$\mathcal{A} = \{(-\infty, x] ; \ x \in \mathbb{R}\}$ 이라고하자.

$\forall A \in \mathcal{A} : \int_A f_X \, d\lambda = \mu_X(A)$ 임은 보였음.

목표: $\forall A \in \mathcal{R} : \int_A f_X \, d\lambda = \mu_X(A)$ 임을 보이자.

<u>Thm</u>: If $\mathcal{A}$ is π-system, then $l(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$

WTS: $\mathcal{D} = \{A : \int_A f_X \, d\lambda = \mu_X(A), \ A \in \mathcal{R}\}$

$= \mathcal{R}. = \sigma(\mathcal{A})$.

따라서 $\mathcal{D} \supset \mathcal{R}$ & $\mathcal{D} \subset \mathcal{R}$. 임을 보이면 된다.

이때 $\mathcal{D} \subset \mathcal{R}$ 임은 당연하므로, $\mathcal{D} \supset \mathcal{R}$ 임을 보이면 된다. 그런데, $\mathcal{D}$가 만약 ① λ system 이고

② $\mathcal{A}$ 를 포함한다면 (Note $\mathcal{A}$ is π-system)

$$\underbrace{\sigma(\mathcal{A}) = l(\mathcal{A})}_{\because \ \pi\text{-}\lambda \text{ thm.}} = \mathcal{R}. \subset \mathcal{D} \quad \cdots \ (*)$$

$(*)$ 가 성립하므로, $\mathcal{D} \supset \mathcal{R}$ 이 증명된다.

<u>Check 1.</u> $\mathcal{A}$ 는 π-system. 이고. $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ 이다

Check 2. $\mathcal{D}$가 λ-system 임을 보이면 증명이 끝!

1. $\mathbb{R} \in \mathcal{D}$ ✓
2. $\forall A, B \in \mathcal{D}$ such that $A \subset B$: $B-A \in \mathcal{D}$.
3. $\forall A_1, A_2 \cdots \in \mathcal{D}$: $\biguplus_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$.

참고 : $\mathcal{D} = \{A : \int_A f_X \, d\lambda = \mu_X(A), A \in \mathcal{R}\}$.

1. $\int_{\mathbb{R}} f_X \, d\lambda = 1 = \mu_X(\mathbb{R})$.

2. 「Fix $A \subset B$. $A \in \mathcal{D}$, $B \in \mathcal{D}$.

$B-A \in \mathcal{D}. \Leftrightarrow \int_{B-A} f_X \, d\lambda = \mu_X(B-A)$

$\text{LHS} = \int_B f_X \, d\lambda - \int_A f_X \, d\lambda.$ (왜? $B \supset A$)

$= \mu_X(B) - \mu_X(A)$ (왜? $A, B \in \mathcal{D}$)

$= \mu_X(B-A)$ (왜? $B \supset A$)

$= \text{RHS}$」 그런데 A,B를 고정하지 않고

임의의 $A \subset B$ & $A, B \in \mathcal{D}$ 를 선택해도 「…」의

논의가 성립하므로. 2는 체크완료!

3. 「Fix $A_1, A_2 \cdots \in \mathcal{D}$ & $A_1, A_2 \cdots$ are disjoint.

$\biguplus_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{D}$. 임을 보이자.

$$\int_{\biguplus_{i=1}^{\infty} A_i} f_x \, d\lambda = \mu_x\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$ 임을 보이면 된다.

$$LHS = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f_x \, d\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_x(A_i)$$

$$= \mu_x\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} A_i\right) = RHS$$」

「…」의 논의가 $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{D}$ & $A_1, A_2 \cdots$ are disjoint 한 임의의 $A_1, A_2, \cdots$ 에 대하여 성립하므로

3이 체크완료.

$\therefore$ $\mathcal{D}$는 λ-system.