对称性
(Symmetries)

§ 1. 对称性
§ 2. 正反粒子变换*C*
§ 3. 宇称（空间反射变换*P*）
§ 4. 时间反演变换T
§ 5. *CPT*定理
§ 6. 重子数和轻子数
§ 7. 同位旋
§ 8. *G*宇称
§ 9. 全同粒子交换变换

§ 3. 空间反射变换 *P*

- 空间反射变换

空间反射变换***P***，把三个空间坐标轴反转

$$\vec{r} \to -\vec{r} \qquad t \to t$$

空间反射变换是分立变换，不是一个特殊的旋转变换

等价于反转一个坐标轴（镜像变换），然后绕其旋转180°

空间反射变换下：

$$\vec{p} \to -\vec{p}$$

$$\vec{r} \times \vec{p} \to \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{s} \to \vec{s}$$

标量：***P***变换下不变；赝标量：***P***变换下反号

矢量：***P***变换下反号；轴矢量：***P***变换下不变

- 空间反射变换

如果系统具有空间反射不变性，在态空间

$$|\psi\rangle^P = U_P|\psi\rangle \qquad \begin{aligned} U_P^\dagger U_P &= 1 \\ U_P U_P &= 1 \\ U_P^{-1} &= U_P^\dagger = U_P \end{aligned}$$

所以 U_P 本身可以是一个观测量（厄密算符），本征值为±1。

$$\begin{aligned} \vec{r}^P &= U_P \vec{r} U_P^\dagger = -\vec{r} \\ \vec{p}^P &= U_P \vec{p} U_P^\dagger = -\vec{p} \\ \vec{J}^P &= U_P \vec{J} U_P^\dagger = \vec{J} \end{aligned}$$

由于 $HU_P = U_P H$, 所以

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = H|\psi\rangle \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle^P = H|\psi\rangle^P$$

- 【例】中心力场波函数的宇称

$$H = -\frac{\nabla^2}{2m} + V(r)$$

$$\psi_{nlm}(\vec{r}) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \phi)$$

在空间反射变换下

$$\begin{aligned} r &\rightarrow r \\ \theta &\rightarrow \pi - \theta \\ \phi &\rightarrow \phi + \pi \end{aligned}$$

$$\boxed{\psi_{nlm}(-\vec{r}) = (-1)^l \psi_{nlm}(\vec{r})}$$

因此量子数 {*nlm*} 确定的态也具有确定的宇称。

- 轨道宇称和内禀宇称

如果在讨论的问题中，粒子数目不变，没有粒子的产生和湮灭过程，这时可以把粒子内部波函数在空间反射变换下的行为与粒子时空波函数在空间反射变换下的行为分开处理。

但是在粒子物理学中一般需要考虑粒子数是可变的，因此必须还要考虑粒子内部波函数在 **P** 变换下的性质。在 **P** 变换下粒子内部波函数具有一定的 **P** 宇称，又称内禀宇称，简称粒子的 **P** 宇称。

由于内禀 **P** 宇称与现在还不清楚的粒子内部运动的对称性有关，不能像轨道角动量那样给出明显的 **P** 变换表达式，只能根据 **P** 守恒的要求从实验上确定粒子的内禀 **P** 宇称。

- 反应过程中的宇称守恒

$$S = U_P S U_P^\dagger$$

– 对于反应 $|i\rangle \to |f\rangle$

$$< f|SU_P|i > = < f|U_P S|i >$$

如果初、末态均是宇称的本征态，则有

$$\eta_i < f|S|i > = \eta_f < f|S|i >$$

所以仅当 $\eta_i = \eta_f$ 时反应才可以发生。

– 通常散射过程

$$|\vec{p}_{i1}, \vec{s}_{i1}; \vec{p}_{i2}, \vec{s}_{i2}; \cdots\rangle \to \left|\vec{p}_{f1}, \vec{s}_{f1}; \vec{p}_{f2}, \vec{s}_{f2}; \cdots\right\rangle$$

初、末态均不是宇称的本征态

$$\left|\vec{p}_{i1},\vec{s}_{i1};\vec{p}_{i2},\vec{s}_{i2};\cdots\right\rangle \to \left|\vec{p}_{f1},\vec{s}_{f1};\vec{p}_{f2},\vec{s}_{f2};\cdots\right\rangle$$

宇称守恒（空间反射不变）意味着

$$< f|S|i > = < f|U_P S U_P^\dagger|i >$$

$$\left\langle\vec{p}_{i1},\vec{s}_{i1};\vec{p}_{i2},\vec{s}_{i2};\cdots|S|\vec{p}_{f1},\vec{s}_{f1};\vec{p}_{f2},\vec{s}_{f2};\cdots\right\rangle =$$
$$\left\langle-\vec{p}_{i1},\vec{s}_{i1};-\vec{p}_{i2},\vec{s}_{i2};\cdots|S|-\vec{p}_{f1},\vec{s}_{f1};-\vec{p}_{f2},\vec{s}_{f2};\cdots\right\rangle$$
$$\times\eta_{i1}\eta_{i2}\cdots\eta_{f1}\eta_{f2}\cdots$$

其中 $\eta_{i1}\eta_{i2}\cdots\eta_{f1}\eta_{f2}\cdots$ 是初、末态粒子的内禀宇称。

$$\left|\left\langle\vec{p}_{i1},\vec{s}_{i1};\vec{p}_{i2},\vec{s}_{i2};\cdots|S|\vec{p}_{f1},\vec{s}_{f1};\vec{p}_{f2},\vec{s}_{f2};\cdots\right\rangle\right|^2 =$$
$$\left|\left\langle-\vec{p}_{i1},\vec{s}_{i1};-\vec{p}_{i2},\vec{s}_{i2};\cdots|S|-\vec{p}_{f1},\vec{s}_{f1};-\vec{p}_{f2},\vec{s}_{f2};\cdots\right\rangle\right|^2$$

【例】吴健雄实验 $\quad {}^{60}\mathrm{Co}\to{}^{60}\mathrm{Ni}+e^-+\bar{\nu}_e$

- 相对宇称和绝对宇称

既然内禀宇称只能根据宇称守恒定律的要求来确定，它就具有前面已讲过的宇称的相对性。关于宇称可以作以下说明：

— 纯中性粒子的内禀宇称由实验来决定。

光子是电磁场的量子。光子的运动状态由电磁场的场量 A_μ 来描写，它们满足 **Maxwell** 方程：

$$\Box A_\mu = 4\pi j_\mu$$

空间反射变换下，电流密度的空间分量变号。这要求电磁场场量 A_μ 的空间分量也应变号。自由光子的运动状态是由 A_μ 的空间分量描写，由此可见光子的 **P** 宇称为 **-1**。

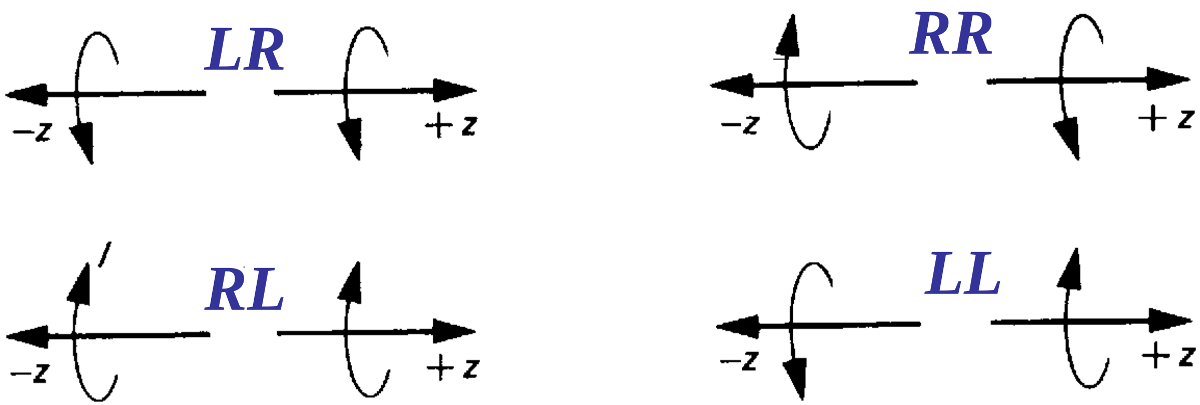
— 实验确定 π^0 介子的宇称为 **-1**。

C.N.Yang, *Phys. Rev.* 77 (1950) 242

【讨论】双光子系统的宇称

汪容, 物理学报, Vol. 15, No. 2, 1959

1. 在两个光子的质心系中，以其中一个光子的运动方向为z−轴, 则有以下4种状态：



State	J_z
RR	0
LL	0
LR	2
RL	-2

对于***RL*** 和***LR*** 态，此时系统的总角动量 $J \geq 2$.

2. 对于*RR* 和*LL*态，如果系统的总角动量是*J*，则其波函数为

$$Y_{J0}(\theta,\varphi)=Y_{J0}(\theta)$$

由于交换两个光子（相当于绕x-轴转动π角）的状态波函数应是对称的，

$$Y_{J0}(\pi-\theta)=(-1)^J Y_{J0}(\theta)$$

因此 *J* 只能是偶数。根据前面的讨论，可以得到推论：

双光子系统的总角动量不能是1。这个结论也被称为杨振宁定理（Yang's theorem）。

利用*RR* 和*LL*态，可以组成宇称的两个本征态：

$$\boxed{\begin{array}{ll} RR+LL & P' = 1 \\ RR-LL & P' = -1 \end{array}}$$

3. 电磁场是横向极化的，在z-轴正（反）方向传播的左旋圆偏振光的极化矢量可以写成

$$A_L^+ = A_x^+ + iA_y^+ = A_R^{+*}$$

$$A_L^- = A_x^- - iA_y^- = A_R^{-*}$$

$RR + LL$态，

$$A_R^+ A_R^- + A_L^+ A_L^- = (A_x^+ + iA_y^+)(A_x^- - iA_y^-) + c.c.$$

$$= 2(A_x^+ A_x^- + A_y^+ A_y^-) \propto \vec{A}^+ \cdot \vec{A}^-$$

$RR + LL$态两个光子的极化矢量是平行的。同样可以证明$RR - LL$态两个光子的极化矢量是垂直的。

4. 对*RL* 和*LR* 态也可以做相似的讨论，结果总结如下：

Table III. Correlation of the planes (see reference 3) of polarization of disintegration photons (⊥ = planes of polarization perpendicular, ∥ = planes of polarization parallel).

parity \ J	0	1	2, 4, 6 ···	3, 5, 7 ···
even	∥	forbidden	∥ ≧ 50% ⊥ ≦ 50%	∥ 50% ⊥ 50%
odd	⊥	forbidden	⊥	forbidden

考虑到双光子系统的*C*’＝1，这样对双光子系统有：

$$J^{PC} = 0^{\pm+}, 2^{\pm+}, 4^{\pm+}, 6^{\pm+}, \cdots$$
$$= 3^{++}, 5^{++}, 7^{++}, \cdots$$

以上结论也可用到双胶子系统（如胶球）。

- 内禀宇称

真空为*P*变换的本征态，宇称定义为1

单个粒子在其静止系，如果为*P*变换的本征态，宇称称为内禀宇称，可能为+1或-1

玻色子的宇称可以明确定义，绝对宇称

费米子由于自旋半整数，角动量守恒要求只能成对产生，故只能定义相对宇称：

质子宇称定义为+1，其它费米子宇称都是相对于质子的相对宇称

量子场论要求费米子和反费米子的宇称相反；玻色子和反玻色子的宇称相同

奇异超子与其它奇异粒子协同产生，无法确定宇称，取Λ宇称为+1

在夸克层次上，定义所有夸克宇称为+1，反夸克为-1

- 两粒子系统的宇称

内禀宇称为η_a和η_b的两个粒子a和b组成的系统，在其质心系是宇称变换的本征态。

两粒子系统的波函数

$$|a,b\rangle = |a\rangle |b\rangle |a-b\rangle_l$$

内禀空间波函数

相对运动波函数

$$U_p|a,\ b\rangle = \eta(a,b)|a,\ b\rangle = U_p|a\rangle U_p|b\rangle U_p|a-b\rangle_l$$

$$U_p|a\rangle = \eta_a|a\rangle$$

$$U_p|b\rangle = \eta_b|b\rangle$$

$$U_p|a-b\rangle_l = \eta_{Pl}|a-b\rangle_l = (-1)^l|a-b\rangle_l$$

$$\eta(a,b) = \eta_a\eta_b(-1)^l$$

对内禀宇称相同的两个介子组成的系统，

$$\eta(m_1, m_2) = (-1)^l$$

对费米子-反费米子对组成的系统，

$$\eta(f, \bar{f}) = (-1)^{l+1}$$

对费米子-反费米子对组成的系统，也是**C**变换的本征态

$$\boldsymbol{C\left| f, \bar{f} \right\rangle = (-1)^{L+S} \left| f, \bar{f} \right\rangle}$$

Table 3.1 J^{PC} *for the spin 1/2 particle–antiparticle systems*

	$^1S_0$	$^3S_1$	$^1P_1$	$^3P_0$	$^3P_1$	$^3P_2$
J^{PC}	0^{-+}	1^{--}	1^{+-}	0^{++}	1^{++}	2^{++}

- P宇称守恒

强相互作用和电磁相互作用中P宇称守恒；
弱相互作用宇称不守恒。

破坏宇称守恒的跃迁矩阵元：

$$M = M_S + M_{PS}$$

强相互作用下

$$p + {}^{19}F \rightarrow [{}^{20}Ne^*] \rightarrow {}^{16}O + \alpha$$

$$1^+ \rightarrow 0^+ + 0^+$$

未发现共振态，强相互作用下，

$$|M_S / M_{PS}|^2 \leq 10^{-8}$$

- **π介子的宇称**

– 中性π介子内禀宇称

$$\pi^0 \to (e^+ + e^-) + (e^+ + e^-)$$

– 带电 π 介子的内禀宇称

$$\boxed{[J=1, L=0 \text{ (dominant)}]}$$

$$\downarrow$$

$$\pi^- + \mathrm{d} \to \mathrm{n} + \mathrm{n}$$

Captured at 1s-State

D. Perkins, Sec. 3.3.2

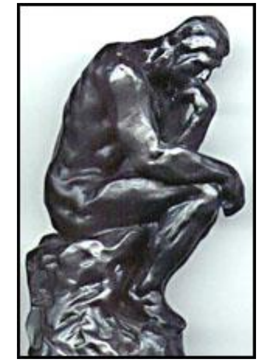
宇称守恒要求 $\eta_{\pi^-}\eta_{\mathrm{p}}\eta_{\mathrm{n}} = -1$

约定 $\boxed{\eta_{\mathrm{p}} = \eta_{\mathrm{n}} = 1}$

于是 $\boxed{\eta_{\pi^-} = -1}$

$J^P = 0^-$ 赝标粒子

对称性
(Symmetries)



§ 1. 对称性

§ 2. 正反粒子变换*C*

§ 3. 宇称（空间反射变换*P*）

§ 4. 时间反演变换T

§ 5. *CPT*定理

§ 6. 重子数和轻子数

§ 7. 同位旋

§ 8. *G*宇称

§ 9. 全同粒子交换变换

参考李政道《粒子物理和场论简引》，
曾谨言《量子力学卷二》相关章节

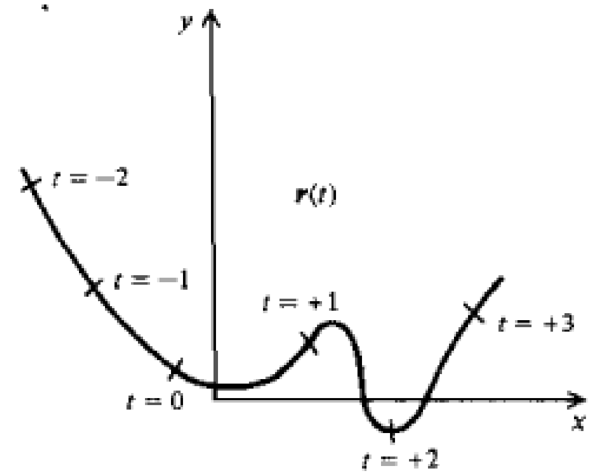
§ 4. 时间反演变换 *T*

- 经典力学系统的时间反演不变性

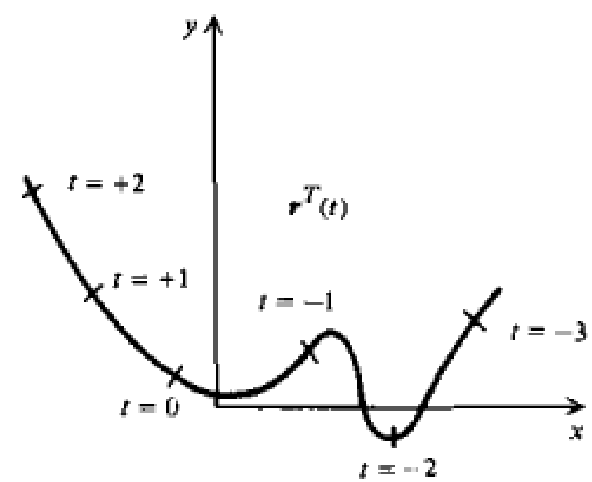
如果广义坐标 $\{q_i(t)\}$是系统动力学方程的一个解时，其时间反演态

$$\{q_i'(t) = q_i(-t)\}$$

也是动力学方程的解，则系统具有时间反演不变性。



我们讨论时间反演过程，
而不是时间反演本身！



【讨论】经典物理中微观系统和宏观系统的时间反演过程

- 非相对论量子力学系统的时间反演不变性

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = H\psi(x,t)$$

由于

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,-t) = -H\psi(x,-t)$$

所以 $\psi'(x,t) = \psi(x,-t)$ 并不是系统的一个允许的波函数

如果，$H^* = H$ 则 $\psi'(x,t) = \psi^*(x,-t)$ 满足

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi'(x,t) = H\psi'(x,t)$$

对于自旋 1/2 粒子的波函数

$$\begin{bmatrix} \psi_+(x,t) \\ \psi_-(x,t) \end{bmatrix}$$

其时间反演态的波函数

$$-i\sigma_y \begin{bmatrix} \psi_+^*(x,-t) \\ \psi_-^*(x,-t) \end{bmatrix}$$

在时间反演变换下角动量反号。

- 时间反演变换T的一般性质

$$x^\mu \to -x_\mu,\ p^\mu \to p_\mu, \vec{J} \to -\vec{J}, \cdots$$

一个时间反演的状态应该按“逆时”的运动方程演化。

考虑“顺时”的Schrödinger方程

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle$$

如果时间反演变换存在

$$|\psi(-t)\rangle^T = T|\psi(t)\rangle$$

$$i\frac{\partial}{\partial(-t)}|\psi(-t)\rangle^T = H^T|\psi(-t)\rangle^T$$

从“顺时”运动方程

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle$$

利用 $T^{-1}T=I$ ，有：

$$TiT^{-1}T\frac{\partial}{\partial t}T^{-1}T|\psi(t)\rangle = THT^{-1}T|\psi(t)\rangle$$

在量子力学中，时间t是参数（不是算符），

$$T\frac{\partial}{\partial t}T^{-1} = \frac{\partial}{\partial t} \neq \frac{\partial}{\partial(-t)}$$

考虑到H是正定的，所以只能要求

$$TiT^{-1} = -i$$

按Wigner定理，T是反幺正反线性的。

- 如果，

$$THT^{-1} = H^* = H \rightarrow [H, T] = 0$$

则时间反演态的运动方程

$$|\psi(-t)\rangle^T = T|\psi(t)\rangle$$

$$i\frac{\partial}{\partial(-t)}|\psi(-t)\rangle^T = H|\psi(-t)\rangle^T$$

这时称体系是时间反演不变的。

关于时间反演变换不变的所有含义都在上面的式子给出，由于T的反线性性质，时间反演变换不变并不给出新的守恒量。

- 对于无自旋的粒子

$$\psi^T(\vec{x},-t) = T\psi(\vec{x},t) = e^{i\theta_T}\psi^*(\vec{x},t)$$

而对于Dirac粒子，由于要求自旋反向

$$\psi^T(\vec{x},-t) = e^{i\theta_T} i\gamma^1\gamma^3\psi^*(\vec{x},t)$$

其中有一个整体相因子选择的任意性。

- 根据 T 变换的意义，应有

$$T^2 = \eta I$$

T 的反幺正性质决定了：

$\eta = +1$ 玻色子

$\eta = -1$ 费米子

T^2 与体系的自旋统计关系有关。

- 在时间反演的Schrödinger方程

$$i\frac{\partial}{\partial(-t)}|\psi(-t)\rangle^T = H|\psi(-t)\rangle^T$$

中做“参数替换”，$t \to -t$

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle^T = H|\psi(t)\rangle^T$$

这说明时间反演态

$$|\psi(t)\rangle^T = T|\psi(-t)\rangle$$

也是体系的一个（沿正时间方向演化）可能状态。对于自由粒子平面波解，上式对应将自旋和动量反向后的状态。

- 时间反演不变的意义

$t=0$ $\qquad\qquad$ $t=t$ $\qquad$ t

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\left|\psi(0)\right\rangle \arrow[r, "e^{-iHt}"] \arrow[d, "T"'] & \left|\psi(t)\right\rangle \arrow[d, "T"] \\
\left|\psi(0)\right\rangle^{T} & \left|\psi(-t)\right\rangle^{T} \arrow[l, "e^{iHt}"']
\end{tikzcd}
$$

$-t$ $\qquad$ $t=0$ $\qquad\qquad$ $t=-t$

如果做“参数替换”，$t\rightarrow -t$“倒逆过程”也是体系的一个可能的过程。理论上一个过程的“倒逆过程”是可以发生的，但实际上这样的过程很少可能被观察到，原因是一个正过程末态的时间反演态是很难“制备”的。

【例一】考虑一个非相对论体系的演化过程。取体系一组"易制备的"完全集，如

$$\left\{\psi_{nJJ_z}(x,t)\right\}$$

设初态时体系处在本征态上，由传播子理论

$$\psi_{J'J'_Z}(x',t')=\delta_{J'J}\delta_{J'_ZJ_Z}\, i\int d^3x G(x',t';x,t)\psi_{nJJ_z}(x,t)$$

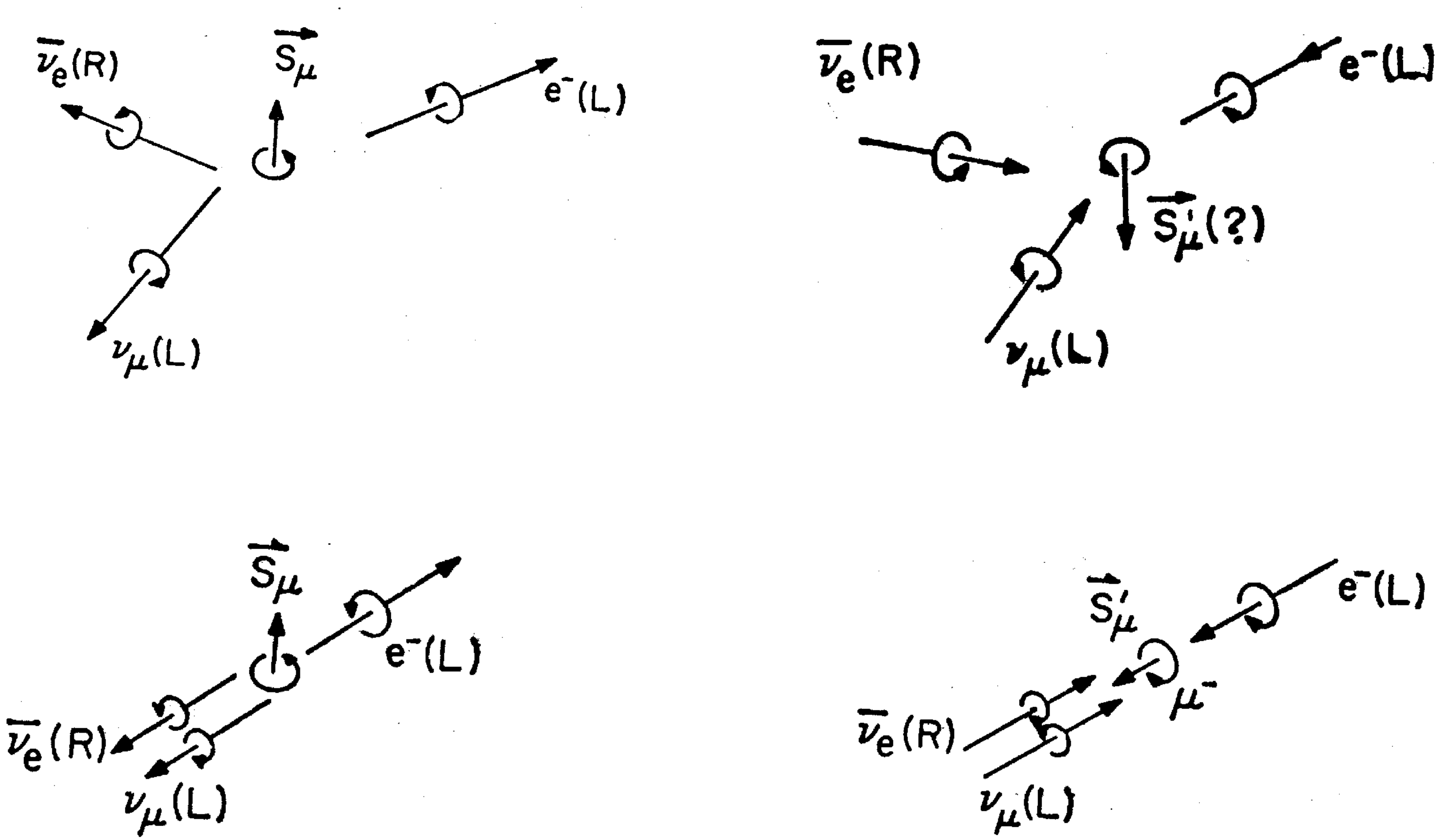
$$\psi_{J'J'_Z}(x',t')=\sum_m a_m\psi_{mJJ_z}(x',t')$$

末态的时间反演态：

$$\psi^T_{J'J'_Z}(x',-t')=e^{i\theta_T}\sum_m a^*_m\psi^*_{mJ'-J'_z}(x',t')$$

这是一组态的"相干叠加"。即使单个态是易制备的，这样一个相干态在实际上几乎是不可能被制备出来的 —— 除非它正好是某个容易观测的量的本征态。

【例二】考虑muon的衰变过程



《粒子物理和场论简引》13.2

- 考虑互逆反应过程

$$1+2+\cdots \rightleftarrows 1'+2'+\cdots$$

用粒子的动量和Helicity标识粒子态（平面波）：$\left|\vec{p}_i,\lambda_i\right\rangle$

如果体系具有时间反演不变性，可以证明倒易关系：

$$\left|\left\langle \vec{p}_{1'}\lambda_{1'};\vec{p}_{2'}\lambda_{2'};\cdots\right|S\left|\vec{p}_1\lambda_1;\vec{p}_2\lambda_2;\cdots\right\rangle\right|$$
$$=\left|\left\langle -\vec{p}_1\lambda_1;-\vec{p}_2\lambda_2;\cdots\right|S\left|-\vec{p}_{1'}\lambda_{1'};-\vec{p}_{2'}\lambda_{2'};\cdots\right\rangle\right|$$

也称为细致平衡原理。

① 由于只涉及平面波状态，因此是可以制备的，实验上是可以检验的。

② 以上的两个互逆过程并不互为时间反演，结论也只涉及跃迁几率。倒易关系是时间反演不变的一个推论，并不是其全部内容。