

Universidade do Minho

Escola de Engenharia Departamento de Informática

Programação em Lógica

LICENCIATURA EM ENGENHARIA INFORMÁTICA MESTRADO integrado EM ENGENHARIA INFORMÁTICA Inteligência Artificial 2022/23



A Lógica Teoria da Prova

- Axiomas: conjunto inicial de fórmulas lógicas
- <u>Teoremas</u>: fórmulas derivadas a partir dos axiomas e/ou teoremas (consequências semânticas)
- Regras de Inferência: conjunto de regras de derivação

○ Modus ponens $\{(A \text{ se B}), B\} \vdash A$ (sound – válida)

○ Modus tollens $\{ (A \text{ se B}), \neg A \} \vdash \neg B$ (sound – válida)

o Modus mistakens $\{ (A se B), A \} \vdash B$ (unsound – não válida)

lacktriangle Sistema de Inferência: união dos axiomas e das regras de derivação ${\mathcal R}$

Prova: sequência $< S_1, S_2, ...>$ de S_i que são axiomas ou são derivações usando R e um subconjunto dos membros da sequência que precedem S_i ;

 \circ A sequência é uma prova para S_n (derivação ou dedução)

 $\overline{ extit{Teoria}}$: união dos axiomas e de todos os teoremas derivados usando ${\mathcal R}$

- o Diz-se consistente sse não existe nenhuma fórmula S tal que, na teoria T, exista S e $\neg S$
- Nenhuma destas considerações toma em linha de conta o significado!
 Apenas a estrutura sintática!!!



A Programação em Lógica

- A Programação em Lógica é um formalismo computacional que combina 2 princípios básicos:
 - Usa a Lógica para representar conhecimento (representação de pressupostos e de conclusões)
 - Usa a Inferência para manipular o conhecimento (estabelecer as relações lógicas entre os pressupostos e as conclusões) (mecanizar os procedimentos de prova; raciocinar)



Caracterização da Programação em Lógica PROLOG

- Um programa em PROLOG é criado pela adição de fórmulas designadas por cláusulas
- As cláusulas podem ser de 3 tipos:
 - o Factos: expressam algo que é sempre verdadeiro
 - p. filho(xico,quim).
 - O Regras: expressam algo que é verdadeiro, dependente da veracidade das condições

```
pseq. pai(josé,joão) se filho(joão,josé).
```

Questões: expressam algo que é verdadeiro, dependente da veracidade das condições

```
?q. ? pai(josé,joão). ¬q. ¬pai(josé,joão).
```



Caracterização da Programação em Lógica PROLOG

- Um programa em PROLOG é criado pela adição de fórmulas designadas por cláusulas
- As cláusulas podem ser de 3 tipos:
 - o Factos: expressam algo que é sempre verdadeiro
 - p. filho(xico,quim).
 - O Regras: expressam algo que é verdadeiro, dependente da veracidade das condições
 - p se q. pai(josé,joão) se filho(joão,josé).
 - Questões: expressam algo que é verdadeiro, dependente da veracidade das condições
 - ?q. ? pai(josé, joão).
 - ¬q. ¬pai(josé,joão).





Cláusulas de Horn

- Clausulado de Horn (notação clausal da Lógica de primeira ordem)
 - o É uma versão restrita do Cálculo Predicativo
 - o É uma formula bem formada
 - Todas as fórmulas estão quantificadas universalmente
 - Todas as fórmulas são fechadas
 - o As fórmulas lógicas admitem, apenas, 1 termo na disjunção positiva de literais

Cláusulas de Horn

0

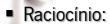
 $\neg q_i \vee p_j$

o em que

i ≥ 0

 $0 \le j \le 1$





- o Conjunto de pensamentos encadeados
- o Relacionamento de factos que levam a uma conclusão
- Mistura dos 2 anteriores





- Raciocínio:
 - 1. ...
 - 2. Encadeamento lógico de pensamentos
 - 3. ...
 - 4. [LÓGICA] Operação discursiva do pensamento mediante a qual concluímos que uma ou várias proposições (premissas) implicam a verdade (...) de uma outra proposição (conclusão)





Raciocínio

- Três homens, António, Belmiro e Carlos, são cônjuges de Dulce, Eduarda e Filipa.
- Não se sabe quem é casado com quem.
- A formação deles é em Engenharia, Advocacia e Medicina.
- Não se sabe quem faz o quê.
- Com base nos dados abaixo, descubra o nome de cada esposa e a profissão de cada homem:
 - O médico é casado com Filipa;
 - Carlos é advogado;
 - Eduarda não é casada com Carlos;
 - Belmiro não é médico.

(adaptado de: www.novaconcursos.com.br/portal/dicas/questao-raciocinio-logico-para-concursos)



Raciocínio e Inferência

Para convencer de que a resposta não é "um tiro de sorte", é necessário expor as razões que levam a atingir a conclusão!





Raciocínio e Inferência

Para convencer de que a resposta não é "um tiro de sorte", é necessário expor as razões que levam a atingir a conclusão!



Para que a conclusão seja aceite, torna-se necessário explicar o mecanismo de raciocínio aplicado, ou seja, o processo de inferência.





- o Diz-se do processo aplicado, que permite passar das premissas à conclusão.
- o Inferência: dedução ou conclusão.

(in Dicionário Priberam da Língua Portuguesa)





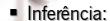


- o Diz-se do processo aplicado, que permite passar das premissas à conclusão.
- o Inferência: dedução ou conclusão.

(in Dicionário Priberam da Língua Portuguesa)

- Regras de inferência:
 - Modus ponens.
 - de: $P, P \rightarrow Q$
 - infere-se:





- o Diz-se do processo aplicado, que permite passar das premissas à conclusão.
- o Inferência: dedução ou conclusão.

(in Dicionário Priberam da Língua Portuguesa)

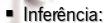
■ Regras de inferência:

- o Modus ponens. (modus ponendo ponens Latim significa "a maneira que afirma afirmando")
 - de:

- $P, P \rightarrow Q$
- infere-se:
- 0

Р	Q	$P \rightarrow Q$
\bigvee	\bigvee	V
\bigvee	F	F
F	\bigvee	\bigvee
F	F	\bigvee





- o Diz-se do processo aplicado, que permite passar das premissas à conclusão.
- o Inferência: dedução ou conclusão.

(in Dicionário Priberam da Língua Portuguesa)

■ Regras de inferência:

Modus ponens.

• de:

 $P, P \rightarrow Q$

• infere-se:

0

Modus tollens.

de:

 $P \rightarrow Q$, $\neg Q$

• infere-se:

 $\neg P$





- o Diz-se do processo aplicado, que permite passar das premissas à conclusão.
- o Inferência: dedução ou conclusão.

(in Dicionário Priberam da Língua Portuguesa)

■ Regras de inferência:

Modus ponens.

.

• de:
$$P, P \rightarrow Q$$

infere-se:

Q

o Modus tollens (Latim: modo que nega por negação):

de:

$$P \rightarrow Q$$
, $\neg Q$

infere-se:

 $\neg P$

Р	Q	¬Q	$P \rightarrow Q$
\bigvee	\bigvee	F	\bigvee
\bigvee	F	\bigvee	F
F	\bigvee	F	\bigvee
F	F	\bigvee	V

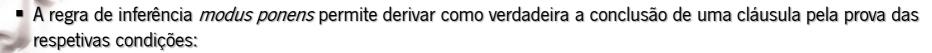


A regra de inferência modus ponens permite derivar como verdadeira a conclusão de uma cláusula pela prova das respetivas condições:

 $\{(A \text{ se B}), B\} \vdash A$







$$\{(A \text{ se B}), B\} \vdash A$$

A aplicação da regra de inferência modus tollens permite dirigir a procura da prova para um ponto concreto do processo de raciocínio:

$$\{(A \text{ se B}), \neg A\} \vdash \neg B$$

o que permite desenvolver um mecanismo de prova por contradição.





i. Admita-se a negação de A:

¬Α

ii. Insira-se a negação de A no programa \mathcal{P} :

$$\mathcal{P} \cup \neg \mathsf{A}$$

■ Se acontecer gerar-se uma contradição

$$\{A, \neg A\} \equiv \Box$$

tal significa que a questão inicial A é derivável de ${\mathcal P}$.





i. Admita-se a negação de A:

¬Α

ii. Insira-se a negação de A no programa \mathcal{P} :

$$\mathcal{P} \cup \neg \mathsf{A}$$

■ Se acontecer gerar-se uma contradição

$$\{A, \neg A\} \equiv \Box$$

tal significa que a questão inicial A é derivável de ${\mathcal P}$.

Regra de inferência modus tollens, com B = verdadeiro

$$\{(A \text{ se B}), \neg A\} \vdash \neg B$$

$$\{ (A se V), \neg A \} \vdash \neg V \}$$

$$\{A, \neg A\} \vdash \mathbb{F}$$

$$\{A, \neg A\} \vdash \Box$$



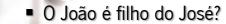


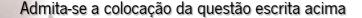
Considere-se o programa ${\cal P}$ indicado ao lado

Algoritmo de Resolução Exemplo de aplicação

```
% filho: Filho,Pai → {V,F}
filho( joao,jose ).
filho( jose,manuel ).
filho( carlos,jose ).
% pai: Pai,Filho → {V,F}
pai( P,F ) :- filho( F,P ).
```



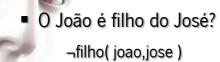




Algoritmo de Resolução Exemplo de aplicação (I)

```
% filho: Filho,Pai → {V,F}
filho( joao,jose ).
filho( jose,manuel ).
filho( carlos,jose ).
% pai: Pai,Filho → {V,F}
pai( P,F ) :- filho( F,P ).
```





Em termos lógicos, a questão é descrita na formulação indicada

Algoritmo de Resolução Exemplo de aplicação (I)

```
% filho: Filho,Pai → {V,F}
filho( joao,jose ).
filho( jose,manuel ).
filho( carlos,jose ).
% pai: Pai,Filho → {V,F}
pai( P,F ) :- filho( F,P ).
```



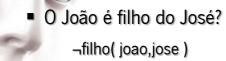
■ O João é filho do José?
¬filho(joao,jose)

Algoritmo de Resolução Exemplo de aplicação (I)

```
% filho: Filho,Pai → {V,F}
filho( joao,jose ).
filho( jose,manuel ).
filho( carlos,jose ).
% pai: Pai,Filho → {V,F}
pai( P,F ) :- filho( F,P ).
```

De todas as cláusulas do programa \mathcal{P} , apenas as que oferecem conclusões sobre o predicado filho/2 contribuirão para o desenvolvimento a prova





Algoritmo de Resolução Exemplo de aplicação (I)

```
% filho: Filho,Pai → {V,F}

filho( joao, jose ).
filho( jose, manuel ).
filho( carlos, jose ).

% pai: Pai,Filho → {V,F}

pai( P,F ) :- filho( F,P ).
```

De entre as três cláusulas assinaladas, a primeira será utilizada no primeiro passo do desenvolvimento da (árvore de) prova



■ O João é filho do José?

¬filho(joao, jose)

/ ___ joao | joao, jose | jose

O termo joao unifica com joao; o termo jose unifica com jose;

Algoritmo de Resolução Exemplo de aplicação (I)

```
% filho: Filho,Pai → {V,F}

filho( joao,jose ).
filho( jose,manuel ).
filho( carlos,jose ).

% pai: Pai,Filho → {V,F}

pai( P,F ) :- filho( F,P ).
```



O João é filho do José?

```
¬filho( joao, jose )

_____ joao | joao, jose | jose
¬(verdade)
```

Algoritmo de Resolução Exemplo de aplicação (I)

```
% filho: Filho,Pai → {V,F}

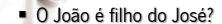
filho( joao, jose ).
filho( jose, manuel ).
filho( carlos, jose ).

% pai: Pai,Filho → {V,F}

pai( P,F ) :- filho( F,P ).
```

Nas condições estabelecidas pelas unificações, que utilizaram a <u>primeira</u> cláusula de \mathcal{P} , a questão inicial é reduzida à atual, por se tratar de um facto





```
¬filho( joao, jose )

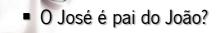
_____ joao | joao, jose | jose
¬(verdade)
____ -|-
```

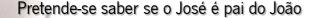
Algoritmo de Resolução Exemplo de aplicação (I)

```
% filho: Filho,Pai → {V,F}
filho( joao,jose ).
filho( jose,manuel ).
filho( carlos,jose ).
% pai: Pai,Filho → {V,F}
pai( P,F ) :- filho( F,P ).
```

De onde se retira uma contradição ☐ (independentemente de quaisquer unificações)



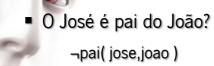


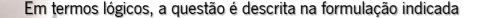


Algoritmo de Resolução Exemplo de aplicação (II)

```
% filho: Filho,Pai → {V,F}
filho( joao,jose ).
filho( jose,manuel ).
filho( carlos,jose ).
% pai: Pai,Filho → {V,F}
pai( P,F ) :- filho( F,P ).
```







Algoritmo de Resolução Exemplo de aplicação (II)

```
% filho: Filho,Pai → {V,F}
filho( joao,jose ).
filho( jose,manuel ).
filho( carlos,jose ).
% pai: Pai,Filho → {V,F}
pai( P,F ) :- filho( F,P ).
```



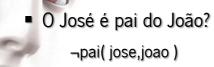
■ O José é pai do João?
¬pai(jose,joao)

Algoritmo de Resolução Exemplo de aplicação (II)

```
% filho: Filho,Pai → {V,F}
filho( joao,jose ).
filho( jose,manuel ).
filho( carlos,jose ).
% pai: Pai,Filho → {V,F}
pai( P,F ) :- filho( F,P ).
```

De todas as cláusulas do programa \mathcal{P} , apenas as que oferecem conclusões sobre o predicado pai/2 contribuirão para o desenvolvimento a prova





Algoritmo de Resolução Exemplo de aplicação (II)

```
% filho: Filho,Pai → {V,F}
filho( joao,jose ).
filho( jose,manuel ).
filho( carlos,jose ).
% pai: Pai,Filho → {V,F}
pai( P,F ) :- filho( F,P ).
```

A única cláusula do predicado pai/2 assinalada será utilizada no primeiro passo do desenvolvimento da (árvore de) prova



■ O José é pai do João?

¬pai(jose,joao)

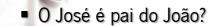
/ ___ jose | P, joao | F

Algoritmo de Resolução Exemplo de aplicação (II)

```
% filho: Filho,Pai → {V,F}
filho( joao,jose ).
filho( jose,manuel ).
filho( carlos,jose ).
% pai: Pai,Filho → {V,F}
pai( P,F ) :- filho( F,P ).
```

O termo jose unifica com a variável P; o termo joao unifica com a variável F;





```
¬pai( jose, joao )

_____ jose | P, joao | F
¬filho( joao, jose )
```

Algoritmo de Resolução Exemplo de aplicação (II)

```
% filho: Filho,Pai → {V,F}
filho( joao,jose ).
filho( jose,manuel ).
filho( carlos,jose ).
% pai: Pai,Filho → {V,F}
pai( P,F ) :- filho( F,P ).
```

Para dar continuidade à (árvore de) prova, reduz-se a questão inicial à prova das condições da cláusula usada para proceder às unificações



O José é pai do João?

```
¬pai( jose, joao )

_____ jose | P, joao | F

¬filho( joao, jose )
```

Algoritmo de Resolução Exemplo de aplicação (II)

```
% filho: Filho,Pai → {V,F}
filho( joao,jose ).
filho( jose,manuel ).
filho( carlos,jose ).
% pai: Pai,Filho → {V,F}
pai( P,F ) :- filho( F,P ).
```

De todas as cláusulas do programa \mathcal{P} , apenas as que oferecem conclusões sobre o predicado filho/2 contribuirão para o desenvolvimento a prova



■ O José é pai do João?
¬pai(jose,joao)

jose | P, joao | F

¬filho(joao,jose)

Algoritmo de Resolução Exemplo de aplicação (II)

```
% filho: Filho,Pai → {V,F}

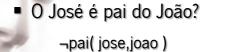
filho( joao,jose ).
filho( jose,manuel ).
filho( carlos,jose ).

% pai: Pai,Filho → {V,F}

pai( P,F ) :- filho( F,P ).
```

De entre as três cláusulas assinaladas, a primeira será utilizada no primeiro passo do desenvolvimento da (árvore de) prova





```
jose | P, joao | F
```

joao | joao, jose | jose



O termo joao unifica com joao; o termo jose unifica com jose;

Algoritmo de Resolução Exemplo de aplicação (II)

```
% filho: Filho,Pai → {V,F}

filho( joao,jose ).
filho( jose,manuel ).
filho( carlos,jose ).

% pai: Pai,Filho → {V,F}

pai( P,F ) :- filho( F,P ).
```



O José é pai do João?

```
¬pai( jose, joao )

_____ jose | P, joao | F

¬filho( joao, jose )

_____ joao | joao, jose | jose
¬(verdade)
```

Algoritmo de Resolução Exemplo de aplicação (II)

```
% filho: Filho,Pai → {V,F}

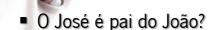
filho( joao,jose ).
filho( jose,manuel ).
filho( carlos,jose ).

% pai: Pai,Filho → {V,F}

pai( P,F ) :- filho( F,P ).
```

Nas condições estabelecidas pelas unificações, que utilizaram a <u>primeira</u> cláusula de \mathcal{P} , a questão anterior é reduzida à atual, por se tratar de um facto





```
¬pai( jose, joao )

_____ jose | P, joao | F

¬filho( joao, jose )

_____ joao | joao, jose | jose

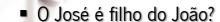
¬(verdade)

____ -|-
```

```
% filho: Filho,Pai → {V,F}
filho( joao,jose ).
filho( jose,manuel ).
filho( carlos,jose ).
% pai: Pai,Filho → {V,F}
pai( P,F ) :- filho( F,P ).
```

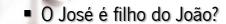
De onde se retira uma contradição ☐ (independentemente de quaisquer unificações)

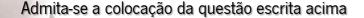




```
% filho: Filho,Pai → {V,F}
filho( joao,jose ).
filho( jose,manuel ).
filho( carlos,jose ).
% pai: Pai,Filho → {V,F}
pai( P,F ) :- filho( F,P ).
```







```
% filho: Filho,Pai → {V,F}
filho( joao,jose ).
filho( jose,manuel ).
filho( carlos,jose ).
% pai: Pai,Filho → {V,F}
pai( P,F ) :- filho( F,P ).
```



■ O José é filho do João?
¬filho(jose,joao)

Algoritmo de Resolução Exemplo de aplicação (III)

```
% filho: Filho,Pai → {V,F}

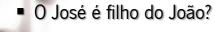
filho( joao, jose ).
filho( jose, manuel ).
filho( carlos, jose ).

% pai: Pai,Filho → {V,F}

pai( P,F ) :- filho( F,P ).
```

Em termos lógicos, a questão é descrita na formulação indicada; de entre as três cláusulas do predicado filho/2, a <u>primeira</u> será utilizada para proceder ao desenvolvimento da (árvore de) prova





```
¬filho( jose, joao )

_____ jose doao, ...
```

```
% filho: Filho,Pai → {V,F}

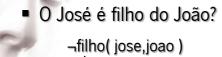
filho( joao, jose ).
filho( jose, manuel ).
filho( carlos, jose ).

% pai: Pai,Filho → {V,F}

pai( P,F ) :- filho( F,P ).
```

O termo jose não unifica com joao por se tratarem de duas constantes diferentes, pelo que o procedimento de prova não pode evoluir através deste ramo de prova





```
X Josef W
```

```
% filho: Filho,Pai → {V,F}
filho( joao,jose ).
filho( jose,manuel ).
filho( carlos,jose ).
% pai: Pai,Filho → {V,F}
pai( P,F ) :- filho( F,P ).
```

Abandonando a primeira cláusula, toma-se a segunda como alternativa para dar continuidade ao desenvolvimento da (árvore de) prova;





```
¬filho( jose, joao )

______ jose | jose, joao | manuel
```

```
% filho: Filho,Pai → {V,F}
filho( joao,jose ).
filho( jose,manuel ).
filho( carlos,jose ).
% pai: Pai,Filho → {V,F}
pai( P,F ) :- filho( F,P ).
```

O termos jose unifica com jose; o termo joao não unifica com manuel por se tratarem de duas constantes diferentes, pelo que o procedimento de prova não pode evoluir através deste ramo de prova





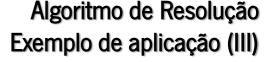
```
¬filho( jose, joao )

______ jose | jose, joao | manuel
```

```
% filho: Filho,Pai → {V,F}
filho( joao,jose ).
filho( jose,manuel ).
filho( carlos,jose ).
% pai: Pai,Filho → {V,F}
pai( P,F ) :- filho( F,P ).
```

Abandonando, também, a segunda cláusula, toma-se a terceira (e última) como alternativa para dar continuidade ao desenvolvimento da (árvore de) prova



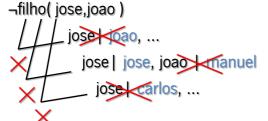


```
% filho: Filho,Pai → {V,F}
filho( joao,jose ).
filho( jose,manuel ).
filho( carlos,jose ).
% pai: Pai,Filho → {V,F}
pai( P,F ) :- filho( F,P ).
```

O termo jose não unifica com <u>carlos</u> por se tratarem de duas constantes diferentes, pelo que o procedimento de prova não pode evoluir através deste ramo de prova



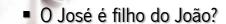


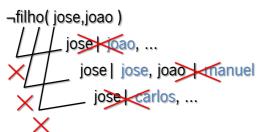


```
% filho: Filho,Pai → {V,F}
filho( joao,jose ).
filho( jose,manuel ).
filho( carlos,jose ).
% pai: Pai,Filho → {V,F}
pai( P,F ) :- filho( F,P ).
```

Não havendo mais cláusulas no predicado filho/2 que possam ser consideradas mais alternativas na (árvore de) prova, o procedimento de aplicação do algoritmo de resolução termina sem alcançar qualquer contradição









```
% filho: Filho,Pai → {V,F}
filho( joao,jose ).
filho( jose,manuel ).
filho( carlos,jose ).
% pai: Pai,Filho → {V,F}
pai( P,F ) :- filho( F,P ).
```

Tal significa que a questão inicial não gera nenhuma contradição em ${\cal P}$, logo, é falsa.



¬ filho(X,jose)

Qual é o significado desta questão Desenvolver a árvore de prova para esta questão

Algoritmo de Resolução Exemplo de aplicação (IV)

```
% filho: Filho,Pai → {V,F}
filho( joao,jose ).
filho( jose,manuel ).
filho( carlos,jose ).
% pai: Pai,Filho → {V,F}
pai( P,F ) :- filho( F,P ).
```



Universidade do Minho

Escola de Engenharia Departamento de Informática

Programação em Lógica

LICENCIATURA EM ENGENHARIA INFORMÁTICA MESTRADO integrado EM ENGENHARIA INFORMÁTICA Inteligência Artificial 2022/23