对称性
(Symmetries)

§ 1. 对称性
§ 2. 正反粒子变换*C*
§ 3. 宇称（空间反射变换*P*）
§ 4. 时间反演变换T
§ 5. *CPT*定理
§ 6. 重子数和轻子数
§ 7. 同位旋
§ 8. *G*宇称
§ 9. 全同粒子交换变换

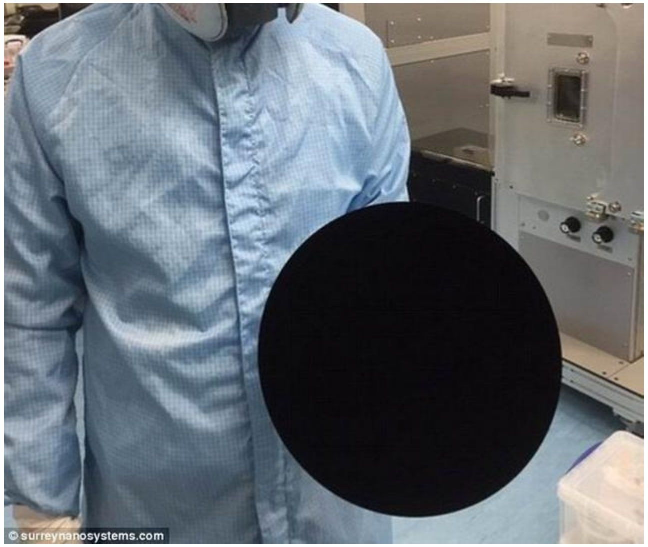
§1. 对称性
（Symmetries）

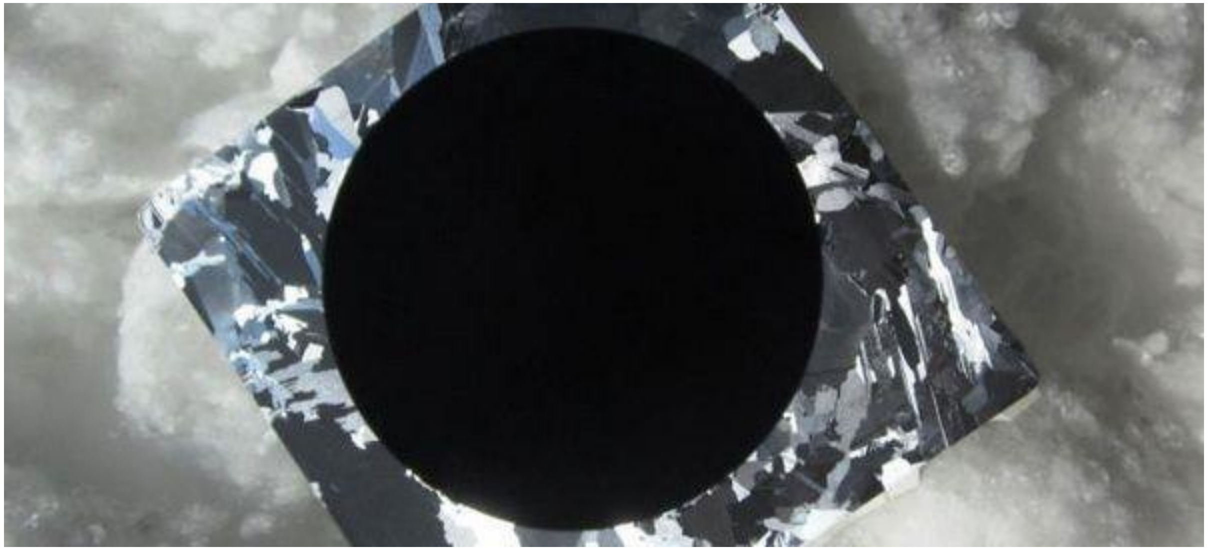
- 对称和破缺

“一切对称性的根源在于对于某些基本量的不可观测性...

所有的对称性原理的正确性都依赖于不可观测量的理论假设，所以一旦一个不可观测量被认为实际上是可观测量时，就产生对称性的破坏。”

——李政道《粒子物理和场论简引》


© surreynanosystems.com



• 变换和对称的分类

变换：将两种情况间通过确定的规则对应起来的关系，称从一种情况到另一种情况的变换

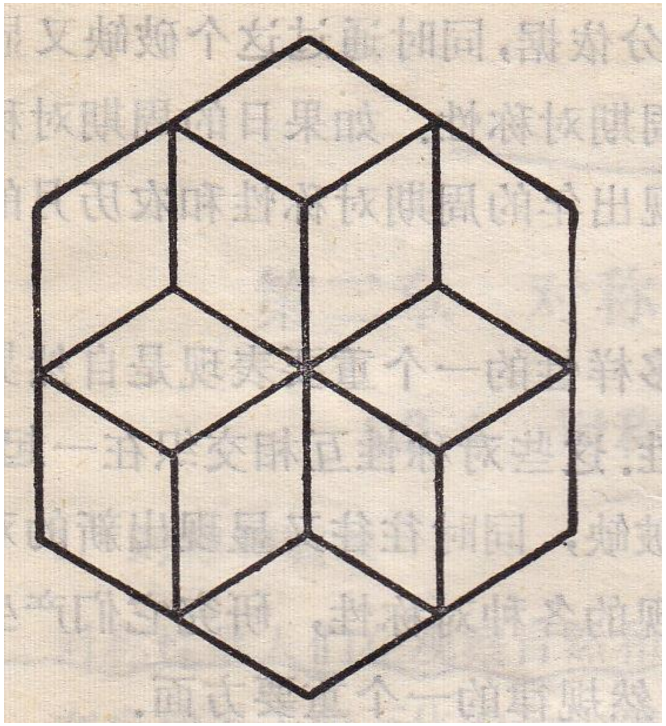
对称性：如果某一现象或系统在某一变换下不改变，则说该现象或系统具有该变换所对应的对称性

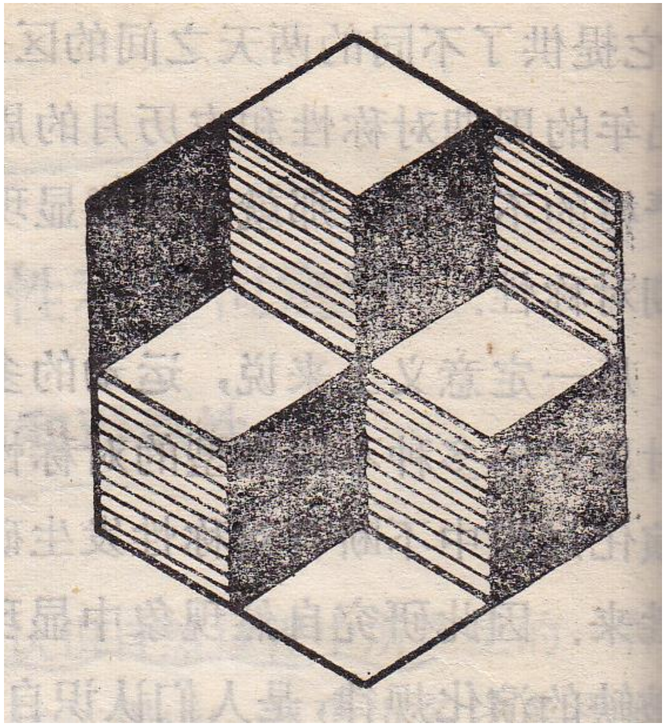
可根据变换所涉及的对象以及变换的性质对对称性进行分类：

– 空间对称性：对空间性质进行变换所对应的对称性
– 时间对称性：对时间性质进行变换所对应的对称性
– 内部对称性：通过空间和时间相独立的其它性质的变换所体现的对称性

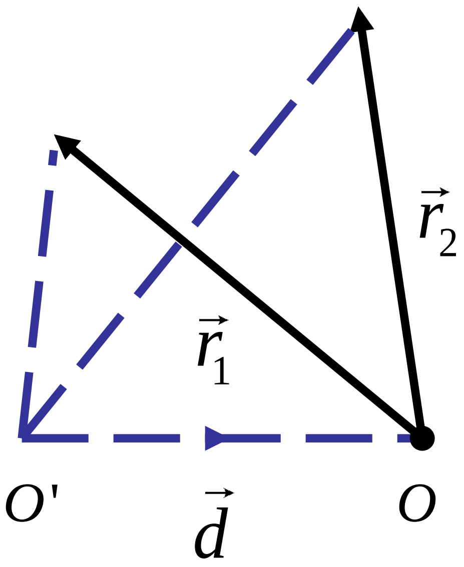
某个基本量不可测 <=> 某种对称性 <=> 关于此基本量的变换不变性

【例】





【例】考虑势场中两个粒子的运动



绝对位置不可测量：可以任意选择原点“O”

因此，在变换

$$\vec{r}_1 \to \vec{r}_1 + \vec{d},\ \ \vec{r}_2 \to \vec{r}_2 + \vec{d}$$

两个粒子间的相互作用势能是不变的。由此

$$V = V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

由 $\vec{F} = -(\nabla_1 + \nabla_2)V = 0$ 得到系统动量守恒。

几点启示：

1. 不可测量的物理假设；

2. 相关数学变换下所蕴涵的不变性；

3. 守恒定律。

参考
高崇寿 第2.3节

• 经典物理中的对称性与守恒定律

Nöther's theorem：如果运动规律在某一不明显依赖于时间的变换下具有不变性，必相应存在一个守恒定律。

在经典物理学里，质点系统运动规律通过变分原理表出：

$$\delta s = \int \delta L(q_i, \dot{q}_i) dt = 0$$

变分给出运动方程：

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right]$$

如果运动规律在某一不明显依赖于时间的连续变换下不变，这个变换用一连续参量ξ来描写，它直接施于对质点系统运动描写的广义坐标q_i，运动规律的不变性表示为

$$\delta s=\int\sum_i\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial \xi}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \xi}\right]\delta\xi dt$$

$$=\int\frac{d}{dt}\sum_i\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial q_i}{\partial \xi}\right]\delta\xi dt=0$$

要求等式对参量ξ的任意变分都成立，这要求，

$$\frac{d}{dt}\sum_i\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial q_i}{\partial \xi}\right]=0$$

这表明力学量

$$F=\sum_i\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial q_i}{\partial \xi}\right]$$

是守恒量

如果保持运动规律不变的连续变换是直接施于时间的（如时间平移），

$$\delta s = \int \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right] dt$$

$$\delta q_i = \frac{\partial q_i}{\partial \xi} \delta \xi \qquad \delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial q_i}{\partial \xi} \delta \xi \right] = \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \xi} \delta \xi + \frac{\partial q_i}{\partial \xi} \frac{d}{dt} (\delta \xi)$$

$$\delta s = \int \left[\frac{dL}{dt} \frac{\partial t}{\partial \xi} - \frac{d}{dt} \left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \frac{\partial t}{\partial \xi} \right] \right] \delta \xi dt$$

对时间平移不变性， $t = t' + \xi$ $\quad \frac{\partial t}{\partial \xi} = 1$

$\delta s = 0$ 给出能量守恒定律 $\quad \frac{dH}{dt} = 0 \quad H = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L$

• 量子力学中的对称变换

根据前面的讨论，对于一个量子体系来说，对称性问题的研究就表现为对于一个特定的变换

体系的状态		变换		变换后体系的状态
$\{\psi\}$	$\longrightarrow$	U	$\longrightarrow$	$\{\psi'\}$

是否具有可观察效应的问题。如果没有可观察效应，则体系在 U 变换下不变，也就是具有 U 变换下的对称性。

对于体系的任意两个态，在 U 变换下：

$$|\psi_1'\rangle = U|\psi_1\rangle,\quad |\psi_2'\rangle = U|\psi_2\rangle$$

没有可观察效应意味着：

$$|\langle\psi_1'|\psi_2'\rangle|^2 = |\langle U\psi_1|U\psi_2\rangle|^2 = |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2$$

这时 U 称为对称变换。

- **Wigner 定理**

证明见：S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Vol. I, 2.2*

$$|\langle\psi_1'|\psi_2'\rangle|^2=|\langle U\psi_1|U\psi_2\rangle|^2=|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2$$

满足以上条件的变换***U***，或者是 *Unitary and Linear*

$$\langle U\Psi|U\Phi\rangle=\langle\Psi|\Phi\rangle$$

$$U(a\Psi+b\Phi)=aU\Psi+bU\Phi$$

或者是 *Anti-unitary and Anti-linear*

$$\langle U\Psi|U\Phi\rangle=\langle\Psi|\Phi\rangle^*$$

$$U(a\Psi+b\Phi)=a^*U\Psi+b^*U\Phi$$

两种情形都有

$$U^+U=1,\quad U^+=U^{-1}$$

- 连续变换：如果一组变换可以用一个实连续参量描写

$$U = U(\xi)$$

满足：

$$\boxed{\begin{aligned} &U(\xi)U(\eta) = U(\xi+\eta) \\ &U(0) = 1 \end{aligned}}$$

则称*U*为连续变换。显然，

1.连续变换只能是幺正变换；

2.连续变换可以写成指数形式

$$U(\xi) = e^{i\xi L}$$

***L*为厄米算符。**

【例】一维空间平移变换。对于无穷小平移变换

$$\psi(x) \to \psi(x+dx) = \psi(x) + \frac{d\psi(x)}{dx}dx$$

$$= (1 + dx i\hat{p}_x)\psi(x)$$

$$\hat{p}_x = -i\frac{d}{dx}$$

对于任何有限变换，可以看成许多无穷小变换的和效果

$$\psi(x+\Delta x) = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{\Delta x}{n} i\hat{p}_x)^n \psi(x)$$

$$= e^{i\Delta x \hat{p}_x}\psi(x)$$

因此有：

$$U(\Delta x) = e^{i\Delta x \hat{p}_x}$$

- **Nöther’s theorem：** 如果运动规律在一不明显依赖时间的变换下具有不变性，必相应存在一个守恒定律。

对于连续变换的情形：

$$U(\xi) = e^{i\xi L}$$

运动规律在变换下具有不变性，意味着：

$$UHU^{-1} = H \to [H, L] = 0$$

因此守恒量就是

$$L = -i \frac{\partial}{\partial \xi} U(\xi) \Big|_{\xi=0}$$

- 能量、动量和角动量

  – 空间平移不变和动量守恒：

$$U(\Delta\vec{r}) = e^{i\Delta\vec{r}\cdot\vec{p}}, \quad \vec{p} = -i\nabla$$

  – 时间平移不变和能量守恒：

$$U(\Delta t) = e^{i\Delta t H}$$

  – 空间转动不变和角动量守恒：

$$U(\Delta\vec{\theta}) = e^{i\Delta\vec{\theta}\cdot\vec{J}}$$

这些对称性是属于场和粒子的时空间性质的变换，称为时空对称性，相应的守恒量称为时空对称性守恒量。

- 电荷

  – 实验上以极高的精确度证明电荷是守恒的，如

$$\frac{\Gamma(n \to p\nu_e \bar{\nu}_e)}{\Gamma(n \to all)} < 8 \times 10^{-27} \quad (CL = 68\%)$$

如果电荷是守恒的，则带电的最轻粒子（电子）就是稳定的：

$$\tau_{\mathrm{e}} > 4.6 \times 10^{26}\mathrm{yr} \ \ (CL = 90\%)$$

如果以 ***e*** 为电荷的单位，定义“电荷算符”

$$\hat{\mathrm{Q}}|\psi\rangle = Q|\psi\rangle, \quad Q = \text{态中所有粒子电荷的代数和}$$

则运动方程在以下变换下应是不变的：

$$U(\xi) = e^{i\xi\hat{Q}}, \quad \xi\text{：任意实数}$$

♣ 实验上发现电荷是“量子化”的。

♣ 由于电荷的大小直接决定了电磁作用的强度，电荷的数值是可以观测的。

FERMIONS	matter constituents spin = 1/2, 3/2, 5/2, ...				
Leptons spin = 1/2			**Quarks** spin = 1/2		
Flavor	Mass GeV/c^2	Electric charge	Flavor	Approx. Mass GeV/c^2	Electric charge
ν_e electron neutrino	$<1\times10^{-8}$	0	u up	0.003	2/3
e electron	0.000511	−1	d down	0.006	−1/3
ν_μ muon neutrino	<0.0002	0	c charm	1.3	2/3
μ muon	0.106	−1	s strange	0.1	−1/3
ν_τ tau neutrino	<0.02	0	t top	175	2/3
τ tau	1.7771	−1	b bottom	4.3	−1/3

基本粒子的电荷

BOSONS	force carriers spin = 0, 1, 2, ...				
Unified Electroweak spin = 1			**Strong (color)** spin = 1		
Name	Mass GeV/c^2	Electric charge	Name	Mass GeV/c^2	Electric charge
γ photon	0	0	g gluon	0	0
W^-	80.4	−1			
W^+	80.4	+1			
Z^0	91.187	0			

- 微观物理学守恒量的一般性质
  - 有无经典对应

    有经典对应：能量、动量、角动量、电荷等

    无经典对应：同位旋、奇异数、粲数、底数、轻子数、重子数、*P*宇称、*C*宇称、*G*宇称、*CP*宇称。
  - 相加性和相乘性

    相加性：复合体系守恒量是各组分守恒量代数和

    能量、动量、角动量、电荷、同位旋、奇异数、粲数、底数、轻子数、重子数...

    相乘性：复合体系守恒量是各组分守恒量乘积

    *P*宇称、*C*宇称、*G*宇称、*CP*宇称
  - 严格守恒和近似守恒

    严格守恒：能量、动量、角动量、电荷等

    近似守恒：同位旋、奇异数、*P*宇称、*C*宇称、*CP*宇称等

分立变换对称性
(Discrete Symmetries)

§ 2.正反粒子变换（C）

§ 3.宇称（空间反射变换 *P*）

§ 4. 时间反演（T）和*CPT* 定理

•分立变换的一般性质

－分立变换不能用参量的连续变换来描写，因此要讨论分立变换本身。只考虑幺正变换的情形。

如果分立变换U下H不变：

$$UHU^{-1}=H\rightarrow[U,H]=0$$

说明U本身就是一个守恒量。

－如果系统还存在一个相加守恒量I，则

$$Ue^{i\xi I}$$

也是一个守恒量。这就对每个相乘守恒量的定义带来不确定性，必须做约定。

§ 2. 正反粒子变换 C

- 正反粒子变换

正反粒子变换C，作用在一个粒子态上，把粒子变成其反粒子，并保持空间、时间坐标和自旋不变

粒子的所有“荷”的符号在C变换下反号，如电荷、重子数、轻子数、奇异数，故称为“荷共轭”（**Charge conjugate**）

考察一个粒子的态 $|A\rangle$，其对应的反粒子态 $|\bar{A}\rangle$，C变换表示为

$$C|A\rangle = C'(A)|\bar{A}\rangle$$

$C'(A)$ 为绝对值为1的数，称为态 $|A\rangle$ 的C变换相因子

对于多个粒子A, B, C, ...组成的系统，C变换表示为

$$C|ABC\cdots\rangle = C'(A)C'(B)C'(C)\cdots|\overline{ABC\cdots}\rangle$$

- **C变换性质**

① 由定义C变换满足$C^2=1$

$$C\left|A\right\rangle = C'(A)\left|\bar{A}\right\rangle,\ C\left|\bar{A}\right\rangle = C'(\bar{A})\left|A\right\rangle$$

$$C^2\left|A\right\rangle = CC'(A)\left|\bar{A}\right\rangle = C'(A)C'(\bar{A})\left|A\right\rangle$$

$$C'(A)C'(\bar{A}) = 1$$

$$C'(\bar{A}) = C'(A)^*$$

② 如果**Q**是一内部相加性守恒量，$\left|A\right\rangle$ 为**Q**的任意本征态

$$QC\left|A\right\rangle = QC'(A)\left|\bar{A}\right\rangle = -Q'(A)C'(A)\left|\bar{A}\right\rangle$$

$$= -Q'(A)C\left|A\right\rangle = -CQ\left|A\right\rangle$$

即 $$(QC+CQ)\left|A\right\rangle = 0$$

任意态可由***Q***本征态展开 $$QC+CQ=0$$

所有内部相加性守恒量都与*C*变换反对易，只有所有内部相加性守恒量取值为0的态才同时为*C*本征态

也就是说，只有纯中性粒子存在*C* 宇称

由于$C^2=1$，*C*宇称的值取为+1或-1

光子：运动状态由电磁场矢量A_μ来描写，它们满足Maxwell 方程：

$$\Box A_\mu = 4\pi j_\mu$$

在*C*变换下，一切电流、电荷都反号，场量A_μ也随之改号，因此光子的*C*宇称为-1

$$C'(\gamma) = -1$$

π^0介子：也是纯中性粒子，其*C*宇称可由*C*宇称守恒确定

$$\pi^0 \to \gamma\gamma$$

电磁相互作用在*C*变换下不变，因此

$$C'(\pi^0) = C'(\gamma)C'(\gamma) = 1$$

③ 一对正反粒子（费米子或玻色子）组成的纯中性系统，正反粒子自旋之和为S，相对轨道角动量为L，系统的C宇称（在两粒子质心系）为

$$C' = (-1)^{L+S}$$

零自旋的介子-反介子（m^+,m^-）系统（例如π^+, π^-）：

C宇称对系统的变换与P宇称相同

$$C\left|m^+,m^-\right\rangle = (-1)^L\left|m^+,m^-\right\rangle$$

自旋为1的介子-反介子（m^+,m^-）系统：

C宇称对系统的变换除了空间反射之外，还要交换自旋

总自旋可以为0, 1, 2：

当总自旋为0和2时，波函数对自旋交换对称

当总自旋为1时，波函数对自旋交换反对称

$$C\left|m^+,m^-\right\rangle = (-1)^{L+S}\left|m^+,m^-\right\rangle$$

- 【例】中心力场波函数

$$H = -\frac{\nabla^2}{2m} + V(r)$$

$$\psi_{nlm}(\vec{r}) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \phi)$$

在空间反射变换下

$$\begin{aligned} r &\rightarrow r \\ \theta &\rightarrow \pi - \theta \\ \phi &\rightarrow \phi + \pi \end{aligned}$$

$$\boxed{\psi_{nlm}(-\vec{r}) = (-1)^l \psi_{nlm}(\vec{r})}$$

因此量子数 {*nlm*} 确定的态也具有确定的宇称。

自旋为1/2的费米子-反费米子（$f,\bar{f}$）系统：

总自旋可以为0, 1：

当总自旋为0时，波函数对自旋交换反对称
当总自旋为1时，波函数对自旋交换对称

费米子-反费米子具有相反的内禀C变换相因子

参考
M. Thomson
Section 4.7.5

$$C\left|f,\bar{f}\right\rangle=(-1)^{L+S}\left|f,\bar{f}\right\rangle$$

一对正反粒子（费米子或玻色子）组成的纯中性系统，正反粒子自旋之和为S，相对轨道角动量为L，系统的C宇称（在两粒子质心系）为

$$C'=(-1)^{L+S}$$

在粒子物理对称性分析中经常使用！

- *C*变换不变和*C*宇称守恒

强相互作用和电磁相互作用在*C*变换下不变。

—通过*C*变换相联系的两个过程规律和行为相同

如**K*+**粒子的质量、衰变方式、宽度等与**K*-**粒子完全相同

—如果初态是*C*变换的本征态，则末态也是*C*变换的本征态，有和初态相同的*C*宇称。

$$\pi^0 \to \gamma\gamma \qquad \cancel{\pi^0 \to \gamma\gamma\gamma}$$

e^+,e^-组成电子偶素，如果L=0，

总自旋S=0，C'=+1，可以衰变到两个光子

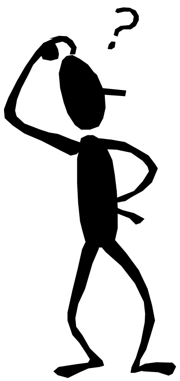
总自旋S=1，C'=-1，可以衰变到三个光子

【讨论一】"Superselection rule"和C 宇称的任意性

对任意两个态，在C 变换下

$$C|A\rangle = C'(A)|\bar{A}\rangle, \quad C|B\rangle = C'(B)|\bar{B}\rangle$$

$\boxed{\textit{C'(A)}\text{和}\textit{C'(B)}\text{是完全任意的吗？}}$



$$|AB\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|A\rangle + |B\rangle), \quad |\overline{AB}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|\bar{A}\rangle + |\bar{B}\rangle)$$

由于 $|\overline{AB}\rangle$ 是 $|AB\rangle$ 的反粒子态，因此有：

$$C|AB\rangle = C'(AB)|\overline{AB}\rangle = C'(AB)\frac{1}{\sqrt{2}}(|\bar{A}\rangle + |\bar{B}\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(C'(A)|\bar{A}\rangle + C'(B)|\bar{B}\rangle)$$

由此可以得到：

$$\boxed{C'(AB)=C'(A)=C'(B)}$$

因此C宇称的相因子并不是完全任意的，对一个态确定后，其它的态也就确定了。

但如果存在“superselection rule”，由于此时不能将不同电荷、重子数，...的态叠加在一起，以上结论应修改为具有相同电荷、重子数，...的态具有相同的C宇称相因子。

具有不同“superselection rule”的态C宇称相因子之间的不确定性可以通过具体的约定来去除。

以上讨论也可以应用到其它分立变换的情形，如 P 变换。

【讨论二】近似对称变换的定义

实验上发现C变换并不是一个严格的对称性。考虑到对称性变换是定义在态空间上的（反）线性（反）么正算符，如果体系并不存在这样的对称性，导致对称变换算符的定义困难。

如，对中微子，由于不存在严格意义上的反中微子，

$$C|\nu\rangle = ?$$

通常的做法是将系统的Hamiltonian分成两部分：

$$H = H_0 + H_w$$

其中H_0是对称的部分，这样对称变换就定义在H_0本征态所张成的Hilbert空间。