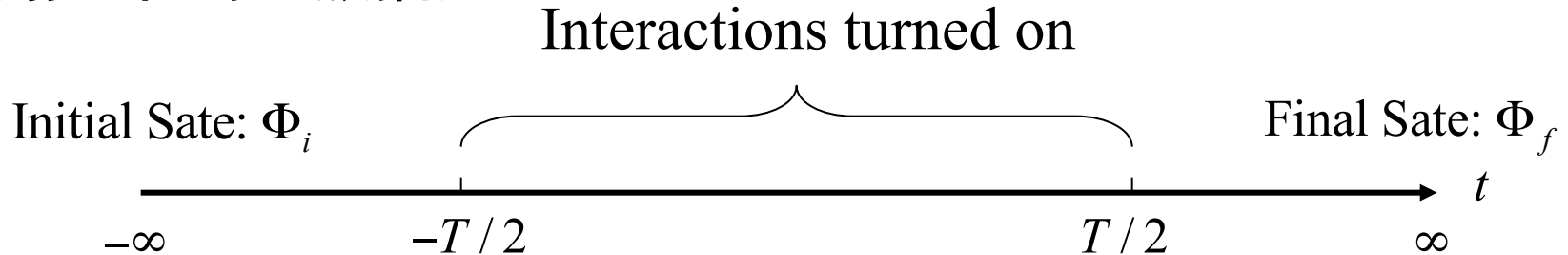


§4. 碰撞和衰变 (Collisions and Decays)

• 散射过程的一般描述



– 初、末态看作是无相互作用的

– 相互作用在 $[-T/2, T/2]$ 间加上

$$\mathcal{L}_I(x) \rightarrow f(t)\mathcal{L}_I(x) \quad \begin{aligned} f(t) &= 1 & t \in [-T/2, T/2] \\ &\rightarrow 0 & \text{otherwise} \end{aligned}$$

– 用S矩阵来联系初、末态

$$|\Phi_f\rangle = S|\Phi_i\rangle$$

设系统的一组正交、归一的完全集：



$$\langle i | j \rangle = \delta_{ij}, \sum_i |i\rangle \langle i| = I$$

对于任意初态，经散射后：

$$|\Phi_f\rangle = S|\Phi_i\rangle$$



经散射后测到态 $|j\rangle$ 的几率： $|\langle j | \Phi_f \rangle|^2 = |\langle j | S | \Phi_i \rangle|^2$

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_j |\langle j | \Phi_f \rangle|^2 = \sum_j \langle j | S | \Phi_i \rangle^* \langle j | S | \Phi_i \rangle \\ &= \sum_j \langle \Phi_i | S^\dagger | j \rangle \langle j | S | \Phi_i \rangle = \langle \Phi_i | S^\dagger S | \Phi_i \rangle \end{aligned}$$



$$\Rightarrow S^\dagger S = 1$$



定义 $S \equiv 1 + iT$

对任意两个态 $|a\rangle$ 和 $|b\rangle$, $\langle a|T|b\rangle$ 称为“跃迁振幅”。

由 S 矩阵的么正性, 可以得到“光学定理”:

$$\text{Im}\langle a|T|b\rangle = \frac{1}{2} \sum_i \langle i|T|b\rangle \langle i|T|a\rangle^*$$

• 在固有 Lorentz 变换 Λ 下, 如果态的变换关系是

$$|a'\rangle = U(\Lambda)|a\rangle$$

考虑到任意两个态之间的跃迁几率是一个不变量, 则

$$U(\Lambda)S U^{-1}(\Lambda) = S$$

这表明 S 矩阵是 Lorentz 协变的。

• 平面波的归一化问题

将 S 矩阵元 $S_{fi} = \langle \Phi_f | S | \Phi_i \rangle$ 与实验观测相联系时，需要仔细处理态的归一化问题。当

$$\langle \Phi_f | \Phi_f \rangle = \langle \Phi_i | \Phi_i \rangle = 1$$

S 矩阵元可以理解为跃迁振幅，而 $|S_{fi}|^2$ 理解为跃迁几率。

对于有确定动量的态（平面波），严格意义上是不能归一化的，这个问题尤其需要小心！通常将平面波归一化到

$$\langle p' | p \rangle = N \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p})$$

其中 N 是一个因子，在教科书、文献中有多种取法。最终的物理结果不依赖因子的取法。

- δ -函数 (复习)

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx$$



一些简单性质: (1) $\delta(-x) = \delta(x)$

$$(2) \quad \delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}$$

$$(3) \quad \delta(\varphi(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|\varphi'(x_i)|}$$

x_i 是 $\varphi(x)$ 的单根。

由傅立叶变换的性质, 可以得到

$$(4) \quad \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk$$

- 箱归一化

为了正确处理平面波的归一化问题，将波限制在有限的空间

$$V = L^3, \quad L \rightarrow \infty$$

周期性边条件要求动量只能取分立的值 

$$\vec{p} = \frac{2\pi}{L} (n_x, n_y, n_z)$$

这说明在动量空间，每个态占据的体积元是

$$\left(\frac{2\pi}{L} \right)^3 = \frac{(2\pi)^3}{V}$$

在 $p_x \rightarrow p_x + dp_x, p_y \rightarrow p_y + dp_y, p_z \rightarrow p_z + dp_z$ 动量间隔内态的数目是

$$\frac{V}{(2\pi)^3} d^3 p$$


- 在箱内， δ 函数可以表达成

$$\delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_V e^{i(\vec{p} - \vec{p}') \cdot \vec{x}} d^3x = \frac{V}{(2\pi)^3} \delta_{\vec{p}', \vec{p}}$$

如果定义

$$|p\rangle^{Box} = \left(\frac{(2\pi)^3}{VN} \right)^{1/2} |p\rangle$$

则得到一组正交归一的态



$${}^{Box} \langle p' | p \rangle^{Box} = \delta_{\vec{p}', \vec{p}}$$

用平面波作为初、末态时，跃迁振幅是

$$S_{fi}^{Box} = {}^{Box} \langle f | S | i \rangle^{Box} = \left(\frac{(2\pi)^3}{VN} \right)^{n_i + n_f / 2} \langle f | S | i \rangle$$

其中 n_i, n_f 分别是初、末态的粒子数目。

- 将 S 矩阵表达成

$$S \equiv 1 + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) M$$

当初、末态不相同，跃迁几率

$$\begin{aligned} P(i \rightarrow f) &= |S_{fi}^{Box}|^2 \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) \\ &\quad \times \left(\frac{(2\pi)^3}{VN} \right)^{n_i + n_f} |\langle f | M | i \rangle|^2 \\ &= \left(\frac{(2\pi)^3}{VN} \right)^{n_i + n_f} VT (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) |M_{fi}|^2 \end{aligned}$$

上式中利用了

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) = VT \quad \square$$

- 从具有确定动量的初态，跃迁到

$$p_x \rightarrow p_x + \mathrm{d}p_x, p_y \rightarrow p_y + \mathrm{d}p_y, p_z \rightarrow p_z + \mathrm{d}p_z$$

动量间隔内的微分跃迁几率


$$\begin{aligned} \mathrm{d}P(i \rightarrow f) &= \left(\frac{(2\pi)^3}{VN} \right)^{n_i + n_f} \textcolor{red}{VT} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) |M_{fi}|^2 \\ &\quad \times \left(\frac{V}{(2\pi)^3} \right)^{n_f} \prod_{j=1}^{n_f} \mathrm{d}^3 p_j \quad \text{☰} \\ &= \left(\frac{(2\pi)^3}{VN} \right)^{n_i} \textcolor{red}{VT} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) |M_{fi}|^2 \prod_{j=1}^{n_f} \frac{\mathrm{d}^3 p_j}{N} \end{aligned}$$

- 如果取归一化因子为

$$N = (2\pi)^3 2E_{\vec{p}} \rightarrow \langle p' | p \rangle = (2\pi)^3 2E_{\vec{p}} \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p})$$

这时跃迁几率的表达式形式上比较简单

$$dP(i \rightarrow f) = \prod_{i=1}^{n_i} \frac{1}{V 2E_i} \textcolor{red}{VT} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) |M_{fi}|^2 \prod_{j=1}^{n_f} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j}$$

上式的每一项、包括归一化条件都是Lorentz不变的！以后不特别指明，本课程采用此归一化方案。

- 其它常见的归一化，如

$$\langle p' | p \rangle = \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p})$$

跃迁几率中的各项可能不是Lorentz不变的，但最终跃迁几率本身是不变的。

• **n 体末态相空间**



$$dP(i \rightarrow f) = \prod_{i=1}^{n_i} \frac{1}{V 2E_i} \textcolor{red}{VT} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) |M_{fi}|^2 \prod_{j=1}^{n_f} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j}$$

其中

$$d\Phi_n = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) \prod_{j=1}^n \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j}$$

称为 **n 体末态相空间体积元**。其Lorentz不变性可以由下面的推导得出：☐

$$\delta(p^2 - m^2) \theta(E) d^4 p = \delta(p^2 - m^2) \theta(E) dE d^3 p$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dE \delta(p^2 - m^2) \theta(E) d^3 p = \int_0^{\infty} dE \delta(E^2 - p^2 - m^2) d^3 p \quad \square$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{dE^2}{2E} \delta(E^2 - p^2 - m^2) d^3 p = \frac{d^3 p}{2\sqrt{p^2 + m^2}}$$

相空间的大小直接决定着反应几率的大小。一般情况下，这个积分的计算相当复杂。如果所有末态粒子的质量都为零， n 体末态相空间不变体积为 Φ_n ，则有

$$\Phi_2 = (2\pi)^4 \frac{1}{4(2\pi)^5}, \Phi_3 = (2\pi)^4 \frac{s}{32(2\pi)^7},$$

$$\frac{\Phi_3}{\Phi_2} = \frac{s}{32\pi^2}.$$

对于一般的 n ，可以导出递推公式：

$$\frac{\Phi_{n+1}}{\Phi_n} = \frac{s}{16\pi^2 n(n-1)},$$

由此得到普遍公式

$$\Phi_n = \frac{(2\pi)^4}{4(2\pi)^5 (n-1)!(n-2)!} \left(\frac{s}{16\pi^2} \right)^{n-2}.$$

Φ_n 的量纲随 n 不同而不同。为了便于比较，可以定义无量纲化的 n 体末态相空间不变体积 Φ'_n 为

$$\Phi'_n = \frac{\Phi_n}{s^{n-2}},$$

这样 Φ'_n 的递推公式和表达式中都不再出现 s 了。

末态粒子的质量为零时无量纲化的三体相空间约为无量纲化的二体相空间的 **$1 / 315.8$** 。

一般说来，末态粒子增加一个，相应地无量纲化的相空间要减少两个数量级，这是在多体衰变和多粒子产生过程中，产生的粒子越多，概率越小的运动学原因。

- 衰变宽度

$$dP(i \rightarrow f) = \prod_{i=1}^{n_i} \frac{1}{V 2E_i} \textcolor{red}{VT} |M_{fi}|^2 d\Phi_{n_f}$$

$n_i = 1$ 时, 有

$$\frac{dP(i \rightarrow f)}{\textcolor{red}{T}} = \frac{1}{2E_i} |M_{fi}|^2 d\Phi_{n_f}$$

表示单位时间的跃迁几率。考虑到箱归一化后在体积 V 中的粒子数是 1, 再由衰变宽度的定义:

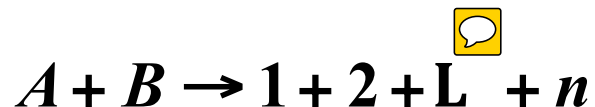
$$\frac{dN(t)}{N(t)dt} = -\Gamma$$

因此粒子衰变的微分宽度就是:

$$d\Gamma = \frac{dP(i \rightarrow f)}{\textcolor{red}{T}} = \frac{1}{2E_i} |M_{fi}|^2 d\Phi_{n_f}$$

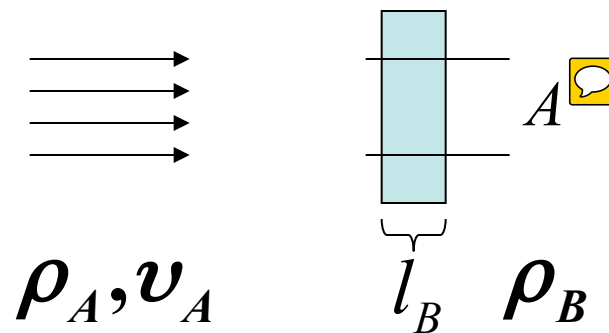
• 散射截面

考虑打靶过程 (A – 入射粒子, B – 靶) :




在时间 T 内的反应数

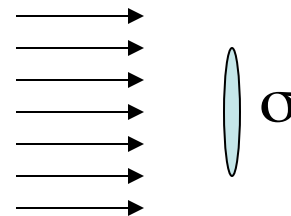
$$N_{\text{int}} \propto \rho_A v_A T \rho_B l_B A$$



散射截面定义为:

$$\sigma \equiv \frac{N_{\text{int}}}{\rho_A v_A T \rho_B l_B A}$$

截面具有面积的量纲, 可以看成是“有效横截面积”。 



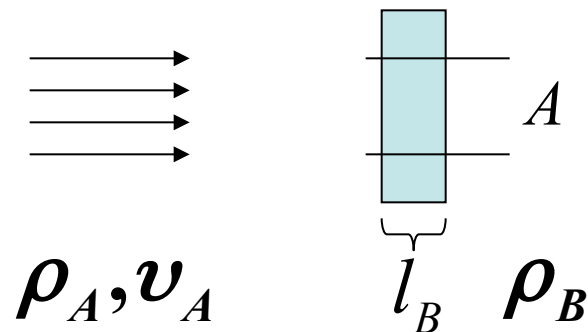
- 采用平面波和箱归一化时，对

$$dP(i \rightarrow f) = \frac{1}{V 2E_A} \frac{1}{V 2E_B} \textcolor{red}{VT} |M_{fi}|^2 d\Phi_{n_f}$$

应做如下的理解：

$$(1) \quad l_B = L, \quad A = L^2$$

$$(2) \quad \rho_A = \rho_B = \frac{1}{V}$$



(3) 一般情况

$$v_A = \frac{p_A}{E_A} \rightarrow \left| \frac{\vec{p}_A}{E_A} - \frac{\vec{p}_B}{E_B} \right|$$

- 最后，散射的微分截面可以写成

$$d\sigma = \frac{1}{2E_A 2E_B \left| \frac{\vec{p}_A}{E_A} - \frac{\vec{p}_B}{E_B} \right|} \left| \langle p_A p_B | M | p_1 p_2 \cdots \rangle \right|^2 d\Phi_{n_f}$$

以下说明对散射截面和衰变宽度都适用：

- 如果末态有 m 个全同粒子，则上述需乘以因子

$$\frac{1}{m!}$$

- 对有自旋的情形，对初态非极化情形：求平均
对末态不测量极化：求和

【例】 对于 $A + B \rightarrow C + D$, 在质心系中有:

$$s = (E_A + E_B)^2$$

$$\vec{p}_A = -\vec{p}_B = \vec{p}_i, \quad \vec{p}_C = -\vec{p}_D = \vec{p}_f$$

$$p_i = \frac{\left[(s - (m_A + m_B)^2)(s - (m_A - m_B)^2) \right]^{1/2}}{2\sqrt{s}}$$

$$p_f = \frac{\left[(s - (m_C + m_D)^2)(s - (m_C - m_D)^2) \right]^{1/2}}{2\sqrt{s}}$$

由此:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{p_f}{p_i} |M_{fi}|^2$$

$$d\sigma = \frac{1}{2E_A 2E_B} \left| \frac{\vec{p}_A}{E_A} - \frac{\vec{p}_B}{E_B} \right| \left| \langle p_A p_B | M | p_C p_D \rangle \right|^2 d\Phi_{CD}$$

III

$$|M_{fi}|^2$$

$$4E_A E_B \left(\frac{1}{E_A} + \frac{1}{E_B} \right) P_i = 4\sqrt{s} P_i$$

$$d\Phi_{CD} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_i - P_f) \frac{d^3 p_C}{(2\pi)^3 2E_C} \cdot \frac{d^3 p_D}{(2\pi)^3 2E_D}$$

$$E_C = (m_C^2 + p_C^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$E_D = (m_D^2 + p_D^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\delta^{(3)}(\vec{p}_C + \vec{p}_D) \delta(E_C + E_D - \sqrt{s})$$

Centre-of-mass frame

$$= (2\pi)^4 \cdot \frac{1}{4(2\pi)^6} \cdot \delta(E_C + E_D - \sqrt{s}) \frac{d^3 p_C}{(m_C^2 + p_C^2)^{\frac{1}{2}} (m_D^2 + p_D^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$d^3 p_C \rightarrow p_C^2 dp_C d\Omega$$

$$\delta(E_C + E_D - \sqrt{s}) dp_C = \frac{1}{\frac{d(E_C + E_D - \sqrt{s})}{dp_C}} \bigg|_{p_C = p_f} = \frac{E_C E_D}{p_f \sqrt{s}}$$

$$= \frac{1}{16\pi^2} \cdot \frac{p_f}{\sqrt{s}} d\Omega$$

【例】三体衰变, 在质心系

$$M \rightarrow m_1 + m_2 + m_3$$

$$0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$$

$$d\Gamma = \frac{1}{2M} |M_{fi}|^2 d\Phi_{n_f}$$

末态三粒子的动量在同一平面。假设衰变振幅与衰变平面的取向无关, 则有

$$d\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{8M} |M_{fi}|^2 dE_1 dE_2$$

或者

$$d\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{32M^3} |M_{fi}|^2 dm_{12}^2 dm_{23}^2$$

$$m_{12}^2 = (p_1^\mu + p_2^\mu)^2 = M^2 + m_3^2 - 2ME_3$$

$$m_{13}^2 = (p_1^\mu + p_3^\mu)^2 = M^2 + m_2^2 - 2ME_2$$

$$m_{23}^2 = (p_2^\mu + p_3^\mu)^2 = M^2 + m_1^2 - 2ME_1$$

$$m_{12}^2 + m_{13}^2 + m_{23}^2 = M^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2$$

积分区间见下图 - Dalitz Plot.

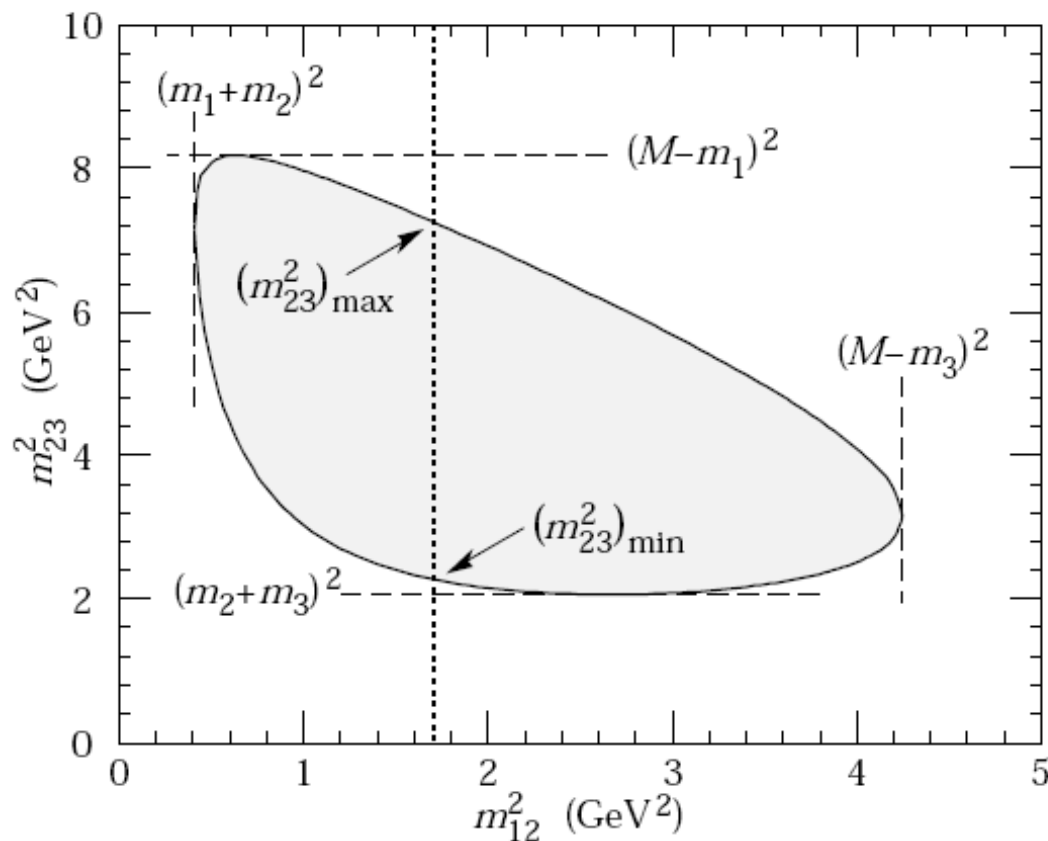


Figure 38.3: Dalitz plot for a three-body final state. In this example, the state is $\pi^+\bar{K}^0 p$ at 3 GeV. Four-momentum conservation restricts events to the shaded region.

实验中每一个事例对应Dalitz图上的一个点，图上点的密度分布直接反映了衰变（或到三体末态的反应）机制。

$$d\Phi_3 = (2\pi)^4 \delta^{(3)}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3) \delta(E_1 + E_2 + E_3 - M) \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \cdot \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \cdot \frac{d^3p_3}{(2\pi)^3 2E_3}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^5 8} \delta(E_1 + E_2 + \sqrt{m_3^2 + (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2} - M) \frac{d^3p_1 d^3p_2}{E_1 E_2 E_3}$$

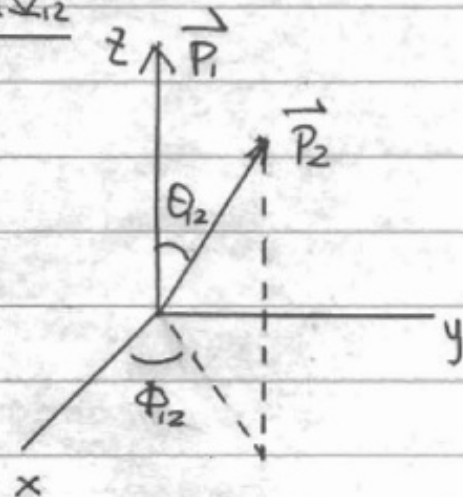
$$= \frac{1}{(2\pi)^5 8} \delta(\dots) \frac{p_1^2 dp_1 d\Omega_1 p_2^2 d\Omega_{12}}{E_1 E_2 E_3}$$

$$d\Omega_1 = d\cos\theta_1 d\phi_1$$

$$d\Omega_{12} = d\cos\theta_{12} d\phi_{12}$$

积分掉 $d\Omega_1 d\phi_{12} \rightarrow 4\pi \cdot 2\pi$

$$E_3 = (m_3^2 + p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 \cos\theta_{12})^{1/2}$$



积分掉 $d\cos\theta_{12}$

$$\delta(\dots) d\cos\theta_{12} \rightarrow \frac{1}{\frac{dE_3}{d\cos\theta_{12}} \Big|_{E_1 + E_2 + E_3 = M}} = \frac{E_3}{p_1 p_2}$$

$$d\Phi_3 = \frac{1}{(2\pi)^3 4} \frac{p_1 dp_1 p_2 dp_2}{E_1 E_2} = \frac{1}{(2\pi)^3 4} dE_1 dE_2$$