Thm: $(\Omega, \sigma(\mathcal{A}), P)$ 가 확률공간 이라고하자.

그리고 $\mathcal{A}$는 π-system 이라고하자.

확률측도 $P: \sigma(\mathcal{A}) \to [0,1]$ 의 값은

$P: \mathcal{A} \to [0,1]$ 의 값으로 유일하게 결정된다.

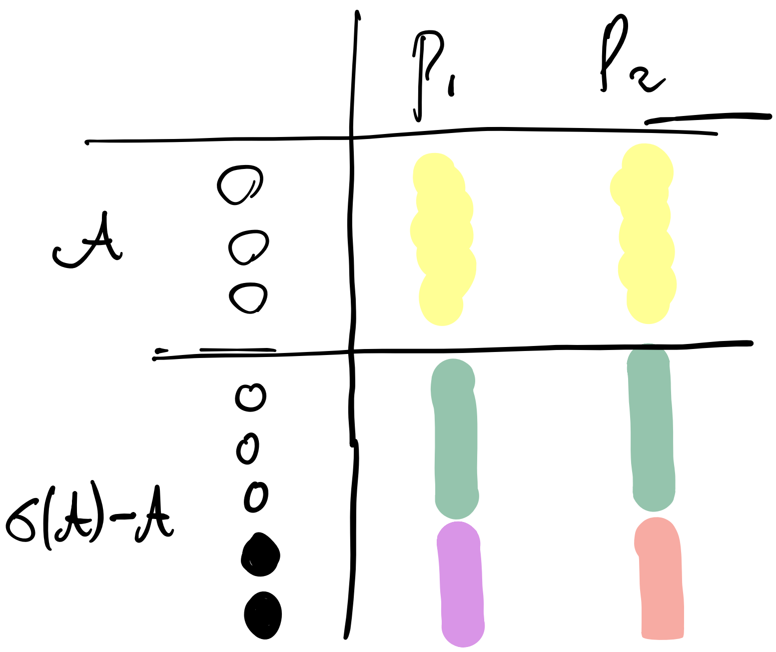
LET: ① $(\Omega, \sigma(\mathcal{A}))$ 는 measurable space!

② P_1, P_2 prob-msr on $(\Omega, \sigma(\mathcal{A}))$.

③ P_1, P_2 는 $\mathcal{A}$ 에서는 agree.

$$\forall A \in \mathcal{A} : P_1(A) = P_2(A).$$

상황을 상상 :



$\tilde{\mathcal{D}} = \{●, ●\}$. → 이게 ϕ 이면 증명끝!

전략: $\tilde{\mathcal{D}} = \{B \in \sigma(\mathcal{A}) : P_1(B) \neq P_2(B)\}$. 라고

두고 $\tilde{\mathcal{D}} = \phi$ 임을 보이라!

It sufficient to show that

$$\mathcal{D} = \{B \in \sigma(\mathcal{A}) : P_1(B) = P_2(B)\} = \sigma(\mathcal{A}).$$

WTS: ① $\mathcal{D} \supset \sigma(\mathcal{A})$ ② $\mathcal{D} \subset \sigma(\mathcal{A})$.

그런데 ②는 당연히 성립하므로 ①만 보여도 충분하다.

Note: IF (1) $\mathcal{D}$ is conting $\mathcal{A}$. (2) $\mathcal{D}$ is λ system.

THEN. we can say $\mathcal{D} \supset \ell(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$

따라서 ① $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ ② $\mathcal{D}$ is λ-system. 임을 보이면 된다.

①: 당연함. 따라서 ②만 보이면 된다.

To show $\mathcal{D}$ is λ-system.

1. $\Omega \in \mathcal{D}$
2. $\forall A, B \in \mathcal{D}$ such that $A \subset B$: $B - A \in \mathcal{D}$.

3. $\forall A_1, A_2, \dots \in \mathcal{D}$: $\biguplus_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{D}$.

Note : $\mathcal{D} = \{ B \in \sigma(\mathcal{A}) : P_1(B) = P_2(B) \}$.

Check 1. : $\Omega \in \mathcal{D}$. $\Leftrightarrow$ $P_1(\Omega) = P_2(\Omega)$ (o)

check 2. $\forall A, B \in \mathcal{D}$ $\Leftrightarrow$ $P_1(A) = P_2(A)$ & $P_1(B) = P_2(B)$

$B - A \in \mathcal{D} \Leftrightarrow P_1(B-A) = P_2(B-A)$

그런데 $\left\{ \begin{array}{l} P_1(B-A) = P_1(B) - P_1(A) \text{ 이고.} \\ P_2(B-A) = P_2(B) - P_2(A) \end{array} \right.$

$P_1(B) = P_2(B)$ & $P_1(A) = P_2(A)$ 이므로

2번조건도 성립.

Check3 : $\forall A_1, A_2, \dots \in \mathcal{D}$: $\biguplus_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{D}$.

$\biguplus_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{D} \Leftrightarrow P_1\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P_2\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} A_2\right)$

그런데 $P_1\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P_1(A_i)$ 이고.

$P_1(A_1) = P_2(A_1)$ & $P_1(A_2) = P_2(A_2)$ & .... 이므로.

조건3도 성립한다.