均匀线阵（ULA）导向矢量入门笔记

面向初学者的说明

December 5, 2025

Contents

1 为什么需要导向矢量?

想象一排完全一样的天线，均匀地排成一条直线。 如果我们给每个天线送入同一个信号，但是在时间（或者相位）上做一些精细的差异， 就可以让某个方向上的信号叠加变强，而其他方向上的信号相互抵消或减弱。 这就是波束形成（beamforming）的基本想法。

如果觉得有点抽象，可以想象一群人一起鼓掌： 大家完全同时鼓掌时，声音几乎是“到处都差不多响”； 如果让每一排人比前一排稍微晚一点鼓掌，就会形成一个向前传播的声波。 阵列天线的行为和这种“排队鼓掌”的画面非常类似，只不过我们处理的是电磁波。

导向矢量（steering vector）就是把“每个天线应该加多少相位（和幅度）”这一信息， 用一个向量的方式，紧凑地表达出来。 当我们想让天线阵列“指向”某个方向时，就会用到导向矢量。

本笔记主要围绕以下几个问题展开:

- 什么是均匀线阵（Uniform Linear Array, ULA）？
- 导向矢量是如何一步一步推导出来的?
- 导向矢量与角度、波长、阵元间距之间的关系。
- 若干具体数值例子。
- 常见困惑与概念澄清。

小贴士

可以把导向矢量想象成“某个方向上的空间指纹”： 每个分量是对应阵元看到的复相位。 掌握了这个指纹，就可以用简单的线性代数来做波束形成、到达角估计和干扰抑制。

我们尽量使用直观、通俗的语言，帮助第一次接触阵列信号处理的读者建立正确的概念。

2 均匀线阵 ULA 的基本几何

2.1 阵列结构

考虑一个包含 M 个天线单元（阵元）的线性阵列。 我们通常做如下假设:

- 每两个相邻阵元之间的间距相同，为 d。
- 阵列沿着 x 轴排布。
- 第 0 号阵元位于原点，第 1 个在 d 处，第 2 个在 $2d$ 处，依此类推， 第 m 个阵元的位置是 md。

入射信号可以从任意方向到来。 为了描述方便，我们需要一个角度定义。 在本笔记中:

- 角度 θ 从阵列法线方向（broadside）开始测量。
- 阵列法线方向记为 $\theta = 0^\circ$，也就是与阵列成 90 度。
- 沿着阵列方向的来波称为“端射”（endfire），对应 $\theta = 90^\circ$。

2.2 波长与波数

设载频为 f，波在空间中的传播速度为 c（电磁波在自由空间中近似为 3×10^8 m/s）。则波长为

$$\lambda = \frac{c}{f},$$

波数（wavenumber）为

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

波数 k 描述了“相位随空间距离变化的快慢”。沿着传播方向，每走过一个波长 λ，相位就增加 2π 弧度。

如果用更日常的话来说：

- λ 回答的是“空间里一个周期有多长？”；
- k 回答的是“每走一米，相位要转多少弧度？”。

你不需要死记硬背，只要记住：k 是把“距离”换算成“相位”的那座桥。

3 入射平面波在阵列上的传播差异

现在考虑一个平面波，从角度 θ 方向入射到阵列上。由于阵列是沿一条直线排布的，不同阵元与波前之间的距离会有轻微差别，从而导致到达时间不同，也就是相位不同。

3.1 额外路径差

我们以第 0 号阵元（原点）为参考。如果从角度 θ 入射，那么阵元间距 d 在该方向上的投影为

$$d \sin\theta.$$

因此，第 m 个阵元相对于第 0 个阵元，多走了一段路程

$$\Delta r_m = md\sin\theta.$$

3.2 路径差对应的相位差

路径差会直接带来相位差。对任意一段额外路径 Δr，相位差为

$$\Delta\phi = k\,\Delta r = \frac{2\pi}{\lambda}\,\Delta r.$$

因此，第 m 个阵元相对于第 0 个阵元的附加相位是

$$\phi_m = k\,\Delta r_m = \frac{2\pi}{\lambda}\,md\sin\theta.$$

如果第 0 个阵元接收到的基带信号可以写成 $s(t)$，或在复包络形式中写作 $e^{j\omega t}$，那么第 m 个阵元接收到的信号可以写成

$$s_m(t) \propto e^{j(\omega t-\phi_m)} = e^{j\omega t}\, e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}md\sin\theta}.$$

在阵列信号处理中，我们通常会忽略公共的时间因子 $e^{j\omega t}$，而只关注空间上的相位项：

$$e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}md\sin\theta}.$$

4 导向矢量的形式定义

4.1 接收导向矢量

对一个有 M 个阵元的 ULA，来自角度 θ 的平面波的接收导向矢量通常定义为

$$\boldsymbol{a}(\theta)=\begin{bmatrix}1\\ e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta}\\ e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}2d\sin\theta}\\ \vdots\\ e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(M-1)d\sin\theta}\end{bmatrix}.$$

这是一个长度为 M 的列向量，每个分量对应一个阵元。我们将第 0 个阵元作为参考，相位取 0。

4.2 发射导向矢量

在发射波束形成中，导向矢量的形式与接收类似，但符号约定可能会有所不同。一种常见写法是

$$\boldsymbol{w}(\theta)=\begin{bmatrix}1\\ e^{+j\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta}\\ e^{+j\frac{2\pi}{\lambda}2d\sin\theta}\\ \vdots\\ e^{+j\frac{2\pi}{\lambda}(M-1)d\sin\theta}\end{bmatrix},$$

作为指向角度 θ 的发射权向量。

从物理上看，关键点是：

$$\boxed{\text{不同阵元之间的相对相位差，决定了阵列指向哪个方向。}}$$

具体是写成正号还是负号，主要取决于你在系统中定义的正向传播相位因子，只要前后自洽一致即可。

4.3 紧凑写法

有时我们也会用更紧凑的形式来写导向矢量：

$$[\boldsymbol{a}(\theta)]_m=e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}md\sin\theta},\quad m=0,1,\ldots,M-1.$$

这样可以在数学推导中更方便地进行求和、求导等操作。

5 常用特例：半波长间距

工程上常常选择阵元间距为

$$d=\frac{\lambda}{2}.$$

这样可以在可见角域内避免“栅瓣”（grating lobes），也就是避免阵列在错误方向上出现等强主瓣。

将 $d=\lambda/2$ 代入接收导向矢量，可得

$$[\boldsymbol{a}(\theta)]_m=e^{-j\pi m\sin\theta},\quad m=0,1,\ldots,M-1.$$

此时：

- 相邻两个阵元之间的相位差为 $-\pi \sin\theta$。
- 从第 0 个到第 $M-1$ 个阵元的总相位差为 $-\pi(M-1)\sin\theta$。

这个形式在分析和计算中都非常方便。

重要

在工程实践中，$d=\lambda/2$ 是一个非常安全、常用的选取：它在整个可见角域内避免了明显的“栅瓣”，使得主瓣方向唯一且容易解释，不容易把干扰或其他方向的信号误当成目标。

你可以把它理解成一个“阵元间距不要太大”的经验规则，和时间采样中的 Nyquist 采样定理非常相似。如果阵元间距超过半波长，阵列方向图会在其他角度重复出现类似的波束，就好像“复制粘贴”出了多个主瓣，使用起来通常非常麻烦。

6 数值例子

下面我们给出几个具体的数值例子，加深对导向矢量的理解。所有例子中都假设 $d=\lambda/2$，并且关注接收导向矢量 $\boldsymbol{a}(\theta)$。

6.1 例 1：4 阵元，波从正侧向入射

设 $M=4$，$\theta=0^\circ$（broadside）。因为 $\sin 0^\circ = 0$，所以有

$$[\boldsymbol{a}(0^\circ)]_m = e^{-j\pi m\cdot 0} = 1, \quad m=0,1,2,3.$$

因此导向矢量为

$$\boldsymbol{a}(0^\circ) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

直观理解：从正侧向入射时，所有阵元看到的波前几乎是“同时到达”的，因此相位完全相同。如果我们简单地把所有阵元的信号相加，效果会非常好。

6.2 例 2：4 阵元，$\theta = 30^\circ$

仍然是 $M=4$，$d=\lambda/2$。此时 $\theta=30^\circ$，$\sin 30^\circ = 0.5$。

相邻阵元的相位差为

$$\Delta\phi = -\pi\sin\theta = -\pi\cdot 0.5 = -\frac{\pi}{2}.$$

于是导向矢量为

$$\boldsymbol{a}(30^\circ) = \begin{bmatrix} e^{-j0} \\ e^{-j\frac{\pi}{2}} \\ e^{-j\pi} \\ e^{-j\frac{3\pi}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -j \\ -1 \\ j \end{bmatrix}.$$

可以看到，沿着阵列方向，阵元相位每次递减 90°。如果我们想“对准”这个方向做接收，就可以使用其共轭作为权值进行相位补偿。

6.3 例 3：8 阵元，$\theta = -20°$

现在取 $M = 8$，$d = \lambda/2$，$\theta = -20°$。 此时 $\sin(-20°) \approx -0.342$。
相邻阵元的相位差为

$$\Delta\phi = -\pi \sin\theta \approx -\pi(-0.342) \approx +1.075 \text{ rad}.$$

也就是说，沿阵列方向，每向前一个阵元，复相位大约增加 1.075 弧度。 导向矢量为

$$[\boldsymbol{a}(-20°)]_m \approx e^{+j1.075m}, \quad m = 0, \ldots, 7.$$

实际工程中，我们通常使用 MATLAB、Python 等工具来数值计算这些复数。

7 从导向矢量到阵列方向图

7.1 阵列响应和阵列因子

给定接收权向量 $\boldsymbol{w}$（大小为 $M \times 1$），对来自角度 θ 的信号， 阵列的复响应可以写为

$$H(\theta) = \boldsymbol{w}^{\mathrm{H}} \boldsymbol{a}(\theta),$$

其中 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}$ 表示共轭转置。
若采用最简单的"指向并求和"权值

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{a}(\theta_0),$$

则得到

$$H(\theta) = \boldsymbol{a}(\theta_0)^{\mathrm{H}} \boldsymbol{a}(\theta).$$

这会在 θ_0 附近形成一个主瓣（主波束），在其他角度形成若干旁瓣。 阵列元素越多，主瓣越窄，分辨率越高。

7.2 物理含义

导向矢量体现的是"平面波在每个阵元上的空间签名"。 通过与导向矢量做内积，我们可以：

- 让阵列"指向"某个期望方向（波束形成）。
- 估计信号从哪个方向来（到达角估计，DoA）。
- 在干扰方向上形成"零点"（空洞），抑制干扰。

8 常见疑问与注意点

8.1 角度是相对于哪条参考线？

在不同教材、论文中，角度 θ 的定义可能不一样。 比较常见的两种是：

1. 从阵列法线（broadside）开始量。
2. 从阵列轴线开始量。

如果从阵列法线测量，公式里通常会出现 $\sin\theta$； 如果从阵列轴线测量，公式里通常会出现 $\cos\theta$。
因此在阅读时，一定要注意作者的角度定义：

先搞清楚：θ 是从哪条线量起的？

重要

在使用任何文献中的导向矢量公式之前，先做三件事：

1. 搞清楚 θ 是从哪条参考线开始量的；
2. 看清楚公式里是 $\sin\theta$ 还是 $\cos\theta$；
3. 弄明白哪个阵元被当作相位参考点。

先画一张小草图，通常能避免大量“正负号”的麻烦。

8.2 符号正负的问题

有些资料写导向矢量为

$$e^{-jkmd\sin\theta},$$

而另一些则写作

$$e^{+jkmd\sin\theta}.$$

这两种都可能是正确的，其差异来自：

- 对波传播的复指数形式采用 $e^{j(\omega t-kx)}$ 还是 $e^{j(\omega t+kx)}$。
- 是在建模接收还是发射。

只要在一个系统中前后保持统一，物理结果是一样的。

8.3 阵列中心作为参考点

在本笔记中，我们默认第 0 个阵元在一端，位置为 0。在很多文献中，也会把阵列中心作为参考点。例如当 M 为奇数时，阵元的位置可能是

$$x_m \in \left\{-\frac{M-1}{2}d, \dots, 0, \dots, +\frac{M-1}{2}d\right\}.$$

此时导向矢量变为

$$[\boldsymbol{a}(\theta)]_m = e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}x_m\sin\theta}.$$

本质上只是“相位参考点”不同，不会改变波束的实际指向。

9 从向量角度理解阵列处理

9.1 接收信号向量化

我们可以把各阵元的接收信号统一写成一个向量：

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ \vdots \\ x_{M-1}(t) \end{bmatrix}.$$

若只有一个来自角度 θ 的平面波，复包络为 $s(t)$，则可以写成

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{a}(\theta)s(t) + \boldsymbol{n}(t),$$

其中 $\boldsymbol{n}(t)$ 表示噪声或其他干扰。

9.2 波束形成就是做内积

阵列输出（波束形成输出）为

$$y(t) = \boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}(t),$$

其中 $\boldsymbol{w}$ 为权向量。

如果我们选择

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{a}(\theta_0),$$

那么

$$y(t) = \boldsymbol{a}(\theta_0)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}(t) \approx \boldsymbol{a}(\theta_0)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{a}(\theta_0)s(t),$$

即对准方向 θ_0 的信号会被增强，而其他方向的信号会被削弱。

从线性代数的角度看，这就是把接收向量 $\boldsymbol{x}(t)$ 投影到导向矢量 $\boldsymbol{a}(\theta_0)$ 所在的方向上。

10 常见问答（Q&A）

问与答

问：为什么导向矢量里用的是 $\sin\theta$?
答：在本笔记中，θ 是从阵列法线方向开始测量的。相邻阵元之间的额外路径是阵元间距 d 在来波方向上的投影，因此出现 $d\sin\theta$。如果把角度改成从阵列轴线测量，那么公式里通常会变成 $\cos\theta$。

问与答

问：如果把阵元间距选得大于 $\lambda/2$ 会怎样?
答：当 $d > \lambda/2$ 时，阵列方向图里会出现所谓的栅瓣（grating lobes），也就是在其他角度出现强度几乎与主瓣相当的“假主瓣”。这会导致阵列很容易把错误方向的信号当作目标方向，或者让本应较弱的干扰变得很强。

问与答

问：阵元越多，波束会有什么变化?
答：在总阵长一定的前提下，阵元越多，主瓣通常越窄，角度分辨率越高。对一条 ULA 来说，有效孔径大约是 $(M-1)d$，主瓣宽度（用弧度粗略估算）大致与 $\lambda/[(M-1)d]$ 成正比。

问与答

问：有没有简单的记忆公式的方法?
答：一个常用的小口诀是:

$$[\boldsymbol{a}(\theta)]_m = e^{-jk\,x_m},$$

其中 x_m 是第 m 个阵元在来波方向上的投影坐标。对沿 x 轴排布、以阵列法线为参考的 ULA，有 $x_m = md\sin\theta$，自然就得到常见的 $e^{-j2\pi md\sin\theta/\lambda}$ 形式。

11 总结与延伸方向

通过本笔记，我们希望你对以下几点有清晰的理解:

- 均匀线阵（ULA）由 M 个等间距阵元组成，阵元间距为 d。

- 平面波从角度 θ 入射时，不同阵元之间存在路径差和相位差。
- 导向矢量 $\boldsymbol{a}(\theta)$ 将这些相位差整齐地组织在一个向量中。
- 当 $\theta = 0^\circ$（正侧入射）时，各阵元相位相同。
- 当 $\theta \neq 0^\circ$ 时，沿阵列方向相位呈线性递增或递减。
- 通过合理设计权向量 $\boldsymbol{w}$（通常与导向矢量相关），可以实现波束形成、到达角估计以及干扰抑制。

小贴士

如果一时搞乱了，不妨回到三个核心问题：(i) 几何关系给出路径差，(ii) 路径差通过 $k = 2\pi/\lambda$ 变成相位差，(iii) 把这些相位装进一个向量，就是几乎所有阵列算法的入口——导向矢量。

如果你已经对这些内容比较熟悉，可以进一步学习：

- 非均匀阵列（稀疏阵列、共形阵列等）。
- 平面阵列、三维阵列及其导向矢量。
- 自适应波束形成（如 MVDR、LCMV）。
- 高分辨率到达角估计算法，如 MUSIC、ESPRIT。

导向矢量看起来只是一个简单的复指数向量，但它是阵列信号处理的"基础积木"。理解透彻之后，再看各种高级算法就会容易很多。