# Workshop Gruppenbildung

## Wie verteile ich die Leute immer wieder anders?

Günter Jantzen

18. Juli 2022

# Einführung

## Definitionen

**Workshop, Runden, Teams** Ein Workshop findet in mehreren *Runden* statt und wird aufgeteilt in kleinere *Workshop-Gruppen* (auch kurz *Teams*). Ein Workshop mit $k$ Teilnehmern heisst $k$-*Workshop*

### Workshop-Bedingung

In keiner Runde darf ein Teilnehmer der gleichen Person ein zweites Mal begegnen.

### Teilnahme-Bedingung

In jeder Runde ist die Anwesenheit aller Teilnehmer obligatorisch.

# Einführung

## Definitionen 2

**ausgeglichener k-Workshop** Es werden in jeder Runde möglichst gleich große Teams gebildet, also z.B.Teamgrössen $3, 3, 4, 4$ bei einem $14$-Workshop.

### Ausgeglichenheit

Im folgenden sind alle Workshops ausgeglichen, auch wenn dies nicht erwähnt wird.

# Einführung

## Beispiele für einen 14-Workshop mit 3 Runden

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 8 | 7 | 11 | 1 | 9 | 4 | 12 | 2 | 5 | 13 | 3 | 10 | 6 | 14 |
| 5 | 12 | 3 | 8 | 13 | 1 | 6 | 7 | 9 | 14 | 11 | 2 | 4 | 10 |

# Einführung

## Maximalität und Vollständigkeit

**maximaler $k$-Workshop** Ein $k$-Workshop, bei dem sich keine weitere Runde hinzufügen lässt, entweder, weil dies überhaupt nicht mehr möglich ist, oder weil sonst die Ausgeglichenheit verlorengeht heisst *maximaler $k$-Workshop*.

**vollständiger $k$-Workshop** Ein *vollständiger $k$-Workshop* ist ein $k$-Workshop, bei dem alle Teilnehmer in irgendeiner Runde einmal aufeinander treffen.

# $n^2$-Workshop

## Fragen ans Publikum

Alle Fragen beziehen sich auf einen $n^2$-Workshop,

### Frage 1

Wie viele Paare von Teilnehmern treffen in einem Team aufeinander?

### Frage 2

Wie viele Paare von Teilnehmern treffen sich in einer Runde?

### Frage 3

Der Workshop sei vollständig. Wie viele Paare von Teilnehmern treffen sich in dem Workshop?

### Frage 4

Wie viele Runden hat also ein vollständiger $n^2$-Workshop?

# $n^2$-Workshops

## Frage 1

### Frage

Wie viele Paare von Teilnehmern treffen in einem Team aufeinander?

### Antwort

In einem Team von 3 Personen $\{1, 2, 3\}$ gibt es die Paare $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ und $\{2, 3\}$, Nach der *Gaußschen* Regel für Dreieckssummen sind es bei $n$ Personen

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1) \cdot n}{2}$$

Paare.

# $n^2$-Workshop

## Frage 2

### Frage

Wie viele Paare von Teilnehmern treffen sich in einer Runde?

### Antwort

$$\sum_{i=1}^{n-1} i \cdot n = \frac{(n-1) \cdot n^2}{2}$$

# $n^2$-Workshops

## Frage 3

### Frage

Der Workshop sei vollständig. Wie viele Paare von Teilnehmern treffen sich in dem Workshop?

### Antwort

In einem vollständigen Workshop von $3 \cdot 3$ Personen gibt es $1 + 2 + 3 + \cdots + 8$ Paare. In einem vollständigen Workshop von $n^2$ Personen sind es

$$\sum_{i=1}^{n^2-1} i = \frac{(n^2-1) \cdot n^2}{2}$$

Personen.

# $n^2$-Workshops

## Frage 4

### Frage

Wie viele Runden hat also ein vollständiger $n^2$-Workshop Workshop?

### Antwort

$$\frac{\frac{(n^2-1)\cdot n^2}{2}}{\frac{(n-1)\cdot n^2}{2}} = \frac{n^2-1}{n-1} = n+1$$

# Gliederung

# Symmetrien in $n^2$-Workshops

## Einleitung

- Im folgenden wird versucht die kombinatorischen Möglichkeiten abzuschätzen, Symmetrien zu erkennen, und diese so auszunutzen, dass deutlich weniger Möglichkeiten zu betrachten sind.
- Es ist gar nicht so wichtig, alle Rechnungen nachzuvollziehen, sondern eher die Begriffsbildungen, die dazu führen, dass nur noch typische Repräsentanten aus Äquivalenzklassen betrachtet werden.
- Das ist nur der Anfang. In den Workshops steckt noch viel mehr Symmetrie, als hier angesprochen wird.

# Symmetrien in $n^2$-Workshops

## Allererste Runde

### Frage

Wie viele Möglichkeiten gibt es für die allererste Runde in einem $n^2$-Workshop?

### Antwort

$$n^2!$$

Für $n = 3$ sind das schon $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdots 2 \cdot 1$. Das ist zu viel. Ab sofort werden Teams aufsteigend sortiert angegeben.

# Symmetrien in $n^2$-Workshops

## Sortierte Teams

**Frage**

Wie viele Möglichkeiten gibt es jetzt für die allererste Runde?

**Antwort**

$$\frac{n^2!}{n!^n}$$

# Symmetrien in $n^2$-Workshops

## Definition lexikalisch sortiert

**lexikalisch sortierter $n^2$-Workshop** In einem $n^2$-*Workshop* haben alle Teams die Größe $n$. Die Teams lassen sich als geordnete Integer-Tupel auffassen. Eine Runde ist *lexikalisch sortiert*, wenn die Team-Tupel von links nach rechts aufsteigend angeordnet sind. Der Workshop ist *lexikalisch sortiert*, wenn die lexikalisch sortierten Runden aufsteigend angeordnet sind (Ausschlaggebend ist hier das erste Team einer Runde).

# Symmetrien in $n^2$-Workshops

## Beispiele lexikalisch sortiert

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 |
| 0 | 2 | 1 | 3 |
| 0 | 3 | 1 | 2 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 8 | 5 | 6 | 7 |
| 0 | 3 | 6 | 1 | 4 | 7 | 2 | 5 | 8 |
| 0 | 4 | 5 | 1 | 6 | 8 | 2 | 3 | 7 |
| 0 | 7 | 8 | 1 | 3 | 5 | 2 | 4 | 6 |

# Symmetrien in $n^2$-Workshops

## Allererste Runde festlegen

Wir legen die allererste Runde als *Einheitsrunde* $0, 1, \cdots n^2$ fest und können diese Titelrunde in der Darstellung manchmal weglassen. Die verbleibenden Runden werden nullbasiert nummeriert.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 |
| 0 | 2 | 1 | 3 |
| 0 | 3 | 1 | 2 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 0 | 3 | 6 | 1 | 4 | 7 | 2 | 5 | 8 |
| 0 | 4 | 8 | 1 | 5 | 6 | 2 | 3 | 7 |
| 0 | 5 | 7 | 1 | 3 | 8 | 2 | 4 | 6 |

# Symmetrien in $n^2$-Workshops

## Allererste Runde festlegen

Wir legen die allererste Runde als *Einheitsrunde* $0, 1, \cdots n^2$ fest und können diese Titelrunde in der Darstellung manchmal weglassen. Die verbleibenden Runden werden nullbasiert nummeriert.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 1 | 3 |
| 0 | 3 | 1 | 2 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 3 | 6 | 1 | 4 | 7 | 2 | 5 | 8 |
| 0 | 4 | 8 | 1 | 5 | 6 | 2 | 3 | 7 |
| 0 | 5 | 7 | 1 | 3 | 8 | 2 | 4 | 6 |

# Symmetrien in $n^2$-Workshops

## Runde 0

Wie viele Möglichkeiten gibt es in einem nicht lexikalisch sortierten $n^2$-Workshop mit Einheitsrunde, Zeile 0 korrekt zu füllen?

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| * | * | * | * | * | * | * | * | * |

$$n!^n$$

# Symmetrien in $n^2$-Workshops

## Runde 0 im sortierten Workshop

Wie viele Möglichkeiten gibt es in einem lexikalisch sortierten $n^2$-Workshop mit Einheitsrunde, Zeile 0 korrekt zu füllen?

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | * | * | 1 | * | * | 2 | * | * |

$$n!^{n-1}$$

# Symmetrien in $n^2$-Workshops

## Runde 0 im vollständigen sortierten Workshop

Wie viele Möglichkeiten gibt es in einem vollständigen lexikalisch sortierten $n^2$-Workshop mit Einheitsrunde, Zeile 0 korrekt zu füllen?

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 0 | 3 | * | 1 | * | * | 2 | * | * |
| 0 | 4 | * | 1 | * | * | 2 | * | * |
| 0 | 5 | * | 1 | * | * | 2 | * | * |

$$\frac{n!^{n-1}}{n}$$

# Symmetrien in $n^2$-Workshops

## Definition normaler Workshop

**normaler $n^2$-Workshop** In einem *lexikalisch sortierten $n^2$-Workshop* mit Einheitsrunde, sei Runde 0 mit der kleinstmöglichen Belegung gewählt. Fortlaufend von 0 aufsteigend nummeriert, wird zuerst der erste Platz jedes Teams, dann der zweite jedes Teams, usw. belegt. Diese Darstellung heißt *normaler $n^2$-Workshop*.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 0 | 3 | 6 | 1 | 4 | 7 | 2 | 5 | 8 |

# Symmetrien in $n^2$-Workshops

## Anzahl lexikalisch sortierter vollständiger $n^2$-Workshops

Sei $c$ die Anzahl der Möglichkeiten, einen normalen $n^2$-Workshop korrekt zu vervollständigen, dann ist die Anzahl lexikalisch sortierter vollständiger $n^2$-Workshops

$$c \cdot \frac{n!^{n-1}}{n}$$

Rechts steht die Anzahl der korrekten Möglichkeiten zur Auswahl von Runde 0, links die Anzahl der Möglichkeiten, diese Auswahl in weiteren Runden korrekt zu vervollständigen.