# 벡터, 매트릭스의 표현.

$\mathbb{X}$ : $n \times p$ matrix.

$$\mathbb{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{x}_1 \\ \mathbb{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbb{x}_n \end{bmatrix}$$

, 단 $X_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix}$ and $\mathbb{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1p} \end{bmatrix}$

# 트랜스포즈.

· 임의의 매트릭스 $\mathbb{X}_{n \times p}$ 에 대하여 $\mathbb{X}^T$ 는 아래와같이 표현.

<u>표현1</u> : $\mathbb{X} = \begin{bmatrix} X_1 & \cdots & X_p \end{bmatrix}$

$$\mathbb{X}^T = \begin{bmatrix} X_1^T \\ \vdots \\ X_p^T \end{bmatrix}$$

<u>표현2</u> : $\mathbb{X} = \begin{bmatrix} \mathbb{x}_1 \\ \mathbb{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbb{x}_n \end{bmatrix}$ , $\mathbb{X}^T = \begin{bmatrix} \mathbb{x}_1^T & \mathbb{x}_2^T & \cdots & \mathbb{x}_n^T \end{bmatrix}$

# 행렬곱

$A$ : $n \times n$ matrix , $B$ : $n \times n$ matrix

표현1 : $AB = [A_1 \cdots A_n]\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} A_i b_i$

표현2 : $AB = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}[B_1 \cdots B_n] = \begin{bmatrix} a_1B_1 & \cdots & a_1B_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nB_1 & \cdots & a_nB_n \end{bmatrix}$

표현3 : $AB = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} a_1B \\ \vdots \\ a_nB \end{bmatrix}$

표현4 : $AB = A[B_1 \cdots B_n] = [AB_1 \cdots AB_n]$

잘못된표현1. $AB = A\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ab_1 \\ \vdots \\ Ab_n \end{bmatrix}$

잘못된표현2. $AB = [A_1 A_2 \cdots A_n]B = [A_1B \cdots A_nB]$

# 행렬곱에 관한 예제들.

예제 1 $\quad X : n\times p \qquad \beta : p\times 1$

$$X\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\beta = \begin{bmatrix} x_1\beta \\ \vdots \\ x_n\beta \end{bmatrix}$$ (∵ 표현3)

예제 2 $\quad X : n\times(p+1)$ with $X = [1 \ \tilde{X}]$

$\beta : (p+1)\times 1$ with $\beta = (\beta_0, \dots \beta_p)^T$

$$X\beta = \begin{bmatrix} x_1\beta \\ x_2\beta \\ \vdots \\ x_n\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [1 \ \tilde{x}_1]\begin{bmatrix}\beta_0 \\ \tilde{\beta}\end{bmatrix} \\ \vdots \\ [1 \ \tilde{x}_n]\begin{bmatrix}\beta_0 \\ \tilde{\beta}\end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \beta_0 + \underline{\tilde{x}_1\tilde{\beta}} \\ \vdots \\ \beta_0 + \tilde{x}_n\tilde{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 + x_{11}\beta_1 + \dots + x_{1p}\beta_p \\ \vdots \\ \beta_0 + x_{n1}\beta_1 + \dots + x_{np}\beta_p \end{bmatrix}$$

예제 3 $\quad X : n\times p$ matrix

$$X^T\underline{X} = [x_1^T \dots x_n^T]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i^T x_i .$$

예제4. (고유치분해)

- $\Psi$ : $n \times n$ matrix
- $\Lambda$ : $n \times n$ diag matrix

$$\Psi \Lambda \Psi^T = [\psi_1 \cdots \psi_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1^T \\ \vdots \\ \psi_n^T \end{bmatrix}$$

$$= [\psi_1 \cdots \psi_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 \psi_1^T + 0 + \cdots + 0 \\ 0 + \lambda_2 \psi_2^T + \cdots + 0 \\ 0 + 0 + \cdots + \lambda_n \psi_n^T \end{bmatrix}$$

$$= [\psi_1 \cdots \psi_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 \psi_1^T \\ \vdots \\ \lambda_n \psi_n^T \end{bmatrix} = \psi_1 \lambda_1 \psi_1^T + \cdots + \psi_n \lambda_n \psi_n^T$$

$$= \lambda_1 \psi_1 \psi_1^T + \cdots + \lambda_n \psi_n \psi_n^T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \psi_i \psi_i^T.$$

암기 : $\Psi \Lambda \Psi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \psi_i \psi_i^T$.

예제5 : (SVD). suppose $n \geq m$.

$U$ : $n \times n$ matrix

$D$ : $n \times m$ matrix with $\begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_m \\ \hline & O & \end{bmatrix}$

$V$ : $m \times m$ matrix.

$$UDV^T = [U_1 \cdots U_n] \underbrace{\begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_m \\ & & \end{bmatrix}}_{n\times m} \underbrace{\begin{bmatrix} V_1^T \\ \vdots \\ V_m^T \end{bmatrix}}_{m\times m}$$

$$= [U_1 \cdots U_n] \begin{bmatrix} \left.\begin{matrix} d_1V_1^T + 0 + \cdots + 0. \\ 0 + d_2V_2^T + \cdots + 0. \\ 0 + 0 + \cdots + d_mV_m^T \end{matrix}\right\} m\text{개}. \\ \left.\begin{matrix} \\ O \end{matrix}\right\} n-m\text{개}. \end{bmatrix}$$

$$= [U_1 \cdots U_n] \begin{bmatrix} d_1V_1^T \\ \vdots \\ d_mV_m^T \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = U_1d_1V_1^T + \cdots + U_md_mV_m^T$$

$$= \sum_{i=1}^{m} U_i d_i V_i^T = \sum_{i=1}^{n\wedge m} U_i d_i V_i^T$$

<u>암기</u> : $UDV^T = \sum_{i=1}^{n\wedge m} d_i U_i V_i^T$

<u>예제6</u> : (SVD) suppose $n \le m$

$U$ : $n\times n$ matrix

$D$ : $n\times m$ matrix with $\left[\begin{array}{ccc|c} d_1 & & 0 & \\ & \ddots & & O \\ 0 & & d_n & \end{array}\right]$

$V$ : $m\times m$ matrix.

$$UDV^T = [U_1 \cdots U_n] \left[\begin{array}{ccc|c} d_1 & & 0 & \\ & \ddots & & O \\ 0 & & d_n & \end{array}\right] \begin{bmatrix} V_1^T \\ \vdots \\ V_n^T \\ \vdots \\ V_m^T \end{bmatrix}$$

$$= [U_1 \cdots U_n] \begin{bmatrix} d_1 V_1^T \\ \vdots \\ d_n V_n^T \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} d_i U_i V_i^T = \sum_{i=1}^{n \wedge m} d_i U_i V_i^T.$$

암기 : $UDV^T = \sum_{i=1}^{n \wedge m} d_i U_i V_i^T$

# SVD (☆☆☆☆).

이론 (Ver1) : 임의의 matrix $X_{n \times m}$ 은 아래와 같이 표현할수 있다.

$$X_{n \times m} = U_{n \times n} D_{n \times m} V_{m \times m}^T$$

여기에서 $D$는 대각 행렬은 아니나 정사각형 부분은 대각행렬임

또한 $U$와 $V$는 모두 직교행렬이 된다. 즉 아래가 성립함.

- $U^T U = U U^T = I_n$
- $V^T V = V V^T = I_m$

**note** : 조금 귀찮은 과정을 거치면 $D$를 대각행렬로 잡을수 있다.

경우 1 $n \geq m$.

아래의 사실을 관찰하자.

$$UD = [u_1\ u_2\ \cdots\ u_m\ \cdots\ u_n]\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_m \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= [u_1\ u_2\ \cdots\ u_m]\begin{bmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_m \end{bmatrix} = \tilde{U}\tilde{D}.$$

이렇게 되면 $\tilde{D}$는 $m\times m$ 대각행렬이 되고, $\tilde{U}$는 $n\times m$ 행렬이 된다. 그런데 $U$가 직교행렬 이었으므로

$$\tilde{U}^T\tilde{U} = \begin{bmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_m^T \end{bmatrix}[u_1 \cdots u_m] = \begin{bmatrix} u_1^Tu_1 & \cdots & u_1^Tu_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_m^Tu_1 & \cdots & u_m^Tu_m \end{bmatrix} = I_m$$

$$\tilde{U}\tilde{U}^T = \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \vdots \\ \tilde{u}_n \end{bmatrix}[\tilde{u}_1^T \cdots \tilde{u}_n^T] = \begin{bmatrix} \tilde{u}_1\tilde{u}_1^T & \cdots & \tilde{u}_1\tilde{u}_n^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{u}_n\tilde{u}_1^T & \cdots & \tilde{u}_n\tilde{u}_1^T \end{bmatrix} \neq I$$

요약하면 $n \geq m$ 경우는 아래와 같이 쓸수있다.

$$\underset{n\times m}{X} = \underset{n\times n}{U}\ \underset{n\times m}{D}\ \underset{m\times m}{V^T} = \underset{n\times m}{\tilde{U}}\ \underset{m\times m}{\tilde{D}}\ \underset{m\times m}{V^T}.$$

$\tilde{U}$ 와 $\tilde{D}$ 를 새로운 $U$, $D$ 로 생각하면,

$$\underset{n\times m}{X} = \underset{n\times m}{U}\ \underset{m\times m}{D}\ \underset{m\times m}{V^T}.$$

- $U^T U = I$ , $UU^T \neq I$.
- $V^T V = VV^T = I$.
- $D$는 대각행렬.

와 같이 쓸 수 있다!

<u>경우 2</u>. $n \leq m$.

아래의 사실을 관찰하자.

$$D_{m\times m}(V_{m\times m})^T = ((DV^T)^T)^T.$$

이제 다시 아래를 관찰하자.

$$\underline{(DV^T)^T} = VD^T. = [v_1 \cdots v_n \cdots v_m]\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \\ & O & & \end{bmatrix}$$

$$= [V_1 \cdots V_n] \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix} = \tilde{V}\tilde{D} \quad (\tilde{D} = \tilde{D}^T)$$

여기에서 $\tilde{D}$ $n \times n$ 대각행렬이 되고 $\tilde{V}$는 $m \times n$ 행렬이 된다.

그리고 원래 $V$가 직교행렬이었으므로,

$$\tilde{V}^T\tilde{V} = \begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix} [v_1 \cdots v_n] = \begin{bmatrix} v_1^T v_1 & \cdots & v_1^T v_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n^T v_1 & \cdots & v_n^T v_n \end{bmatrix} = I_n$$

이 성립한다. 그러나 $\tilde{V}\tilde{V}^T = I$가 성립하지는 않는다.

따라서 정리하면 아래가 성립한다.

$$D_{m \times m}(V_{m \times m})^T = ((DV^T)^T)^T = (\tilde{V}\tilde{D})^T = \tilde{D}\tilde{V}^T.$$

요약하면 이 경우 SVD는 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$X = UDV^T = U\tilde{D}\tilde{V}^T.$$

이론 (ver2) : 임의의 matrix $X_{n \times m}$은 아래와 같이 표현할 수 있다.

① $n \geq m$ : $\underset{n \times m}{X} = \underset{n \times m}{U}\,\underset{m \times m}{D}\,\underset{m \times m}{V^T}.$

- $U^T U = I_m$
- $V^T V = V V^T = I_n$
- D는 m×m 대각행렬.

② $n \leq m$ : $\underset{n \times m}{X} = \underset{n \times n}{U}\, \underset{n \times n}{D}\, \underset{n \times m}{V^T}$. $\left\{ \begin{array}{l} V : m \times n \text{ matrix} \\ V^T : n \times m \text{ matrix} \end{array} \right.$

- $U^T U = U U^T = I_n$
- $V^T V = I_n$
- D는 n×n 대각행렬.