Workshop Gruppenbildung

Wie verteile ich die Leute immer wieder anders?

Günter Jantzen

18. Juli 2022

1. Einführung

2. n^2-Workshops
   - Symmetrien in n^2-Workshops

Einführung

Definitionen

Workshop, Runden, Teams Ein Workshop findet in mehreren *Runden* statt und wird aufgeteilt in kleinere *Workshop-Gruppen* (auch kurz *Teams*). Ein Workshop mit k Teilnehmern heisst k-*Workshop*

Workshop-Bedingung

In keiner Runde darf ein Teilnehmer der gleichen Person ein zweites Mal begegnen.

Teilnahme-Bedingung

In jeder Runde ist die Anwesenheit aller Teilnehmer obligatorisch.

Einführung

Definitionen 2

ausgeglichener k-Workshop Es werden in jeder Runde möglichst gleich große Teams gebildet, also z.B.Teamgrössen $3, 3, 4, 4$ bei einem 14-Workshop.

Ausgeglichenheit

Im folgenden sind alle Workshops ausgeglichen, auch wenn dies nicht erwähnt wird.

Einführung

Beispiele für einen 14-Workshop mit 3 Runden

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
8	7	11	1	9	4	12	2	5	13	3	10	6	14
5	12	3	8	13	1	6	7	9	14	11	2	4	10

Einführung

Maximalität und Vollständigkeit

maximaler k-Workshop Ein k-Workshop, bei dem sich keine weitere Runde hinzufügen lässt, entweder, weil dies überhaupt nicht mehr möglich ist, oder weil sonst die Ausgeglichenheit verlorengeht heisst *maximaler k-Workshop*.

vollständiger k-Workshop Ein *vollständiger k-Workshop* ist ein k-Workshop, bei dem alle Teilnehmer in irgendeiner Runde einmal aufeinander treffen.

n^2-Workshop

Fragen ans Publikum

Alle Fragen beziehen sich auf einen n^2-Workshop,

Frage 1

Wie viele Paare von Teilnehmern treffen in einem Team aufeinander?

Frage 2

Wie viele Paare von Teilnehmern treffen sich in einer Runde?

Frage 3

Der Workshop sei vollständig. Wie viele Paare von Teilnehmern treffen sich in dem Workshop?

Frage 4

Wie viele Runden hat also ein vollständiger n^2-Workshop?

n^2-Workshops

Frage 1

Frage

Wie viele Paare von Teilnehmern treffen in einem Team aufeinander?

n^2-Workshops

Frage 1

Frage

Wie viele Paare von Teilnehmern treffen in einem Team aufeinander?

Antwort

In einem Team von 3 Personen $\{1, 2, 3\}$ gibt es die Paare $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ und $\{2, 3\}$, Nach der *Gaußschen* Regel für Dreieckssummen sind es bei n Personen

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1) \cdot n}{2}$$

Paare.

n^2-Workshop

Frage 2

Frage

Wie viele Paare von Teilnehmern treffen sich in einer Runde?

n^2-Workshop

Frage 2

Frage

Wie viele Paare von Teilnehmern treffen sich in einer Runde?

Antwort

$$\sum_{i=1}^{n-1} i \cdot n = \frac{(n-1) \cdot n^2}{2}$$

n^2-Workshops

Frage 3

Frage

Der Workshop sei vollständig. Wie viele Paare von Teilnehmern treffen sich in dem Workshop?

n^2-Workshops

Frage 3

Frage

Der Workshop sei vollständig. Wie viele Paare von Teilnehmern treffen sich in dem Workshop?

Antwort

In einem vollständigen Workshop von $3 \cdot 3$ Personen gibt es $1 + 2 + 3 + \cdots + 8$ Paare. In einem vollständigen Workshop von n^2 Personen sind es

$$\sum_{i=1}^{n^2-1} i = \frac{(n^2-1) \cdot n^2}{2}$$

Personen.

n^2-Workshops

Frage 4

Frage

Wie viele Runden hat also ein vollständiger n^2-Workshop Workshop?

n^2-Workshops

Frage 4

Frage

Wie viele Runden hat also ein vollständiger n^2-Workshop Workshop?

Antwort

$$\frac{\frac{(n^2-1)\cdot n^2}{2}}{\frac{(n-1)\cdot n^2}{2}} = \frac{n^2-1}{n-1} = n+1$$

Gliederung

Symmetrien in n^2-Workshops

Einleitung

- Im folgenden wird versucht die kombinatorischen Möglichkeiten abzuschätzen, Symmetrien zu erkennen, und diese so auszunutzen, dass deutlich weniger Möglichkeiten zu betrachten sind.
- Es ist gar nicht so wichtig, alle Rechnungen nachzuvollziehen, sondern eher die Begriffsbildungen, die dazu führen, dass nur noch typische Repräsentanten aus Äquivalenzklassen betrachtet werden.
- Das ist nur der Anfang. In den Workshops steckt noch viel mehr Symmetrie, als hier angesprochen wird.

Symmetrien in n^2-Workshops

Allererste Runde

Frage

Wie viele Möglichkeiten gibt es für die allererste Runde in einem n^2-Workshop?

Symmetrien in n^2-Workshops

Allererste Runde

Frage

Wie viele Möglichkeiten gibt es für die allererste Runde in einem n^2-Workshop?

Antwort

$$n^2!$$

Für $n = 3$ sind das schon $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdots 2 \cdot 1 = 362880$ Möglichkeiten. Das ist zu viel. Ab sofort werden Teams aufsteigend sortiert angegeben.

Symmetrien in n^2-Workshops

Sortierte Teams

Frage

Wie viele Möglichkeiten gibt es jetzt für die allererste Runde?

Symmetrien in n^2-Workshops

Sortierte Teams

Frage

Wie viele Möglichkeiten gibt es jetzt für die allererste Runde?

Antwort

$$\frac{n^2!}{n!^n}$$

Für $n = 3$ sind das $\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3} = 84 * 20 * 1 = 1680$ Möglichkeiten.

Symmetrien in n^2-Workshops

Definition lexikalisch sortiert

lexikalisch sortierter n^2-Workshop In einem n^2-*Workshop* haben alle Teams die Größe n. Die Teams lassen sich als geordnete Integer-Tupel auffassen. Eine Runde ist *lexikalisch sortiert*, wenn die Team-Tupel von links nach rechts aufsteigend angeordnet sind. Der Workshop ist *lexikalisch sortiert*, wenn die lexikalisch sortierten Runden aufsteigend angeordnet sind (Ausschlaggebend ist hier das erste Team einer Runde).

Symmetrien in n^2-Workshops

Beispiele lexikalisch sortiert

0	1	2	3
0	2	1	3
0	3	1	2

0	1	2	3	4	8	5	6	7
0	3	6	1	4	7	2	5	8
0	4	5	1	6	8	2	3	7
0	7	8	1	3	5	2	4	6

Symmetrien in n^2-Workshops

Allererste Runde festlegen

Wir legen die allererste Runde als *Einheitsrunde* $0, 1, \cdots n^2$ fest und können diese Titelrunde in der Darstellung manchmal weglassen. Die verbleibenden Runden werden nullbasiert nummeriert.

0	1	2	3
0	2	1	3
0	3	1	2

0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	3	6	1	4	7	2	5	8
0	4	8	1	5	6	2	3	7
0	5	7	1	3	8	2	4	6

Symmetrien in n^2-Workshops

Allererste Runde festlegen

Wir legen die allererste Runde als *Einheitsrunde* $0, 1, \cdots n^2$ fest und können diese Titelrunde in der Darstellung manchmal weglassen. Die verbleibenden Runden werden nullbasiert nummeriert.

0	2	1	3
0	3	1	2

0	3	6	1	4	7	2	5	8
0	4	8	1	5	6	2	3	7
0	5	7	1	3	8	2	4	6

Symmetrien in n^2-Workshops

Runde 0

Wie viele Möglichkeiten gibt es in einem nicht lexikalisch sortierten n^2-Workshop mit Einheitsrunde, Zeile 0 korrekt zu füllen?

0	1	2	3	4	5	6	7	8
*	*	*	*	*	*	*	*	*

Symmetrien in n^2-Workshops

Runde 0

Wie viele Möglichkeiten gibt es in einem nicht lexikalisch sortierten n^2-Workshop mit Einheitsrunde, Zeile 0 korrekt zu füllen?

0	1	2	3	4	5	6	7	8
*	*	*	*	*	*	*	*	*

$$n!^n$$

Symmetrien in n^2-Workshops

Runde 0 im sortierten Workshop

Wie viele Möglichkeiten gibt es in einem lexikalisch sortierten n^2-Workshop mit Einheitsrunde, Zeile 0 korrekt zu füllen?

0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	*	*	1	*	*	2	*	*

Symmetrien in n^2-Workshops

Runde 0 im sortierten Workshop

Wie viele Möglichkeiten gibt es in einem lexikalisch sortierten n^2-Workshop mit Einheitsrunde, Zeile 0 korrekt zu füllen?

0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	*	*	1	*	*	2	*	*

$$n!^{n-1}$$

Symmetrien in n^2-Workshops

Runde 0 im vollständigen sortierten Workshop

Wie viele Möglichkeiten gibt es in einem vollständigen lexikalisch sortierten n^2-Workshop mit Einheitsrunde, Zeile 0 korrekt zu füllen?

0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	3	*	1	*	*	2	*	*
0	4	*	1	*	*	2	*	*
0	5	*	1	*	*	2	*	*

Symmetrien in n^2-Workshops

Runde 0 im vollständigen sortierten Workshop

Wie viele Möglichkeiten gibt es in einem vollständigen lexikalisch sortierten n^2-Workshop mit Einheitsrunde, Zeile 0 korrekt zu füllen?

0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	3	*	1	*	*	2	*	*
0	4	*	1	*	*	2	*	*
0	5	*	1	*	*	2	*	*

$$\frac{n!^{n-1}}{n}$$

Symmetrien in n^2-Workshops

Definition normaler Workshop

normaler n^2-Workshop In einem *lexikalisch sortierten n^2-Workshop* mit Einheitsrunde, sei Runde 0 mit der kleinstmöglichen Belegung gewählt. Fortlaufend von 0 aufsteigend nummeriert, wird zuerst der erste Platz jedes Teams, dann der zweite jedes Teams, usw. belegt. Diese Darstellung heißt *normaler n^2-Workshop*.

0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	3	6	1	4	7	2	5	8

Symmetrien in n^2-Workshops

Anzahl lexikalisch sortierter vollständiger n^2-Workshops

Sei c die Anzahl der Möglichkeiten, einen normalen n^2-Workshop korrekt zu vervollständigen, dann ist die Anzahl lexikalisch sortierter vollständiger n^2-Workshops

$$c \cdot \frac{n!^{n-1}}{n}$$

Rechts steht die Anzahl der korrekten Möglichkeiten zur Auswahl von Runde 0, links die Anzahl der Möglichkeiten, diese Auswahl in weiteren Runden korrekt zu vervollständigen.