

Aula 11

Aula passada

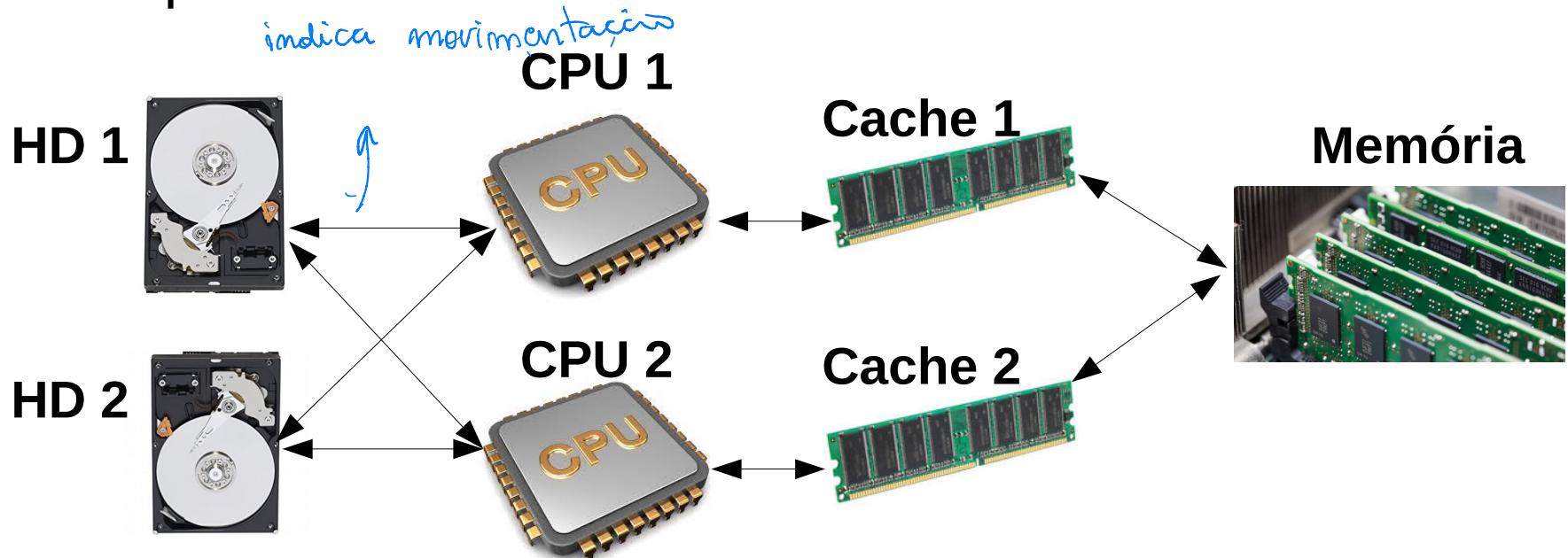
-

Aula de hoje

- Cadeias de Markov
- Definição e exemplos
- Modelo On-Off
- Sem memória
- Distribuição no tempo
- Irreducibilidade
- Aperiodicidade

Sistema Computacional

- Duas CPUs, com respectivos caches, memória compartilhada, dois discos
 - um processo está em um destes recursos em cada tempo

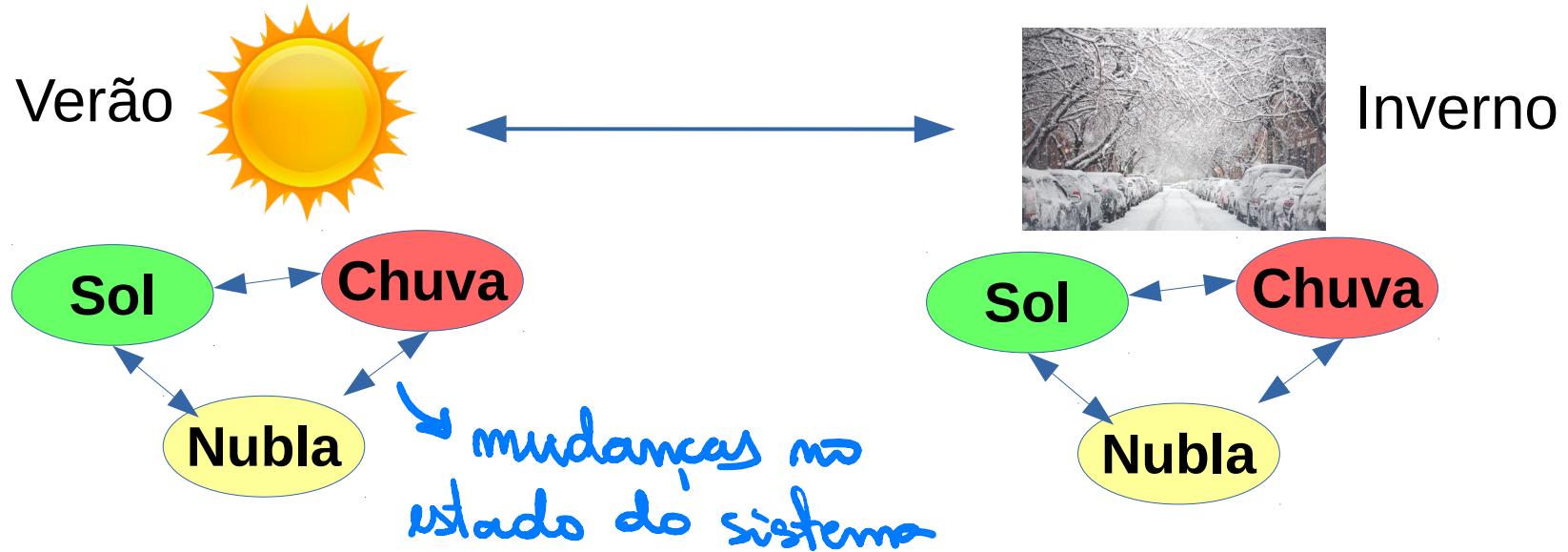


- Objetivo: avaliar e/ou melhorar desempenho → *Onde está o garajão do sistema?*
- Como representar a *dinâmica* deste sistema?

Modelo matemático!

Previsão do Tempo

- Duas estações do ano, e três tipos de dia
 - estações alternam, dias não tem estrutura



- Objetivo: avaliar e/ou prever os dias
- Como representar a *dinâmica* deste sistema?

Modelo matemático!

Cadeias de Markov

- Ferramenta de modelagem matemática
 - como equações diferenciais
- Representam dinâmica de sistemas com aleatoriedade
 - sequência de variáveis aleatórias dependentes
- Muito poderosa, na teoria e na prática
 - estudada e aplicada amplamente por matemáticos e engenheiros (e médicos, biólogos, etc)
- Simplificação da realidade
 - mas pode codificar praticamente qualquer complexidade
- Estudadas por Andrey Markov (1906)
 - independência não é necessária para lei fraca dos grandes números

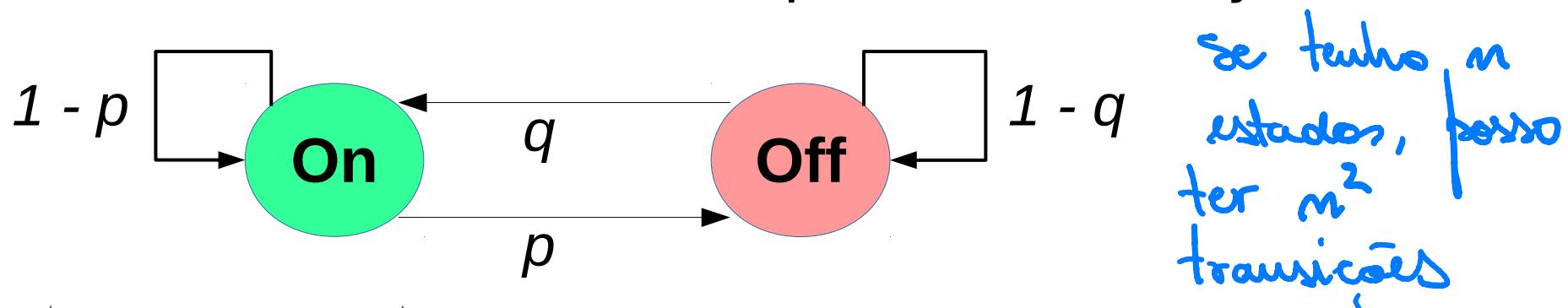
Cadeias de Markov

- **Espaço de estados:** todos os possíveis estados nos quais o sistema pode se encontrar
 - possíveis valores que v.a. pode assumir
 - finito ou infinito, contável ou não (interesse em finito)
- **Matriz de transição:** todas as possíveis transições de estado diretas que o sistema pode fazer
 - transições são aleatórias, dependem do estado atual
- **Tempo discreto:** uma transição a cada passo de tempo
 - tempo contínuo também é possível
- **Estado inicial:** estado onde o sistema começa
 - pode ser escolhido de forma aleatória → mas influencia na convergência

Cadeias de Markov

- Representada por um grafo direcionado com pesos
 - vértices: estados do sistema
 - arestas: possíveis transições
 - pesos: probabilidade (soma dos pesos de saída igual a 1)
- Modelo On-Off

- a mais simples e mais usada cadeia de Markov
- dois estados: On e Off, todas possíveis transições

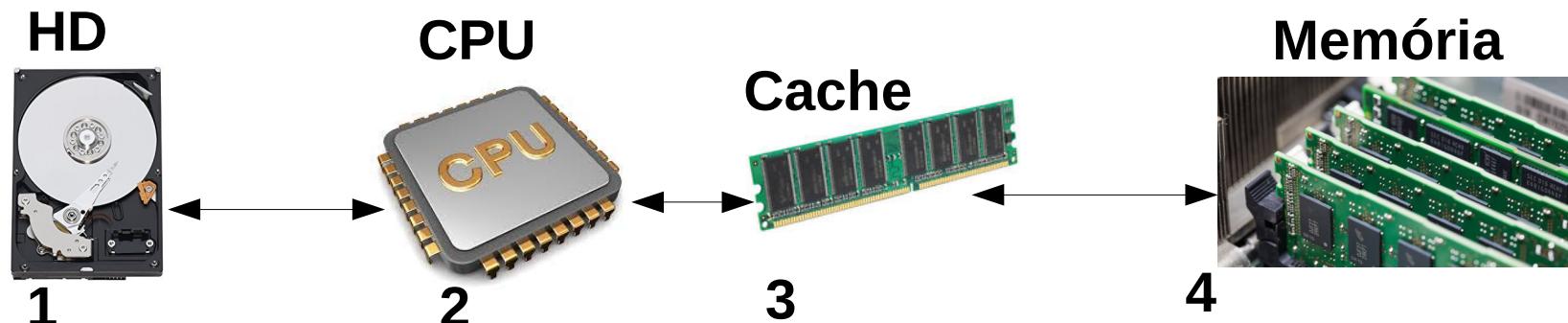


$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

Matriz de transição de estados.
 $P[i,j]$ = prob. de transição do estado i para estado j

Sistema Computacional

- Versão simplificada, apenas um recurso de cada tipo, tempo discreto
- Estados: recurso sendo utilizado pelo processo
- Transições: definidas empiricamente (ou modelagem)
 - possíveis transições e valores de probabilidade



$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & 0 \\ 0 & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ 0 & 0 & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix}$$

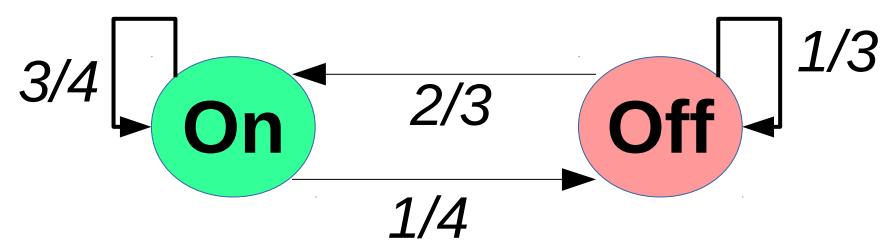
$$\sum_{j=1}^4 p_{ij} = 1 \text{ , para todo } i$$

- probabilidade de saída tem que somar 1

Definição Formal

- Seja S o espaço de estados da CM e P sua matriz de transição de estados
- Seja X_t uma v.a. que determina o valor do estado do sistema no instante de tempo t , para $t = 0, 1, 2, \dots$
- Para cada t , X_t possui uma distribuição diferente
 - $P[X_t = s]$ para todo s em S
- Exemplo: Modelo On-Off, $p=1/4$, $q=2/3$
 - $X_0 = 1$ (On) $\rightarrow P[X_0 = 1] = 1$
 - $P[X_1 = 1] = ?$, $P[X_1 = 2] = ?$
 - $P[X_2 = 1] = ?$, $P[X_2 = 2] = ?$

$$P[X_t = s] = \sum_{s' \in S} P[X_{t+1} = s' | X_t = s] \cdot P[X_{t+1} = s']$$



Propriedade Sem Memória

- CM não tem memória (*memoryless property*)
 - próximo estado só depende do estado atual, e não de como chegamos ao estado atual
- Considere uma trajetória de estados pelo sistema
 - $X_0 = s_0, X_1 = s_1, \dots, X_{t-1} = s_{t-1}, X_t = s_t$
 - onde s_i é um estado qualquer em S
- Temos que
$$P[X_{t+1}=s | X_0=s_0, X_1=s_1, \dots, X_t=s_t] = P[X_{t+1}=s | X_t=s_t]$$
$$= p_{st,s}$$
- Distribuição de X_{t+1} só depende de X_t , e não da trajetória
 - toda a evolução é função da matriz P

Distribuição Inicial

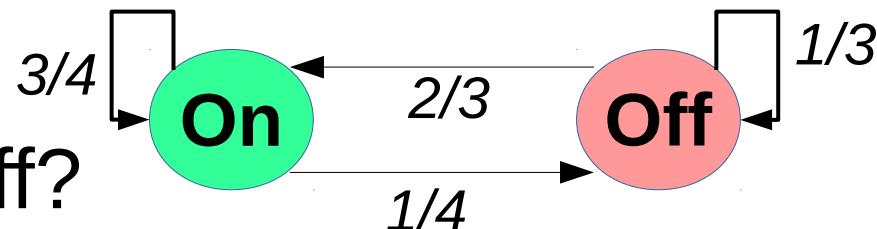
- CM começa em algum estado no tempo $t = 0$
 - escolha é de quem constrói a cadeia!
- Estado inicial pode também ser aleatório
 - $P[X_0 = s] = \pi_s(0)$, para todo s em S
 - tal que $\sum_{s \in S} \pi_s(0) = 1$
- Podemos começar em um único estado?
- Sim! $\pi_s(0) = 1$ para um s qualquer
- No exemplo do Modelo On-Off
 $\pi(0) = (\pi_1(0) \ \pi_2(0)) = (1 \ 0)$ ← Vetor inicial

Distribuição no Tempo t

- Usaremos vetor $\pi(t)$ para denotar a distribuição de X (estado da CM) ao longo do tempo t
- $P[X_t = s] = \pi_s(t) \rightarrow \pi_s(t) \text{ me dá a informação de onde estarei no tempo } t$
- Em forma vetorial

$$\pi(t) = (\pi_1(t) \ \pi_2(t) \ \dots \ \pi_n(t)) = (P[X_t=1] \ \dots \ P[X_t=n])$$

- Quanto vale $\pi(t)$?
- No exemplo do modelo On-Off?



$$\bullet \pi_1(t) = 3/4 * \pi_1(t-1) + 2/3 * \pi_2(t-1)$$

$$\bullet \pi_2(t) = 1/4 * \pi_1(t-1) + 1/3 * \pi_2(t-1)$$

Distribuição no Tempo t

- Generalizando a ideia anterior, temos o seguinte

$$\begin{aligned}\pi_i(t) &= P[X_t = i] = \sum_j P[X_t = i | X_{t-1} = j] P[X_{t-1} = j] \\ &= \sum_j P_{ji} \pi_j(t-1)\end{aligned}$$

↓ são linhas!

Lei prob totall

- De forma matricial (π é vetor linha), temos

$$\pi(t) = \pi(t-1)P = \pi(t-2)PP = \dots = \pi(0)P^t = \pi(t)$$

- onde P é a matriz de transição de estados, e P^t é a multiplicada por ela mesma t vezes
- Boa notícia:** para encontrar a distribuição $\pi(t)$ basta multiplicar pela matriz P
- Má notícia:** multiplicação de matriz é $O(n^3)$

↳ *número de estados*

Comunicação entre Estados

- Veremos algumas propriedades importantes
- Considere dois estados s_i e s_j em S
- Dizemos que s_i se comunica com s_j , ou seja $s_i \rightarrow s_j$,
se existe algum $t > 0$ tal que

$$P[X_{t_0+t} = s_j | X_{t_0} = s_i] > 0 \rightarrow \begin{matrix} \text{De alguma forma eu consigo} \\ \text{ir de } s_i \text{ para } s_j \end{matrix}$$

- Esta propriedade não depende de t_0 , e a prob é dada simplesmente por $P^t[i, j]$
 $\begin{matrix} s_i \rightarrow s_j \therefore P^t[i, j] > 0 \\ s_j \rightarrow s_i \therefore P^t[j, i] > 0 \end{matrix}$
- basta haver caminho de s_i para s_j no grafo direcionado
- Se $s_i \rightarrow s_j$ e $s_j \rightarrow s_i$ então dizemos que s_i e s_j se intercomunicam, ou seja $s_i \leftrightarrow s_j$

INTERCOMUNICAM
 \iff

Irredutível

De alguma forma consigo ir de i para j e voltar, para todo estado em S .
Ou seja, consigo ir de qualquer estado para qualquer est.

- Uma CM é dita irredutível (*irreducible*) se para todo par de estados s_i e s_j em S , temos que $s_i \leftrightarrow s_j$
 - caso contrário a CM é dita redutível (*reducible*)
- Considerando o grafo direcionado induzido pela matriz de transição P
 - se há caminho direcionado entre qualquer par de vértices, então CM é irredutível
 - grafo fortemente conexo = CM irredutível

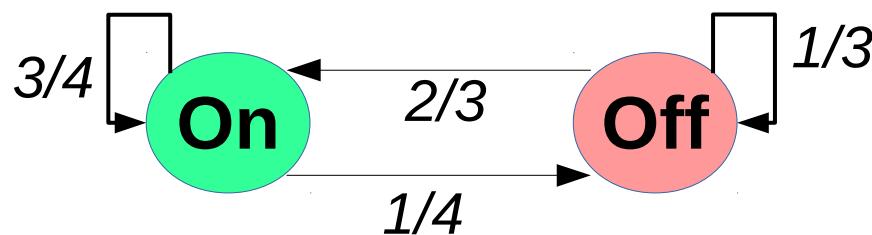
Quando o grafo é | não-direcionado → conexo

direcionado → fortemente conexo



Exemplos

- Exemplo do Modelo On-Off é irreduzível?



Sim!

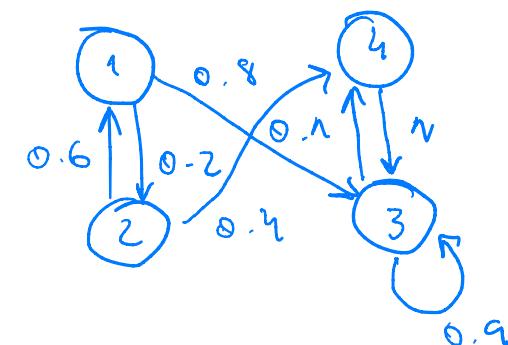
$$P = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Conseguimos ir de on \rightarrow off
e off \rightarrow on

- CM definida por P abaixo é irreduzível?

$$P = \begin{pmatrix} 0 & .2 & .8 & 0 \\ .6 & 0 & 0 & .4 \\ 0 & 0 & .9 & .1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Não!



Não conseguimos
ir de 4 para
1 ou 2. Uma
vez que entramos
em 4 ou 3, ficamos
em loop.

Lembrar que
passos é o tº
da potênciaria P^t

Periodicidade

- Seja $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ um conjunto de inteiros
- $\gcd(A)$ = maior divisor comum dos inteiros em A
 - ex. $A = \{9, 15, 30\} \rightarrow \gcd(A) = 3$
 - ex. $B = \{4, 6, 3\} \rightarrow \gcd(B) = 1$
- Seja s_i um estado da CM, e A_i o conjunto dos comprimentos de caminho que iniciam e terminam em s_i . Ex.: $A_i = \{9, 15, 30\} \because$ sair e voltar de i em 9, 15 ou 30 passos.
 - $A_i = \{t : P^t[i, i] > 0\} \rightarrow$ sair do estado i , dar t passos e voltar para i
 - Prob. positiva de sair e voltar a s_i em t passos
 - O período de s_i é dado por $d(s_i) = \gcd(A_i)$
 - $\rightarrow \text{MDC dos comprimentos de caminhos}$

os vértices podem ser periódicos ou aperiódicos

Aperiódica

- Seja s_i um estado da CM, e $d(s_i)$ seu período
- Dizemos que s_i é aperiódico sse $d(s_i) = 1 \rightarrow$
 - caso contrário, s_i é dito periódico

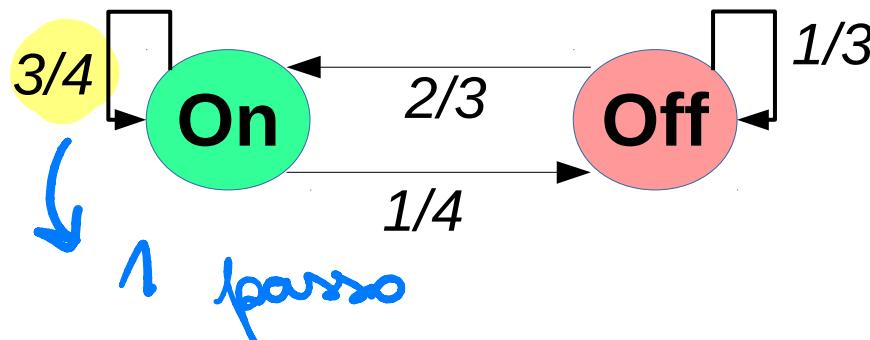
Não consegue voltar para i em t passos (t grande)
- Intuitivamente, s_i é aperiódico se existe caminho de volta a s_i de todos os comprimentos maiores que um determinado valor
- Uma CM é dita aperiódica se todos os seus estados são aperiódicos
 - caso contrário, a CM é dita periódica

↳ se pelo menos 1 estado é periódico

Se a cadeia é irreductível e $p_{ii} > 0$, então o é aperiódico

Exemplos

- Exemplo do Modelo On-Off é aperiódico?



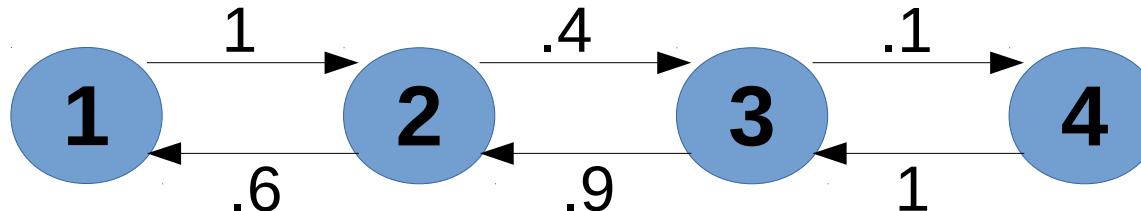
Sim! → aperiódico pois em 1 passo conseguimos voltar para o mesmo estado, e $\gcd(t_i) = 1$

- CM definida por P abaixo é aperiódica?

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ .6 & 0 & .4 & 0 \\ 0 & .9 & 0 & .1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

se $p_{ii} > 0$ então é aperiódica

- Não! Período de qualquer estado é 2
- Não consigo voltar ao estado 1 em tempo ímpar



$$\gcd\{t_i\} = 2$$

Exemplo e Propriedade

- Considere uma CM irredutível, tal que existe s_i em S tal que $p_{ii} > 0$
 - CM tem ao menos um estado com aresta em *loop*
- Esta CM é aperiódica ou periódica?

Aperiódica!

- Podemos usar *loop* para gerar qualquer tempo de retorno grande o suficiente
- **Lema:** Em uma CM irredutível, todos os estados são aperiódicos ou todos são periódicos com o mesmo período!
 - basta caracterizar um estado para caracterizar a cadeia

Exemplo e Propriedade

- Considere uma CM irredutível, tal que existe s_i em S tal que $p_{ii} > 0$
 - CM tem ao menos um estado com aresta em *loop*
- Esta CM é aperiódica ou periódica?

Aperiódica!

- Podemos usar *loop* para gerar qualquer tempo de retorno grande o suficiente
- **Lema:** Em uma CM irredutível, todos os estados são aperiódicos ou todos são periódicos com o mesmo período!
 - basta caracterizar um estado para caracterizar a cadeia

Exemplo e Propriedade

- Considere uma CM irredutível, tal que existe s_i em S tal que $p_{ii} > 0$
 - CM tem ao menos um estado com aresta em *loop*
- Esta CM é aperiódica ou periódica?

Aperiódica!

- Podemos usar *loop* para gerar qualquer tempo de retorno grande o suficiente
- **Lema:** Em uma CM irredutível, todos os estados são aperiódicos ou todos são periódicos com o mesmo período!
 - basta caracterizar um estado para caracterizar a cadeia

Exemplo e Propriedade

- Considere uma CM irredutível, tal que existe s_i em S tal que $p_{ii} > 0$
 - CM tem ao menos um estado com aresta em *loop*
- Esta CM é aperiódica ou periódica?

Aperiódica!

- Podemos usar *loop* para gerar qualquer tempo de retorno grande o suficiente
- **Lema:** Em uma CM irredutível, todos os estados são aperiódicos ou todos são periódicos com o mesmo período!
 - basta caracterizar um estado para caracterizar a cadeia

Exemplo e Propriedade

- Considere uma CM irredutível, tal que existe s_i em S tal que $p_{ii} > 0$
 - CM tem ao menos um estado com aresta em *loop*
- Esta CM é aperiódica ou periódica?

Aperiódica!

- Podemos usar *loop* para gerar qualquer tempo de retorno grande o suficiente
- **Lema:** Em uma CM irredutível, todos os estados são aperiódicos ou todos são periódicos com o mesmo período!
 - basta caracterizar um estado para caracterizar a cadeia