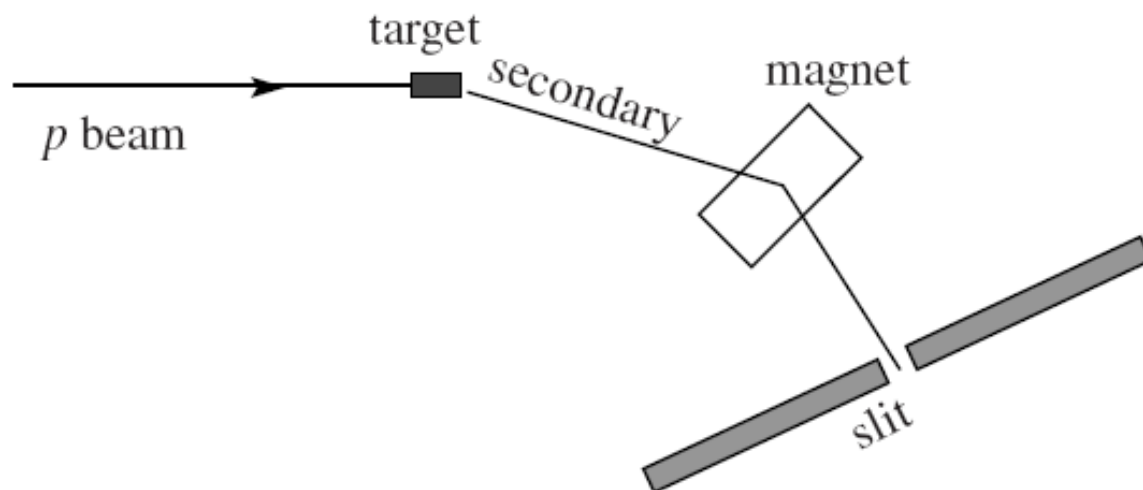
1955年，Bevatron上7.2GeV质子束流打靶实验  
(Segre&Chamberlain)，寻找反质子

反质子比较少，每产生100000个 $\pi$ 介子才产生一个反质子

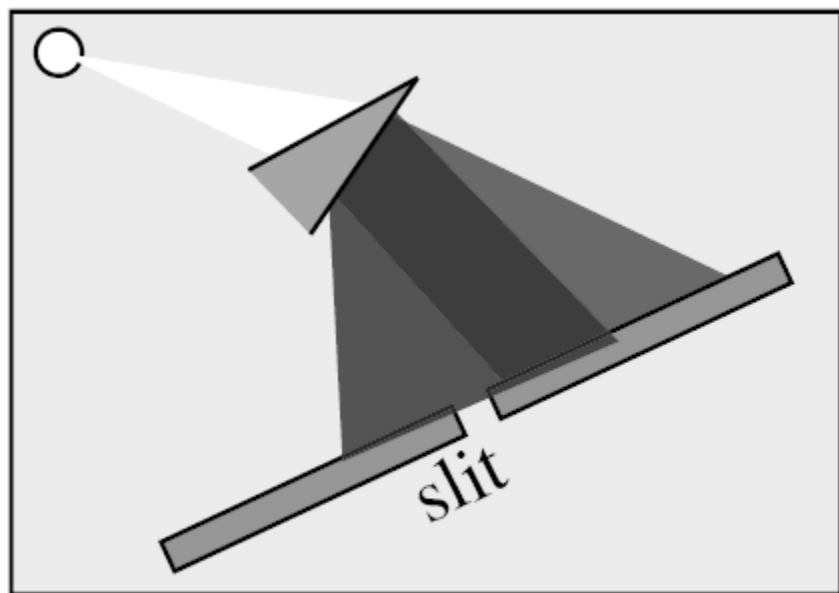
实验上建造一个谱仪 (Spectrometer) 来精确确定粒子动量  
同时测量速度

$$m = \frac{p}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

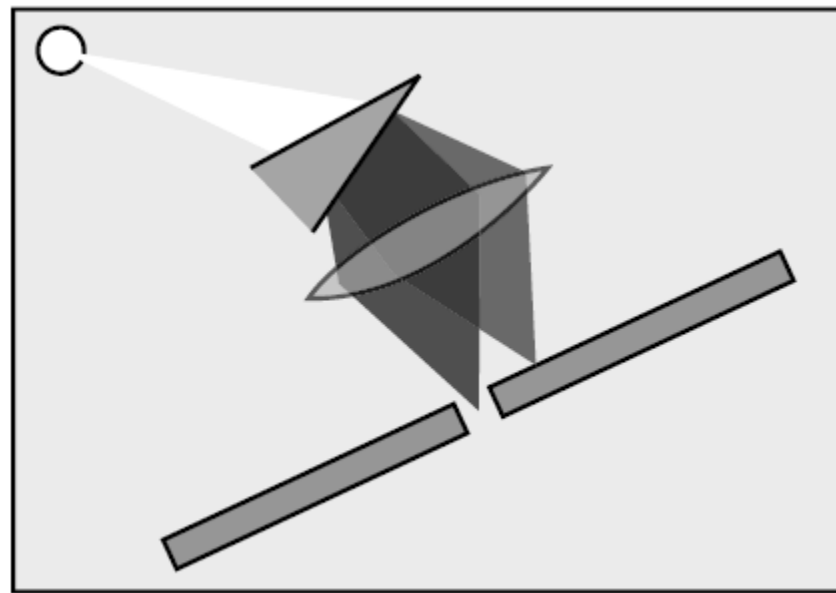
谱仪的第一步：选择特定电荷的动量在一定范围的粒子



上述设计的缺陷是选择的粒子束流强度非常低



(a)



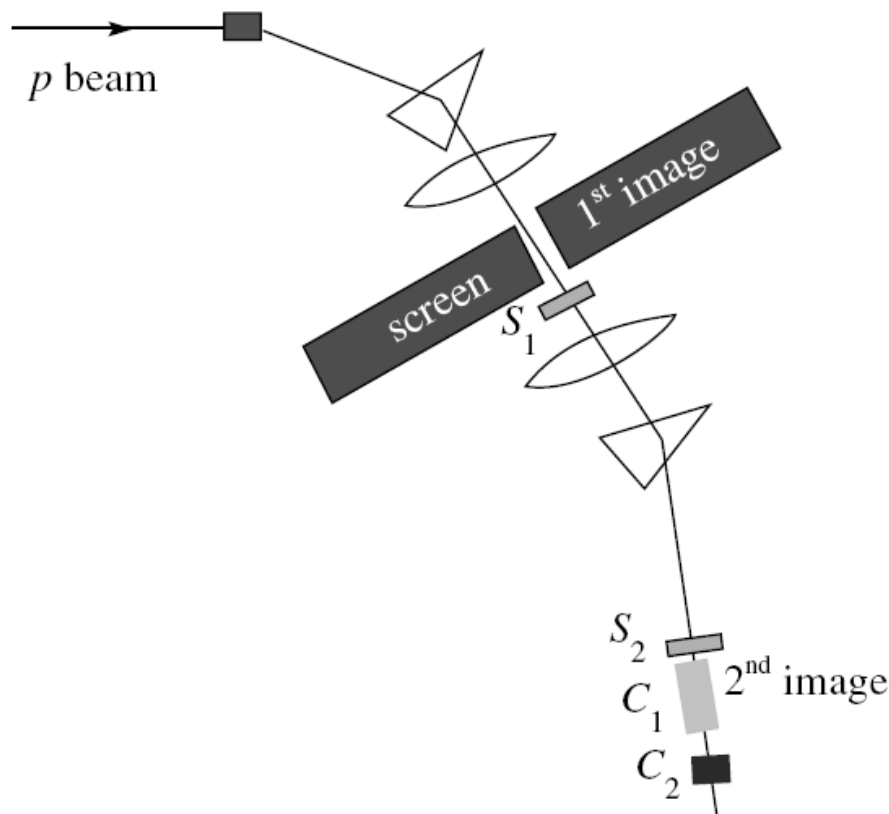
(b)

与光学上类似，需要加入聚焦装置，使得在狭缝上得到粒子源的像点

通过第一步，实验中选择了粒子动量的中心值为  $p = 1.19 \text{ GeV}$

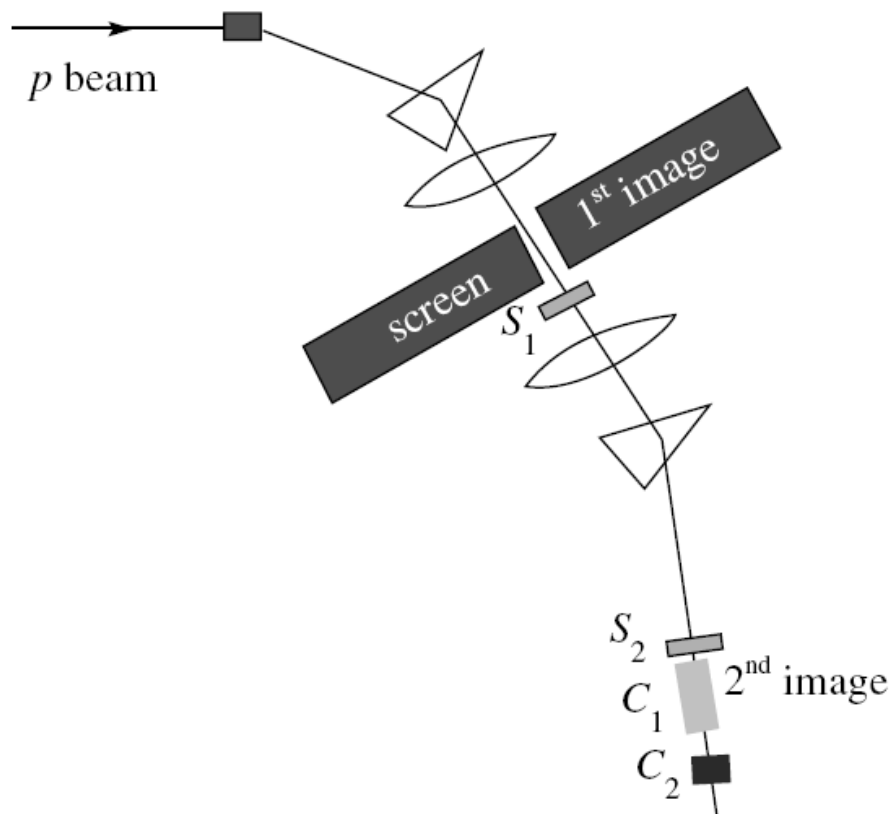
$$\beta_{\pi} = \frac{p}{E_{\pi}} = \frac{1.19}{\sqrt{1.19^2 + 0.14^2}} = 0.99 \quad \beta_p = \frac{p}{E_p} = \frac{1.19}{\sqrt{1.19^2 + 0.938^2}} = 0.78$$

谱仪的第二步：使用相反的磁铁组合得到粒子源的第二个像点，这样得到指定电荷的单能高强度的粒子束流用于实验



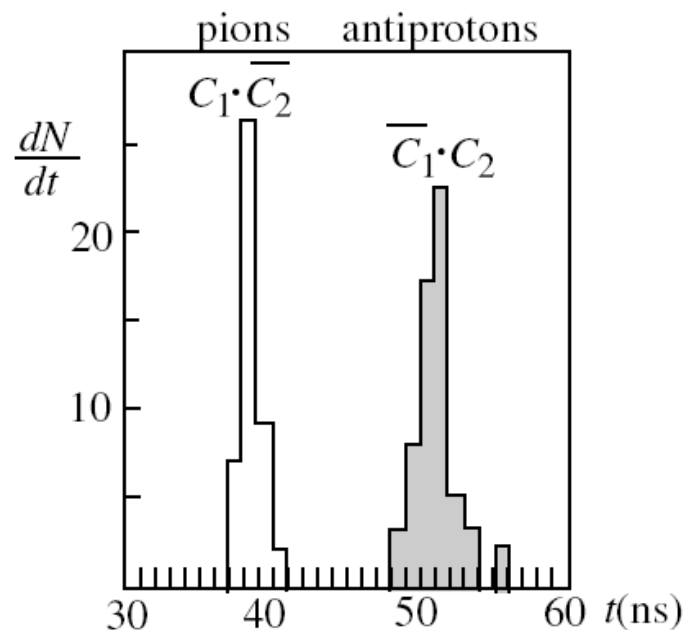
粒子飞行时间由闪烁体 $S_1$ 和 $S_2$ 测量，距离12m。 $t_\pi=40\text{ns}$ ,  $t_p=51\text{ns}$   
两种粒子的时间差11ns容易测量，时间分辨率为1ns。

谱仪的第二步：使用相反的磁铁组合得到粒子源的第二个像点，这样得到指定电荷的单能高强度的粒子束流用于实验



为了减少随机符合，加入两个切伦科夫探测器 $C_1$ 和 $C_2$ 。

$C_1$ 的发光阈值高（ $\beta=0.99$ ），仅能探测 $\pi$ 介子； $C_2$ 阈值低，加入聚焦镜之后仅能探测质子。



Emilio Gino Segrè



Owen Chamberlain

Fig. 2.13. Time of flight distribution between  $S_1$  and  $S_2$ . (Adapted from Chamberlain *et al.* 1955)



王淦昌  
1907-1998

粒子飞行时间分布里，反质子的信号很明确！

1956, Bevatron, 发现反中子

1959, Segre & Chamberlain, Nobel prize in physics

1960, 王淦昌, Dubna, 反 $\Sigma$ -超子...



# 核子、轻子和玻色子 (Nucleons, leptons and bosons)



- § 1.  $\mu$ 子和 $\pi$ 介子
- § 2. 奇异介子和超子
- § 3. 带电 $\pi$ 介子的量子数
- § 4. 带电轻子和中微子
- § 5. 狄拉克方程
- § 6. 正电子
- § 7. 反质子



# 附录

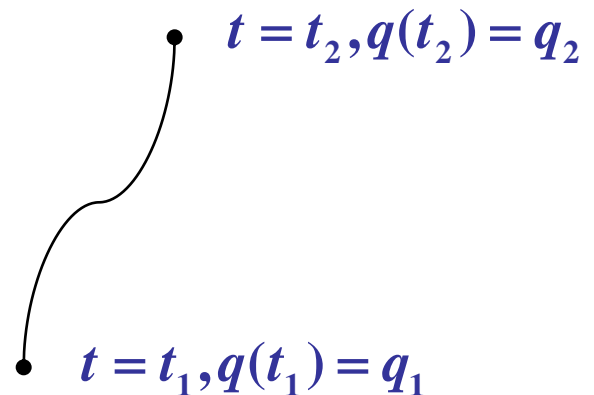
## 【经典正则系统】

- 系统的动力学性质由**Lagrange function** 描述

$$L = L(q, \dot{q}), \quad \dot{q} \equiv \frac{dq(t)}{dt}$$

- 经典运动路径使作用量取极值

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt$$



$$\frac{\delta I}{\delta q(t)} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial L}{\partial q(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} = 0}$$

**Euler-Lagrange equation**

- 几个例子

Example 1. A free moving particle

$$L = L(\vec{v}^2) = L(\vec{x}^2)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \right) = 0 \Rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{\text{const}}$$

Galileo's relativity principle

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \vec{x}' + \vec{v}t \\ t &= t'\end{aligned}$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} m v^2$$

Example 2. 1-dim. oscillator

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \quad \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} (m \dot{x}) = m \ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -m \omega^2 x = -kx$$

$$\Rightarrow m \ddot{x} + kx = 0$$

Example 3.

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_i} \right) = m_i \ddot{\vec{x}}_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}_i} = - \sum_{j (\neq i)} \frac{\partial V}{\partial \vec{x}_i}$$

- 对于坐标 $q$ ，定义其对应的“动量”为

$$p = \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}}$$

- **Hamilton function** 通过一个**Legendre**变换得到

$$H(p, q) = p\dot{q} - L$$

- 正则方程

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

$$f = f(p, q), \quad \frac{df}{dt} = [H, f], \quad [f, g] \equiv \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p}$$

The canonical equations

$$L = L(q_i, \dot{q}_i)$$

$$dL = \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right)$$

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left. \vphantom{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}} \right\} = \sum_i (\dot{q}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \dot{p}_i \left. \vphantom{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}} \right\} = d \left( \sum_i p_i \dot{q}_i \right) - \sum_i \dot{q}_i dp_i + \sum_i \dot{p}_i dq_i$$

$$\Rightarrow d(L - \sum_i p_i \dot{q}_i) = - \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i$$

$$H \equiv \sum_i p_i \dot{q}_i - L \\ = H(p_i, q_i)$$

$$dH = \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i$$

$$\Rightarrow \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

Example 4. 1-dim oscillator

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}$$

$$H = p \dot{x} - L = p \cdot \frac{p}{m} - \frac{1}{2} m \left( \frac{p}{m} \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

$\uparrow$   
 $\dot{x} = \frac{p}{m}$

$$= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

$$\dot{p} = - \frac{\partial H}{\partial x} = - m \omega^2 x$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{p} = - m \omega^2 x \\ \dot{x} = \frac{p}{m} \end{array} \right\} \rightarrow m \ddot{x} = - kx$$

## 【正则量子化】

- 经典力学和量子力学的对应

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i$$

经典泊松括号换成量子力学的算符对易式，如

$$\hat{f} = f(\hat{p}, \hat{q})$$

$$\frac{d\hat{f}}{dt} = i[\hat{H}, \hat{f}], \quad [\hat{f}, \hat{g}] \equiv \hat{f} \cdot \hat{g} - \hat{g} \cdot \hat{f}$$

## 【例子】一维谐振子的量子化

- 说明

—量子系统是在海森堡绘景（Heisenberg picture）

—算符的次序要根据情况安排



Example : 1-dim oscillator

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

Quantum Mechanics

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{x}^2$$

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i$$

define  $\left. \begin{matrix} \hat{a} \\ \hat{a}^+ \end{matrix} \right\} = \frac{1}{(2m\omega)^{1/2}} (m\omega \hat{x} \pm i\hat{p})$

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \omega \left( \hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \omega \left( \hat{N} + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$$

$$[\hat{a}, \hat{a}] = [\hat{a}^+, \hat{a}^+] = 0$$

①  $\hat{N}$  is positive definite  $\langle \psi | \hat{N} | \psi \rangle \geq 0$

②  $|\alpha\rangle$  is an eigenstate of  $\hat{N}$  with eigenvalue  $\alpha$

$$\hat{N} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \quad \alpha \geq 0$$

$$\hat{N} \hat{a} |\alpha\rangle = (\alpha - 1) \hat{a} |\alpha\rangle$$

so  $\hat{a} |\alpha\rangle$  is also an eigenstate. ~~so~~ eigenvalue  $\alpha - 1$

③ assume  $\alpha_0$  is the lowest eigenvalue,  $\alpha_0 \geq 0$

$$\hat{N} \hat{a} |\alpha_0\rangle = (\alpha_0 - 1) \hat{a} |\alpha_0\rangle$$

$\hat{a} |\alpha_0\rangle$  must be "0" !

$$\rightarrow \hat{N} |\alpha_0\rangle = \hat{a}^\dagger \hat{a} |\alpha_0\rangle = 0 \quad |0\rangle \equiv |\alpha_0\rangle$$

$\therefore |\alpha_0\rangle$  is  $\hat{N}$ 's eigenstate with eigenvalue "0".

④ for any eigenstate of  $\hat{N}$ ,  $|\alpha\rangle$

$$\hat{N} \hat{a}^\dagger |\alpha\rangle = (\alpha + 1) \hat{a}^\dagger |\alpha\rangle$$

So we can form all  $\hat{N}$  eigenstates

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle$$

$$\langle n | n' \rangle = \delta_{nn'}$$

⑤  ~~$|n\rangle$  is also~~

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{H} |n\rangle &= E_n |n\rangle \\ E_n &= (n + \frac{1}{2}) \omega \end{aligned}}$$

## 【自由标量场的量子化】

- 准备工作

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}(\partial\phi(x))^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2(x)$$

$$\pi(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} = \dot{\phi}(x)$$

$$\mathcal{H}(x) = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m\phi^2$$

- 按正则量子化的程序

$$[\phi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{x}')] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$$

$$[\phi(t, \vec{x}), \phi(t, \vec{x}')] = 0$$

$$[\pi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{x}')] = 0$$

- 引入产生、湮灭算符

$$\phi(x) = \int d^3k \left[ a(k) f_k(x) + a^\dagger(k) f_k^*(x) \right]$$

$$\pi(x) = \dot{\phi}(x) = \int d^3k (-i\omega_k) \left[ a(k) f_k(x) - a^\dagger(k) f_k^*(x) \right]$$

$$k^\mu = (\omega_k, \vec{k}) \quad \omega_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \quad f_k(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} e^{-ik \cdot x}$$

$$[a(k), a^\dagger(k')] = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')$$

$$[a(k), a(k')] = 0$$

$$[a^\dagger(k), a^\dagger(k')] = 0$$

$$H = \frac{1}{2} \int d^3k \omega_k \left[ a^\dagger(k) a(k) + a(k) a^\dagger(k) \right]$$