粒子物理与核物理实验中的数据分析

杨振伟 朱相雷

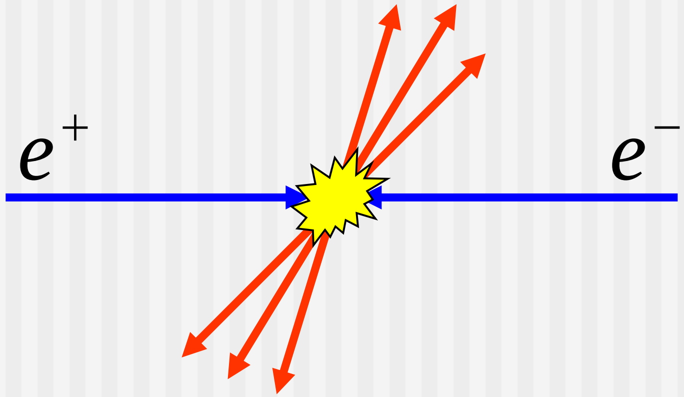
清华大学

第一讲：基本概念

本次讲座的要点

- 概率
- 随机变量与函数
- 期待值、方差
- 不确定度的传递

实验的目的是什么？



观察某一过程的 ***n*** 个事例

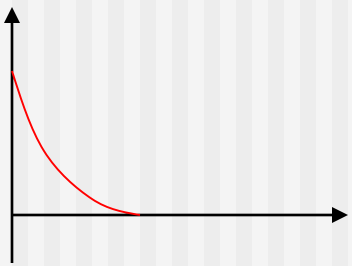
实验测量

给出每个事例的特征量(能动量，末态粒子数...)。

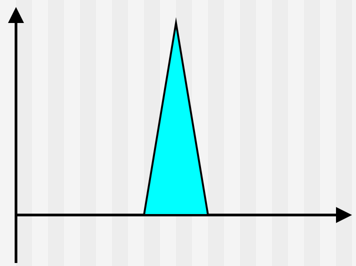
理论预言

给出上述各特征量的分布，而且可能还会包含自由参数。

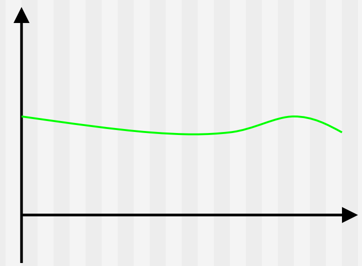
数据背后的物理图像是什么？



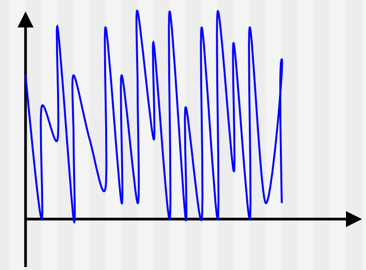
原初物理



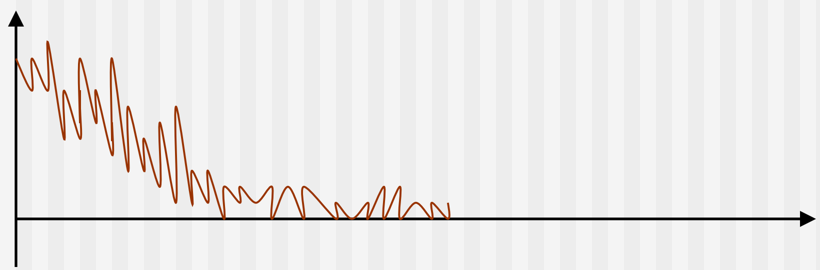
分辨率



探测效率



本底噪音



实验数据

数据分析专业术语：

事例选择，粒子鉴别，选择条件，信噪比优化，无偏选择，效率修正，卷积分辨率，解谱（像）还原…

如何科学地给出物理结论？

收集数据

↓

数据分析

↓

估计参数值与相应的误差范围，检验在何种程度上理论与实验数据相符。

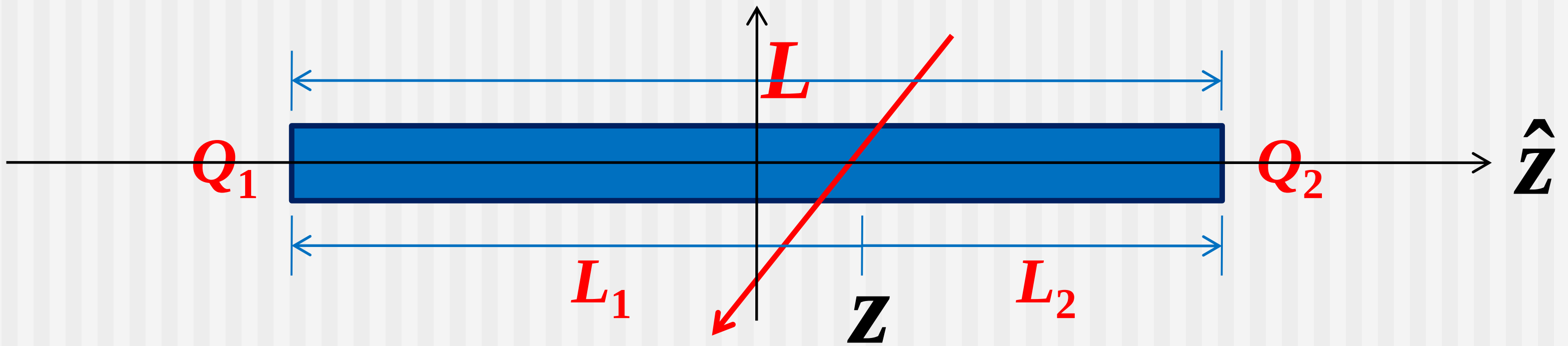
问题：如何评价这种检验？

举例：测量闪烁体衰减长度

光在闪烁体中传播时，具有下列衰减关系

$$Q = Q_0 \exp(-L / L_0)$$

其中，L_0 是闪烁体的衰减长度，它是表征闪烁体质量的一项重要指标。 实验上测量衰减长度的方法如下图所示



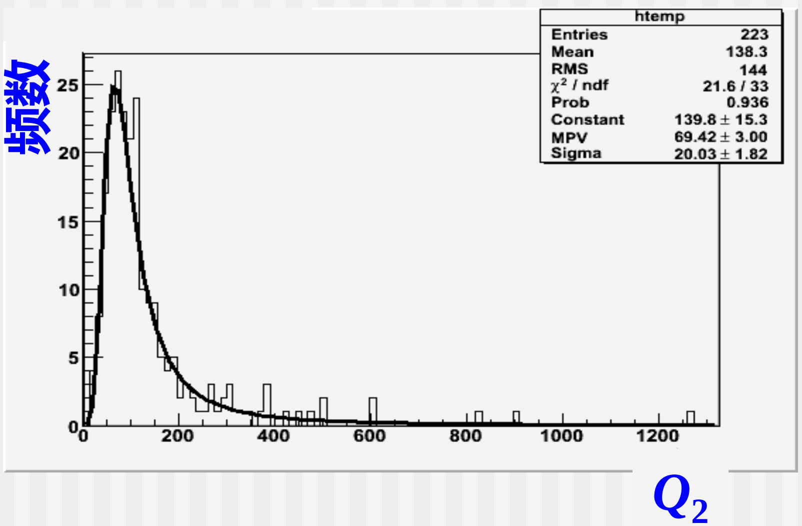
$$Q_0 \propto E, \qquad L_1 = 0.5L + z, \quad L_2 = 0.5L - z,$$
$$Q_1 = 0.5Q_0 \exp(-L_1 / L_0),$$
$$Q_2 = 0.5Q_0 \exp(-L_2 / L_0),$$

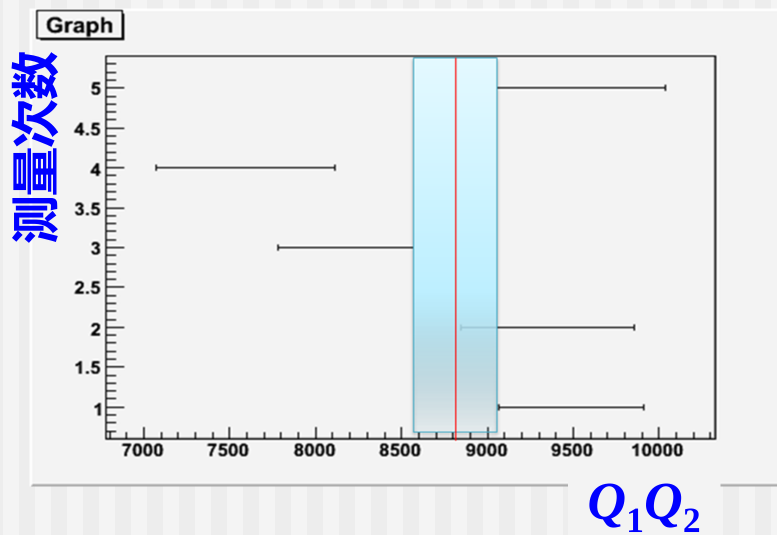
$$Q_1 Q_2 = 0.25 Q_0^2 \exp(-L / L_0), \quad L_0 = -2z / \ln(Q_1 / Q_2)$$

举例：测量闪烁体衰减长度（续）

$$Q_1Q_2=0.25Q_0^2\exp(-L/L_0),\quad L_0=-2z/\ln(Q_1/Q_2)$$

实验采用恒定光源，因此 Q_0 为常数，对待测闪烁体 L_0 也为常数。理论上只要在给定一个位置 z，测量闪烁体两端的电荷输出量即可。但在实际中，往往需要做多点测量。

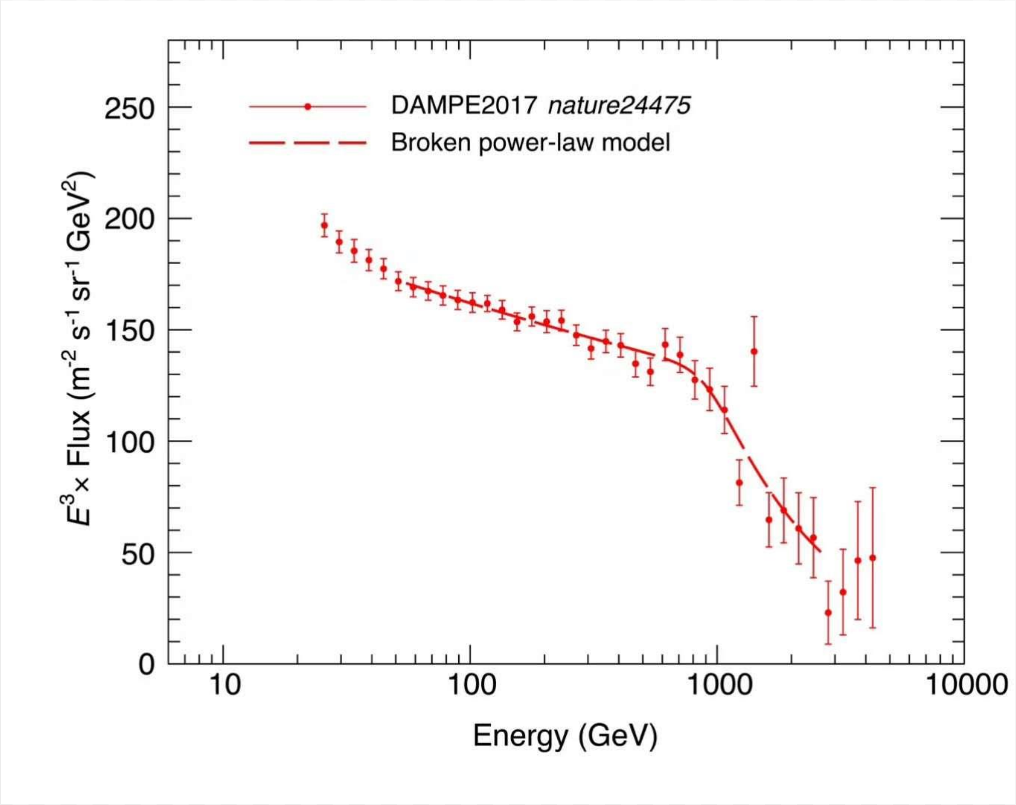




理论上是不变的 Q_1Q_2 值，为什么每次测量都不相同？能否认为 L_0 不是常数？

使用概率来量化结论！

举例：宇宙线测量与物理信号



问题1：如何确定能量测量的正确性？

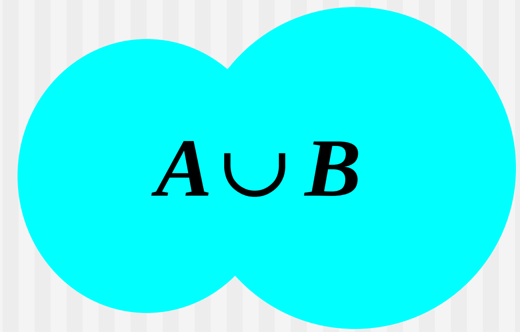
问题2：如何确定1.4 TeV附近是物理信号还是统计涨落？

随机事件

在一定的实验条件下，现象 A 可能发生，也可能不发生，并且只有发生或不发生这样两种可能性，这是偶然现象中一种比较简单的情形，我们把发生了现象 A 的事例称为随机事件 A，简称事件 A。也称随机事例

随机事例之间的相互关系

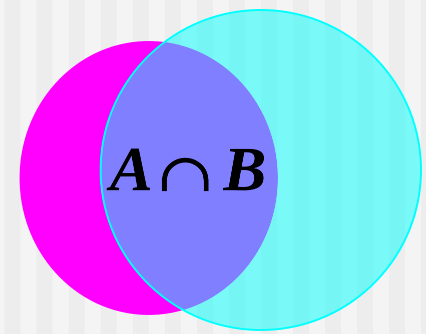
A 与 B 之并事例 $\boldsymbol{A \cup B}$



指事例 A 与 B 中至少有一个出现的事例

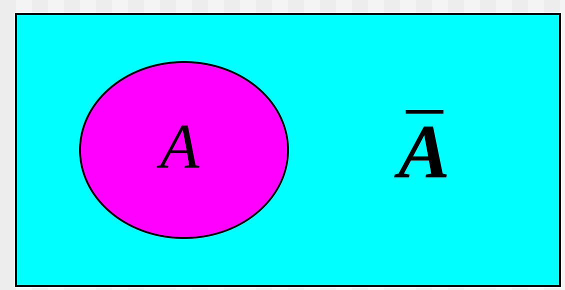
如果 A与 B 互斥，则 $\boldsymbol{A \cup B = A + B}$

A 与 B 之积(交)事例 $\boldsymbol{A \cap B}$



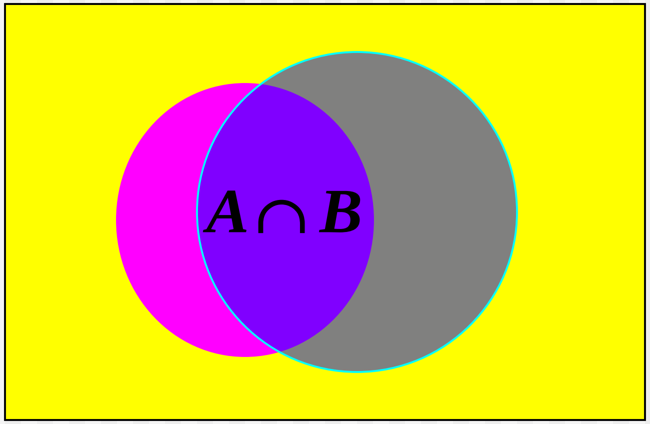
指事例 A 与 B 中同时出现的事例

A 之逆事例 $\boldsymbol{\bar{A}}$



指事例 A 不出现的事例 $A \cap \bar{A} = 0$

文恩图（Venn diagram）检验



$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

$$A\cup(A\cap B)=A$$

$$(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=A$$

$$A\cup B=(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)$$

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

概率的定义

柯尔莫哥洛夫公理：考虑一全集 **S** 具有子集 ***A***，***B***，…

$$A \subset S, P(A) \geq 0$$

$$P(S) = 1$$

$$A \cap B = 0 \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

***P*(*A*)称为事例*A*的概率**

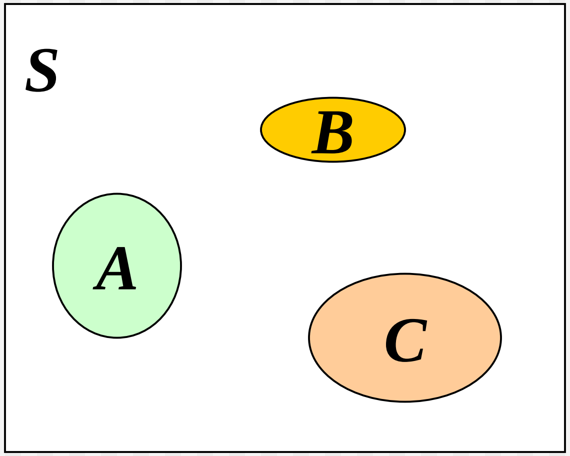
从该公理与文恩图给出的结论可以导出下列概率公式

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(A \cup \bar{A}) = 1$$

$$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



条件概率

假设 **B** 出现的概率不为零，在给定 **B** 的情况下出现 **A** 的条件概率定义为

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

如果 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ 则表明 ***A* 与 *B* 相互独立。**

如果 ***A*** 与 ***B*** 相互独立，则有

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B)}{P(B)}=P(A) \Rightarrow$$ 结果与 ***B*** 无关

注意：两个子集互斥与独立定义不同。

贝叶斯定理

根据条件概率的定义

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad 与 \quad P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$

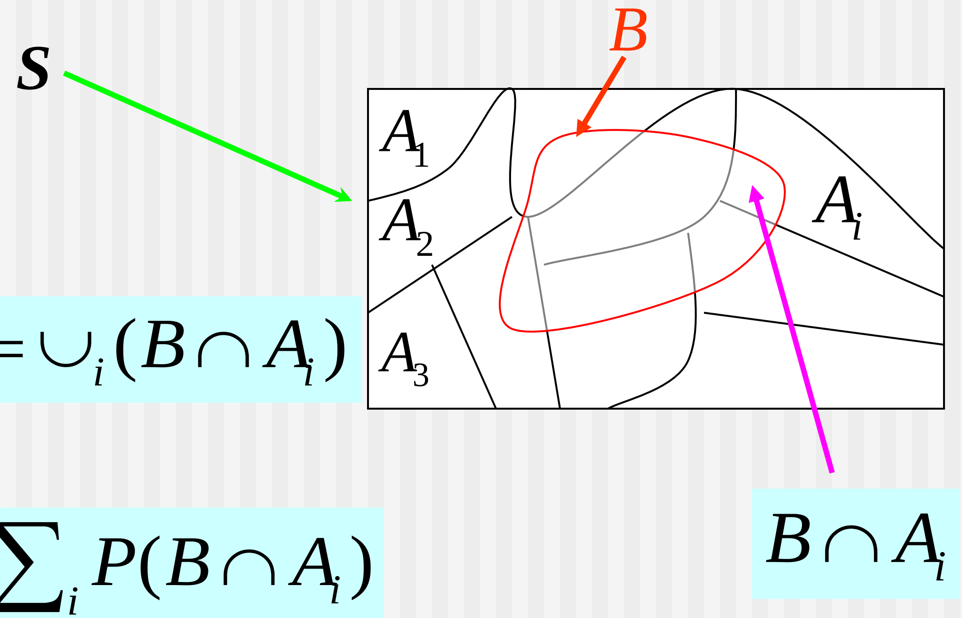
而 $P(A\cap B)=P(B\cap A)$，故

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

贝叶斯定理由 **Reverend Thomas Bayes (1702-1761)** 首先提出。

全概率事例与贝叶斯定理

考虑在样本空间 **S** 中有一子集 **B**。将样本空间分为互斥的子集 A_i，使得



$$\cup_i A_i = \sum_i A_i = S$$

因此，

$$B = B \cap S = B \cap (\cup_i A_i) = \cup_i (B \cap A_i)$$

表示成概率的形式为

$$P(B) = P(\cup_i (B \cap A_i)) = \sum_i P(B \cap A_i)$$

得到全概率事例公式

$$P(B) = \sum_i P(B|A_i)P(A_i)$$

贝叶斯定理

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{\sum_i P(B|A_i)P(A_i)}$$

例子：如何利用贝叶斯定理

假设对任意一个人而言，感染上**AIDS**的概率为

$P(AIDS) = 0.001$ 验前概率,即任何检验之前

$P(no\ AIDS) = 0.999$

考虑任何一次**AIDS**检查的结果只有阴性**(-)**或阳性**(+)**两种

$P(+ | AIDS) = 0.98$ AIDS感染患者阳性的概率

$P(- | AIDS) = 0.02$ AIDS感染患者阴性的概率

$P(+ | no\ AIDS) = 0.03$ AIDS未感染者阳性的概率

$P(- | no\ AIDS) = 0.97$ AIDS未感染者阴性的概率

如果你的检查结果为阳性**(+)**，而你却觉得自己无明显感染渠道。那么你是否应担心自己真的感染上了**AIDS**?

例子：如何利用贝叶斯定理(续)

利用贝叶斯定理，阳性结果条件下是AIDS患者的概率为

$$P(AIDS|+) = \frac{P(+|AIDS)P(AIDS)}{P(+|AIDS)P(AIDS) + P(+|no\ AIDS)P(no\ AIDS)}$$

$$= \frac{0.98 \times 0.001}{0.98 \times 0.001 + 0.03 \times 0.999}$$

$$= 0.032 \qquad (\text{验后概率})$$

AIDS患者阳性

所有为阳性结果的人

也就是说，你可能没什么问题！？

从你的观点上看：对自己染上AIDS结果的可信度为3.2%。

从医生角度上看：象你这样的人有3.2%感染上了AIDS。

涉及到如何诠释结果（概率）的问题！

概率含义的诠释

- **相对频率（频率论者）**

  假设*A*，*B*，…是一可重复实验的结果，则概率就是

$$P(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{\text{结果为}A}{n\text{次实验}}$$

- **主观概率（贝叶斯论者）**

  如果*A*，*B*，…是假设(是真或是假的各种陈述)，那么概率

$$P(A)=\text{对}A\text{为真的信心程度}$$

✓两种解释皆与柯尔莫哥洛夫公理相符。

✓概率的频率解释在数据分析中用起来比较自然，但是…

频率概率中的问题

- 实际问题中，统计量总是有限的。$P(A)$完全取决于A 的划分与总统计量的大小。

概率大小会出现波动。

需要解决好

•A 的定义

•适当的误差

- 该定义不适用于某些特殊情况

例如：我们可以说“明天有雨”。但是，如果我们根据概率频率定义说“明天可能有雨”，却是一个毫无科学意义的预报。

贝叶斯理论与主观概率

贝叶斯理论通常用于主观概率问题

$$P(\text{理论}\,|\text{实验}) = \frac{P(\text{实验}\,|\,\text{理论})}{P(\text{实验})}P(\text{理论})$$

先验概率：$P(\text{理论})$； 验后概率：$P(\text{理论}\,|\text{实验})$

似然性：$P(\text{实验}\,|\text{理论})$

通过实验结果改进基于某一理论的信念(后验性的)

- 如果实验证明$P(\text{理论}\,|\,\text{实验})=0$，则表明理论不能接受。
- 大的$P(\text{理论}\,|\,\text{实验})$会增加对理论的信任度。
- 通过实验结果可以修改 $P(\text{理论})$。
- 改进的$P(\text{理论})$可应用于对重复实验结果的预测。
- $P(\text{理论}\,|\,\text{实验})$对先验理论的依赖将最终消失。

主观概率中的问题

- 主观性：在对同一随机现象的描述中，我的*P*(理论)与你的*P*(理论)可能不同

理论家甲
之理论A

理论家乙
之理论B

- 使用主观概率的原因
  - 出于绝望 ✓
  - 出于无知 ✗
  - 出于懒惰 ?

主观概率的一些特点

主观概率有一些吸引人的地方，例如对于不可重复现象的处理中，显得比较自然

- 系统误差(重复实验时仍保持不变);
- 在该事例出现的粒子是正电子;
- 自然界是超对称的;
- 明天将下雨(将来事件的不确定性);
- 公元1500年元月一日北京下雨(过去事件的不确定性)。

结论中包含了主观上对事件为真的信念!

频率论者与主观概率

P(938.27195 < 质子质量 < 938.27211 MeV)是什么？

当以质量来判断一实际为质子的粒子类别时

- 频率论者：质子或非质子（不知道是哪个）
- 主观主义者(贝叶斯论者):68%是质子(对知识的陈述)

对主观概率而言，意味着

质子质量的不确定性与从100只球中有68只白球的球筐里能拿出白球的不确定性一样。

频率论者与主观概率(续)

如果大多数贝叶斯论者说

- 巴西赢得2010年足球世界杯冠军的概率为68%
- 质子质量在938.27195-938.27211MeV内的概率为68%
- 大陆中国人2020年获诺贝尔奖的概率为68%

那么上述论断的68%就应该理解为结果为真的概率。

能否在频率定义中将质子质量在938.27195-938.27211MeV内理解成：在整个宇宙中，自然界给出了各种不同的质子质量，而它们中有68%在938.27195与938.27211MeV之间?

没问题...只不过这是对信心程度的一种表达。

艾滋病检验结果再认识

$$P(AIDS) = 0.001 \qquad \text{(验前概率)}$$

$$P(AIDS \mid +) = 0.032 \qquad \text{(验后概率)}$$

对于个人而言，0.032 是主观概率。如果没有其它额外的信息时，应把 0.001 当作相对频率解释。但是往往在病毒检验前，该相对频率被当作一种信念来处理个人是否患病。

如果还有其它额外的信息，应该给出不同的先验概率。这种贝叶斯统计的特点必定是主观的。例如，受检者有过吸毒历史。一旦验前概率改变，贝叶斯定理就会告诉患病的可能性。对阳性结果的诠释就会改变。

问题：能否构造含自变量的概率？