Tarea 1 Cosmología | Benjamín Lovera Corona | 21.081.385-3

P1) Datos: $V_{rms} = 600\ \frac{km}{s}$ Precisión $= 10\%$ $H_0 = 100$ ó $70\ \frac{km}{s}\ Mpc^{-1}$

Suponiendo que para las galaxias sus velocidades son aleatorias, luego su promedio será ≈ 0

$$\Rightarrow V_{rms}^2 = \underbrace{\langle V \rangle^2}_{\approx 0} + \sigma_V^2 \Rightarrow V_{rms} = \sigma_V = 600\ \frac{km}{s}$$

→ Gaussiana   → Line of sight

Para velocidades distribuidas aleatoriamente, la $V_\parallel$ medida en la LOS es un factor $\sqrt{3}$ más pequeña.

→ 10% accuracy

$$V^2 = 3\sigma_i^2 \Rightarrow V = \sqrt{3}\,\sigma_i \Rightarrow \sigma_i = \frac{V}{\sqrt{3}} \Rightarrow 10\sigma_i = 3500\ \frac{km}{s}$$

Para $H_0 = 100\ \frac{km}{s}\ Mpc^{-1}$; $d H_0 = V_\parallel \Rightarrow d = \frac{V_\parallel}{H_0} = \frac{3500\ \cancel{\frac{km}{s}}}{100\ \cancel{\frac{km}{s}}\ Mpc^{-1}}$

$$\Rightarrow d = 35\ Mpc$$

$$H_0 = 70\ \frac{km}{s}\ Mpc^{-1} \Rightarrow d = \frac{3500\ \cancel{\frac{km}{s}}}{70\ \cancel{\frac{km}{s}}\ Mpc^{-1}} \Rightarrow d = 50\ Mpc$$

P2)

a) Principio Cosmológico: Corresponde a la afirmación de que el universo en una escala lo suficientemente grande, típicamente ~ 100 Mpc, es homogéneo e isótropo. La homogeneidad trata acerca de que sin importar en qué posición nos encontremos, el universo es igual. Por otro lado, la isotropía nos dice que el universo es igual en todas las direcciones. Con ambas propiedades, en conjunto de las leyes de la física, es que podemos estudiar el universo a gran escala, y por lo tanto, hablamos de Cosmología Física.

b) Distancia Física: Corresponde a la distancia, que considera la expansión del universo, entre dos objetos en una línea recta. Como considera la expansión, esta distancia cambia con el tiempo, y medir esta distancia significa medir cuán lejos estaba un objeto al momento de emitir la luz que recibimos.

Distancia Comovente: Corresponde a la distancia entre dos puntos si el universo no se estuviese expandiendo, con lo que esta no cambia en el tiempo, a diferencia de la distancia física.

Distancia Luminosidad: Corresponde a la distancia que tiene un objeto emitiendo luz según una ley inversa cuadrada (i.e. emitiendo en una esfera). Para la emisión se considera una distancia comovente con lo que esta aumenta a medida que aumenta el redshift.

Distancia Angular: Corresponde a calcular la distancia considerando el tamaño físico de un objeto, y el ángulo que se observa en el cielo. En un universo plano, como es lo que observamos, los objetos a redshift alto se ven más grandes de lo que se verían a redshift intermedio, esto hace que esta distancia decaiga a z alto.

c) Permite tener un valor consistente para diferentes épocas del universo, lo que a su vez hace que esté relacionado de mejor manera con lo que observamos. Finalmente nos permite tener un valor que no depende de H_0, el cual puede variar según distintos modelos.

P3 De las ecuaciones de Einstein tenemos: $G^{\mu\nu} = K\, T^{\mu\nu}$

$$G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \Rightarrow \nabla_\mu G^{\mu\nu} = \nabla_\mu \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) = 0$$

Usando la identidad de Bianchi

$$\Rightarrow \nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0 \iff \nabla_\mu (K T^{\mu\nu}) = 0 \Rightarrow \nabla_\mu T^{\mu\nu} \overset{(\star)}{=} 0$$

Luego, conocemos el tensor energía momento para un fluido perfecto: (Dodelson eq. 2.51 p.52)

$$T^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla_\mu T^\mu{}_\nu \overset{(1)}{=} \frac{\partial T^\mu{}_\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma^\mu_{\alpha\mu} T^\alpha{}_\nu - \Gamma^\alpha_{\nu\mu} T^\mu{}_\alpha$$

Multiplicando por la métrica podemos bajar un índice en $(\star)$, y como $\nabla_\mu g^{\mu\nu} = 0$, entonces se tiene que:

$$\nabla_\mu T^\mu{}_\nu = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{\partial T^\mu{}_\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma^\mu_{\alpha\mu} T^\alpha{}_\nu - \Gamma^\alpha_{\nu\mu} T^\mu{}_\alpha = 0$$

De esta ecuación podemos observar que ν es un índice libre, con lo que en realidad son 4 ecuaciones.

En particular, usamos $\nu = 0$:

$$\Rightarrow \frac{\partial T^\mu{}_0}{\partial x^\mu} + \Gamma^\mu_{\alpha\mu} T^\alpha{}_0 - \Gamma^\alpha_{0\mu} T^\mu{}_\alpha = 0$$

$$\iff \frac{\partial \overset{-\rho}{T^0{}_0}}{\partial x^0} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial T^i{}_0}{\partial x^i}}}_{0} + \Gamma^\mu_{\alpha\mu} T^\alpha{}_0 - \Gamma^\alpha_{0\mu} T^\mu{}_\alpha = 0 \quad / \quad T^i{}_0 = 0 \text{ (Isotropía)}$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \Gamma^\mu_{0\mu} \underbrace{T^0{}_0}_{-\rho} + \Gamma^\mu_{i\mu} \underbrace{T^i{}_0}_{0} - \Gamma^\alpha_{0\mu} T^\mu{}_\alpha = 0$$

$$\Rightarrow -\dot\rho - \rho\, \Gamma^\mu_{0\mu} - \Gamma^\alpha_{0\mu} T^\mu{}_\alpha = 0$$

Usando la métrica de FLRW:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{1}{1-kr^2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2 \right) \Rightarrow g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2(t)}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \sin^2\theta\, r^2 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left(\partial_\nu g_{\mu\beta} + \partial_\mu g_{\nu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu} \right)$$

La métrica es diagonal, luego $g^{\mu\beta} \neq 0 \iff \mu = \beta$

$$\Rightarrow \Gamma^\mu_{0\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\beta} \left(\partial_\mu g_{0\beta} + \partial_0 g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{0\mu} \right) = \frac{1}{2} g^{\mu\mu} \left(\partial_\mu g_{0\mu} + \partial_0 g_{\mu\mu} - \partial_\mu g_{0\mu} \right)$$

$$\Rightarrow \Gamma^0_{00} = \frac{1}{2} g^{00} \left(\cancel{\partial_0 g_{00}} + \cancel{\partial_0 g_{00}} - \cancel{\partial_0 g_{00}} \right) ; \partial_\mu g_{00} = \partial_\mu (-1) = 0 \Rightarrow \Gamma^0_{00} = 0$$

$$\Gamma^i_{0i} = \frac{1}{2} g^{ii} \left(\partial_i g_{0i} + \partial_0 g_{ii} - \partial_i g_{0i} \right)$$

MÉTRICA DIAGONAL

$$\Rightarrow \Gamma^1_{01} = \frac{1}{2} g^{11} \left(\partial_1 \underbrace{g_{01}}_{0} + \partial_0 g_{11} - \partial_1 \underbrace{g_{01}}_{0} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial t}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{a^2(t)}{1-kr^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{a^2(t)}{1-kr^2} \right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{1-kr^2}}{a^2(t)} \frac{\cancel{2} a \dot{a}}{\cancel{1-kr^2}} = \frac{\dot{a}}{a} = H$$

$$\Gamma^2_{02} = \frac{1}{2} g^{22} \left(\partial_2 g_{02} + \partial_0 g_{22} - \partial_2 g_{02} \right)$$

$$= \frac{1}{2 g_{22}} \frac{\partial}{\partial t} g_{22} = \frac{1}{2a^2 r^2} \frac{\partial}{\partial t} (a^2 r^2) = \frac{1}{2a^2 r^2} r^2 \cdot 2a\dot{a} = \frac{\dot{a}}{a} = H$$

$$\Gamma^3_{03} = \frac{1}{2 g_{33}} \frac{\partial}{\partial t} g_{33} = \frac{1}{2a^2 \sin^2\theta r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(a^2 \sin^2\theta r^2 \right) = \frac{1}{2a^2 \sin^2\theta r^2} \cdot \sin^2\theta r^2 2a\dot{a} = \frac{\dot{a}}{a} = H$$

$$\Rightarrow \Gamma^\mu_{0\mu} = \Gamma^0_{00} + \sum_{i=1}^{3} \Gamma^i_{0i} = 3H$$

$$\Rightarrow -\dot{\rho} - 3H\rho - \Gamma^\alpha_{0\mu} T^\mu_\alpha = 0 \; , \; T^\mu_\alpha = 0 \text{ si } \alpha \neq \mu$$

$$\Rightarrow \underbrace{\Gamma^\mu_{0\mu} T^\mu_\mu} + 3H\rho + \dot{\rho} = 0$$

$$\cancel{\Gamma^0_{00}}^{\,0} T^0_0 + \Gamma^i_{0i} T^i_i = \Gamma^i_{0i} \cdot P = 3HP$$

$$\Rightarrow \dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0$$ CON LO QUE SE TIENE LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

P4 Antes de la aniquilación habían fotones, neutrinos, anti-neutrinos, electrones y positrones a la misma temperatura

$$\Rightarrow s_i = \frac{\rho+p}{T_i} = \frac{1}{T_i}\left((\rho+p)_\gamma + (\rho+p)_\nu + (\rho+p)_{\bar\nu} + (\rho+p)_{e^-} + (\rho+p)_{e^+}\right)$$

De las ecuaciones de Boltzmann sin término colisional llegamos a:

$$\rho = g_*\int\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}E(p)f(p) = \frac{g_*}{a^3}\int\frac{d\Omega}{(2\pi)^3}\int_m^\infty dE\,\frac{E^2}{\sqrt{E^2-m^2}}(E^2-m^2)f(E)$$

$$= \frac{g_*}{2\pi^2}\int_m^\infty dE\,\frac{\sqrt{(E^2-m^2)}}{\exp((E-\mu)/T)\pm 1}E^2$$

$$p = g_*\int\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}\frac{pv}{3}f(p) = \frac{\rho}{3}$$

Para componentes relativistas $(m\to 0)$

Para bosones: $\rho = \frac{g_*}{2\pi^2}\int_m^\infty dE\,\frac{\sqrt{E^2-m^2}\,E^2}{e^E-1} = \frac{\pi^2}{30}g_*T^4$

Para fermiones: $\rho = \frac{g_*}{2\pi^2}\int_m dE\,\frac{\sqrt{E^2-m^2}\,E^2}{e^E+1} = \frac{7}{8}\frac{\pi^2}{30}g_*T^4$

3 generaciones con un spin state para neutrinos y antineutrinos

$$\Rightarrow \rho_T = g_{*T}\frac{\pi^2}{30}T^4,\quad g_{*T} = g_{bos}+\frac{7}{8}g_{fer} = \underbrace{g_\gamma}_{2} + \frac{7}{8}(g_\nu + \underbrace{g_{e^+}}_{2\,spin} + \underbrace{g_{e^-}}_{2\,spin})$$

$$= 2 + \frac{7}{8}(2\cdot 3+2+2) = 2+\frac{7}{8}\cdot 10 = 10{,}75$$

$$\Rightarrow s_i = \frac{\rho_T+\frac{1}{3}\rho_T}{3} = \frac{43\pi^2}{90}T_i^3$$

Después de la aniquilación hay fotones, neutrinos y antineutrinos a diferentes temperaturas

$$\Rightarrow s_f = \frac{2\pi^2}{45}\left[2T_\gamma^3 + \frac{7}{8}\cdot 6T_\nu^3\right]$$

Para expresar la conservación de la entropía, reescalamos por el volumen $\propto a^3$

$$\Rightarrow S_i = S_f \iff a_i^3 s_i = a_f^3 s_f$$

$$\Rightarrow \frac{43\cancel{\pi^2}}{90}(a_iT_i)^3 = \frac{2\cancel{\pi^2}}{45}\left[2T_\gamma^3+\frac{7}{8}6T_\nu^3\right]a_f^3 \Rightarrow \frac{43}{2}(a_iT_i)^3 = 4\left[\left(\frac{T_\gamma}{T_\nu}\right)^3+\frac{21}{8}\right](T_\nu a_f)^3$$

Como $T_\nu \propto a^{-1} \Rightarrow a_iT_i = a_fT_f \Rightarrow \frac{43}{2} = 4\left[\left(\frac{T_\gamma}{T_\nu}\right)^3+\frac{21}{8}\right] = \frac{43}{8}-\frac{21}{8} = \left(\frac{T_\gamma}{T_\nu}\right)^3$

$$\Rightarrow \frac{22}{8} = \left(\frac{T_\gamma}{T_\nu}\right)^3 \Rightarrow \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} = \frac{T_\nu}{T_\gamma}$$

P5) De la ecuación de continuidad tenemos:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0$$

En particular para la DE:

$\dot{\rho}_{DE} + 3H(\rho_{DE} + P_{DE}) = 0$ Luego, tenemos la ecuación de estado: $P_{DE} = w_{DE}(z)\rho_{DE}$

$$\Rightarrow \dot{\rho}_{DE} + \frac{3\dot{a}}{a}(1 + w_{DE}(z))\rho_{DE} = 0 \ / \ \frac{d}{dt} = \dot{a}\frac{d}{da}$$

$$\Rightarrow \dot{a}\frac{d\rho_{DE}}{da} + \frac{3\dot{a}}{a}(1 + w_{DE})\rho_{DE} = 0 \ / \ \frac{1}{\dot{a}} \ ; \ \dot{a} \neq 0$$

Como w_{DE} depende de z, también depende de a

$$\Rightarrow \frac{d\rho_{DE}}{da} = -\frac{3}{a}(1 + w_{DE})\rho_{DE} \Rightarrow \frac{d\rho_{DE}}{\rho_{DE}} = -\frac{3da}{a}(1 + w_{DE}(a)) \ / \int_{t_0}^{t}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{\rho_{DE}}{\rho_{DE,0}}\right) = -3\int\frac{da}{a}(1 + w_{DE}) \Rightarrow \rho_{DE} = \rho_{DE,0}\,\mathrm{EXP}\left(-3\int\frac{da}{a}(1 + w_{DE})\right)$$

De la ecuación de Friedmann: $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2}$

$$\Rightarrow \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\sum_a \rho_a - \frac{K}{a^2} \ ; \ \rho_{crit} = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

$w_K = -\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{H_0^2}{\rho_{c,0}}\sum_a \rho_a - Ka^{-2} \ ; \ Ka^{-2} = \frac{H_0^2}{H_0^2}Ka^{-3(1+w_K)} = H_0^2\,\Omega_{K,0}\,a^{-3(1+w_K)}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2\sum_a \Omega_a \Rightarrow H^2(z) = H_0^2\Big[\Omega_{R,0}a^{-4} + \Omega_{m,0}a^{-3} + \Omega_{K,0}a^{-3(1+w_K)} + \Omega_{DE,0}\,\mathrm{EXP}\left(-3\int\frac{da}{a}(1 + w_{DE})\right)\Big]$$

$$\Rightarrow \frac{H^2(z)}{H_0^2} = \Omega_{R,0}a^{-4} + \Omega_{m,0}a^{-3} + (1 - \Omega)a^{-2} + \Omega_{DE,0}\,\mathrm{EXP}\left(-3\int\frac{da}{a}(1 + w_{DE})\right)$$

$$; \ \Omega = \sum_a \Omega_a$$

Luego:

$$\dot{\rho}_{DE} + 3H(\rho + P) = 0 \ ; \ \rho w_{DE} = P$$

$$\Rightarrow \dot{\rho}_{DE} + 3H\rho_{DE}(1 + w_{DE}) = 0 \Rightarrow \frac{d\rho_{DE}}{da}\dot{a} + 3H\rho_{DE}(1 + w_{DE}) = 0$$

$$\Rightarrow 3H\rho_{DE}(1 + w_{DE}) = -\frac{d\rho_{DE}}{da}\dot{a} \Rightarrow w_{DE} = -\frac{1}{3H\rho_{DE}}\frac{d\rho_{DE}}{da}\dot{a} - 1$$

$$\Rightarrow w_{DE} = -\frac{1}{3H}\frac{\dot{a}}{\cancel{\rho_{DE,0}}\,\mathrm{EXP}\left(-3\int\frac{da}{a}(1 + w_{DE})\right)} \cdot \cancel{\rho_{DE,0}}\frac{d}{da}\left[\mathrm{EXP}\left[\int\frac{da}{a}(1 + w_{DE})\right]\right]$$

$$= -\frac{1}{3H}\frac{\dot{a}}{\cancel{\mathrm{EXP}(\ )}} \cdot \cancel{\mathrm{EXP}(\ )} \cdot \frac{d}{da}\left[\int\frac{da}{a}(1 + w_{DE})\right] \Rightarrow w_{DE} = -\frac{1}{3H}\dot{a}\frac{dw_{DE}}{da} = -\frac{1}{3H}\dot{w}_{DE}$$