# Aula 5

## **Aula passada**

- Valor esperado condicional
- Espaço amostral contínuo, função densidade
- Limitantes para probabilidade
- Desigualdades de Markov, Chebyshev, Chernoff
- *with high probability*

## **Aula de hoje**

- Limitante da união
- Método do primeiro momento
- Lei dos grandes números (fraca e forte)
- Erro e confiança

# Pergunta da Aula Passada

- Calcular valor exato para cauda é bem mais difícil que calcular limitante superior
  - $N$~Bin(10000,0.002) → μ=200

$$P[N \geq 500] = \sum_{i=500}^{10000} \binom{10000}{i} \left(\frac{2}{1000}\right)^{i} \left(1 - \frac{2}{1000}\right)^{10000-i}$$

Número muito grande!

Número muito pequeno!

- Problema: multiplicar número grande por pequeno!
- Por Chernoff, temos

$$P[X \geq (1+1.5)\mu] \leq \left(\frac{e^{1.5}}{(1+1.5)^{1+1.5}}\right)^{200}$$

Número de bom tamanho, que já é a probabilidade!

# Limitante da União

- O muito famoso *Union Bound*
  - muito usado na computação e matemática
  - muito útil para lidar com muitos eventos que não necessariamente são mutuamente exclusivos ou independentes
- Sejam A e B dois eventos em um espaço amostral
- Temos que

$$P[A \vee B] = P[A + B] = P[A] + P[B] - P[A \wedge B]$$

$$<= P[A] + P[B]$$

- Se A e B são mutuamente exclusivos, temos igualdade (pois interseção é vazia)

# Limitante da União

- Seja $A_i$ uma sequência de eventos de um espaço amostral, com $i = 1,..., n$
- Temos que

$$P[.\cup_i A_i] = P[\sum_i^n A_i] \leq \sum_i^n P[A_i]$$

- Se $A_i$ forem identicamente distribuídos (mesma probab)

$$P[.\cup_i A_i] = P[\sum_i^n A_i] \leq \sum_i^n P[A_i] = nP[A_1]$$

- Caso contrário, ainda temos

$$P[.\cup_i A_i] = P[\sum_i^n A_i] \leq \sum_i^n P[A_i] \leq n\, max_i\, P[A_i]$$

# Exemplo

- Jogar um dado honesto três vezes. Qual a probabilidade de sair 6 ao menos uma vez?
- Seja $X_i$ o resultado da *i*-ésima rodada

$$P[X_1=6 \vee X_2=6 \vee X_3=6] \leq P[X_1=6]+P[X_2=6]+P[X_3=6]$$

$$.=3\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}$$

- Qual é a probabilidade exata?
- Complemento de não sair 6 em nenhuma rodada!

$$1-P[X_1 \neq 6 \wedge X_2 \neq 6 \wedge X_3 \neq 6]$$

$$= 1-P[X_1 \neq 6]P[X_2 \neq 6]P[X_3 \neq 6]$$ (por independência)

$$= 1-\left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0.42$$ ← Limitante deu um bom resultado!

# Exemplo 2

- Jogar um dado honesto 10 vezes. Qual a probabilidade de sair 6 ao menos uma vez?
- Seja $X_i$ o resultado da *i*-ésima rodada

$$P[.\cup_i\{X_i=6\}]=P[\sum_{i=1}^{10}\{X_i=6\}]\leq 10\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{5}{3}$$

Nada útil!!!

- Limitante da união demanda parcelas com probabilidade pequena e/ou pequeno número de parcelas!
  - caso contrário, resultado não é útil

# Bolas e Urnas

- Considere *kn* bolas jogadas aleatoriamente sobre *n* urnas, para *k* >= 1
- Qual a prob de termos ao menos uma urna vazia ($p_0$)?
- $X_i$ : v.a. indicadora que urna *i* está vazia

$$P[X_i] = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{kn}$$ ← prob. urna *i* vazia

- Limitante da união

$$p_0 = P[.\cup_i^n \{X_i\}] = P[\sum_{i=1}^{n} \{X_i\}] \leq n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{kn}$$

- Exemplos
- n=10, k=3 → $p_0$ = 0.42
- n=100, k=2 → $p_0$ = 13.4 (nada útil)

# Método do Primeiro Momento

- Seja $A_n$ uma sequência de eventos sobre o respectivo espaço amostral ($n$ é algum parâmetro do modelo)
- Muitas vezes queremos entender se e quando a probabilidade de um evento vai a zero

$$\lim_{n \to \infty} P[A_n] = 0$$

- Em particular, seja $X_n$ uma v.a. que assume valores inteiros e não negativos, parametrizada por um parâmetro $n$
  - $X_n$ conta ocorrências de alguma coisa
- Considere o evento $X_n > 0$
- Queremos entender $\lim_{n \to \infty} P[X_n > 0]$

# Método do Primeiro Momento

- Neste caso, temos o seguinte resultado
- Se $\lim_{n \to \infty} E[X_n] = 0$ então $\lim_{n \to \infty} P[X_n > 0] = 0$
- Ou seja, se E[$X_n$] = 0, $X_n$ assume valor 0 com probabilidade que vai a 1 quando n → oo
  - não há ocorrências do evento que $X_n$ conta
- Prova: desigualdade de Markov!
  - P[X >= k] <= E[X] / k
  - para k=1, temos que P[X >= 1] <= E[X], e como X é inteiro, temos que P[X >= 1] = P[X > 0] <= E[X]
  - logo, se E[X] vai a zero, P[X > 0] também vai a zero
- Abordagem conhecida por método do primeiro momento

# Bolas e Urnas

- Considere *kn* bolas jogadas aleatoriamente sobre *n* urnas, para *k* >= 1
- Qual valor de k (em função de n) para que a prob de termos ao menos uma urna vazia ($p_0$) seja zero?
- $X_i$ : v.a. indicadora que urna *i* está vazia

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Y = número de urnas vazias (em sistemas com *n* urnas)

- Determinar quando E[Y] vai a zero
  - condição suficiente pelo método do primeiro momento

$$E[Y] = E[\sum_{i}^{n} X_i] = \sum_{i}^{n} E[X_i] = n(1 - 1/n)^{kn}$$

- Se k = ω(log n) então E[*Y*] → 0
- Logo, se o número de bolas > n log n, não teremos nenhuma urna vazia (com certeza, conforme n cresce)!

# Lei dos Grandes Números

- Todos devem conhecer, ao menos intuitivamente!
- Motivação: Jogar um dado honesto com seis faces *n* vezes
- $X_i$ : resultado da *i*-ésima jogada
- $N_1(n)$ : número de vezes que o resultado é 1
- $F_1(n)$ : fração de vezes que o resultado é 1

$$N_1(n)=\sum_{i=1}^{n} I(X_i=1) \qquad F_1(n)=\frac{N_1(n)}{n}$$

- Quanto vale $F_1(10)$ = ?
- $F_1(100)$ = ?
- $F_1(1000)$ = ?

# Lei dos Grandes Números

- $F_1(n)$ converge para $P[X_i = 1]$ quando $n \to oo$
- Frequência relativa do resultado de experimento aleatório converge para sua probabilidade!

**Conexão da teoria com a prática!**

- Resultado fundamental em probabilidade e estatística
- Atribui significado físico a um conceito abstrato
  - probabilidade existe!
  - números aleatórios quando muitos, convergem (lei dos “muitos” números)

# Lei dos Grandes Números

- Seja $X_i$ uma sequência de v.a. iid, tal que
  - $\mu = E[X_i]$ , $\sigma^2 = Var[X_i]$

$$X = M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \longleftarrow$$ chamada de média amostral

- $M_n$ é uma v.a. Qual seu valor esperado, variância?

$$E[M_n] = \frac{1}{n} E[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \frac{1}{n} n\mu = \mu$$

$$Var[M_n] = \frac{1}{n^2} Var[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var[X_i] = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

# Lei Fraca dos Grandes Núm.

- $M_n$ possui mesmo valor esperado que $X_i$ e variância que vai a zero com $n$

$$E[M_n]=\mu \qquad Var[M_n]=\frac{\sigma^2}{n}$$

- Lei fraca dos grandes números
  - se μ finito, para qualquer ε > 0, temos

$$\lim_{n\rightarrow\infty} P[|M_n-\mu|<\epsilon]=1$$

- Chamado de “convergência em probabilidade”
- Probabilidade de $M_n$ estar ε de distância da média vai a 1, para qualquer ε positivo (ex. $\varepsilon = 10^{-10}$)

# Lei Fraca dos Grandes Núm.

- Quem poderá nos ajudar a provar este resultado (assumindo $\sigma^2$ é finito)?
- Para qualquer $\varepsilon > 0$, $\lim_{n \to \infty} P[|M_n - \mu| < \epsilon] = 1$

$$E[M_n] = \mu \qquad Var[M_n] = \frac{\sigma^2}{n}$$

- Lembrando desigualdade de Chebyshev

$$P[|M_n - \mu_{M_n}| \geq k\sigma_{M_n}] \leq \frac{1}{k^2}$$

- Aplicando, temos

$$k\sigma_{M_n} = \epsilon \rightarrow k = \frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sigma}$$

# Lei Fraca dos Grandes Núm.

- Usando a complementar

$$P[|M_n - \mu| < \epsilon] = 1 - P[|M_n - \mu| > \epsilon]$$

- Usando Chebyshev

$$P[|M_n - \mu| \geq k\sigma_{M_n}] \leq \frac{1}{k^2} = \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 n}$$

- Substituindo acima, temos

$$P[|M_n - \mu| < \epsilon] = 1 - P[|M_n - \mu| > \epsilon] \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 n}$$

- Cujo limite vai a 1 com n → infinito

# Lei Forte dos Grandes Núm.

- $M_n$ possui mesmo valor esperado que $X_i$ e variância que vai a zero com $n$

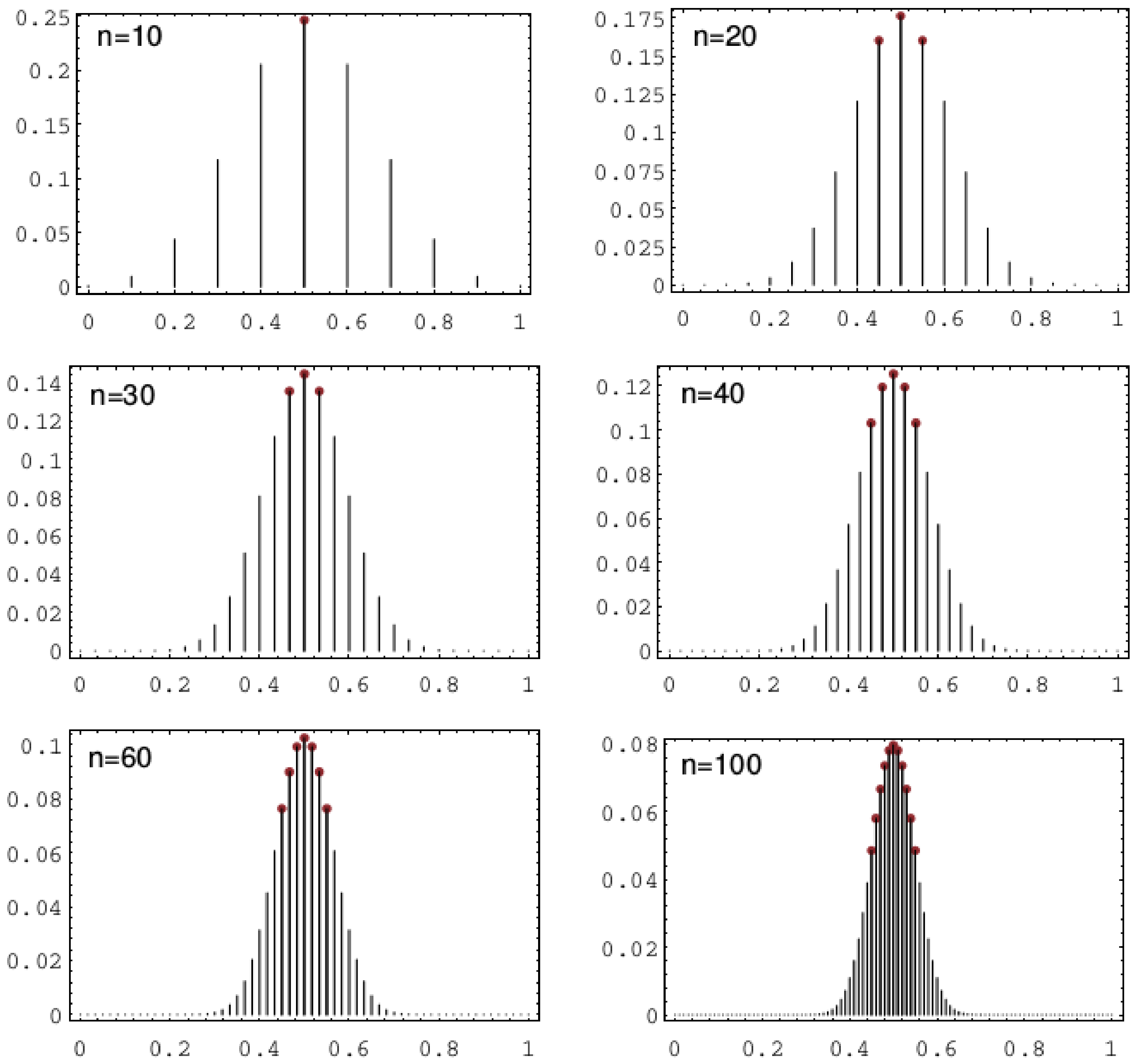
$$E[M_n]=\mu \qquad Var[M_n]=\frac{\sigma^2}{n}$$

- Para μ finito, temos

$$P[\lim_{n\to\infty} M_n=\mu]=1$$

- Chamado de “convergência quase certamente” (*almost surely*)
- Resultado bem mais forte (não temos ε)
  - $M_n$ de fato converge para sua média!

# Exemplo




- Moeda honesta, fração de caras

$$E[M_n] = \frac{1}{2}$$

$$Var[M_n] = \frac{1}{4n}$$

- Conforme $n$ aumenta, $M_n$ fica mais centrada!

Figueiredo 2018

# Calculando Erro e Confiança

- Podemos usar Chebyshev para calcular precisão e confiança na lei dos grande números
- Seja precisão ε, confiança β

$$P[M_n \in [\mu-\epsilon, \mu+\epsilon]] > \beta$$

- Dado precisão ε, confiança β (além de μ e $\sigma^2$), podemos calcular valor de *n* para atingir esta meta
- Lembrando

$$P[|M_n-\mu|<\epsilon] \geq 1-\frac{\sigma^2}{\epsilon^2 n} \longrightarrow 1-\frac{\sigma^2}{\epsilon^2 n}=\beta$$

  - Confiança: relação linear com n
  - Precisão: relação quadrática com n
  - Implicações importantes!

# Exemplo

- Suponha uma moeda enviesada, com probabilidade de cara sendo 45%
- Você quer testar se moeda é enviesada. Quantas vezes lançar a moeda?
- Supor $\varepsilon = 0.01$ e $\beta = 0.95$
- Temos $\mu = 0.45$, $\sigma^2 = 0.45*0.55$

$$P[M_n \in [0.44, 0.46]] > 1 - \frac{(0.45 * 0.55)}{(0.01)^2 n} = 0.95$$

- Logo, n = 49500