

## OPTIMIZATION THEORY COURSE

## 最適化理論實驗作業 – CVX 專題

## 實驗作業題目 (繁體中文說明)

繳交截止日期：2025 年 12 月 2 日

本文件為英文作業說明的繁體中文翻譯版本，僅供閱讀與輔理解之用。

正式繳交的作業解答與報告必須以英文撰寫。

原始英文作業與 MATLAB (CVX) / Python (CVXPY) 程式碼請參考 GitHub 倉庫：

<https://github.com/gudduarnav/project-optimization-beamforming>

## 問題 1 – 帶界最小平方法 (Bound-Constrained Least-Squares)

考慮以下帶界 (上下界) 限制的最小平方法問題：

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 \quad \text{s.t.} \quad 0.1 \leq \mathbf{x} \leq 3.14, \quad (1)$$

其中  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ , 向量  $\ell, u \in \mathbb{R}^n$  分別為變數向量  $\mathbf{x}$  的一般下界與上界；在本次作業中，假設  $\mathbf{x}$  的每一個分量皆滿足  $0.1 \leq x_i \leq 3.14$ 。

**作業要求：**使用 CVX (或其他類似的凸優化工具箱) 將上述問題寫成標準形式並求解，求出最優解向量  $\mathbf{x}^*$ ，並簡要說明在  $0.1 \leq x_i \leq 3.14$  的限制下，你對解  $\mathbf{x}^*$  各分量可以得到哪些推論 (例如哪些分量貼近界線，以及這對殘差  $\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2$  有何影響)。

## 問題 2 – 平均旁瓣能量最小化 (Average Sidelobe Energy Minimization)

考慮一個具  $M$  個天線元件的均勻線性陣列 (ULA) 波束成形器，其複數權重向量為  $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^M$ 。令  $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{M \times M}$  為一個半正定矩陣，用來描述在某一角度區間內的平均旁瓣能量；令  $\mathbf{a}(\theta_0)$  為指向期望主波束方向  $\theta_0$  的陣列響應向量 (steering vector)，在本次作業中令期望主波束角度為  $\theta_0 = +10^\circ$ 。我們希望尋找可以最小化平均旁瓣能量的波束成形權重：

$$\min_{\mathbf{w} \in \mathbb{C}^M} \mathbf{w}^H \mathbf{P} \mathbf{w} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0) = 1. \quad (2)$$

**提示：**在 CVX 中，可使用 `quad_form(w, P)` 來表示二次型  $\mathbf{w}^H \mathbf{P} \mathbf{w}$ 。

- 在 CVX 中實作上述優化問題，並針對  $\theta_0 = +10^\circ$  求得最優的波束成形向量  $\mathbf{w}$ 。
- 繪出角度頻譜 (例如波束圖 / beam pattern)，說明旁瓣行為與特性，特別是主瓣在  $\theta_0 = +10^\circ$  附近的形狀與旁瓣抑制效果，並寫出你的觀察與推論。

### 問題 3 – 最壞情況旁瓣最小化 (Worst-Case Sidelobe Minimization)

接著考慮魯棒波束成形設計，我們希望在一組旁瓣角度集合  $\{\theta_1, \dots, \theta_L\}$  上最小化最壞情況的旁瓣電平。令  $\mathbf{a}(\theta)$  表示角度  $\theta$  處的陣列響應向量。引入輔助實數變數  $t$ ，考慮以下優化問題：

$$\min_{\mathbf{w}, t} \quad t \quad \text{s.t.} \quad |\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_\ell)|^2 \leq t, \quad \ell = 1, \dots, L, \quad \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0) = 1. \quad (3)$$

- (a) 給定天線數  $M$  與旁瓣角度區間，求解上述問題並繪出對應的角度頻譜。將結果與問題 2 的設計進行比較。
- (b) 將天線數設為  $M = 32$ ，重新設計波束成形器並繪出角度頻譜。說明增加  $M$ （相較於 (a)）對主瓣寬度與旁瓣電平造成的影響。
- (c) 考慮以下兩種不同的期望主瓣區間：

(i)  $\theta_\ell = -10^\circ, \theta_u = +10^\circ$ ,

(ii)  $\theta_\ell = 45^\circ, \theta_u = 55^\circ$ 。

對每一種主瓣區間，設計對應的波束成形器並繪出角度頻譜，說明主瓣寬度與旁瓣行為之間的取捨關係。

### 問題 4 – 含 SINR 約束的下行波束成形 (Downlink Beamforming with SINR Constraints)

考慮一個基地台 (BS) 具備  $M$  根天線，同時為  $N$  個行動用戶 (MS) 進行下行傳輸。每個用戶僅有單一天線。令  $\mathbf{h}_k \in \mathbb{C}^M$  為從基地台到第  $k$  位用戶的通道向量， $\mathbf{w}_k \in \mathbb{C}^M$  為第  $k$  位用戶的波束成形向量 ( $k = 1, \dots, N$ )。假設用戶  $k$  的接收訊號同時受到多使用者干擾與雜訊（變異數為  $\sigma_k^2$ ）影響，且用戶  $k$  的 SINR 要求為  $\gamma_k > 0$ 。用戶  $k$  的下行 SINR 可寫為

$$\text{SINR}_k = \frac{|\mathbf{h}_k^H \mathbf{w}_k|^2}{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N |\mathbf{h}_k^H \mathbf{w}_j|^2 + \sigma_k^2}. \quad (4)$$

我們希望在滿足所有用戶 SINR 要求的情況下，最小化基地台的總發射功率：

$$\min_{\{\mathbf{w}_k\}_{k=1}^N} \sum_{k=1}^N \|\mathbf{w}_k\|_2^2 \quad \text{s.t.} \quad \frac{|\mathbf{h}_k^H \mathbf{w}_k|^2}{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N |\mathbf{h}_k^H \mathbf{w}_j|^2 + \sigma_k^2} \geq \gamma_k, \quad k = 1, \dots, N. \quad (5)$$

- (a) 將上述問題重新寫成適合在 CVX 中求解的凸優化問題（例如以二階錐規劃 SOCP 形式表示）。
- (b) 以  $M = 32$  根天線與  $N = 5$  個行動用戶進行數值模擬，假設每位用戶的雜訊功率對應至  $-70$  dBm 的雜訊變異數，且所有用戶的 SINR 目標皆為  $\gamma_k = 10$  dB。驗證在最小總發射功率的設計下，所有用戶的 SINR 均滿足其目標值，並簡要說明基地台對各用戶的功率分配情形與你的觀察。