Tarea 3 Cosmología

Benjamín Guerra Cuadra
21.081.385-3

P1 Partiendo de la función de distribución (a background)

$$\bar{f} = \frac{1}{e^{\bar{E}/k_B T} \pm 1} \quad ; \quad \bar{E} = \sqrt{m^2 + p^2/a^2}$$

Perturbando: $$f = \underbrace{\frac{1}{e^{E/k_B T} \pm 1}}_{\neq \bar{f}} + \Delta f \quad ; \quad E = \sqrt{m^2 + a^{-2}\delta^{ij} p_i p_j + h^{ij} p_i p_j} \underset{\text{Taylor}}{\approx} \bar{E} + \frac{1}{2\bar{E}} h^{ij} p_i p_j$$

$$\Rightarrow f = \bar{f} + \delta f \quad ; \quad \delta f = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{E}} \frac{h^{ij} p_i p_j}{2\bar{E}} + \Delta f \quad (*)$$

Sabemos que δf debe cumplir la ecuación de Boltzmann: (sin colisiones)

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta f + \frac{p^i}{\bar{E}} \partial_i \delta f = -\frac{1}{2\bar{E}^2} p^i p^j p^k \partial_k h_{ij} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{E}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\Delta f + \frac{p^i}{\bar{E}} \partial_i \Delta f = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{E}} \frac{h^{ij} p_i p_j}{2\bar{E}} \right)$$ Tomando momentos de la ecuación:

$$\delta T_{00} = \frac{1}{a^3}\int_p \Delta f \bar{E} \quad ; \quad \delta T_{0i} = -\frac{1}{a^3}\int_p \Delta f\, p_i \quad ; \quad \delta T_{ij} = \bar{P} h_{ij} + \frac{1}{a^3}\int_p \Delta f \frac{1}{\bar{E}} p_i p_j$$

$$\delta T_{00} = \delta\rho - \bar{\rho} h_{00} \quad ; \quad \delta T_{0i} = \bar{P} h_{0i} - (\bar{\rho} + \bar{P})(\partial_i \delta u + \delta u_i)$$

$$\delta T_{ij} = a^2 \delta_{ij} \delta P + \bar{P} h_{ij} + a^2 \pi_{ij}$$

Utilizando el synchronous gauge:

$$\delta\rho = \frac{1}{a^3}\int_p \Delta f \bar{E} \quad ; \quad \delta u = \frac{1}{a(\bar{P} + \bar{\rho})}\int_p p^i \nabla^{-2} \partial_i \Delta f \quad ; \quad \delta P = \frac{1}{3a^3}\int_p \Delta f \frac{p^2}{\bar{E} a^2}$$

$$\pi_{ij} = \frac{1}{a^3}\int_p \Delta f \frac{1}{\bar{E} a^2}\left(p_i p_j - \frac{p^2}{3}\delta_{ij} \right)$$

Ahora, perturbando la temperatura a cada especie: $T_a \equiv \bar{T} + \Delta T_a$ — temperatura del baño, aplica en todas las especies

$$\Delta T_a = \Delta T_a(t, \vec{x}, \vec{p}) \overset{*}{\Longrightarrow} \Delta f_a = -\bar{E}_a \frac{\partial \bar{f}_a}{\partial \bar{E}_a} \Theta_a \quad ; \quad \Theta_a \equiv \frac{\Delta T_a}{\bar{T}}$$

$$\Rightarrow \int_p \longrightarrow \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\Omega_p \int p^2 dp \quad \text{Coordenadas esféricas}$$

$$\Theta_a(\vec{x}, \vec{p}, t) = \Theta_a(\vec{x}, p, \hat{p}, t)$$

$$\Rightarrow \delta\rho = -\frac{1}{2\pi^2 a^3}\int \frac{\Omega_p}{4\pi}\int dp\, p^2 E^2 \frac{\partial \bar{f}}{\partial E}\,\vartheta_a(\vec{x},p,\hat{p},t)$$

$$\delta u = -\frac{1}{2\pi^2 a^3}\frac{1}{(\bar{P}+\bar{\rho})}\int\frac{\Omega_p}{4\pi}\int dp\, p^3 \frac{\partial\bar{f}}{\partial E} E\,\nabla^{-2}\partial_i\,\vartheta_a(\vec{x},p,\hat{p},t)\,\hat{p}^i$$

$$\delta p = -\frac{1}{3}\frac{1}{2\pi^2 a^5}\int\frac{\Omega_p}{4\pi}\int dp\, p^4 \frac{\partial\bar{f}}{\partial E}\,\vartheta_a(\vec{x},p,\hat{p},t)$$

$$\Pi_{ij} = -\frac{1}{2\pi^2 a^5}\int\frac{\Omega_p}{4\pi}\left(\hat{p}_i\hat{p}_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\right)\int dp\, p^4\frac{\partial\bar{f}}{\partial E}\,\vartheta_a(\vec{x},p,\hat{p},t)$$

Definiendo:

$$\vartheta_a(\vec{x},\hat{p},t) \equiv -\left(T\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial T}\right)^{-1}\frac{1}{2\pi^2 a^3}\int dp\, p^2 E^2\frac{\partial\bar{f}}{\partial E}\,\vartheta_a(\vec{x},p,\hat{p},t)$$

$$\Rightarrow \delta\rho = \left(T\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial T}\right)\int\frac{d\Omega_p}{4\pi}\,\vartheta(\vec{x},\hat{p},t)$$

$\delta p = \frac{1}{3}\delta\rho$ en el caso relativista

$$\delta u = 3a\,\nabla^{-2}\partial_i\int\frac{\Omega_p}{4\pi}\,\vartheta(\vec{x},\hat{p},t)\,\hat{p}^i$$

$$\Pi_{ij} = 4\bar{\rho}\int\frac{\Omega_p}{4\pi}\,\vartheta(\vec{x},\hat{p},t)\left(\hat{p}_i\hat{p}_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\right)$$

Luego descomponemos las perturbaciones como:

$$\vartheta(\vec{x},\hat{p},t) = \underbrace{\vartheta^S(\vec{x},\hat{p},t)}_{\text{escalares}} + \underbrace{\vartheta^T(\vec{x},\hat{p},t)}_{\text{tensoriales}}$$

Tomando la transformada de Fourier de la perturbación escalar:

$$\tilde{\vartheta}^S(\vec{k},p,\hat{p},t) = \vartheta^S(\vec{k},p,\mu,t)\,;\quad \mu \equiv \hat{k}\cdot\hat{p}$$

la transformada es invariante bajo rotaciones, sólo importa ese ángulo

$$\Leftrightarrow \vartheta^S(\vec{k},p,\hat{p},t) = \vartheta^S_0(\vec{k},p,t) + \vartheta^S_1(\vec{k},p,t)\,\hat{p}^i + \vartheta^S_2(\vec{k},p,t)\,\hat{p}^i\hat{p}^j + \dots$$

Expandiendo en polinomios de Legendre:

$$\vartheta^S(\vec{k},\mu,t) = \sum_l \frac{(2l+1)}{i^l}P_l(\mu)\,\tilde{\vartheta}^S_l(\vec{k},t)\,;\quad \tilde{\vartheta}^S_l(\vec{k},t) = \frac{i^l}{2}\int_{-1}^{1}d\mu\,\tilde{\vartheta}^S(\vec{k},\mu,t)\,P_l(\mu)$$

Ahora, tomamos: $(\ell=0)$

$$\tilde{\Theta}^s_0(\vec{k},t) = \frac{i^0}{2}\int_{-1}^{1} d\mu\, \tilde{\Theta}^s(\vec{k},\mu,t)\, P_0(\mu) \quad ; \quad P_0(x) = 1$$

$$\Rightarrow \tilde{\Theta}^s_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} d\mu\, \tilde{\Theta}^s = \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi \int_{\pi}^{0} -\sin\varphi\, d\varphi\, \tilde{\Theta}^s(\mu)$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} d\phi\, d\varphi \sin\varphi\, \tilde{\Theta}^s(\mu) = \frac{1}{4\pi}\int d\Omega_p\, \tilde{\Theta}^s(\mu)$$

$$\Rightarrow \tilde{\Theta}^s_0 = \frac{1}{4\pi}\int d\Omega_p\, \tilde{\Theta}^s$$

$$\Rightarrow \delta\tilde{\rho} = \left(T\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial T}\right)\int \frac{d\Omega_p}{4\pi}\tilde{\Theta} \Rightarrow \delta\tilde{\rho} = \left(T\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial T}\right)\tilde{\Theta}^s_0$$

$$\Rightarrow \delta\tilde{\rho} = 3\delta\tilde{p} \Rightarrow \delta\tilde{p} = \frac{1}{3}\left(T\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial T}\right)\tilde{\Theta}^s_0$$

$$= \left(\bar{T}\frac{\partial\bar{p}}{\partial T}\right)\tilde{\Theta}^s_0$$

$(\ell=2)$

$$\tilde{\Theta}^s_2(\vec{k},t) = \frac{i^2}{2}\int_{-1}^{1} d\mu\, \tilde{\Theta}^s P_1(\mu) \quad ; \quad P_1(x) = \frac{3x^2-1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} d\mu\, \frac{3\mu^2-1}{2}\tilde{\Theta}^s = -\frac{1}{4}\left[3\int_{\pi}^{0} -\sin\varphi\, d\varphi \cos^2\varphi\, \tilde{\Theta}^s - \int_{\pi}^{0}\sin\varphi\, d\varphi\, \tilde{\Theta}^s\right]$$

$$= \frac{1}{8\pi}\left[3\int_0^{2\pi} d\phi\int_0^{\pi}\sin\varphi\, d\varphi\cos^2\varphi\,\tilde{\Theta}^s - \int_0^{2\pi} d\phi\int_0^{\pi}\sin\varphi\, d\varphi\, \tilde{\Theta}^s\right]$$

$$= \frac{1}{8\pi}\left[3\int d\Omega_p\, \mu^2\tilde{\Theta}^s - \int d\Omega_p\, \tilde{\Theta}^s\right] = \frac{3}{2}\left[\int\frac{d\Omega_p}{4\pi}\mu^2\tilde{\Theta}^s - \frac{1}{3}\int\frac{d\Omega_p}{4\pi}\tilde{\Theta}^s\right]$$

$$\tilde{\Theta}^s_2 = \frac{3}{2}\left[\int\frac{d\Omega_p}{4\pi}\tilde{\Theta}^s\left((\hat{p}_i\cdot\hat{k}_i)(\hat{p}_j\cdot\hat{k}_j) - \frac{1}{3}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \tilde{\pi}^s \propto \left(\bar{T}\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\bar{T}}\right)\tilde{\Theta}^s_2 \Rightarrow \pi^s = 3\left(\bar{T}\frac{\delta\bar{p}}{\delta T}\right)\frac{a^2}{k^2}\tilde{\Theta}^s_2$$

$$\delta u = \left(T\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial T}\right)\frac{a\nabla^{-2}}{\bar{\rho}(1+w)}\int\frac{d\Omega_p}{4\pi}\partial_i\,\vartheta(\vec{x},\hat{p},t)\,\hat{p}^i$$

$$\nabla^{-2} = k^{-2} \quad \wedge \quad \partial_i = i k_i = i k \hat{k}_i$$

$$\Rightarrow \delta u = \left(T\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial T}\right)\frac{a k^{-1}(-i)}{\bar{\rho}(1+w)}\cancel{\int_0^{2\pi} d\phi_p}\int_{-1}^{1} d\mu \frac{\overbrace{\hat{k}_i\hat{p}^i}^{\mu}}{\cancel{4\pi}}\sum_l i^{-l}(2l+1)P_l(\mu)\tilde{\vartheta}_l^s$$

$$= \left(T\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial T}\right)\frac{-i}{\bar{\rho}(1+w)}\frac{a}{k}\frac{1}{2}\sum_l i^{-l}(2l+1)\tilde{\vartheta}_l^s\int_{-1}^{1} d\mu\,\mu P_l(\mu)$$

$$\int_{-1}^{1} d\mu\,\mu P_l(\mu) = \int_{-1}^{1} d\mu\, P_1 P_l = \frac{2\delta_{l1}}{2l+1}$$

$$\Rightarrow \delta u = \left(T\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial T}\right)\frac{-i}{\bar{\rho}(1+w)}\frac{a}{k}\frac{1}{\cancel{2}}\sum_l i^{-l}\cancel{(2l+1)}\vartheta_l^s\frac{\cancel{2}\delta_{l1}}{\cancel{2l+1}}$$

$$= \left(T\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial T}\right)\frac{\cancel{-i}}{\bar{\rho}(1+w)}\frac{a}{k}\frac{1}{\cancel{i}}\vartheta_1^s \Rightarrow \delta u = -\left(T\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial T}\right)\frac{1}{\bar{\rho}(1+w)}\frac{a}{k}\tilde{\vartheta}_1^s$$

P2

$$\dot{N} + ik\mu N = -\dot{\phi} - ik\mu\Psi \quad (1)$$

$$N(\mu) = \frac{1}{(-i)^l}\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{2}P_l(\mu)\Theta(\mu)$$

$$\int_{-1}^{1} d\mu\, P_l\,(1): \quad \underbrace{\int_{-1}^{1} d\mu\, P_l(\mu)\dot{N}(\mu)}_{\dot{N}_l} + ik\underbrace{\int_{-1}^{1} d\mu\,\mu P_l(\mu)N(\mu)}_{\mu N_l} = \underbrace{\int_{-1}^{1} d\mu\, P_l(\mu)(-\dot{\phi})}_{-\dot{\phi}_l} - ik\underbrace{\int_{-1}^{1} d\mu\,\mu P_l\Psi}_{\mu\Psi_l}$$

Propiedad polinomios:

$$(l+1)P_{l+1}(\mu) = (2l+1)\mu P_l(\mu) - lP_{l-1}(\mu)$$

$$\Rightarrow \mu P_l(\mu) = \frac{l+1}{2l+1}P_{l+1}(\mu) + \frac{l}{2l+1}P_{l-1}(\mu)$$

$$\Rightarrow \dot{N}_l + ik\left[\frac{l+1}{2l+1}N_{l+1} + \frac{l}{2l+1}N_{l-1}\right] = -\dot{\phi}_l - ik\left[\frac{l+1}{2l+1}\Psi_{l+1} + \frac{l}{2l+1}\Psi_{l-1}\right]$$

$l=0$

$$\Rightarrow \dot{N}_0 + ikN_1 = -\dot{\phi} - ik\Psi_1$$

$l=1$ $$\dot{N}_1 + ik\left[\frac{2}{3}N_2 + \frac{1}{3}N_0\right] = -ik\frac{2}{3}\Psi_2 - ik\frac{1}{3}\Psi_0$$

$l=2$ $$\dot{N}_2 + ik\left[\frac{3}{5}N_3 + \frac{2}{5}N_1\right] = 0$$

P3) Sabemos que todos los modos deben haber sido superhorizon en algún momento pasado, por lo que podemos estudiar la evolución de las perturbaciones en un $t_{inicial}$ cuando todos los modos tenían longitudes de onda fuera del horizonte $(k/a \gg H)$.

Para una especie a: $\rho_a(\vec{x},t) = \bar{\rho}_a(t) + \delta\rho_a(\vec{x},t)$ (1)

Superposición de los modos

Como $\delta\rho_a(\vec{x},t)$ es superposición de modos superhorizon, entonces ρ_a satisface las mismas ecuaciones a background de $\bar{\rho}_a(t)$, ya que no habría manera de distinguir ρ_a como una cantidad perturbada en longitudes de onda menores a R_{H_0}.

Con esto, es posible escribir ρ_a como si fuese solución a background:

$$\rho_a(\vec{x},t) = \bar{\rho}_a(t + \delta t_a(\vec{x},t)) \quad (2)$$

$$(1) \wedge (2) \Longrightarrow \frac{\delta\rho_a(\vec{x},t)}{\dot{\bar{\rho}}_a(t)} = \delta t_a(\vec{x},t)$$

El que $t_a(\vec{x},t)$ sea común para todas las especies viene del hecho que en el superhorizon las perturbaciones siguen las mismas ecuaciones que las soluciones a background, ya que se tiene equilibrio termodinámico local, si dos especies a y b tuviesen $\delta t_a \neq \delta t_b$, entonces las distribuciones de ambas especies tendrían diferentes temperaturas.

Además, sabemos: $\dfrac{\delta\rho_a}{\delta\dot{\bar{\rho}}_a} = \dfrac{\delta T}{\dot{\bar{T}}} = \delta t$ } De este término nos convencemos que δt no depende de la especie.

P4 | Como vimos en clases, de las ecuaciones perturbadas de Boltzmann - Einstein:

$$\dot{\delta}_\gamma = -\frac{4}{3}\theta_\gamma + 4\dot{\phi} \; ; \; \dot{\theta}_\gamma = k^2\left(\frac{1}{4}\delta_\gamma - \sigma_\gamma\right) + k^2\psi + a n_e \sigma_T(\theta_b - \theta_\gamma)$$

$$\dot{\delta}_b = -\theta_b + 3\dot{\phi} \; ; \; \dot{\theta}_b = -\frac{\dot{a}}{a}\theta_b + c_s^2 k \delta_b + \frac{4}{3}\frac{\bar{\rho}_\gamma}{\bar{\rho}_b} a n_e \sigma_T(\theta_\gamma - \theta_b) + k^2\psi$$

Definiendo $\delta_\gamma - 4\phi \equiv 4S$; $\sigma_\gamma \approx 0$ y eliminando todo menos el contraste de densidad de los fotones:

$$\ddot{S} + \underbrace{\frac{\dot{R}}{1+R}\dot{S}}_{\text{roce}} + \underbrace{k^2 c_s^2 S}_{\text{osc}} = \underbrace{\left(-\frac{k^2}{3}\psi - \frac{k^2}{3}\phi\frac{1}{1+R}\right)}_{\text{fuerza/forzamiento}}$$

con $R = \frac{3}{4}\frac{\Omega_b}{\Omega_\gamma} = \frac{a^{-3}}{a^{-4}}R_0 = R_0 a$ $\wedge$ $c_s^2 = \frac{1}{3(1+R)}$

Estudiando el "orden cero" de la ecuación se tiene: (ignorando el roce y el forzamiento)

$$\ddot{S} + k^2 c_s^2 S = 0$$

Es aquí que obtenemos el comportamiento oscilatorio: $S = A\cos(kr_s + \theta_0)$

$$r_s \equiv \int_0^{\tau} d\tau' c_s(\tau') \approx c_s(\tau)\tau$$

Como vemos, la fase de la oscilación depende de la velocidad del sonido del fluido. En el caso de que se compone solamente de fotones:

$$R = \frac{3}{4}\frac{\Omega_b}{\Omega_\gamma} = \frac{3}{4}\frac{0}{\Omega_\gamma} = 0 \Rightarrow c_s^2 = \frac{1}{3(1+0)} = \frac{1}{3}$$ que es lo esperado según la ec. de estado.

Ahora, en la tight coupling approximation, sabemos que $\tau \gg 1$ por lo que nos asegura que $c_s\tau$ no sea despreciable.

Además, incluyendo a los bariones: $R = \frac{3}{4}\frac{\Omega_b}{\Omega_\gamma} \neq 0$

$$\Rightarrow c_s^2 = \frac{1}{3(1+R)} \neq \frac{1}{3}$$ Lo cual produce un desplazamiento en la fase de

$$S = A\cos(kr_s + \theta_0) = A\cos(k\tau c_s + \theta_0)$$

Finalmente, el desplazamiento ocurre ya que la solución depende de la velocidad del sonido del fluido, y esta cambia al considerar la presencia de bariones, aunque sigue conservando un comportamiento oscilatorio.

En el Angular Power Spectrum será posible apreciar desplazamientos en los peaks acústicos, observándose hacia valores más grandes de ℓ debido a la disminución en c_s que conduce a una frecuencia de oscilación más baja, que corresponde a escalas angulares más pequeñas. Además habrá cambios en la amplitud relacionados a la interacción radiación-bariones, principalmente asociado a los potenciales gravitacionales.

P5) Para encontrar la función de transferencia, usamos la definición:

$T(k) = \frac{\delta(k,t_0)}{\delta(k,t_{inicial})}$, donde $\delta(k,t)$ es el contraste de densidad en el espacio de Fourier en un tiempo dado. Las ecuaciones que nos permiten obtener el contraste de densidad son las ecuaciones de Boltzmann - Einstein perturbadas.

De E-B:

(En subhorizonte) $\delta' + \frac{ikv}{aHy} \overset{*}{=} -3\phi'$

$v' + \frac{v}{y} = \frac{ik\phi}{aHy}$ $\qquad y = \frac{a}{a_{eq}} = \frac{\rho_m}{\rho_r} \Rightarrow \dot{y} = aHy$

$\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{aHy}\right) = -(1+y)^{-1}(2aHy)^{-1}$ $\qquad k^2\phi = \frac{3y}{2(y+1)}a^2H^2\delta$ $\qquad \frac{d}{dt} = \frac{dy}{dt}\frac{d}{dy} = aHy\frac{d}{dy}$

$\Rightarrow \delta'' - \frac{ik(2+3y)v}{2aHy^2(1+y)} = -3\phi'' + \frac{k^2\phi}{a^2H^2y^2}$

$*$ $\qquad \approx 0$ $\qquad k \gg aH \Rightarrow \frac{k^2}{a^2H^2}\phi \gg 3\phi''$

$\Rightarrow \delta'' + \frac{2+3y}{2y(y+1)}\delta' - \frac{3}{2y(y+1)}\delta = 0$

Sabiendo que las perturbaciones subhorizon en la materia crecen con el factor de escala; una solución de la ecuación debe ser un polinomio en y de orden 1

$\Rightarrow D_1'/D_1 = 3/(2+3y) \Rightarrow D_1 = y + \frac{2}{3}$

Luego, $u \equiv \frac{\delta}{D_1}$

$\Rightarrow \left(1+\frac{3y}{2}\right)u'' + \frac{u'}{y(y+1)}\left[\left(\frac{21}{4}\right)y^2 + 3y + 1\right] = 0$ (Es una EDO de orden 1 en realidad)

$u' \propto \left(y+\frac{2}{3}\right)^{-2} y^{-1}(y+1)^{-1/2}$ /S

$\Rightarrow D_2 = D_1 \ln\left[\frac{\sqrt{1+y}+1}{\sqrt{1+y}-1}\right] - 2\sqrt{1+y}$

$\Rightarrow$ La sol. gral es $\delta(k,y) = C_1D_1 + C_2D_2$ $\qquad$ Usando $\delta(k,\tau) = A\phi_p \ln(Bk\tau)$

$\Rightarrow A\phi_p \ln\left(B\frac{y_m}{y_H}\right) = C_1D_1(y_m) + C_2D_2(y_m)$ $\qquad k\tau \approx \frac{y}{y_H}$ RAD DOM.

$\frac{A\phi_p}{y_m} = C_1D_1'(y_m) + C_2D_2'(y_m)$; $y_H \ll y_m \ll 1$

$\Rightarrow C_1 = \frac{D_2'(y_m)A\ln\left(B\frac{y_m}{y_H}\right) - D_2(y_m)\left(\frac{A}{y_m}\right)}{D_1(y_m)D_2'(y_m) - D_1'(y_m)D_2(y_m)}\phi_p$

$$D_1 D_2' - D_1' D_2 = -\left(\frac{4}{9}\right) y_m^{-1} (y_m + 1)^{-1/2} \approx -\frac{4}{9} y_m \qquad y_m \ll 1$$

$$D_2 \longrightarrow \frac{2}{3} \ln\left(\frac{4}{y}\right) - 2 \quad \wedge \quad D_2' \longrightarrow -\frac{2}{3} y$$

$$\Rightarrow C_1 \longrightarrow \frac{-9 A \phi_p}{4} \left[-\frac{2}{3} \ln\left(\frac{B y_m}{y_H}\right) - \frac{2}{3} \ln\left(\frac{4}{y_m}\right) + 2 \right]$$

$$\Rightarrow \delta(\vec{k}, a) = \frac{3 A \phi_p(\vec{k})}{2} \ln\left[\frac{4 B e^{-3} a_{eq}}{a_H}\right] D_1(a) \qquad a \gg a_{eq}$$

$$\frac{a_{eq}}{a_H} = \sqrt{2} \frac{k}{k_{eq}}$$

$$\delta(\vec{k}, a) = \frac{3}{5} \frac{k^2}{\Omega_m H_0^2} \phi_p(\vec{k}) T(k) D_1(a)$$

$$\Rightarrow T(k) = \frac{5 A \Omega_m H_0^2}{2 k^2 a_{eq}} \ln\left[\frac{4 B e^{-3} \sqrt{2}\, k}{k_{eq}}\right]$$

$$k_{eq} \equiv a_{eq} H(a_{eq}) = \sqrt{2} H_0 \left(\sqrt{a_{eq}}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow T(k) = \frac{12 k_{eq}^2}{k^2} \ln\left[\frac{k}{8 k_{eq}}\right] \qquad k \gg k_{eq}$$

P7 $\xi_\varphi(x_1,x_2) = \xi_\varphi(x_1)\,\xi_\varphi(x_2)$

a) EN EL CASO DEL CAMPO ESTADÍSTICAMENTE HOMOGÉNEO, LA FUNCIÓN DEBE DEPENDER SÓLO DE LA SEPARACIÓN DE LOS PUNTOS:

$$\xi_\varphi(\vec{x}_1;\vec{x}_2) = \xi_\varphi(\vec{x}_1)\,\xi_\varphi(\vec{x}_2)$$
$$= \xi_\varphi(\vec{x}_1)\,\xi_\varphi(\vec{x}_1+\vec{r}) \equiv \xi_\varphi(\vec{r})$$ CON $\vec{r} \equiv \vec{x}_2 - \vec{x}_1$ LA SEPARACIÓN DE LOS PUNTOS

b) EL CAMPO ISOTRÓPICO IMPLICA QUE SE TIENE EL MISMO VALOR EN CUALQUIER DIRECCIÓN, CON ESTO TENEMOS LA SIMETRÍA ANGULAR QUE PERMITE:

$$\xi_\varphi(\vec{x}_1,\vec{x}_2) = \xi_\varphi(\vec{x}_1)\,\xi_\varphi(\vec{x}_1+\vec{r}) = \xi_\varphi(x_1)\,\xi_\varphi(x_1+r) = \xi_\varphi(r) \; ; \; r = |\vec{r}|$$

P8 $\delta(\vec{k}) = \int d^3r\, \delta(\vec{r})\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \; ; \; \xi_\varphi(\vec{k}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} P(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$

DEFINIENDO LA TRANSF. DE FOURIER DE $\delta(r)$, LA FUNCIÓN DE 2 PUNTOS ES:

$$\langle \delta(\vec{k})\,\delta(\vec{k}')\rangle = \int d^3r \int d^3r'\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}'} \langle \delta(\vec{r})\,\delta(\vec{r}')\rangle$$

ASUMIENDO QUE EL CAMPO ES HOMOGÉNEO $\tilde{\vec{r}} = \vec{r}' - \vec{r}$

$$\Rightarrow \langle \delta(\vec{k})\,\delta(\vec{k}')\rangle = \int d^3r \int d^3\tilde{r}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, e^{i\vec{k}'\cdot(\tilde{\vec{r}}+\vec{r})} \underbrace{\langle \delta(\vec{r})\,\delta(\vec{r}+\tilde{\vec{r}})\rangle}_{\xi_\varphi(\tilde{\vec{r}}) = \langle \delta(\vec{r})\,\delta(\vec{r}+\tilde{\vec{r}})\rangle}$$

POR ENUNCIADO, ESCRIBIMOS EL PS EN FUNCIÓN DE $\xi_\varphi(\tilde{\vec{r}})$:

$$P(\vec{k}) = \int \xi_\varphi(\tilde{\vec{r}})\, e^{i\vec{k}\cdot\tilde{\vec{r}}}\, d^3\tilde{r}$$

$$\Rightarrow \langle \delta(\vec{k})\,\delta(\vec{k}')\rangle = \int d^3r\, e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{r}} \int d^3\tilde{r}\, e^{i\vec{k}'\cdot\tilde{\vec{r}}}\, \xi_\varphi(\tilde{\vec{r}})$$
$$= \underbrace{\int d^3r\, e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{r}}}_{\text{DEF INTEGRAL DE LA DELTA}} P(\vec{k})$$

$$\Rightarrow \langle \delta(\vec{k})\,\delta(\vec{k}')\rangle = (2\pi)^3\, \delta^{(3)}(\vec{k}+\vec{k}')\, P(\vec{k})$$

EL PS NOS INDICA LA AMPLITUD DE LA CORRELACIÓN ENTRE DOS PUNTOS, POR LO QUE EN GRANDES ESCALAS INDICA LA CORRELACIÓN ENTRE DOS PUNTOS MUY LEJANOS, INCLUSO EN PUNTOS QUE ACTUALMENTE NO ESTÉN RELACIONADOS CAUSALMENTE (COMO LO PUEDEN SER EN EL CASO DE LAS FLUCTUACIONES DE TEMPERATURA DEL CMB), LO QUE NOS AYUDA A EXPLICAR QUE EN ALGÚN MOMENTO TEMPRANO ESTAS REGIONES ESTUVIERON CAUSALMENTE CONECTADAS, LO QUE ES UTILIZADO (EN BASE A FLUCTUACIONES DE CONTEO) PARA DESCRIBIR LAS LSS.