Algoritmos de Monte Carlo e Cadeias de Markov – CPS 767 2020/1

Prof. Daniel R. Figueiredo

Quarta Lista de Exercícios

Dica: Para ajudar no processo de aprendizado responda às perguntas integralmente, mostrando o desenvolvimento das respostas.

Questão 1: Filas e caixas Considere um caixa de supermercado onde a cada instante de tempo uma pessoa chega probabilidade p, ou uma pessoa em atendimento sai do caixa com probabilidade q, ou nada acontece com probabilidade remanescente. Se uma pessoa chega e encontra o caixa vazio, ela imediamente inicia o atendimento, caso contrário ela aguarda em uma fila. Ao terminar um atendimento, a próxima pessoa da fila imediatamente inicia o atendimento.

1. Construa uma cadeia de Markov para representar este sistema.
2. Encontre a distribuição estacionária assumindo que a fila possui capacidade infinita, e que $p < q$ (dica: use o metodo direto e monte uma recursão).
3. Determine a fração de tempo que o caixa passa ocioso (sem ter clientes para atender) em função dos parâmetros do modelo(dica: fração de tempo ocioso é dado pela probabilidade do sistema estar ocioso depois de um tempo muito grande).

Questão 2: Passeios aleatórios enviesados
Considere um grafo não direcionado $G = (V, E)$ com peso nas arestas, tal que $w_{ij} > 0$ para toda aresta $(i, j) \in E$. Considere um andarilho aleatório que caminha por este grafo em tempo discreto, mas cujos passos são enviesados pelos pesos das arestas. Em particular, a probabilidade do andarilho ir do vértice i para o vértice j é dado por w_{ij}/W_i, onde $W_i = sum_j w_{ij}$ (W_i é a soma dos pesos das arestas incidentes ao vértice $i \in V$). Temos assim um passeio aleatório enviesado pelos pesos das arestas.

1. Mostre que este passeio aleatório induz uma cadeia de Markov.
2. Determine a distribuição estacionária desta cadeia de Markov (dica: use o método da inspeção).
3. Determine se esta cadeia de Markov é reversível no tempo.

Questão 3: Convergência de passeios aleatórios
Considere um passeio aleatório preguiçoso (com $p = 1/2$) caminhando sobre um grafo com $n = 100$ vértices. Estamos interessados em entender a convergência da distribuição $\pi(t)$ para diferentes grafos. Assuma que o passeio sempre inicia sua caminhada no vértice 1, ou seja, $\pi_1(0) = 1$. Considere os seguintes grafos: grafo em anel, árvore binária cheia, grafo em reticulado com duas dimensões (grid 2D).

1. Para cada grafo, construa analiticamente a matriz de transição de probabilidade (ou seja, determine P_{ij} para todo vértice i, j do grafo).
2. Determine analiticamente a distribuição estacionária para cada grafo (ou seja, determine π_i para cada vértice i do grafo).
3. Para cada grafo, calcule numericamente a variação total entre $\pi(t)$ e a distribuição estacionária, em função de t. Trace um gráfico onde cada curva corresponde a um grafo (preferencialmente em escala $\log - \log$, com $t \in [1, 10^3]$).

4. O que você pode concluir sobre a convergência em função da estrutura do grafo?

Questão 4: Tempo de mistura de passeios aleatórios
Considere os passeios aleatórios preguiçosos da questão anterior, e assuma que $\epsilon = 10^{-4}$. Para cada grafo, determine o tempo de mistura, τ_n (com ϵ fixo) para grafos de diferentes tamanhos, dado por n. Em particular, considere $n = \{10, 50, 100, 300, 700, 1000\}$.

1. Trace um único gráfico de τ_n em função de n onde cada curva corresponde a um grafo.
2. O que você pode concluir sobre o tempo de mistura em função da estrutura do grafo?

Questão 5: Hardcore com Metropolis-Hasting
Considere o modelo Hardcore, onde cada vértice de um *grafo qualquer* está associado ao valor 0 ou 1 tal que um vértice com valor 1 necessariamente tem todos seus vizinhos com valor 0.

1. Construa uma cadeia de Markov irredutível a aperiódica que tenha transições simples de calcular entre os possíveis estados do modelo. Por exemplo, o número de transições de saída de um estado deve ser no máximo o número de vértices da rede.
2. Aplique o método de Metropolis-Hasting na CM acima tal que a distribuição estacionária da nova cadeia seja uniforme. Calcule as probabilidades de transição desta nova cadeia.
3. Compare as probabilidades de transição do modelo acima com a cadeia construída com o Gibbs Sampling (visto em aula). Elas são idênticas?

Questão 6: Amostrando triângulos
Considere um grafo conexo qualquer. Desejamos gerar amostras de triângulos deste grafo (cliques de tamanho 3), tal que todo triângulo tem igual probabilidade de ser amostrado. Ou seja, distribuição uniforme sobre o conjunto de triângulos do grafo.

1. Mostre como gerar amostras de forma direta, utilizando a distribuição uniforme (dica: pense em amostragem por rejeição). Determine a eficiência desse método.
2. Mostre como gerar amostras utilizando Metropolis-Hasting. Determine os estados da CM, as transições originais da cadeia (que deve ser irredutível e aperiódica), e as transições da cadeia modificada pelo método Metropolis-Hasting.
3. Intuitivamente, disctura quando a abordagem via Metropolis-Hastings é mais eficiente (do ponto de vista computacional) do que a abordagem via amostragem por rejeição.

Questão 7: Quebrando o código
Você encontrou uma mensagem que foi cifrada com a código da substituição (neste código, cada letra é mapeada em outra letra, de forma bijetora). Você deseja encontrar a chave do código para ler a mensagem. Repare que a chave é um mapeamento σ entre as letras, por exemplo $\sigma(a) = x$, $\sigma(b) = h$, $\sigma(c) = e$, ... Considere uma função $f : \Omega \to [0, 1]$ que avalia a sua capacidade de entender a mensagem cifrada dado um mapeamento $\sigma \in \Omega$. Repare que $f(\sigma) = 1$ se você consegue entender por completo a mensagem decifrada com o mapeamento σ, e $f(\sigma) = 0$ se o mapeamento σ não revela nenhuma informação sobre a mensagem. Utilize o método de *Simulated Annealing* para resolver este problema! Mostre todos os passos necessários.