对称性
(Symmetries)

§ 1. 对称性
§ 2. 正反粒子变换*C*
§ 3. 宇称（空间反射变换*P*）
§ 4. 时间反演变换*T*
§ 5. *CPT*定理
§ 6. 重子数和轻子数
§ 7. 同位旋
§ 8. *G*宇称
§ 9. 全同粒子交换变换

§ 5. *CPT* 定理

- 对任何一个量子场论，如果满足：
  - 在固有Lorentz 变换下的协变性；
  - 自旋统计关系；
  - 定域的；

则系统具有*CPT* 联合变换的不变性。

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathrm{T} = CPT, CTP, TPC, \cdots \\ &\mathrm{T} H \mathrm{T}^{-1} = H \end{aligned}}$$

通常我们总是假定*CPT* 联合变换的不变性是成立的。

参考李政道《粒子物理和场论简引》, **Ch. 14**

【推论一】正反粒子具有相同的质量

对于一个静止的粒子态 $\left|P\right\rangle_{J_z}$ ，在*CPT*联合变换下

$$\mathrm{T}\left|P\right\rangle_{J_z}=e^{i\vartheta}\left|\bar{P}\right\rangle_{-J_z}$$

其质量 $m={}_{J_z}\left\langle P\right|H\left|P\right\rangle_{J_z}$ 是实的，并且与J_z无关。

$$m={}_{J_z}\left\langle P\right|H\left|P\right\rangle_{J_z}={}_{J_z}\left\langle P\right|H\left|P\right\rangle_{J_z}^{*}$$

$$={}_{J_z}\left\langle P\right|\mathrm{T}^{-1}\mathrm{T}\,H\,\mathrm{T}^{-1}\mathrm{T}\left|P\right\rangle_{J_z}$$

$$={}_{-J_z}\left\langle \bar{P}\right|H\left|\bar{P}\right\rangle_{-J_z}=\bar{m}$$

【推论二】正反粒子具有相同的寿命。

参考李政道《粒子物理和场论简引》, Ch. 14

对称性
(Symmetries)

§ 1. 对称性
§ 2. 正反粒子变换*C*
§ 3. 宇称（空间反射变换*P*）
§ 4. 时间反演变换*T*
§ 5. *CPT*定理
§ 6. 重子数和轻子数
§ 7. 同位旋
§ 8. *G*宇称
§ 9. 全同粒子交换变换

§6. 重子数和轻子数

基本粒子	重子数	轻子数
quarks	$\frac{1}{3}$	0
leptons	0	1
bosons **（W，Z，γ，g，H）**	0	0

与电荷的情形类似，可以定义：

重子数算符：　$\hat{B}$

轻子数算符：　$\hat{L}$

♣ 实验发现重子数和轻子数在很高的精确度内守恒：

$$^{76}\mathrm{Ge} \rightarrow {}^{76}\mathrm{Se} + 0\upsilon + \mathrm{e}^{-} + \mathrm{e}^{-}: \quad \tau > 10^{26}\,yr$$

$$\mathrm{p} \rightarrow \mathrm{e}^{+} + \pi^{0}: \quad \tau > 10^{33}\,yr$$

♣ 与电荷的情况不同，重子数和轻子数并不与某种相互作用的“荷”有联系。

♣ 实验上发现，所有的系统都必须处在*Q*，*B*，*L* 的本征态上，这也被称为“**superselection rule**”。

♣ 由于实验上确认了中微子是有质量的，存在“混合”，因此“电子轻子数”，“μ轻子数”，“τ轻子数”都不是严格守恒的。

对称性
(Symmetries)

§ 1. 对称性
§ 2. 正反粒子变换*C*
§ 3. 宇称（空间反射变换*P*）
§ 4. 时间反演变换*T*
§ 5. *CPT*定理
§ 6. 重子数和轻子数
§ 7. 同位旋
§ 8. *G*宇称
§ 9. 全同粒子交换变换

§ 7. 同位旋

质子和中子自旋相同、质量相近

粒子	自旋J	电荷Q	质量（MeV）
质子p	½	1	938.2720(13)
中子n	½	0	939.5653(46)

质子和中子虽电磁相互作用和弱相互作用不同，但强相互作用相似

W. Heisenberg (1932):

仅考虑强相互作用，可以把质子和中子看作是同一种粒子——“核子”N的不同带电状态

核子N具有同位旋 I =1/2

I_3=1/2 质子

I_3= -1/2 中子

自旋：与空间中的旋转对应的某种角动量（J）

同位旋：与一种抽象空间中的旋转对应的某种角动量

称与同位旋相联系的抽象空间为同位旋空间

一引入这一抽象空间上的SU(2)变换群，

一强相互作用在这个抽象空间的SU(2)群变换下具有不变性，

一相应的三个生成元构成一个具有三个分量的抽象空间矢量，为同位旋

与角动量相同，同位旋 I 在某一特定方向的投影 I_3（或I_z），可以取$-I, -I+1, \ldots, I-1, I$，共$2I+1$个值

规定：I_3的本征态也就是电荷取确定值的态

相同 I 的$2I+1$个粒子态构成一个同位旋多重态，具有相同的质量、自旋和宇称

例：核同位旋多重态，$I = 1$, $J^p = 1^+$

$$^{12}B(5p+7n) \qquad ^{12}C^*(6p+6n) \qquad ^{12}N(7p+5n)$$

$$I_3 = -1 \qquad I_3 = 0 \qquad I_3 = 1$$

$$\beta^-(13.37\text{MeV}) \qquad \gamma（15.11\text{MeV}） \qquad \beta^+（16.43\text{MeV}）$$

能级有少许差别（同位旋对称性破缺），

$$m_n - m_p \approx 1.3 \text{ MeV}$$

$$n(udd) \qquad p(uud)$$

$$m_d > m_u$$

- 强子同位旋多重态

定义强子的超荷**(Hypercharge)：**

$$Y = B + S$$

超荷在强相互作用和电磁相互作用中守恒

对介子来说，超荷就是奇异数

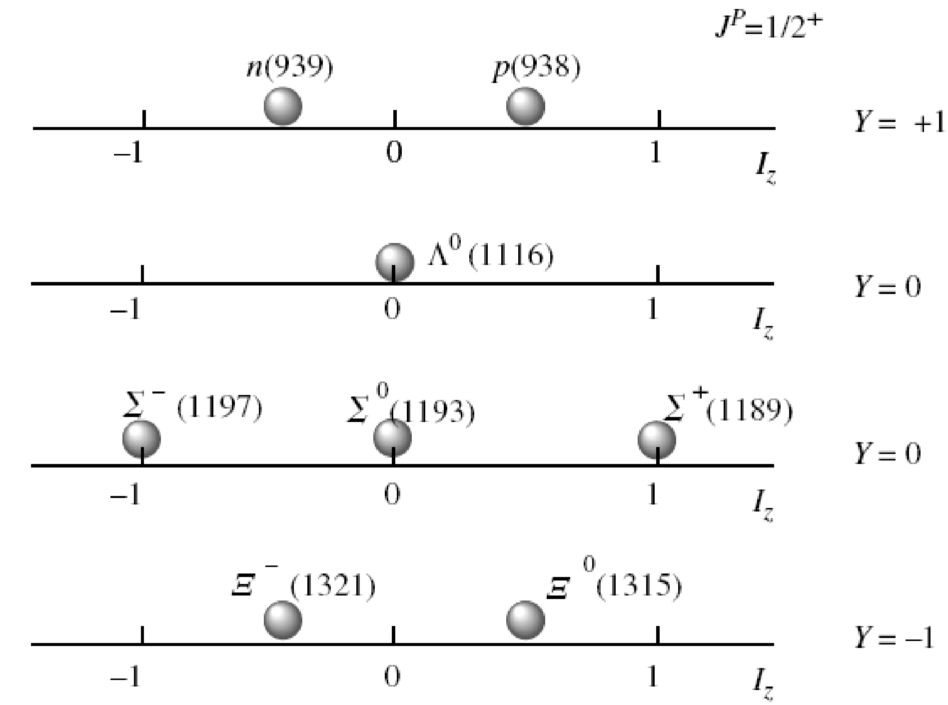
Gell-Mann-西岛 关系**：**

$$Q = I_3 + Y/2 = I_3 + (B+S)/2$$

仅对由三个味道的夸克（**u,d,s**）构成的强子适用！

考虑到所有的夸克味，推广为

$$Q = I_3 + (B+S+C+b+T)/2$$



$J^P = 1/2^+$ baryon isospin multiplets.

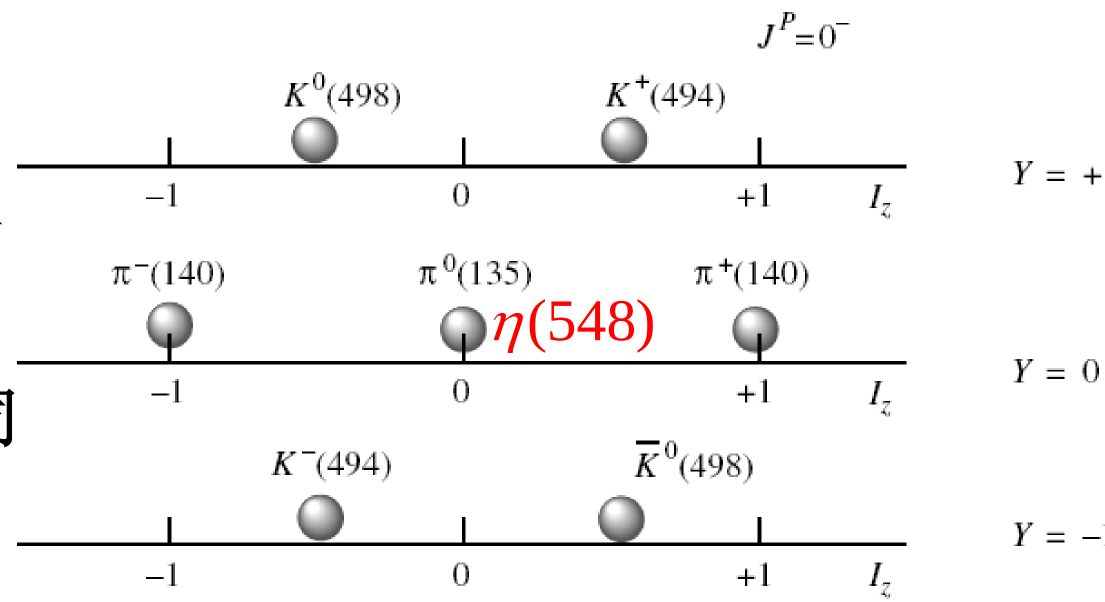
超荷相同的重子构成一个同位旋多重态

同一个同位旋多重态中的粒子质量相近

它们的反粒子也构成同位旋多重态

π介子和它的反粒子在同一个同位旋多重态

K介子和它的反粒子在不同的同位旋多重态



The pseudoscalar meson isospin multiplets.

- 同位旋守恒

$$\pi^- + p \to \pi^0 + n$$

强相互作用：总同位旋及其三分量都守恒 $\cancel{d + d \to {}^4He + \pi^0}$

电磁相互作用：仅同位旋三分量守恒 $\Sigma^0 \to \Lambda + \gamma$

弱相互作用：总同位旋及同位旋三分量都不守恒 $\Lambda \to p\pi$

同位旋守恒对强相互作用过程给出很强的限制和预言！

弹性散射		准弹性散射	
$\pi^+ p \to \pi^+ p$	σ_1		
$\pi^+ n \to \pi^+ n$	σ_2	$\pi^+ n \to \pi^0 p$	σ_7
$\pi^0 p \to \pi^0 p$	σ_3	$\pi^0 p \to \pi^+ n$	σ_8
$\pi^0 n \to \pi^0 n$	σ_4	$\pi^0 n \to \pi^- p$	σ_9
$\pi^- p \to \pi^- p$	σ_5	$\pi^- p \to \pi^0 n$	σ_{10}
$\pi^- n \to \pi^- n$	σ_6		

弹性散射		准弹性散射	
$\pi^+ p \to \pi^+ p$	σ_1		
$\pi^+ n \to \pi^+ n$	σ_2	$\pi^+ n \to \pi^0 p$	σ_7
$\pi^0 p \to \pi^0 p$	σ_3	$\pi^0 p \to \pi^+ n$	σ_8
$\pi^0 n \to \pi^0 n$	σ_4	$\pi^0 n \to \pi^- p$	σ_9
$\pi^- p \to \pi^- p$	σ_5	$\pi^- p \to \pi^0 n$	σ_{10}
$\pi^- n \to \pi^- n$	σ_6		

过程7，8互为逆过程；过程9，10互为逆过程，
时间反演不变

$$\sigma_7 = \sigma_8, \quad \sigma_9 = \sigma_{10}$$

强相互作用在同位旋空间转动下具有不变性：
I不变，I_3变号

$$\sigma_1 = \sigma_6, \quad \sigma_2 = \sigma_5, \; \sigma_3 = \sigma_4,$$

$$\sigma_7 = \sigma_{10} = \sigma_8 = \sigma_9$$

最多仅四个互相独立的截面

【讨论一】关于π-N散射的的进一步讨论

① 由同位旋为1和1/2的态合成后可能的同位旋为 3/2 和1/2，或者由群论的语言：

$$3 \otimes 2 = 4 \oplus 2$$

因此，利用C-G系数，所有的 $|\pi N\rangle$ 态都可以写成同位旋态 $|3/2\ I_3\rangle$ 和 $|1/2\ I_3\rangle$ 的叠加：

$$\left|1\ \ 1\right\rangle\left|\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\right\rangle = \left|\pi^{+}p\right\rangle = \left|\frac{3}{2}\ \ \frac{3}{2}\right\rangle$$

$$\left|1\ \ 1\right\rangle\left|\frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}\right\rangle = \left|\pi^{+}n\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{3}{2}\ \ \frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\right\rangle$$

$$\left|1\ \ 0\right\rangle\left|\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\right\rangle = \left|\pi^{0}p\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{3}{2}\ \ \frac{1}{2}\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\right\rangle$$

$$\left|1\ \ 0\right\rangle\left|\frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}\right\rangle = \left|\pi^{0}n\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{3}{2}\ \ -\frac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$\left|1\ \ -1\right\rangle\left|\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\right\rangle = \left|\pi^{-}p\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{3}{2}\ \ -\frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$\left|1\ \ -1\right\rangle\left|\frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}\right\rangle = \left|\pi^{-}n\right\rangle = \left|\frac{3}{2}\ \ -\frac{3}{2}\right\rangle$$

② 由体系在同位旋变换下不变

$$\langle I' I_3' | S | I\ I_3 \rangle = M_I \delta_{I'I} \delta_{I_3' I_3}$$

其中M_I 只与I 有关，与I_3无关。

这样以上反应过程的跃迁振幅可以由以下两个复振幅给出

$$M_{3/2}，\ M_{1/2}$$

例如：

$$\langle \pi^+ n | S | \pi^0 p \rangle$$

$$= \left(\left\langle \frac{3}{2}\ \ \frac{1}{2} \right| \frac{1}{\sqrt{3}} + \left\langle \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2} \right| \sqrt{\frac{2}{3}} \right) S \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2}\ \ \frac{1}{2} \right\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2} \right\rangle \right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3} (M_{3/2} - M_{1/2})$$

弹性散射		准弹性散射	
$\pi^+ p \to \pi^+ p$	σ_1		
$\pi^+ n \to \pi^+ n$	σ_2	$\pi^+ n \to \pi^0 p$	σ_7
$\pi^0 p \to \pi^0 p$	σ_3	$\pi^0 p \to \pi^+ n$	σ_8
$\pi^0 n \to \pi^0 n$	σ_4	$\pi^0 n \to \pi^- p$	σ_9
$\pi^- p \to \pi^- p$	σ_5	$\pi^- p \to \pi^0 n$	σ_{10}
$\pi^- n \to \pi^- n$	σ_6		

过程7，8互为逆过程；**过程9，10**互为逆过程，
时间反演不变

$$\sigma_7 = \sigma_8, \quad \sigma_9 = \sigma_{10}$$

强相互作用在同位旋空间转动下具有不变性：
I不变，**I**$_3$变号

$$\sigma_1 = \sigma_6, \quad \sigma_2 = \sigma_5, \; \sigma_3 = \sigma_4,$$

$$\sigma_7 = \sigma_{10} = \sigma_8 = \sigma_9$$

最多仅四个互相独立的截面

散射截面正比于跃迁振幅的平方，由同位旋空间转动不变性，要求四个跃迁振幅可以通过两个独立的同位旋跃迁振幅来表出：

$$M(1) = M(6) = M_{3/2}$$

$$M(2) = M(5) = \frac{1}{3}(M_{3/2} + 2M_{1/2})$$

$$M(3) = M(4) = \frac{1}{3}(2M_{3/2} + M_{1/2})$$

$$M(7) = M(8) = M(9) = M(10) = \frac{\sqrt{2}}{3}(M_{3/2} - M_{1/2})$$

其中，$M_{3/2}$ 和 $M_{1/2}$ 是总同位旋为**3/2**和**1/2**的跃迁振幅，它们都是复数，它们的绝对值以及相角差（**3**个独立参量）决定了各个截面

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 2\sigma_3 + \sigma_7$$

低能下共振态**Δ(1236)**，**I=3/2**，$\sigma_1 : \sigma_5 : \sigma_{10} = 9:1:2$

【讨论二】同位旋与C变换的相位约定

① 同位旋变换与角动量变换形式相同，对变换的相因子约定也采用与角动量变换相同约定 （**Condon & Shortley)**

$$\boxed{\begin{aligned} I^2 |I, I_3\rangle &= I(I+1) |I, I_3\rangle \\ I_3 |I, I_3\rangle &= I_3 |I, I_3\rangle \\ I_\pm |I, I_3\rangle &= [(I \mp I_3)(I \pm I_3 + 1)]^{1/2} |I, I_3 \pm 1\rangle \end{aligned}}$$

$$\boxed{\left\langle I', I_3' | I, I_3 \right\rangle = \delta_{I'I}\delta_{I_3' I_3}}$$

② C 变换可以：联系同一同位旋多重态间的两个态；

$$\pi^+ \longleftrightarrow \pi^-$$

联系不同同位旋多重态间的两个态

$$\mathrm{p} \longleftrightarrow \bar{\mathrm{p}}$$

需要选择相因子使得上面的约定没有冲突。

③ 按定义，C变换使同位旋3分量的本征值变号

$$I_3^C = CI_3C^{-1} = -I_3$$

由对易关系

$$I_3I_\pm - I_\pm I_3 = \pm I_\pm$$

可以得到

$$I_\pm^C \equiv CI_\pm C^{-1} = \alpha I_\mp$$

其中α可取 ±1，通常取 $\alpha = -1$。

$$\boxed{\begin{aligned} CI_3C^{-1} &= -I_3 \\ CI_\pm C^{-1} &= -I_\mp \\ CI_1C^{-1} &= -I_1 \\ CI_2C^{-1} &= +I_2 \end{aligned}}$$

④ 考虑核子和反核子态，如果安排

$$|\mathrm{p}\rangle = \left|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right\rangle \quad , \quad |\mathrm{n}\rangle = \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$$

则有：

$$\begin{aligned} I_+ C\,|\mathrm{p}\rangle &= -C I_-\,|\mathrm{p}\rangle \\ &= -C I_- \left|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right\rangle \\ &= -C \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = -C\,|\mathrm{n}\rangle \end{aligned}$$

$$\boxed{I_+\,|\bar{\mathrm{p}}\rangle = -\,|\bar{\mathrm{n}}\rangle \quad , \quad I_-\,|\bar{\mathrm{n}}\rangle = -\,|\bar{\mathrm{p}}\rangle}$$

需要如下的安排与**Condon&Shortley**的相因子约定一致

$$\left|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right\rangle = -\,|\bar{\mathrm{n}}\rangle \quad , \quad \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = +\,|\bar{\mathrm{p}}\rangle$$

⑤ 对于π 介子

$$C\left|\pi^0\right\rangle = +\left|\pi^0\right\rangle$$

是实验事实，不是约定。同位旋变换使具有不同电荷的态互相转换，这实际上意味着电荷已经不再是一个 superselection rule！根据以前的讨论，同一同位旋多重态中的态应该具有相同的*C*，*P*，*T* 相因子。

$$C\left|\pi^+\right\rangle = +\left|\pi^-\right\rangle \quad , \quad C\left|\pi^-\right\rangle = +\left|\pi^+\right\rangle$$

与Condon&Shortley的相因子约定一致的安排是

$$\boxed{|1,+1\rangle = -\left|\pi^+\right\rangle \quad , \quad |1,0\rangle = \left|\pi^0\right\rangle \quad , \quad |1,-1\rangle = \left|\pi^-\right\rangle}$$

§ 8. G 变换

- ***G* 变换的定义**

$$\boxed{\hat{G} = \hat{C} e^{-i\pi \hat{I}_2}}$$

- ***G* 变换的一些性质**

$$\begin{aligned}
\hat{F}_1(\beta) &\equiv e^{-i\beta \hat{I}_2} \hat{I}_1 e^{+i\beta \hat{I}_2} \\
\hat{F}_3(\beta) &\equiv e^{-i\beta \hat{I}_2} \hat{I}_3 e^{+i\beta \hat{I}_2} \\
\hat{F}_1(0) &= \hat{I}_1 \\
\hat{F}_3(0) &= \hat{I}_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\hat{F}_1(\beta)}{\mathrm{d}\beta} &= e^{-i\beta \hat{I}_2}(-i\hat{I}_2)\hat{I}_1 e^{+i\beta \hat{I}_2} + e^{-i\beta \hat{I}_2}\hat{I}_1(+i\hat{I}_2)e^{+i\beta \hat{I}_2} \\
&= i e^{-i\beta \hat{I}_2}\left[\hat{I}_1, \hat{I}_2\right] e^{+i\beta \hat{I}_2} = -\hat{F}_3(\beta) \\
\frac{\mathrm{d}\hat{F}_3(\beta)}{\mathrm{d}\beta} &= \hat{F}_1(\beta)
\end{aligned}$$

- 由上面的推导可以得到

$$\hat{F}_1(\beta) = \hat{I}_1 \cos\beta - \hat{I}_3 \sin\beta$$
$$\hat{F}_3(\beta) = \hat{I}_1 \sin\beta + \hat{I}_3 \cos\beta$$

$$\boxed{\begin{aligned} e^{-i\pi\hat{I}_2}\hat{I}_1 e^{+i\pi\hat{I}_2} &= -\hat{I}_1 \\ e^{-i\pi\hat{I}_2}\hat{I}_2 e^{+i\pi\hat{I}_2} &= +\hat{I}_2 \\ e^{-i\pi\hat{I}_2}\hat{I}_3 e^{+i\pi\hat{I}_3} &= -\hat{I}_3 \end{aligned}}$$

- 再考虑C 变换与同位旋变换的关系

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{C}\hat{I}_1\hat{C}^{-1} &= -\hat{I}_1 \\ \hat{C}\hat{I}_2\hat{C}^{-1} &= +\hat{I}_2 \\ \hat{C}\hat{I}_3\hat{C}^{-1} &= -\hat{I}_3 \end{aligned}}$$

- 可以得到

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{G}\hat{I}_1\hat{G}^{-1} &= \hat{I}_1 \\ \hat{G}\hat{I}_2\hat{G}^{-1} &= \hat{I}_2 \\ \hat{G}\hat{I}_3\hat{G}^{-1} &= \hat{I}_3 \end{aligned}}$$

这说明同位旋多重态经G变换后依然是同位旋的多重态。

一按定义可以得到

$$\widehat{G}^2 = \widehat{C}e^{-i\pi \widehat{I}_2}\widehat{C}e^{-i\pi \widehat{I}_2} = \widehat{C}^2 e^{-i2\pi \widehat{I}_2}$$

$$\boxed{\widehat{G}^2 = (-1)^{2I}}$$

《粒子物理与核物理讲座》2.7节

§9. 全同粒子交换变换

《粒子物理与核物理讲座》2.10 节

许容宗《核与粒子物理导论》6.1 节

全同粒子**不可分辨性**导致的对称性。变换是全同粒子交换变换。

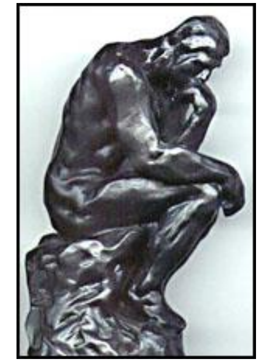
全同费米子组成的系统，遵循泡利不相容原理（同一单粒子态仅可占据一个粒子），系统总波函数对交换任意两个全同费米子反对称。

全同玻色子组成的系统，不受泡利不相容原理的限制。系统总波函数对交换任意两个全同玻色子对称。

推论：两个全同粒子组成的系统（无论是费米子还是玻色子），全同粒子交换对称性要求 $L+S$ 为偶！

广义全同粒子：同一个同位旋多重态中的粒子可认为是**同一个粒子**在同位旋空间中的不同态！

对称性
(Symmetries)



第三章结束